数学辞海

MATHEMATICS DICTIONARY

第二卷

山西教育出版社
东南大学出版社
中国科学技术出版社

如果你有数学問題，
而不好意思发問，
你可从本書获得解答。
一九八八年八月書祝
数学辭海成功
陳省身



学习、研究、运用、发展数学，让中国数学赶上国际先进水平，促进社会主义现代化建设

吴大任

科学的进步和完美与国家的繁荣和富强是紧密相连的

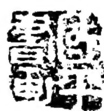
杨 一九八七

長江納衆水百折不回頭碧海能容物滔滔向海流

數學辭海出版紀念

李國平並書





《数学辞海》总编辑委员会

序

当我们向着日益临近的21世纪走去的时候，一部巨著——《数学辞海》将要面世了。这是我国200余所高等院校、科研机构，数以千计的数学家、数学工作者共同劳动的结晶，是一件影响深远的大事。

还是在本世纪同上一世纪交接的1900年，希尔伯特就以23个数学问题作为送旧迎新的礼物，高瞻远瞩地指引着20世纪数学发展的若干重要进程。如今，20世纪的帷幕行将落下，我们惊喜地看到，在这百年间，数学已经发生了多么巨大的变化！人们对数学的认识更深刻了，数学的分支更多了，数学的广度和深度，都远远超出了本世纪初的预料。异军突起的新科学和新技术，诸如计算机科学、航天技术、生命工程、数字通信以及新能源的开发、新材料的应用等，无不需要数学，社会科学和人文科学的经济、教育、语言、考古等领域，也开始与数学结下不解之缘。所有这些学科在向数学索取的同时，也都在某一方面推动和改变着数学。数学已经发展成为内涵广泛的数学科学。数学是大自然的语言，又是人类社会生活中各种关系的高度概括。数学在现实世界中获取模型，扩大了自己的外延，同时展现了新的内涵、新的抽象。如果说古希腊和古代中国的数学只是涓涓细流，那么，今天之数学已经汇成了波流浸灌的长江大河。

一个人可以学贯中西，但无法懂得现代数学的方方面面，而社会变革的进程和新技术的浪潮却迫使人们学习和应用更多的数学。解决这个矛盾的办法之一，自然是编纂一部大型的数学工具书。《数学辞海》正是在这样的时代需求背景之下应运而生的。有了这种巨大的推动力量，它才能克服种种艰难曲折，从第一页稿纸，发展成为我们所见到的这部别具一格的鸿篇巨制。

为什么这本书能使作者们激动，愿意竭诚为之构筑，又能吸引读者，使之企足而待呢？这是由于数学自身的地位和价值，它在实践中的巨大作用和自身的美。

数学首先是人们生活和生产的工具。马克思非常赞同康德的这样一句话："一门科学，只有当它成功地应用数学时，才算达到了完善的地步。"事实上，数学被使用的程度，往往反映了一个国家、一个民族的科学进步和经济发展水平。很难设想，在一个低技术的国家，会产生高深的数学，而高技术的社会形态，必有与之相适应的数学水平。毫无疑问，在科学技术飞速发展的当今世界，对数学的需求将与日俱增。

其次，数学又是一种文化形态。古往今来，人们在数学这块沃土上耕耘，收获了许多硕果。这些美好的硕果，本身就是一首首动人的诗篇，闪耀着智慧的光芒。一般人都会欣赏艺术，然而，当一个人只要具有基础的数学知识，同样可以对一道经典的数学名题和某个优美的解法叹为观止。人们还概括了大量实际模型的抽象数学，通过形式推演，以得出

系统的理论，再应用到更广泛的总体上去。数学的这种以简驭繁的本领决定于它的高度概括性。正是由于概括，数学形成了包含各个学科的优美结构。数学的发展推动了自然结构观的发展，它有力地带动了其他学科，大大加速了人类文明史的进程。

数学的作用，还在于它有着独特的培育人的功能。数学是每个人必须学习的基础学科。从小学到中学，数学的学时最多，除了因为数学是一切科学的基础和工具之外，更因为数学有着独特的思维教育和智力开发的作用。数学的高度抽象、遵从逻辑规则和不断创新的特征，集中而突出地表现了人类思维的概括性、逻辑性和探索性。所以，学习数学对人才的培养是一种基本的思维训练，被称为“思想的体操”。

为了全面地反映古今中外的数学成果、体现数学的多种功能，本书既兼顾传统数学和现代数学，又兼顾抽象的基础数学和具体的应用数学。考虑到广大数学教育工作者的需求，本书还将初等数学和高等数学相对地进行了划分，并按习惯将某些分支学科集中列卷，此外还编纂了包含数学史与数学教育等分支学科的专卷，也系统地介绍了中国的古算。这样编纂的《数学辞海》将会充分地显示数学的工具意义、文化意义和教育意义。愿这部国人自编的《数学辞海》既能为国家经济建设服务，又能在民族文化建设中起到应有的作用。

《数学辞海》是改革开放的产物，又将为改革开放服务。人们或许没有想到，这部巨著竟出自民办的编写组织。编纂者来自大江南北、长城内外、海峡两岸，在历时 10 余年间，数百所大专院校、科研机构的千余名专家学者日夜辛劳、自愿奉献，在《数学辞海》中编织着自己的理想和愿望。社会各界积极赞助，有识之士慷慨捐赠，海外同胞亦纷纷来电来函表示支持，用他们的心意渲染着文化建设的宏图。在这个民办写作团体中，人们互相信任、互相支持、互相勉励，充满了成就事业的认同感、紧迫感。这一写作经验也清楚地说明：在共同的愿望下，民办科研也是一条坦途。这是《数学辞海》编写过程中给我们的一个十分有益的启示。

像一切事物一样，《数学辞海》还不会达到绝对完善的境界。相反，这部反映浩如烟海的数学知识，动员了如此巨大力量而编纂的大型著作，首次面世时，一定会有许多不足之处，例如整体结构、条目收集、词义诠释、词类归属等，都还会有需要进一步推敲、商榷的地方。数学是极为严谨的科学，《数学辞海》必将在众多专家的严谨尺度之下，逐版改进。我们今天为之高兴的是，将来可能成为传世之作的《数学辞海》已有了良好的雏形，我们准备将它作为迎接新世纪的礼物，奉献给关心它、需要它的广大读者。

程民德

1998 年 6 月

凡　　例

一、编　排

1．全书包括数学科学的100余个分支学科或专题项目，按照从初等数学到高等数学，从古典数学到现代数学，从理论数学到应用数学的原则，将整个数学科学划分为6卷编辑出版(参见《数学辞海》六卷本内容划分方案)。

2．各卷正文均按数学知识的结构体系编排，同一分支学科(或同一专题项目)的条目相对集中，一般按知识本身的结构、层次、逻辑等关系确定其先后顺序，而数学史部分，如数学家、数学名著、数学期刊、数学团体等，则分别按其出生、出版、创刊、成立的年代先后顺序编排。

3．各卷目录标题分为三级：一级标题为一个分支学科或一个知识门类。一级标题之下，则按知识构成设若干个二级标题。例如，第一卷中的“数学分析”为一级标题，下设六个二级标题——“实数理论”、“变量与函数”、“极限理论”、“微分学”、“积分学”和“无穷级数”；又如，第六卷中的“中国数学史”为一级标题，下设四个二级标题——“中国古代数学史”、“中国古代数学著作”、“中国古算名词术语”和“中国数学家”。三级标题为具体条目名称。

4．同一卷中不同分支学科之间的内容有重复时，其知识主题一般地只在一处设条目；不同卷中的学科内容有重复时，其知识主题在各相关部分均设条目，但在释文内容上各有侧重。

二、条　目

1．条目的标题一般为一个词，如“圆”、“群”、“环”、“函数”、“矩阵”、“向量”、“方程”等，也有的是一个词组，如“勾股定理”、“常微分方程的通解”、“哥德巴赫猜想”、“希尔伯特第6问题”等。

2．条目设立的条件：1) 独立的知识主题或已形成的固定概念；2) 能够应用准确的、人们习惯和易于理解的词标引；3) 便于读者快速查阅。

3．条目的分类：条目按其释文的长短分为五类：特长条目(3000字左右)、长条目(1000—3000字)、中条目(300—1000字)、短条目(300字以内)和参见条目。

4．本书所收的数学名词术语，力求与“全国自然科学名词审定委员会”公布的《数学名词》(科学出版社，1993)保持一致。外国人名的中文译名，力求与《中国大百科全书・数学卷》和梁宗巨主编的《数学家传略词典》(山东教育出版社，1989)中的译名保持一致。未出现在上述著作中的外国人名的中文译名，则采用数学界的约定译名或用习惯译法译出的译名。

三、释　文

1．本书条目的释文，以文字叙述为主，并采用规范化的现代汉语，力求科学、准确、简明、通俗，杜绝教材式语言和口语，释文开头不再重复条目的标题。

2．释文开头一般要求破题，然后给出严格的数学定义，并尽量阐明该条目内容的历史沿革及其在本分支学科或知识门类中的地位、作用、发展趋势等，以增强释文的科学性和可读性。

3．一词多义的释文，用①…②…③…分项叙述，某个条目的释文需由其他条目释文补充说明的，采

用“参见”的方式，被参见的条目标题需加引号，条目标题前加“参见”字样，并置于圆括号之内。

4. 对常见的异名同义词，只给出一种条目标题的释文，其余异名条目亦列入正文，但不再写释文，给出释文的条目标题加引号，条目标题前加“即”字样。例如：矢量(vector)即“向量”；全纯函数(holomorphic function)即“解析函数”；正则函数(regular function)即“解析函数”。

5. 每一个条目标题后，一般在圆括号内标注有对应的英文。凡外国人名(日本人除外)在条目的释文中第一次出现时，在其中文译名后的圆括号内标注有相应的外文原名的姓和名的首字母，并用逗号隔开。例如，欧几里得(Euclid)、牛顿(Newton，I.)、高斯(Gauss，C. F.)。同一外国人名在条目的释文中第二次出现时，不再标注外文。在日本人名、中国人名、中国古代数学史、中国古代数学著作、中国古算名词术语等条目标题后，一般在圆括号内标注汉语拼音。

6. 如果条目乙的基本定义已经完全包括在条目甲的释文之中，那么条目乙只作为“参见条目”保留，所参见的条目标题需加引号，并在条目标题前加“见”字样，而释文不再重复。例如，在条目“线性变换”的释文中，已给出“单位变换”、“恒等变换”和“零变换”的定义，则上述三个条目就作为“参见条目”予以保留，并分别表示为：单位变换(unit transformation)见“线性变换”；恒等变换(identity transformation)见“线性变换”；零变换(null transformation)见“线性变换”。

四、索　引

1. 本书每一卷正文之后，均附有三种索引，即条目笔画索引、条目音序索引和条目西文索引。索引中条目标题后面的数字，表示该条目在正文中的页码。

2. 在条目笔画索引中，以汉字起首的条目标题按第一字的笔画由少到多的顺序排列，若笔画数相同，则按 一(横)、丨(竖)、丿(撇)、丶(点)、乛(折)五种笔形顺序排列，其中，㇀(提)归为一(横)，亅(竖钩)归为丨(竖)，㇏(捺)归为丶(点)，各种笔形带钩或曲折的笔画(除竖钩“亅”外)归为 乛(折)。第一字相同的，则按第二个字的笔画数和起笔笔形的顺序排列，依次类推。

3. 在条目音序索引中，以汉字起首的条目标题按第一字的汉语拼音字母顺序排列，若第一字的声母、韵母相同，则按声调的阴平、阳平、上声、去声顺序排列。第一字相同的，则按第二个字的汉语拼音字母顺序排列，多音字按不同的拼音字母顺序排列，依此类推。

4. 在条目笔画索引和条目音序索引中，凡第一字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在两种索引的最后。西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的笔画或音序排列。

5. 在条目西文索引中，按条目标题的起首西文字母顺序排列；条目标题的西文缩写，按一个词排列。凡以数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在条目西文索引的最后。数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若条目标题起首的字母、符号、数字相同时，则按第二个字母等的顺序排列，余此类推。没有西文译名的条目，未收进条目西文索引。

6. 在各卷索引之后，还附有本卷涉及到的中外人名译名对照表，以供读者查阅。

目　录

《数学辞海》六卷本内容划分方案

第一卷

数学
算术
初等代数
平面几何
平面三角
立体几何
球面几何
平面解析几何
空间解析几何
初等数论
高等代数
高等几何
数学分析
集合论
形式逻辑
布尔代数
概率论与统计学初步
数学符号表

第二卷

数学
组合学
线性与多重线性代数
群及其推广
李群与李代数
环与代数
模与同调代数
序与格
范畴论与代数 K 理论
域论与伽罗瓦理论
数论
代数几何
微分几何学
凸集几何与距离几何
一般拓扑学
代数拓扑学与流形拓扑学
奇点理论与突变理论
数学符号表

第三卷

数学
实变函数论
复变函数论
多复变函数论
测度论
泛函分析
变分法
函数逼近论
调和分析
流形上的分析
位势论
凸分析
非标准分析
小波分析
分形几何
常微分方程
偏微分方程
积分方程
动力系统
特殊函数
数学符号表

第四卷

数学
数学基础
数理逻辑
计算数学
概率论
随机过程
统计学
经济数学
生物数学
数学物理与理论物理
模糊数学
数学符号表

第五卷

数学
运筹学
系统理论
控制理论
通信与信息理论
画法几何与工程图学
计算机科学
数理语言学
力学
天文学
测绘学
数学符号表

第六卷

数学
中国数学史
外国数学史
数学符号史
数学团体与研究机构
数学竞赛与数学奖
数学期刊
数学教育
数学哲学
数学名题与猜想
珠算
数学发展史年表

第二卷条目目录

说明：该目录由本卷所属各分支学科或专题项目的全部条目（包括给出释文的条目及其参见条目）组成，按知识结构顺序编排，即按条目在正文中出现的先后顺序排列.

组合学

经典组合学

组合设计

组合序

图与超图

组合多面形与最优化

线性与多重线性代数

线 性 代 数

多重线性代数

群 及 其 推 广

群 论 基 础

置换群

典型群

群 表 示 论

代 数 群

无 限 群

组 合 群 论

计算群论

半　　群

李群与李代数

李代数

拓扑群

李　　群

卡茨-穆迪代数

环 与 代 数

环 论

根 论

群　　环

分 次 环

微分算子环

拟　环

半 环

结 合 代 数

代数表示论

交换环与交换代数

非结合环与非结合代数

霍普夫代数

模与同调代数

模论

同调代数

序　与　格

序　论

格　论

格幺半群

格序群

第二卷条目目录

格 序 环

格 模

双 B 代数

泛　代　数

范畴论与代数 K 理论

范　畴　论

代数 K 理论

域论与伽罗瓦理论

域的扩张

伽罗瓦理论

序　域

赋 值 论

数论

代数数论

解析数论

超越数论与丢番图逼近

模　形　式

代 数 几 何

微 分 几 何 学

R^3 中的曲线和曲面

微分流形与黎曼几何

黎曼对称空间

复几何与辛几何

子流形几何

调和映射与杨-米尔斯场

其他类型的几何结构

凸集几何与距离几何

凸集几何

距离几何

一 般 拓 扑 学

第二卷条目目录

代数拓扑学与流形拓扑学

代数拓扑学

几何拓扑学

微分拓扑学

奇点理论与突变理论

奇点理论

突变理论

数　　学

数学(mathematics)　数学一词来自希腊文 μαθηματιχη',其字根 μα'θημα 意义为知识、科学,它非常恰当地反映这个领域的广泛性与普遍性.从历史上看,数学常常用其某个侧面来表示:中国古代用算学来强调其计算技术方面,而西方多用几何学一词代表数学,以显示欧几里得(Euclid)的《几何原本》传统,而实际上,其中也包括数论和量论的内容.随着时间的流逝,数学的内容不断地扩大,在17—18世纪直至19世纪,被包括在数学领域内的许多学科和分支已经独立出去,而在各学科的边界又不断创造和衍生出一系列新的学科,这些新学科现在已融合而成面向21世纪的庞大的数学科学领域,它是一个具有内在统一性的科学技术群.以下从四个方面进行论述:

1.数学的对象和特点.数学中最原始的对象是数与形.自然数已经是相当抽象的概念,它不仅要从一个苹果、一间房子、一堆沙土中抽象出数1来,而且还要由数1得出更一般数的概念.有了自然数的概念还会遇到基数和序数的矛盾.至于记数法和位值制都是中国对人类文明的伟大创造,这种伟大创造绝不仅仅是对自然界的认识和对哲学思辨的产物,它真正体现数学的成就.数学另一个原始对象是形,它更为直观,甚至长期以来人们也把它当成自然科学的对象,尽管柏拉图(Plato)早就说过,三角形属于理念的世界.当然现在数学的空间远远超出现实的空间,数学中的"形"也不限于人们感官能摸得着、看得见的东西,它是更抽象的概念,如高维空间、无穷集合、群、拓扑等是任何其他学科都不研究的对象.数学作为一门模式科学,应该归入更广泛的符号和形式科学类.这一类似乎应该介于哲学类与具体科学,即自然科学与社会科学之间.它的姊妹学科包括一般符号学、语言学、逻辑学、方法学以及还未成型的一般系统学.有意思的是,有些数学家也认为"数学是一种语言"、"数学可还原为逻辑"、"数学是一种普遍方法"等,这些说法尽管有些偏颇,但毕竟触到数学与自然科学的本质差别以及数学与符号科学的亲缘关系.数学的本质特征是:

1)数学是一种普遍语言.这种观点可以追溯到莱布尼茨(Leibniz,G.W.),他首先提出科学与哲学的两大目标,其中第一个就是找出一种普遍文字,首先是一种符号及变元表示的符号语言.正如吉布斯(Gibbs,J.W.)所说的"数学是一种语言".吉布斯不仅是19世纪最伟大的统计热力学大师之一,而且也是向量分析的开创者及传播者.在19世纪90年代,英国著名的杂志《自然》上掀起的一场大辩论中,向量最终取代四元数而成为物理学普遍使用的概念.19世纪和20世纪之交,向量分析成为数学、物理学的有效工具,更确切地说,成为描述各种现象的语言.数学概念的产生及其符号化反映了数学的进步,算术运算的符号化及向符号代数过渡,几何学的代数化,微分、积分运算的符号化,函数的符号及行列式、矩阵、向量、张量等概念的符号化,复数的表示,算子演算以及符号逻辑等都是数学的重要进展.在这个意义下数学对象是一个符号集合.单纯的符号集合,正如裸的集合一样,没有结构,没有什么可说的,没有什么意思,而只有它具有形式结构(语法学),有一定的解释(模型——语义学),有一定变换、生成、操作、运用方式(语用学),它才能变得丰富多彩起来.数学作为一种普遍语言有自己的特点,比起纯逻辑语言来有内涵的丰富性,而比起通常语言来有外延的确定性.数学不仅是一种语言,它还是一种精密语言.正因为如此,它常被称为精密科学.数学之所以精密,不单是因为其数量表示,还在于它越来越深入那些以前所无法表示的或非实在的概念,如瞬时速度、加速度、位势、熵、谱等.对于许多直观概念,也只有在数学上才能得到很好处理,如连续性、对称性、随机性乃至信息控制、策略、对策、决策等.数学还明确了一些对立的范畴,如有穷与无穷、连续与离散、局部与整体、确定与偶然等.还有重要的元概念:如结构、构造、存在、模型、等价等.这些语言越来越深入到科学乃至日常生活之中,使论述确切及精密.许多常用概念也只有在数学上得到澄清才算有深刻的认识.

2)数学是一种普遍方法.从古到今,对许多问题求出解答的过程中,人们或多或少产生一种方法的意识.而这种方法概念,又以数学中的算法概念为摹本.在这个意义下,数学充分显示其作为操作技术的特性.虽然精确的算法概念一直到20世纪30年代才有确切定义,但模糊的概念很早就有,而且也是数学追寻的主要目标之一.中国的数值运算及方程求解、欧几里得辗转相除法以及印度、阿拉伯的一些算法,都使人认识到算法是一种有限的指令,可以机械地运行,从而对一类问题得出确定的解答.许多几何作图问题以及求积问题也要求发现广义的"算法"来求解问题.笛卡儿(Descartes,R.)把算法推向普遍方法论的高度,他十分明确地考虑造出普遍方法

来解决科学问题，特别是数学问题，对此他称为普遍数学. 正是这种对方法的普遍考虑使他发明代数方法研究几何问题，从而创立解析几何学. 波利亚(Polya,G.)把笛卡儿的方案总结如下：

任意问题

$\xrightarrow{①}$数学问题

$\xrightarrow{②}$代数问题

$\xrightarrow{③}$解方程组 $\begin{cases} P_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)=0, \\ P_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)=0 \end{cases}$

$\xrightarrow{④}$ 解方程 $P(x)=0$，

其中第③，④步无非是数学，第②步并没有一般方法，第①步则困难更大. 莱布尼茨也把找出能求解任何数学问题的普遍算法列为他第二大目标. 笛卡儿在几何方面实现这个目标，而莱布尼茨则在逻辑上制定一个方案. 数学作为一种普遍方法，总是不断跨越已有的领域，深入到未知的世界中去，并且不断创造新的数学对象. 17—18 世纪，无穷及无穷小进入数学，把代数运算规则向无穷领域推广，这就导致数学分析的形式，并且构成方法上的大飞跃. 19 世纪由实分析向复分析过渡，再次加大分析方法的威力.

3) 数学是一种普遍思想原则. 数学发展过程中由于不断一般化、不断抽象化造成自己的普遍思想原则. 对称性原则、不变性原则、守恒律三者统一是 1918 年诺特(Noether,(A.)E.)首先提出的，而群论方法在量子力学、原子-分子结构、核结构、基本粒子理论中的适用性也是外尔(Weyl,C. H. H.)首先得出的. 群论方法至今仍广泛应用在科学的各方面，而不仅仅是上述领域及固体物理. 数学中另一个重要原则是极值原则或变分原理，最早除了哲学的思辨之外，首先提出的是费马(Fermat,P. de)，这些原则也是其后许多物理理论的基础，如哈密顿原理.

4) 数学是一种理性思维框架. 20 世纪之前，科学的支柱主要是理论和实验(包括观察和测量)，数学和计算包括在理论当中. 实际上，17 世纪的科学革命推动近代科学的产生，完全依赖于理性与经验的结合. 它们的哲学根源是笛卡儿的唯理主义与培根(Bacon,R.)的经验主义，他们也是近代哲学之父. 确切地讲，笛卡儿把认识论置于本体论之上，把哲学从神学的奴仆地位解放出来，成功地实行思想的解放，直接推动近代科学的产生，其中，理论概念、数学工具与观察实验结合在一起是牛顿(Newton,I.)科学革命的催生婆. 牛顿成就其伟业不仅在于他提出正确的理论概念(特别是力)，而且在于他提供了数学工具(微积分)及分析框架，尽管当时还是用欧几里得的几何系统. 其后科学的重大进步，理论概念及数学表述和计算的结合仍是不可缺少的一环. 第二次世界大战以后，计算机的发展与计算技术的进步使得科学计算与理论和实验鼎足而三，并列为科学的三大支柱. 近年来，由于数学的发展，从数学出发的理论越来越多地成为科学理论形成的始作俑者. 这特别表现在 1974 年，纤维丛理论成为规范场理论的标准表述. 其后越来越多的前沿数学领域进入物理学及其他科学领域，形成新兴理论框架，实际上数学已成为科学发展第四根支柱. 对于生命科学、心理科学、社会科学，这种现象早已不是新事物. 数理经济学以及对策论是这方面的最典型的例子.

2. 数学的分科及其主要问题. 数学不是一般意义上的自然科学或社会科学，它的对象及研究目标不像这些学科那样明确和集中. 从古到今，数学中所包含的对象、学科及分支变化多端. 中世纪除了算术及几何学之外，天文学及乐理也是数学的分支. 到 17 世纪，木工、石工、建筑、火器、占星术等都是数学的内容. 从那时起，静力学、动力学、光学、地图绘制法等仍然被看成大数学的一部分，尽管它们早已成为独立学科. 数学内容的庞杂也可以说是数学的一大特征了. 除此之外，许多基础的数学学科，它们的内容也有很大的改变，甚至于面目全非了. 经典代数学主要研究代数方程的求解，而经过几次变化，现代代数学主要研究代数结构. 这样一来，数学的统一尽管多次被提起，但是总难以概括全部数学. 因此，时至今日，数学仍然是具有多样性对象也具有多种目标的学科，尽管它们之间有着千丝万缕的联系. 人们把数学归结为相互关联的六大范畴，其中前三个可以说是数学的技术方面，后三个可以说是数学的理论方面.

1) 操作技术. 大部分最早的数学问题属于解决“如何”的技术问题. 最初的问题包括计数、计算、测量、作图等方面，后来逐步形成特殊的及一般的数学问题. 在解决这些问题的过程中，形成了算法以及操作步骤的概念. 在计算过程中，形成了算术，特别是解数值代数方程的算法. 到近代，这推动符号代数学、求解代数方程的技术以及把这些技术推广到无穷算法以及代数综合方法的代数方法，从而形成无穷小演算及解析几何学. 其后各个数学分支也提出相应的算法问题，例如拓扑学中计算同调群、同伦群等. 从这个意义上讲，数学在本来意义上是一种计算技术，或更广一点讲是操作技术. 而研究这种技术的目标就是发明算法或解题的步骤，以求得问题的解决. 应该说，这是一种富有创造性的研究工作. 以计算为例，就是由精确计算到近似解析计算到数值计算到计算机软件，它一直是数学研究的重要内容. 除计算之外，还有测量、绘图、统计、运筹等操作，以及相应的和衍生的各种问题. 例如古典几何有许多几何作图问题，特别是用圆规、直尺的几何三大问题，

以及更一般的作图方法.为了解决这些问题,还要发明许多技术,如各种投影技术,它们至少在过去都属于大数学范围之内.在数学分析的范围内,级数求和、渐近展开、积分变换等都是高级的计算技术.

2)技术理论.对数学操作的对象,应该有些认识,其中包括表示问题、操作规则与规律问题、可计算性问题、无穷级数收敛与发散问题、收敛速度问题、方程可解性问题、逼近的程度及可能性问题、作图的可能性问题,特别是方法的评价问题等.这样就形成与操作技术有关但又高一层次的学科,如数值分析、误差理论、函数逼近论、丢番图逼近理论、可解性及稳定性理论等.

3)操作对象理论.它的目标不是指向对象本身,而是指向技术,指向求解的方法.例如丢番图方程论、代数方程论、代数方程组理论、常微分方程论、偏微分方程论、积分方程论等.它们涉及的不是单个方程,而是一类的对象,因此首要问题是分类问题.然后再对每一类研究解的数目、解的性质、根与系数的关系、某类解的存在性问题等,微分方程的定性理论也属于这一范畴.

以上三大范畴是解决"如何"的技术问题,而以下三大范畴才是解决"什么"的理论问题.

4)对象理论.理论是对确切定义的对象的性质、关系、刻画、分类等的研究.典型的数学理论有数论、函数论、算子论以及各种几何对象理论、过程理论等.以数论为例,重要的分支按对象分有整数论、代数数论、超越数论等.按方法分有初等数论、解析数论、概率数论等.按问题的性质分有型的算术理论、几何数论等,也包括数论中的丢番图方程理论.函数论与算子论一开始也是表示问题,特别是无穷级数及无穷乘积表示,然后是积分表示等,其次涉及值分布等可以说是计数问题,另外还有刻画及分类问题.几何图形有许多性质与关系方面的问题,如度量性质以及相交、属于等关系,也有刻画及分类问题.

5)结构理论.结构理论与对象理论之间并没有一条不可逾越的鸿沟,这样划分是因为结构理论必须建立在集合的基础之上.按照布尔巴基学派的观点,原始的结构可以划为三大类,研究它们各自的结构就形成结构数学的主要分支:① 代数结构:主要是群、环、域、模,它们分别构成群论、环论、域论、模论;② 序结构:主要是格,它们构成格论;③ 拓扑结构:主要是拓扑空间,它们构成一般拓扑学的研究对象.这些抽象的研究对象有两个来源:一是从过去研究的具体对象抽象化,特别是公理化而成,如群、域以及拓扑空间这些抽象结构衍生出来.新结构的产生有如下的几种途径:① 增减公理;② 复合结构;③ 多重结构;④ 混合结构.研究这些抽象对象的目标是搞清楚它们的结构并加以分类.所谓结构,就是元素(或它们的集合)和元素之间的关系.结构数学的主要问题大致可分为互相关联的四类问题:① 刻画问题;② 分类问题;③ 结构问题;④ 实现问题.

6)元理论.元数学理论是对数学本身进行反思的产物,长期属于哲学的范畴.它讨论数学概念、数学理论的合理性以及数学方法的合法性问题.19世纪末之前,对于数是什么以及非欧几何问题,特别是数学分析的严格性的争论均属于这个范畴.19世纪末,集合论的建立,现代公理方法的提出,符号逻辑的形成,以及关于数学基础问题的论战,最终导致作为一门数学分支的数理逻辑的形成.由于哥德尔(Gödel,K.)的工作,数理逻辑成为包括模型论、公理集合论、递归论和证明论(原始的和狭义的元数学)四大分支的数学领域,其后分别形成构造性数学和计算复杂性理论等新兴学科.除了以集合论为基础的现代数学之外,范畴论也成为一门元理论,在数学中有着有效的应用.

3.数学的发展和演化.数学的内容及范围随时间不同而不同,因此有言:"数学无非就是它的历史."数学史大致可如下分期:前史时期;古代及中世纪时期(从公元前4世纪到16世纪末);近代前期(17—18世纪);近代后期(19世纪);现代时期(20世纪).每一个时期的特点简要分析如下:

1)前史时期.前史时期的数学主要是民族数学或文化数学,在各种文化的发展过程中,各民族都或多或少掌握一些简单的数学技术,包括计数、计算、测量、土木建筑、绘图等,基本上属于实用技术.这些知识是零散的,而且反映出较大的文化差异.另外,也出现了神秘的占星术、数秘术、占卜术等,其中有个别涉及数学的内容,如二进制等.各种建筑上的对称图案以及正多面体的列举包含群的观念的萌芽.

2)古代及中世纪时期.数学经过长时期的发展之后,正式成为一门学科,其主要标志是:① 建立数的表示及计算方法;② 对于一些问题有较系统的方法.这使数学技术部分初步形成.而欧几里得《几何原本》的问世,则使理论数学有了一个原型.各国数学发展状况有所不同,古代数学的主要领域是算术与几何,希腊具有初等的数论及量论以及一些基本的几何问题及数论问题.这些问题对以后的数学发展有很大的影响,但不一定很重要,比较重要的数学是计算,特别是解方程.中国、印度、阿拉伯的数学,偏重于计算及实际问题的解决.

3)近代前期.近代数学诞生的标志是符号化的普遍算法的建立以及无穷进入数学.它一下子使建立在几何及算术上的算法登上了一个新台阶,不仅使它的应用范围大大扩大,成为发展科学技术的有力工具,而且也向理论提出一系列问题.这就导致

19 世纪操作理论、操作对象理论、对象理论的产生，出现数学多样化和理论化的时代. 17 世纪符号代数、解析几何学及微积分的建立，虽然大大扩大了数学技术库，但是并没有改变数学主要是一门实用的计算及操作技术的状态. 数学作为一门计算技术进步惊人，特别是微积分的完成，解决了许多天文、力学及物理学的问题. 微积分本身只不过是一种更有效的演算方法，即所谓无穷小演算. 接着是常微分方程及数学物理方程的出现，以及变分法的诞生，使数学工具更为有效.

4）近代后期. 19 世纪数学是近代数学的成熟时期，也是数学真正作为自为的理论科学产生的时期，但是伴随操作理论(如最小二乘法及误差理论、级数求和理论、函数逼近理论及丢番图逼近理论)、操作对象理论(如代数方程理论、常微分方程理论)，数学技术本身也大有提高，特别是傅里叶展开、积分变换，尤其是复分析的建立. 19 世纪的数学可以说是数学对象化与多样化时期，一方面把数学由主要是操作技术转变为理论的时期，另一方面也为 20 世纪现代数学奠定了基础. 这样，数学对象理论真正形成，数学成为一种自为的科学而不再仅是自然科学或技术的语言和工具了.

5）现代时期. 20 世纪的数学是从 19 世纪数学多样性时期趋于统一的时期，其统一的基础是集合论. 一方面集合论之上产生了结构数学的庞大领域，另一方面集合论的基础问题产生了元数学. 数学新对象的形成，产生结构的多样性，导致理论的多样性，并且 19 世纪末以前的四大范畴的数学仍有新的发展，加上新的应用数学、计算数学等领域，数学日趋专门化、多样化. 但意想不到的是，从 20 世纪 70 年代起，各个领域之间新关系不断发现，新一轮的统一性正在形成之中. 当代数学前沿的大多数学科是 20 世纪上半叶形成的，其中主要是抽象代数学(包括群论、环及代数理论、域论、格论、整体李群理论、代数群论、同调代数以及各种衍生结构)、一般拓扑学、测度和积分理论、泛函分析(包括线性拓扑空间理论、算子代数理论等)、组合及代数拓扑学、整体微分几何、多复变函数论、动力系统理论、随机过程理论等. 对于 19 世纪开创的新领域——代数数论、代数几何学、黎曼几何学和局部李群理论，也在结构数学的框架中获得重大突破，成为当代数学的前沿.

20 世纪后期形成的一些领域，如微分拓扑学、大范围分析、K 理论、非交换几何等，也可在其中看到其萌芽. 除了纯粹数学领域的扩大与深化之外，20 世纪的应用数学和计算数学的面貌也发生了根本的改变. 一方面数学应用的范围已从 20 世纪之前的经典力学、天文学与测地学以及数学物理等领域扩展到几乎所有自然科学、工程技术、社会科学、人文科学的分支，并越来越起着举足轻重的作用；另一方面，一批新的应用数学领域产生出来，成为具有相对独立的分支，构成大数学科学的组成部分. 它们一方面与实际问题有密切的关系，另一方面它们也形成独立的数学研究方向，其中最典型的是 19 世纪末 20 世纪初形成的数理统计，它们同应用概率一起在近半个世纪已经成为与经典数学平起平坐的学科领域. 另外一个数学领域——组合数学几乎与数学的历史一样悠久，但只是近半个多世纪才逐步成熟及独立. 第二次世界大战之后，一些新的应用数学领域独立出来，特别是运筹学诸分支，后来纳人管理科学的学科群中. 与工程技术密切相关的系统科学、控制理论与自动化科学、信息科学也得到空前的发展.

20 世纪科学技术史中头等重要的事件是电子计算机的诞生. 它对整个社会的冲击是怎么估计也不过分的. 从计算机的设计制造到大规模应用，处处离不开数学，同时也开辟了新的数学领域. 它们可以归纳成两大部分：一是计算机科学，它指未来计算机的发展；一是计算数学，它指计算机在科学计算和工程技术中的大规模计算. 计算机的不断普及和改进对数学也造成不可忽视的影响. 它给数学家提出一系列算法问题，并形成一套行之有效的算法，如单纯形方法及其种种改进，有限元方法及其衍生算法等，对算法的分析，如收敛速度、误差传播及稳定性等问题形成数值分析分支. 近年来，计算机由数值运算过渡到符号运算，形成计算机代数重要分支，特别是吴文俊的机械化数学纲领在机器证明方面是一大突破.

4. 数学的社会功能. 数学是最古老的科学部门，它的诞生和发展反映人类文明的进步. 数学从一开始就与社会实践活动密切相关，从计数、土地丈量、器物制造、产品分配，一直到商业贸易、宗教活动等都向数学提出问题，并要求逐步解决和方法逐渐进步，最后形成相对定型的数学方法和学科. 从此，各种社会活动与数学的应用密不可分. 随着社会的进步，特别是近代科学技术的进步和新兴产业日新月异，数学也越来越成为科学技术发展的基础. 从 17 世纪到 19 世纪，数学与力学、天文学、物理学、大地测量学、航海术就密不可分，互相促进地平行发展着. 对于机械工程、建筑工程设计、电机工程等技术领域的发展，数学也起着决定性的作用. 20 世纪数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更加令人信服地确立了数学作为整个科学技术的基础地位. 数学物理、数学化学、生物数学、数理经济学、数理地质学、数理语言学、数值天气预报、数学考古等一系列边缘学科的出现，表明数学的应用已突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透. 随着科学数值化趋势的增长，数学在提高全民素质，培养适应现代化需

要的各级人才方面还具有特殊的教育功能.数学科学,已成为推进人类文明的不可缺少的重要因素,数学正越来越直接地为人类生活与物质生产做出更大的贡献.数学应用具有以下特点:

1)纯粹数学几乎所有的分支都获得应用.在20世纪60年代,像拓扑学这样的抽象数学分支离实际应用似乎还很遥远,而今拓扑学(特别是扭结理论)已成为生物学中了解*DNA*结构的有效工具.在物理学中,拓扑不变量正在成为物理的量,正如一些群的不变量是物理的量一样.数论也曾被认为是最纯粹、最缺乏应用的数学分支,但如今数论方法在计算机科学、密码技术、卫星信号传输、p进量子场论等许多方面发挥着重要的有时甚至是关键的作用,并通过与数值分析相结合开辟着更广的应用途径.事实上,仅就在理论物理中的应用而言,涉及的数学除了经典的分支与方法(如数学物理方程、傅氏分析、无穷维空间论、群论、概率统计等),还包括了微分拓扑、微分几何、大范围分析、代数几何、李群与李代数、算子代数、代数数论、非交换数学、非线性数学、计算数学等,几乎覆盖了核心数学的整个领域.

2)几乎所有的科技领域都在应用数学,并越来越多地应用更高深的数学.数学在力学、物理学中的应用是经受了历史考验的,而当今数学的应用则早已突破这一传统的范围,正在向包括从粒子物理到生命科学,从航空技术到地质勘探在内的一切科技领域进军.除了自然科学,经济学及过去认为不适用数学的社会学、历史学等社会科学领域,数学方法也都在崭露头角.随机分析应用于金融决策而引起的经济学理论的进展,提供了特别令人鼓舞的例证.与以往时代不同的是,数学在向外渗透过程中越来越多地与其他领域相结合而形成交叉学科.与数学有关的词大量出现在各门学科之前后,如"数学的"、"数理的"、"计量的"、"统计的"、"计算的"以及"……数学"、"……统计学"等.学科成熟的社会标志是学会、协会的建立,期刊与连续出版物的问世,以及课程的设置,专业会议的召开等.例如,《数学化学杂志》于20世纪80年代创刊,《数理经济学杂志》于20世纪70年代创刊,生物数学的期刊出现更早.次一级的学科如"数学分类学"的著作早在20世纪80年代就问世了.值得注意的是纯粹数学中的一些前沿与其他科学的许多前沿领域的快速结合,这反映了科技领域中数学渗透的空前深度.可以这样说,没有这些前沿数学就没有当代理论物理学的一些前沿领域,如超弦理论、超引力理论等.事实上,仅仅像弦理论这样的物理学热门分支所用到的数学,就涉及微分拓扑学、代数几何学、微分几何、群论与无穷维代数、复分析与黎曼曲面的模理论等.凝聚态物理中分类晶体结构中的"缺陷"以及液晶理论,都用到某些齐性空间中同伦群的计算,而这即使对代数拓扑学家来说也是极难的问题.数理经济学中一般均衡理论的建立、发展,也用到了微分拓扑学的基本定理与彻底的公理化方法.经济学家德布鲁因(de,Bruijn,N.G.)这方面的工作获得了诺贝尔奖.

3)数学在生产技术中的应用变得日趋直接.以往数学工具直接用于生产技术的例子虽有发生,但数学与生产技术的关系基本上是间接的.常常是先应用于其他科学,再由这些科学提供技术进步的基础.近半个世纪来,数学科学与生产技术的相互作用方式正在悄悄地改变,数学提供的工具直接影响和推动技术进步的频率正在加大,并在许多情况下产生巨大的经济效益.例如,以计算流体力学为基础的数值模拟已成为飞行器设计的有效工具,类似的数值模拟方法正被应用于许多技术部门以替代耗资巨大的试验;以调和分析为基础发展起来的小波分析直接应用于通信与石油勘探等广泛的技术领域,这在20年前是不能想象的;现代医学扫描技术(*CT*扫描、核磁共振成像等)主要也是建立在拉东积分理论的基础之上,这方面的例子举不胜举.此外,现代大规模生产的管理决策、产品质量控制也密切依赖于数学中的线性规划算法(单纯形法与新兴的内点法)及统计方法.近年来,以数学建模为核心的工业数学成为一个蓬勃发展的应用数学领域也绝不是偶然的,产业部门的工程技术人员与数学工作者携手合作,解决影响甚至决定生产过程的形形色色的数学问题,反之,许多挑战性问题也刺激纯数学的发展.

4)数学在学科发展中的份额及力度越来越大.一些著名的数学家认为,数学是一种关键的、普遍适用的、赋予人以能力的技术.从某种意义上来讲,"高技术本质上是一种数学技术".对此,一般人还只在科学计算的层面来理解.而实际上,数学方法是不同于理论方法及计算方法的第四个普遍适用的方法和技术.这种情况从20世纪70年代以来已初露端倪,在21世纪将成为科学研究的重要组成部分,而且也许是最富创造性的部分,这特别表现在形成概念及理论框架方面.实际上,当前的动力系统的研究(分叉、吸引子)、孤立子、混沌等已成为许多领域的通用语言及工具,而更艰深的数学将在未来更为普及.

执　笔　胡作玄
审　阅　吴文俊　程民德　徐利治

抽象代数(abstract algebra)　亦称近世代数.研究各种代数系的结构及其性质的分支学科.它是在初等代数基础上经过数系概念的推广,与实施代数运算范围的扩大,从18世纪末萌芽到20世纪30年代,逐步形成现代数学的主要分支之一.

抽象代数是研究以任意对象作为元素的集合，赋予元素间的若干合成法则——即对集合中任意元素 a,b 有集合中惟一的元素 c 与之对应——称为运算，并且这些运算满足于特定的一些条件——称为公理．随着集合所赋予的运算及其所满足的公理体系的不同而形成各种不同的代数系，如群、环、域、格、模（包括向量空间）、代数等．

代数系的起源较早，在挪威数学家阿贝尔（Abel，N. H.）证明五次以上方程不能用根式求解的进程中就孕育着群的概念；1830 年，年仅 19 岁的伽罗瓦（Galois，E.）彻底解决了代数方程的根式求解问题，从而引进数域的扩张、置换群、可解群等概念；后来，凯莱（Cayley，A.）在 1854 年的文章中给出有限抽象群；戴德金（Dedekind，J. W. R.）于 1858 年在代数数域中又引入有限交换群和有限群；克莱因（Klein，C. F.）于 1872 年建立了埃尔朗根纲领，这些都是抽象群产生的主要源泉．然而抽象群的公理系统直到 1882 年凯莱与韦伯（Weber，H.）在 Math. Annalen 的同一期分别给出有限群的公理定义，1893 年韦伯又给出无限抽象群的定义．由于李（Lie，M. S.）对连续群和弗罗贝尼乌斯（Frobenius，F. G.）对群表示的系统研究，对群论发展产生了深刻的影响．同时，李在研究偏微分方程组解的分类时引入李代数的概念，然而，它的发展却是 19 世纪末和 20 世纪初，由基灵（Killing，W. K. J.）、外尔（Weyl，(C. H.)H.）和嘉当（Cartan，É. (-J.)）等人的卓越工作才建立了系统理论．

域这个名词虽是戴德金较早引入的，但域的公理系统却是迪克森（Dickson，L. E.）与亨廷顿（Huntington，E. V.）于 19 世纪初才独立给出．而域的系统发展是从 1910 年，施泰尼茨（Steinitz，E.）的著名论文“域的代数理论”开始的．同期，布尔（Boole，G.）研究人的思维规律，于 1854 年出版《思维规律的研究》，建立了逻辑代数，即布尔代数．但格论是在 1933～1938 年，经伯克霍夫（Birkhoff，G. D.）、坎托罗维奇（Канторович. П. В.）、奥尔（Ore，O.）等人的工作才确立了在代数学中的地位．另一方面，1843 年，哈密顿（Hamilton，W. R.）引进四元数并奠定了向量代数和向量分析的基础，而四元数系又构成实数域上有限维可除代数．凯莱与西尔维斯特（Sylvester，J. J.）一起建立了代数型的理论，奠定了代数不变量的矩阵理论．凯莱又是矩阵代数的创始人，他建立了八元数与非结合代数，同时，克利福德（Clifford，W. K.）将八元数（复四元数）及外代数推广到一般克利福德代数，并将其成功地应用于非欧几里得空间中运动的研究．

19 世纪和 20 世纪之交，库默尔（Kummer，E. E.）引入对代数数论有重要影响的理想数概念，他于 1844 年指出整环未必有惟一分解性质．戴德金将库默尔理想数推广并引出现代理想的概念，建立了代数数域的理论和代数整数环上理想的惟一分解定理．特别是 1894 年，嘉当（Cartan，E. J.）关于复单李代数的完全分类以及 1907 年，韦德伯恩（Wedderburn，J. H. M.）发展了嘉当关于实数域和复数域上线性结合代数的结构定理，从而创立了一般域上结合代数的结构定理，极大地发展了抽象代数的理论．在此期间，群以及与其紧密相关的不变量概念在分析、几何、力学和理论物理中都发挥了重大影响，而这些学科的发展反过来又促进了代数的发展．如诺特（Noether，M.）研究代数簇在双有理变换下的不变性质和关于曲面的著名定理，便导致多项式环理想理论的建立．因此，深入研究代数的相关概念，以及从各种具体对象抽象出共同特性来进行公理化的研究，就导致抽象代数的进一步演变，促进了相对独立的学科，如群、域、线性代数、代数数论、环论等向纵深和综合两方面发展．德国代数学派在这方面起了领导作用，戴德金、希尔伯特（Hilbert，D.）和韦伯以及施泰尼茨等对代数学抽象公理化的研究有很大贡献，其中突出的成就是布饶尔（Brauer，R. (D.)）、哈塞（Hasse，H.）、诺特（Noether，A. E.）、阿尔贝特（Albert，A. A.）关于有限维结合代数的理论，它阐明了有理数域上单代数都是其中心 F 上的循环代数．特别是诺特于 1920 年引入左（右）模的概念，并研究了模在有限群表示论中的作用，以及模与代数结构理论之间的联系，使模成为数学的重要工具，从而又推动了环论的发展．1921 年，她写的“整环的理想理论”建立了交换诺特环理论，证明了准素分解定理，成为交换代数的里程碑．1926 年，她又给出戴德金环的公理刻画，因此，诺特是抽象代数的奠基人之一．她和阿廷（Artin，E.）以及他们的学生（包括中国数学家曾炯之）为中心，在 20 世纪 20—30 年代，对域论、类域论、代数的理想理论到阿廷环的推广取得辉煌成就．其中，阿廷在 1927 年将代数结构定理推广到极小条件环上，就是著名的韦德伯恩-阿廷定理，成为环论发展的一个新里程碑；同时，克鲁尔（Krull，W.）创立了局部环的理想理论，范·德·瓦尔登（Van der Waerden，B. L.）等人发展并简化了单纯代数的结构和环的理想理论．20 世纪 30 年代初，范·德·瓦尔登的《近世代数学》综合总结了从伽罗瓦起 100 年来抽象代数各方面的工作，是抽象代数的一个里程碑．由于抽象代数的理论和方法已渗透到数学的各个学科和其他领域（如理论物理、晶体学），这就反过来推动抽象代数在深度和广度上更加迅速发展，范·德·瓦尔登的书只能是现代数学工作者的基础了．抽象代数的各分支学科之间，以及与其他学科之间的相互渗透，不仅促进这些学科

的进一步发展，也促进了新学科的形成. 比如，同期，范・德・瓦尔登与扎里斯基(Zariski,O.)首先将交换代数的方法引进代数几何；在20世纪40年代，韦伊(Weil,A.)又用抽象代数的方法建立了一般域上代数几何的理论. 又如，域上多重线性代数的概念和理论推广到交换环上形成环上多重线性代数.

从20世纪40年代初开始，抽象代数进入一个新的阶段. 1945年，雅各布森(Jacobson,N.)引入根及本原环的理论，成为环论发展的新阶段. 另一方面，作为线性代数推广的模论得到进一步发展并产生深刻影响. 在20世纪20—30年代出现了以生成元及其定义关系所定义的无限群，经霍尔(Hall,P.)、马尔采夫(Мальцев,А.И.)等人的精彩工作，到20世纪40年代已形成独立体系. 1962年，费特(Feit,W.)与汤普森(Thompson,J.G.)关于奇数阶群必为可解群的定理，是对有限单群分类的重大突破. 从伽罗瓦引入置换群，其后证明 $A_n(n\geqslant 5)$ 是单群到1981年有限单群分类的完全解决，经历了约150年之久. 同期，李代数也得到深入发展，不仅推广到一般域，而且无限维李代数从20世纪60年代崛起，作为复单李代数推广的卡茨-穆迪代数就是卡茨(Kac,V.)与穆迪(Moody,R.)于1968年彼此独立建立的. 它与理论物理有密切关系. 而李群的深入发展派生出代数群，即群是代数闭域上仿射簇. 代数群及其表示理论与多重线性代数、交换环论、代数几何、李代数等都有十分密切的联系，近年来已成为抽象代数的活跃分支.

在抽象代数中同态和同构起主要作用，它不考虑代数系的特殊结构，而是用统一方法去研究，这种作为各代数结构的比较性研究，首先是把群论、环论和格论中一些共同的概念和平行的结果推广到代数系上去，这就产生了泛代数，20世纪30年代末提出的伯克霍夫定理，是它独立发展的起点. 泛代数(不限于二元运算)是以各种不同的代数系之间的共性为主要研究对象的学科，它对模型论、自动机理论和程序语言的语义学都有应用.

将同一种代数以及它们之间的同态映射合起来考虑，就会发现这与数学其他分支研究的对象以及对象间的联系(如拓扑空间及连续映射，集合及映射，环及同态等)有许多本质上的共性. 1945年，由艾仑伯格(Eilenberg,S.)、麦克莱恩(Maclane,S.)通过研究对偶空间的自然变换建立的范畴论，正好讨论了这些共性. 范畴是比集合更高层次的公共语言，这种语言和它的理论已渗透到代数几何(由格罗腾迪克(Grothendieck,A.)和迪厄多内(Dieudonné,J.)于1960年引入)和代数的以及数学的许多分支(如戈德门特(Godement,R.)，埃雷斯曼(Ehresmann,C.)于1958年分别引入拓扑学和微分几何)，并在其中起着重要作用.

由美国和欧洲数学家在20世纪40年代，几乎同时彼此独立发展起来同调代数，它是以代数拓扑为背景，以模为主要研究对象的学科，通过两类重要的函子 $\otimes$ 与 Hom 及由它们导出的函子 Tor，Ext 得出刻画环的许多深刻结果. 由于代数拓扑中赫维茨(Hurewicz,W.)问题的解决，导致1945年艾伦伯格和麦克莱恩定义了群的(系数在任意域上)上同调群. 同时，赫希施尔德(Hochschild,G.)引进了结合代数的上同调群，谢瓦莱(Chevalley,C.)等人又发展了李代数的上同调群. 同调代数在数论、群论、代数拓扑、代数几何中都有重要作用. 当考虑李群或者作为它的推广的 H 空间的同调以及上同调时，就得到霍普夫代数. 它的研究是由霍普夫(Hopf,H.)于1941年开始的，博雷尔(Borel,A.)于1953年推广其基本结构定理. 霍普夫代数的理论是代数拓扑的常用工具，它在物理学中的模型是量子群.

20世纪60年代起蓬勃发展的代数 K 理论，它同拓扑 K 理论一样是源于格罗腾迪克于1957年的广义黎曼-罗赫定理的工作. 人们企图推广线性代数中某些部分如维数理论到环的模上而发展成为由环范畴到阿贝尔范畴的一系列函子，代数 K 理论就是研究这些函子(如 $K_0, K_1, K_2, \cdots$ 等)的理论，它不仅对刻画环的性质起重要作用，而且在代数几何等其他学科中也有着值得重视的作用. 用模、范畴、同调代数的语言和理论来刻画和研究环，从而使环论的发展推向更新的阶段.

应该指出，20世纪50年代，塞尔(Serre,J.P.)把代数簇理论建立在层的概念上，并建立了凝聚层的上同调，这为格罗腾迪克建立概型理论奠定了基础，从而使代数几何的研究进入一个新阶段. 概型理论也为代数数论提供了新的理论和方法. 代数几何与数学许多分支密切相关，互相促进. 如代数几何中的超越方法与偏微分方程、微分方程、微分几何、拓扑学紧密相关，代数几何在控制论与现代粒子物理中也有广泛应用.

抽象代数学的这些理论发展的同时，由于电子技术的发展和电子计算机的广泛应用，抽象代数学的一些成果和方法可直接应用到工程技术中，如代数编码学、语言代数学、代数自动机理论等新的应用代数学的领域相继产生和发展. 同时它又是离散数学的重要组成部分，并对组合数学的突起和蓬勃发展产生重大影响. 这些新的应用推动了近代应用代数学的形成、发展与完善.

近世代数(Modern Algebra)　即“抽象代数”.

撰　稿　朱元森

审　阅　许永华　刘绍学　佟文廷　戴执中

拓扑学(topology)　现代数学的重要的分支学科.它研究几何形体在连续形变,精确地说,双方一一而且双方连续的变换(称为同胚)之下保持不变的性质.理解的广泛些,它是研究数学中连续性现象的学科.

拓扑学萌芽很早,但直到19世纪末才开始从不同的方面正式形成学科.20世纪末,拓扑学已发展为现代数学的一个庞大的学科,包括作为现代数学的基础的拓扑空间理论为核心内容的一般拓扑学,运用抽象代数的概念和方法为工具的代数拓扑学,进而派生出以流形为主要对象的微分拓扑学以及几何拓扑学等方面.拓扑学可简称为拓扑,但拓扑一词还可作为拓扑空间中的拓扑结构理解.

拓扑学最初被称为形势几何学(geometria situs),这是莱布尼茨(Leibniz,G.W.)于1679年提出的,他预见到现在所称的组合拓扑学.最早为人所知的拓扑学定理可能是所谓的欧拉公式.欧拉(Euler,L.)于1750年发表了任何闭的凸多面体的顶点数v,棱数e和面数f有关系$v-e+f=2$.用现代说法,它是一个拓扑不变量,称为欧拉示性数.据史学家考证,笛卡儿(Descartes,R.)在1639年就知道它,并且莱布尼茨通过笛卡儿未发表的手稿于1675年得知这一结果.另一著名的结果是哥尼斯堡七桥问题的解决,欧拉在1736年将问题表成能否一笔画一个给定的图,并给出了一般性的解答.德国数学家高斯(Gauss,C.F.)于1827年得到曲面上曲率的积分与欧拉示性数的关系,他于1823年在电动力学中用线积分定义了空间中两条封闭曲线的环绕数.利斯廷(Listing,J.B.)于1848年第一次采用了拓扑学一词,其实他认为宁愿用形势几何,只是已被别人采作他用.黎曼(Riemann,B.)于1851年定义了黎曼面,引进了连通性和亏格,实际上解决了可定向闭曲面的分类问题,给拓扑学的建立以巨大的推动.1858年,默比乌斯(Möbius,A.F.)和利斯廷独立地发现了单侧的曲面,现被更确切地称为不可定向曲面.默比乌斯于1863年恰当地指出形势几何学的定义.贝蒂(Betti,E.)于1870年定义了高维的连通性.若尔当(Jordan,C.)于1887年提出曲线定理,但证明是错的,直到1905年才得证.

拓扑学正式成为一门独立的学科是庞加莱(Poincaré,H.)实现的.他于1892年发表了题为"论形势分析"的短文,然后于1895年发表了题为"形势分析"的120页的长文,介绍它的概念,其中有同调、贝蒂数、相交、基本群,甚至隐含着上同调;建立了对偶定理和欧拉-庞加莱公式.随后直到1904年,他连续发表了五篇补充,为改进前述长文中的缺点创立了剖分方法,定义了挠系数,开始探讨三维流形的拓扑分类,构造出基本群不平凡而一维贝蒂数平凡的三维流形,并提出了著名的至今尚未解决的庞加莱猜想:基本群平凡的三维闭流形同胚于三维球面.这几篇文章奠定了组合拓扑学的基础,其思想之丰富,观念之深刻,影响之深远,一言难尽,但不够严密或缺乏证明,后来的进展正是从此入手,将这门学科建立在严格的逻辑上而发展为后来的组合拓扑学、代数拓扑学,进而发展出微分拓扑学等学科和分支.

拓扑学的另一个渊源是分析学的严密化.实数的严格理论以及傅里叶级数惟一性的讨论推动着德国数学家康托尔(Cantor,G.)从1872年起系统地展开了欧氏空间中点集的研究,得出极限点、导集等概念,进而得到开集、闭集、稠密性和连通性等概念,并从欧氏空间的点集发展为一般的集合论以及超限基数和序数的理论.这一革命性的进展结合19世纪另一由非欧几何引起的革命性的进展——数学公理化的潮流,产生了抽象空间的研究.弗雷歇(Fréchet,M.R.)于1906年定义了度量空间,豪斯多夫(Hausdorff,F.)于1914年出版了《集论大纲》,用开邻域定义了一般的拓扑空间,标志着用公理化方法研究连续性的一般拓扑学的产生.随后,对拓扑空间的基本性质如分离性、紧致性、连通性和维数等开展了系统研究,至20世纪30年代中期后,开展了关于一致性和仿紧性的研究,到20世纪50年代初,度量化问题获得基本解决,此时,一般拓扑学已发展成熟,并且其基本理论已成为现代数学的共同基础.

组合拓扑学在1910—1912年间受到布劳威尔(Brouwer,L.E.J.)的决定性的推动,他引进了单纯逼近方法,以证明欧氏空间维数不变性,区域不变性,若尔当曲线定理在高维的推广,闭球体上连续映射不动点的存在性,向量场奇点的存在性,并定义了映射度和紧度量空间维数概念.有理由认为庞加莱与布劳威尔共同创建了组合拓扑学,更精确地说,庞加莱确定了组合拓扑学的对象,包括引进了一批基本定义,罗列了一批有待严格证明的重要"定理",而布劳威尔则设计了决定性的方法——单纯逼近,获得上述一批自己的定理.后人运用它得以证明庞加莱的"定理".例如,亚历山大(Alexander,J.W.)于1915年运用单纯逼近完成贝蒂数和挠系数是拓扑不变性的证明.这样一来,组合拓扑学在概念精确和论证严密两方面都达到了应有标准.

公理化代数学的奠基人之一的诺特(Nöther,A.E.)于1926年在一篇论文中首次提出用群来表示同调论.这影响到霍普夫(Hopf,H.)和维托利斯(Vietoris,L.),他们立即采用,从此同调的研究便以同调群、同调模以及同调环等为对象.组合拓扑学实现了代数化而成为代数拓扑学,抽象代数学成了拓扑学的基本哲学武器.20世纪30年代的重要成就有:德拉姆定理,霍普夫三维球面到二维球面的非

零伦映射，上同调群及上同调乘积的定义，高维同伦群的定义．20世纪40年代得到同调论的公理化，建立了同调代数学，并且发明了谱序列和建立了束论，使20世纪50年代以后的代数拓扑学突飞猛进．其间微分拓扑学的协边理论和受到代数学、代数几何学和微分拓扑学影响而产生的K理论都是广义的同调论．并已从理论上弄清了，同调论（包括广义的在内）本质上是同伦论的一部分．

还应强调的一个交叉发展是对紧度量空间或更一般的空间，先后由亚历山大罗夫（Александров，П. С.）、维托利斯和切赫（Čech，E.）引进了同调概念，现时称为奇异同调及上同调和切赫同调及上同调等，这标志着组合拓扑学或代数拓扑学与一般拓扑学的交汇和融合．

微分拓扑学是研究微分流形和微分映射的拓扑学．微分流形是一个拓扑流形，其上带有一个分析学结构称为光滑结构．庞加莱建立组合拓扑学时的几何对象其实是微分流形，不过他关注的是拓扑性质而忽略了光滑结构．直到20世纪30年代，微分流形的研究才系统展开．凯恩斯（Cairns，S. S.）证明了微分流形均可剖分为组合流形，惠特尼（Whitney，H.）开始研究微分流形在欧氏空间中的嵌入和浸入，沙爱福（Seifert，H. R. I.）和惠特尼先后引进了纤维丛，惠特尼和施蒂费尔（Stiefel，E. L.）同时独立地引进示性类，而使微分流形的拓扑学的研究与同调论和同伦论结合起来，成为代数拓扑学的一个重要部分而得以发展．20世纪40年代，庞特里亚金（Понтрягин，Л.）和陈省身定义了新的示性类，吴文俊和托姆（Thom，R.）对示性类理论做了深入研究．20世纪50年代初，托姆在协边理论上突破，使困难的微分拓扑学问题化为同伦论的问题而得以解决．1956年，米尔诺（Milnor，J. W.）发现七维球面上除通常的光滑结构外还有另外的光滑结构，称为怪异结构，而轰动世界．其后凯伐勒（Kervaire，M.）构作出不能赋予任何光滑结构的组合流形．这些成果说明拓扑流形、组合流形和微分流形三种范畴之间有原则区别．从此微分拓扑学成为一个独立的拓扑学分支．20世纪60年代初期，斯梅尔（Smale，S.）运用莫尔斯理论证明了五维以上的广义庞加莱猜想，米尔诺发展了换球术技术，并首先应用于球面上光滑结构数目的计算，后被许多人推广应用于三种范畴的流形问题，到20世纪70年代初，已获得极大的成效．此时，流形拓扑学的研究已成为拓扑学的主流．

在流形的研究中，人们最初从低维的几何对象着手．其中零维和一维的流形分类是平凡的，二维流形即曲面，其分类从19世纪黎曼起到20世纪初完成．从庞加莱时代到20世纪早期便主攻三维流形分类，同时还研究三维空间中的扭结，虽有重要进展但很缓慢．人们自然认为流形拓扑学研究所遇到的困难会随着流形的维数的增高而越来越大．然而，半个多世纪来的流形拓扑学历史表明事情正好相反，最困难的维数是三维和四维．之所以如此，是因为流形拓扑学的基本技术要用到一个被称为惠特尼技巧（Whitney trick）的重要引理，它在四维以下不再成立．20世纪70年代，低维拓扑学，即三维与四维的流形拓扑学，开始有重要突破．瑟斯顿（Thurston，W. P.）于20世纪70年代末，对三维流形分类运用双曲几何学而取得明显进展．在四维拓扑学方面，1982年春，弗里得曼（Fredman，M.）运用凯森（Casson，A.）环柄得到了单连通闭拓扑四维流形的拓扑分类，其中包括证明了四维广义庞加莱猜想；紧接着，唐纳森（Donaldson，S. K.）于1982年秋发现，四维单连通闭微分流形的性质很特殊．从这两人的结果立刻推论出四维欧氏空间R^4上除通常的光滑结构外，还有怪异的光滑结构，而四维以外的欧氏空间上光滑结构是惟一的．进而又发现R^4上有不可数多个互不微分同胚的怪异结构．这个惊人的结果发人深思．低维拓扑学由于其方法的特点，有时被称为几何拓扑学．还应注意，唐纳森定理是运用了理论物理学中的规范论而证明的，20世纪90年代，这个理论进一步被塞伯格（Seiberg，N.）和维滕（Witten，E.）发展，而使四维拓扑学进一步深入．

拓扑学现已逐步渗透到现代数学的几乎所有的分支，并可应用到物理、化学、生物以及经济学等学科．虽然拓扑学的结论本质上是定性的，但理论上往往极为重要．例如，不动点定理被推广到分析学中而成为某些类方程解的存在性的判据．直接在其他学科的应用可举核酸双螺旋的识别用到扭结理论，晶体和液晶的“缺陷”分类用到某些齐性空间同伦群的计算，集成电路布线应用示嵌理论等．目前这个渗透到其他学科的过程还在加速和加深，使20世纪数学面貌发生巨大变化．因此早已有人断言，“20世纪将作为拓扑学的世纪而载入数学史册”［法国数学家迪厄多内（Dieudonné，J.）］．

撰　稿　干丹岩
审　阅　姜伯驹

组　合　学

组合学(combinatorics)　亦称组合数学,数学的一个分支.它所研究的是数(shǔ)的技巧.虽然数(shǔ)数始于以结计数的远古时代,由于那时人的智力的发展尚处于低级阶段,谈不上有什么技巧.随着人们对于数的了解和研究,在形成与数密切相关的数学分支的过程中,如数论、代数、函数论以至泛函的形成与发展,逐步地从数的多样性发现数(shǔ)的多样性,产生了各种数(shǔ)数的技巧.同时,在人们对于形有了深入的了解和研究的基础上,在形成与形密切相关的各种数学分支的过程中,如几何学、拓扑学以至范畴论的形成与发展,逐步地从形的多样性也发现了数(shǔ)形的多样性,产生了各种数(shǔ)形的技巧.近代的集合论、数理逻辑等反映了潜在的数与形之间的结合.而现代的代数拓扑和代数几何等则将数与形密切地联系在一起了.这些,对于以数(shǔ)的技巧为中心课题的近代组合学的形成与发展都产生了而且还将会继续产生深刻的影响.

由此观之,组合学与其他数学分支有着必然的密切联系.它的一些研究内容与方法来自各个分支也应用于各个分支.当然,组合学与其他数学分支一样也有其独特的研究问题与方法,它源于人们对于客观世界中存在的数与形及其关系的发现和认识.例如,中国古代的《易经》中用十个天干和十二个地支以六十为周期来记载月和年,以及在洛书河图中关于幻方的记载,是人们至今所了解的最早发现的组合问题.于11和12世纪间,贾宪就发现了二项式系数,杨辉将它整理记载在他的《续古抉奇法》一书中.这就是中国通常称的杨辉三角.事实上,于12世纪印度的婆什迦罗第二(Bhāskara,Ⅱ)也发现了这种组合数.13世纪波斯的哲学家曾讲授过此类三角.而在西方,帕斯卡(Pascal,B.)发现这个三角形是在17世纪中期.这个三角形在其他数学分支的应用也是屡见不鲜的.同时,帕斯卡和费马(Fermat,P.de)均发现了许多与概率论有关的经典组合学的结果.因此,西方人认为组合学开始于17世纪.组合学一词是德国数学家莱布尼茨(Leibniz,G.W.)在数学的意义下首次应用.也许,在那时他已经预感到了其将来的蓬勃发展.然而只有到了18世纪欧拉(Euler,L.)所处时代,组合学才可以说开始了作为一门科学的发展,因为那时,他解决了哥尼斯堡七桥问题,发现了多面体(首先是凸多面体,即平面图的情形)的顶点数、边数和面数之间的简单关系.现在已被人们称为欧拉公式.甚至,当今人们所称的哈密顿圈的首创者也应该是欧拉.这些不但使欧拉成为组合学的一个重要组成部分——图论而且也成为占据现代数学舞台中心的拓扑学发展的先驱.同时,他对导致当今组合学中的另一个重要组成部分——组合设计中的拉丁方的研究所提出的猜想,人们称为欧拉猜想,直到1959年才得到完全的解决.于19世纪初,高斯(Gauss,C.F.)提出的组合系数,今称高斯系数,在经典组合学中也占有重要地位.同时,他还研究过平面上的闭曲线的相交问题,由此所提出的猜想称为高斯猜想,它直到20世纪才得到解决.这个问题不仅贡献于拓扑学,而且也贡献于组合学中图论的发展.同在19世纪,由布尔(Boole,G.)发现且被当今人们称为布尔代数的分支已经成为组合学中序理论的基石.当然,在这一时期,人们还研究其他许多组合问题,它们中的大多数是娱乐性的.

20世纪初期,庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)联系多面体问题发展了组合学的概念与方法,导致了近代拓扑学从组合拓扑学到代数拓扑学的发展.于20世纪的中、后期,组合学发展之迅速也许是人们意想不到的.首先,于1920年费希尔(Fisher,R.A.)和耶茨(Yates,F.)发展了实验设计的统计理论,其结果导致后来的信息论,特别是编码理论的形成与发展.于1939年,坎托罗维奇(Канторович,Л.В.)发现了线性规划问题并提出解乘数法.于1947年丹齐克(Dantzig,G.B.)给出了一般的线性规划模型和理论,他所创立的单纯形方法奠定了这一理论的基础,阐明了其解集的组合结构.直到今天它仍然是应用得最广泛的数学方法之一.这些又导致以网络流为代表的运筹学中的一系列问题的形成与发展.开拓了人们目前称为组合最优化的一个组合学的新分支.在20世纪50年代,中国也发现并解决了一类称为运输问题的线性规划的图上作业法,它与一般的网络流理论确有异曲同工之妙.在此基础上又出现了国际上通称的中国邮递员问题.

另一方面,自1940年以来,生于英国的塔特(Tutte,W.T.)在解决拼方问题中取得了一系列有关图论的结果,这些不仅开辟了现今图论发展的许多新研究领域,而且对于20世纪30年代,惠特尼(Whitney,H.)提出的拟阵论以及人们称之为组合几何的发展都起到了核心的推动作用.应该特别提到的是在这一时期,随着电子技术和计算机科学的发展愈来愈显示出组合学的潜在力量.同时,也为组合学的发展提出了许多新的研究课题.例如,以大规模和超大规模集成电路设计为中心的计算机辅助设

计提出了层出不穷的问题.其中一些问题的研究与发展正在形成一种新的几何,目前人们称之为组合计算几何.关于算法复杂性的研究,自1961年库克(Cook,S.A.)提出NP完全性理论以来,已经将这一思想渗透到组合学的各个分支以至数学和计算机科学中的一些分支.

近20年来,用组合学中的方法已经解决了一些即使在整个数学领域也是具有挑战性的难题.例如,范·德·瓦尔登(Van der Waerden,B.L.)于1926年提出的关于双随机矩阵积和式猜想的证明;希伍德(Heawood,P.J.)于1890年提出的曲面地图着色猜想的解决;著名的四色定理的计算机验证和扭结问题的新组合不变量发现等.在数学中已经或正在形成着诸如组合拓扑、组合几何、组合数论、组合矩阵论、组合群论等与组合学密切相关的交叉学科.此外,组合学也正在渗透到其他自然科学以及社会科学的各个方面,例如,物理学、力学、化学、生物学、遗传学、心理学以及经济学、管理学甚至政治学等.

根据组合学研究与发展的现状,它可以分为如下五个分支:经典组合学、组合设计、组合序、图与超图和组合多面形与最优化.由于组合学所涉及的范围触及到几乎所有数学分支,也许和数学本身一样不大可能建立一种统一的理论.然而,如何在上述的五个分支的基础上建立一些统一的理论,或者从组合学中独立出来形成数学的一些新分支将是对21世纪数学家们提出的一个新的挑战.

在中国当代的数学家中,较早地在组合学中的不同方面作出过贡献的有华罗庚、吴文俊、柯召、万哲先、张里千和陆家羲等.其中,万哲先和他领导的研究组在有限几何方面的系统工作不仅对于组合设计而且对于图的对称性的研究都有影响.陆家羲的有关不交斯坦纳三元系大集的一系列的文章不仅解决了组合设计方面的一个难题,而且他所创立的方法对于其后的研究者也产生了和正产生着积极的作用.

组合数学(combinatorial mathematics)　即“组合学”.

组合论(combinatorial theory)　组合学的一部分,它主要包括经典组合学与组合设计.

离散数学(discrete mathematics)　现代数学的一个分支.凡是以不连续(即离散)现象为研究对象的数学都属于离散数学.它的内容主要包括:组合数学、算法的理论与分析、编码理论、数理逻辑中的命题逻辑、谓词逻辑、集合代数、模糊集论;代数中的有限群论、环论、域论、格论和布尔代数、有限几何;微分方程中的计算理论;以及离散型概率等.离散数学的建立和形成与计算机科学的发展是密切相关的.随着现代科学技术的发展,特别是计算机的广泛应用,离散数学越来越受到重视,而且发展很快.

撰　稿　刘彦佩
审　阅　徐利治　颜基义

经典组合学

经典组合学(classic combinatorics)　亦称组合分析.组合学中的经典部分.它与许多数学分支在内容上有交叉,目前还难以在一个统一的数学理论的范畴内进行表述和研究.大体上说,经典组合学是研究将某种离散对象按某个确定的约束条件进行安排的问题.一个符合确定的约束条件的安排称为一个特定安排.经典组合学的内容可分为三大部分:

1.计数,包括生成函数(也称母函数)、反演理论和有限差分计算.

2.序理论,包括有限偏序集和格,以及霍尔定理和拉姆齐定理等存在性定理.

3.布局,包括正交拉丁方、区组设计、正交表、阿达马矩阵、差集等.

经典组合学常讨论以下三个问题,即特定安排的存在性问题、特定安排的计数问题和寻求在某个优化准则下的最优解.

经典组合学也是数学的一个古老的分支.约在公元前2200年,中国就有所谓洛书河图,即一种“用整数1,2,3,4,5,6,7,8,9,排成的3×3方阵,使得每行每列以及两条对角线中的各数之和都是同一个数”的特定安排.传说洛书是画在神龟背上的.若用整数表出,则为著名的“农神”幻方

$$\begin{bmatrix}4&9&2\\3&5&7\\8&1&6\end{bmatrix}.$$

于11和12世纪间,宋人贾宪发现了二项式系数之后,被杨辉记载到他的著作中,并且得到了较广泛的应用.这就是所谓杨辉三角.在12世纪,印度的婆什迦罗第二(Bhāskara,Ⅱ)也发现了这个组合数.于19世纪,德国数学家高斯(Gauss,C.F.)又发现了另一种重要的组合数,这就是所谓高斯系数.在现代,组合的方法已在计算机科学、运输、信息处理、工业计划、电气工程、试验设计、抽样、编码、遗传学、政治科学、考古学和其他领域被广泛地应用,并取得了巨大的进展.

组合分析(combinatorial analysis)　即“经典组合学”.

特定安排(specified arrangement)　见“经典组合学”.

计数问题(problem of enumeration)　组合学中的一个基本问题.把某种离散对象按某个特定的

约束条件进行安排，确定合乎这种约束条件的安排的数目. 在组合学中，常用的计数工具有：生成函数、容斥原理、默比乌斯反演定理和波利亚定理等.

加法法则(rule of sums)　计数理论的基本法则之一. 若$\{A_i|i=1,2,\cdots,n\}$是两两不相交的有限集的有限族，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|.$$

换句话说，若计数的对象可以分为互不相交的n类情形，每类的对象都是有限数时，则对象的总个数等于每类对象的个数之和. 这里及以后，对任一有限集A，$|A|$表示A中元素的个数.

乘法法则(rule of products)　计数理论的基本法则之一. 若$\{A_i|i=1,2,\cdots,n\}$是有限集的有限族，则笛卡儿积$\prod_{i=1}^{n}A_i$的计数

$$\left|\prod_{i=1}^{n}A_i\right|=\prod_{i=1}^{n}|A_i|.$$

换句话说，若完成一事件要依次经过n个步骤，且在完成前$i-1$个步骤的情况下，完成第i个步骤有n_i种方法，则完成该事件的方法共有$n_1n_2\cdots n_n$种.

相等法则(rule of equality)　计数理论的基本法则之一. 若N和R都是有限集，而且它们之间有一种一一映射关系，则$|N|=|R|$. 换句话说，若两个有限集有一一对应关系，则它们每个所含元素的个数相等.

殊途计数法则(rule of counting in two ways)　计数理论的基本法则之一. 若$G(V_1\cup V_2,E)$是一有限二部图，设无边的二顶点集为V_1和V_2，以$\gamma(v)$表与顶点v关联的边数，则

$$\sum_{v\in V_1}\gamma(v)=\sum_{v\in V_2}\gamma(v).$$

换句话说，用不同方法计数同一对象，计数的结果相等.

排列(permutation)　亦称置换，一类基本组合数. 从有限集中有序地选出若干个元，称为排列. 从n元选出$r(\leqslant n)$元的排列数为

$$P_r^n=n(n-1)\cdots(n-r+1).$$

若$r=n$，则全排列数等于$n!$. 排列数P_r^n受$n\geqslant r\geqslant 1$的限制. 为了解决问题的需要，可以加以扩充. 定义：若$n\geqslant r=0$，$P_r^n=1$；若$0\leqslant n<r$，$P_r^n=0$.

置换(permutation)　即“排列”.

可重排列(permutation with repetition)　一类组合数. 从非空集合$X=\{1,2,\cdots,n\}$中，每次取出r个元素，元素允许重复且按一定顺序排成一列，这种排列称为集合X的一个r可重排列. 集合X的r可重排列的总数为n^r.

多重集(multiset)　允许有相同元的有限集. 多重集S常记为$S=\{i^{k_i}|i=1,2,\cdots,n\}$，$k_i$表示元$i$的个数，称为元$i$的重数. 多重集$S$的排列数为

$$\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}.$$

多重集S的排列称为集$[1,n]$的$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$排列，或多重排列，其中$[1,n]=\{1,2,\cdots,n\}$.

多重排列(mulli-permutation)　见“多重集”.

多项式系数(multinomial coefficient)　一类组合数. 多项式$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$的展开式中，项$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$的系数. 记为

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_m}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!},$$

这里$n_1+n_2+\cdots+n_m=n$. 多项式系数的组合意义如下：将n个可分辩的球，分放到m个不同的盒子T_1，T_2，$\cdots$，T_m中，在T_1中放n_1个，在T_2中放n_2个，$\cdots$，在T_m中放n_m个，而$n_1+n_2+\cdots+n_m=n$，若在同一盒子中不计球的次序，则共有

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_m}$$

种放法. 另外，多重集$\{x^{n_i}|i=1,2,\cdots,m\}$的全排列数等于

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_m},$$

其中

$$\sum_{i=1}^{m}n_i=n.$$

组合(combination)　组合学的基本概念. 从有限集中不计次序地选出若干元称为组合. 从n元选出$r(r\leqslant n)$元的组合数为

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

组合数$\binom{n}{r}$对参数n,r有取值的限制条件$n\geqslant r\geqslant 1$. 为了解决问题的需要，可以加以扩充. 定义：若$r=0$，$\binom{n}{r}=1$；若$0\leqslant n<r$，或$r<0\leqslant n$，$\binom{n}{r}=0$；若$n<0$且$r>0$，

$$\binom{n}{r}=(-1)^r\binom{|n|+r-1}{r};$$

若$n<0$，且$r<0$，

$$\binom{n}{r}=(-1)^{n+r}\binom{|r|-1}{|n|-1}.$$

可重组合(combination with repetition)　一类组合. 从非空集合$X=\{1,2,\cdots,n\}$中，每次取出r个元素，允许元素重复，且不计顺序. 这种组合称为集合X的一个r可重组合. 集合X的r可重组合的总数为

$$\binom{n+r-1}{r}.$$

组合恒等式(combinatorial identity)　表示二项式系数之间关系的恒等式. 下面为一些常见的组合恒等式:

1. $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\cdots+\binom{k-1}{k-1}=\binom{n}{k}$.

2. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$.

3. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$.

4. $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots$
$=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}$.

5. $1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$.

6. $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}$.

7. $\binom{n}{r}=\binom{n-m}{0}\binom{m}{r}+\binom{n-m}{1}\binom{m}{r-1}$
$+\binom{n-m}{2}\binom{m}{r-2}+\cdots+\binom{n-m}{r}\binom{m}{0}$.

杨辉三角形(Yang Hui triangle)　亦称帕斯卡三角形. 指特定的数表. 把$(a+b)^n$的展开式中$a^{n-r}b^r$项的系数$\binom{n}{r}$排列成下表

n \ r	0	1	2	3	4	5	…
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

根据

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1},$$

每个系数是上一行同列及其左列相继的两系数的和. 这个表称为杨辉三角形. 杨辉在《详解九章算法》(约13世纪)中指出,这个三角形出自《释镇算书》,贾宪(约1200年)曾用过它,比帕斯卡(Pascal,B.)早了300多年.

帕斯卡三角形(Pascal triangle)　即"杨辉三角形".

生成函数(generating function)　亦称母函数、发生函数、计数函数. 一类形式幂级数. 它在组合数学中用以解决计数问题. 生成函数方法的系统描述,最早见于拉普拉斯(Laplace,P.-S.)1812年的名著《概率解析理论》. 普通生成函数和指数型生成函数是两种常用的生成函数. 记数列$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$为$\{a_n\}$. 数列$\{a_n\}$的普通生成函数(有时简称生成函数)定义为形式幂级数:

$$G\{a_n\}\equiv a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

数列$\{a_n\}$称为$G\{a_n\}$的普通生成数列. 这里,变量x一般取自实数域或复数域,x也可看做是一种形式变元,此时形式幂级数可按通常方式定义加法、乘法、形式微积分等运算,从而将形式幂级数看成元素,其全体做成一个交换环,在其中不涉及收敛性等问题. 两个形式幂级数$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$和$b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots$相等,当且仅当$a_k=b_k,k=0,1,2,\cdots$普通生成函数有下列运算法则:

1. $G\{a_k\}+G\{b_k\}=G\{a_k+b_k\}$.
2. $G\{a_k\}\cdot G\{b_k\}=G\{c_k\}$,这里

$$c_k\equiv a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_{k-1}b_1+a_kb_0,$$

称为数列$\{a_k\}$和$\{b_k\}$的卷积. 数列$\{a_n\}$的指数型生成函数定义为形式幂级数

$$\mathrm{Ge}\{a_n\}\equiv a_0+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n!}x^n+\cdots,$$

数列$\{a_n\}$称为$\mathrm{Ge}\{a_n\}$的指数生成数列(参见"指数型生成函数").

母函数(generating function)　即"生成函数".

发生函数(generating function)　即"生成函数".

普通生成函数(ordinary generating function)　见"生成函数".

普通生成数列(ordinary generating sequence)　见"生成函数".

数列的卷积(evolution of sequences)　见"生成函数".

指数生成数列(exponential generating sequence)　见"生成函数".

计数生成函数(enumerating generating function)　亦称计数式或计数函数. 一类非负整系数未定元带非负整数幂的级数. 若关于参数n(非负整数)计数的结果是a_n,则形式幂级数$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$称为依参数$n$展开的计数生成函数. 计数生成函数就是计数结果所成数列$a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$的普通生成函数. 若计数生成函数是有限项的,则其计数式就称为计数多项式(参见"邮票排列问题"和"天平问题").

计数式(enumerator)　即"计数生成函数".

计数函数(enumerating function)　见“计数生成函数”.

计数多项式(enumerating polynomial)　见“计数生成函数”.

指数型生成函数(exponential generating function)　一类计数函数. 记数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 为 $\{a_n\}$. 数列 $\{a_n\}$ 的指数型生成函数为幂级数

$$\mathrm{Ge}\{a_n\} \equiv a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}x^n + \cdots$$

(参见“生成函数”). 当利用生成函数的项的系数来计算与排列有关的数列时,利用指数型生成函数更加有利. 例如,$b_k = P(n,k)$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$,表示从 n 个不同元素中取 k 个不同元素的排列数,即 $P(n,k)=n!\ /(n-k)!$,那么

$$\mathrm{Ge}\{b_k\} = P(n,0) + P(n,1)x + P(n,2)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{P(n,n)x^n}{n!} = (1+x)^n.$$

重排(derangement)　亦称错排或更列. 一类特殊的排列. 若 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,满足 $a_i \neq i\ (i=1,2,\cdots,n)$,则称这样的排列为 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个重排. 用 D_n 表示 $(1,2,\cdots,n)$ 的重排的个数,它满足下列递归关系:$D_{n+1}=n(D_n+D_{n-1})$,并有初值 $D_1=0, D_2=1$,一般表达式为

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right).$$

D_n 有指数型生成函数

$$\sum_{n\geqslant 0} D_n \frac{t^n}{n!} = \mathrm{e}^{-t}(1-t)^{-1}.$$

前 10 个 D_n 的值如下表:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D_n	1	0	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	1334961

错排(derangement)　即“重排”.

更列(derangement)　即“重排”.

相遇问题(problem of encounter)　一类组合问题. 给定一个 n 元置换

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

若 $\varphi(i)=a_i=i$,则称置换 φ 在 i 处有一次相遇. 求 n 次置换中恰有 k 次相遇的置换的总数 $P_n(k)$ 的问题就是相遇问题. 求 $P_n(k)$ 可归结为求重排数 D_n 的问题. 实际上

$$P_n(0)=D_n, \quad P_n(k)=\binom{n}{k}=D_{n-k}.$$

相遇(encounter)　见“相遇问题”.

邮票排列问题(problem of stamp permutation)　一类确定某种排列数的问题. 寄信需邮票 n 分,今用面值为 a_1 分,a_2 分,$\cdots$,a_k 分 $(a_1<a_2<\cdots a_k\leqslant n)$ 的 k 种邮票各若干枚,依任意方式依次贴在信封右上角,其面值总和恰为 n 分,不同的排列方式为不同贴法,求有多少种邮票贴法?这就是邮票排列问题. 其计数多项式为 $(x^{a_1}+x^{a_2}+\cdots+x^{a_k})^n$. 若用 p 枚邮票依此粘贴,其值总和为 n 分,则贴法数等于 $(x^{a_1}+x^{a_2}+\cdots+x^{a_k})^p$ 展开式中 x^n 的系数. 因此,邮票贴法总数 A_n 的计数生成函数是

$$G\{A_n\} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty}(x^{a_1}+x^{a_2}+\cdots+x^{a_k})^p = \frac{1}{1-x^{a_1}-x^{a_2}-\cdots-x^{a_k}},$$

这里规定 $A_0=1$. A_n 等于 $G\{A_n\}$ 中 x^n 的系数. 满足递归关系:$A_n=A_{n-a_1}+A_{n-a_2}+\cdots+A_{n-a_k}$,这里规定 $A_i=0, i<0$.

天平问题(scales problem)　一个趣味组合计数问题. 设有重量分别为 a_1 克,a_2 克,$\cdots$,a_k 克的 k 个砝码,$a_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 均为整数. 今要在天平上衡量重为 n 克的重物,问有多少种不同衡重方法?若规定砝码只能加在天平一端,则不同方式总数 A_n 的计数生成函数是

$$G\{A_n\} = (1+x^{a_1})(1+x^{a_2})\cdots(1+x^{a_k});$$

若规定砝码可加在天平两端,则不同方式总数 B_n 的计数生成函数

$$G\{B_n\} = (x^{-a_1}+1+x^{a_1}) \times (x^{-a_2}+1+x^{a_2}) \cdots (x^{-a_k}+1+x^{a_k}).$$

例如 $a_1=1$ 克,$a_2=3$ 克,$a_3=4$ 克,$a_4=6$ 克,则 $n=6$ 克的不同方式 B_6 有 4 种,这里砝码放法〈天平左端,天平右端〉是:$\langle n,6\rangle$,$\langle n+1,3+4\rangle$,$\langle n+1+3,4+6\rangle$ 和 $\langle n+4,1+3+6\rangle$,其中 n 表示重 6 克的物体.

交错排列(alternative permutation)　多重集的一种全排列. 多重集 $M=\{a_i^{n_i} \mid i=1,2,\cdots,r\}$ 的相邻元相异的全排列称为交错排列. M 的交错排列数等于

$$f(n_1,n_2,\cdots,n_r) = \sum_{\substack{1\leqslant t_i\leqslant n_i \\ 1\leqslant i\leqslant r}} \prod_{1\leqslant i\leqslant r} (-1)^{n_i-t_i}\binom{n_i-1}{t_i-1}\frac{(t_1+t_2+\cdots+t_r)!}{t_1!t_2!\cdots t_r!}.$$

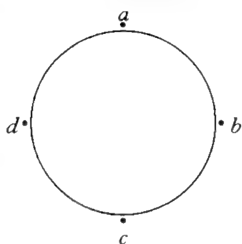
连贯(continuation)　多重集的一种全排列. 若 π 是多重集 $M=\{a_i^{n_i} \mid i=1,2,\cdots,r\}$ 的一个全排列,把 π 按元的同异分段,使得同一段内的元相同,而相邻段内的元相异,则每段称为一个连贯. M 的恰有 m 个连贯的全排列数为

$$F(n_1,n_2,\cdots,n_r)$$
$$=\sum\prod_{1\leqslant i\leqslant r}\binom{n_i-1}{m_i-1}f(m_1,m_2,\cdots,m_r),$$

其中求和跑遍满足条件 $m_1+m_2+\cdots+m_r=m,1\leqslant m_i\leqslant n_i,1\leqslant i\leqslant r$ 的所有 $(m_1,m_2,\cdots,m_r)$,

$$f(m_1,m_2,\cdots,m_r)$$
$$=\sum_{\substack{1\leqslant t_i\leqslant m_i\\1\leqslant i\leqslant r}}\prod_{1\leqslant i\leqslant r}(-1)^{m_i-t_i}\binom{m_i-1}{t_i-1}\frac{(t_1+t_2+\cdots+t_r)!}{t_1!t_2!\cdots t_r!}.$$

圆排列(circular permutation) 一类重要的排列. 把若干元排列在圆周上,就构成了一个圆排列. 这里并不指定圆周上哪一个位置上的元处于首位,因此圆排列与线排列不同. 有两种不同的圆排列. 第一种称为单绕向圆排列:对圆周上元的排列顺序,顺时针与反时针视为不同. 典型问题为手镯问题. 例如圆排列依顺时针绕向有 $abcd,bcda,cdab,dabc$,这四种(线)排列都表示同一个单绕向圆排列;但依反时针绕向有 $adcb,dcba,cbad,badc$,则表示与前者相异的一个单绕向圆排列. 用群的观点说,这是在循环群作用下保持不变的圆排列. 第二种称为双绕向圆排列:对圆周上元的排列顺序,顺时针与反时针视为相同. 典型问题为项链问题. 如上例中八种(线)排列都表示同一个双绕向圆排列. 用群的观点说,这是在两面体群作用下保持不变的圆排列. 求给定约束条件下所有不同圆排列的个数,称为圆排列问题. 其基本形式有两种:



1. 求从 r 种相异元中可重复地任取 n 个元所组成的圆排列数.

2. 求从 r 种相异元中任取 n 个元,满足下述条件的圆排列数:第 i 种元恰有 $b_i(i=1,2,\cdots,r)$个且

$$\sum_{i=1}^{r}b_i=n.$$

一般地可用反演公式或伯恩赛德引理来求解圆排列问题(参见"手镯问题"和"项链问题").

单绕向圆排列(circular permutation with one direction) 见"圆排列".

双绕向圆排列(circular permutation with two directions) 见"圆排列".

圆排列问题(problem of circular permutation) 见"圆排列".

手镯问题(problem of bracelet) 一种圆排列问题. 用 r 种不同颜色的珠子穿成手镯,求所有不同的手镯数. 这个问题称为手镯问题. 手镯问题应解释为第一种单绕向圆排列. 穿手镯的珠子可以从 r 种颜色中允许重复任取 n 个,也可以限定第 i 种颜色取 $b_i(i=1,2,\cdots,r)$个,

$$\sum_{i=1}^{r}b_i=n,$$

从而构成两类不同问题(参见"圆排列"). 两类手镯问题的解如下:

1. r 种颜色珠子中允许重复任取 n 个所成不同的手镯数

$$N(n,r)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}r^{(k,n)},$$

式中 (k,n) 为 k,n 的最大公约数.

2. 限定第 i 种颜色珠子取 $b_i\ (i=1,2,\cdots,r)$个,

$$\sum_{i=1}^{r}b_i=n,$$

所成不同的手镯数

$$N(n;b_1,b_2,\cdots,b_r)=\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{B}\frac{\left[\frac{(x,B)n}{B}\right]!}{\prod_{i=1}^{r}\left[\frac{(x,B)b_i}{B}\right]!},$$

式中 B 为 $b_1,b_2,\cdots,b_r$ 的最大公约数.

项链问题(problem of necklace) 一种圆排列问题. 用 r 种不同颜色的珠子穿成项链,求所有不同的项链数. 这个问题称为项链问题. 项链问题应解释为第二种双绕向圆排列. 项链的珠子可以从 r 种颜色中允许重复任取 n 个,亦可以限定第 i 种颜色取 $b_i(i=1,2,\cdots,r)$个,

$$\sum_{i=1}^{r}b_i=n,$$

从而构成两类不同问题(参见"圆排列"). 两类项链问题的解如下:

1. r 种颜色珠子中允许重复任取 n 个所成不同的项链数

$$M(2n+1,r)=\frac{1}{2(2n+1)}\sum_{k=1}^{2n+1}r^{(k,2n+1)}+\frac{1}{2}r^{n+1},$$

$$M(2n,r)=\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}r^{(k,2n)}+\frac{1}{4}r^{n}(r+1),$$

这里 (k,x) 表示 k,x 的最大公约数.

2. 限定第 i 种颜色珠子取 b_i 个,$i=1,2,\cdots,r$,

$$\sum_{i=1}^{r}b_i=n,$$

所成不同的项链数,可分下列各种情形计算:若

$$\sum_{i=1}^{r}b_i=2n+1,$$

则当 b_i 中只有一例如 b_1 奇数,项链数

$$M(2n+1;b_1,b_2,\cdots,b_r)$$
$$=\frac{1}{2}N(2n+1;b_1,b_2,\cdots,b_r)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{n!}{\left(\frac{b_1-1}{2}\right)\left(\frac{b_2}{2}\right)!\cdots\left(\frac{b_r}{2}\right)!},$$

当 b_i 中奇数多于一个时，

$$M(2n+1;b_1,b_2,\cdots,b_r)$$
$$=\frac{1}{2}N(2n+1;b_1,b_2,\cdots,b_r).$$

若 $\sum_{i=1}^{r}b_i=2n$，则当 b_i 全为偶数时，项链数

$$M(2n;b_1,b_2,\cdots,b_r)$$
$$=\frac{1}{2}N(2n;b_1,b_2,\cdots,b_r)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{n!}{\left(\frac{b_1}{2}\right)!\left(\frac{b_2}{2}\right)!\cdots\left(\frac{b_r}{2}\right)!};$$

当 b_i 中恰有两奇数，例如 b_1,b_2 为奇数，则

$$M(2n;b_1,b_2,\cdots,b_r)$$
$$=\frac{1}{2}N(2n;b_1,b_2,\cdots,b_r)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{(n-1)!}{\left(\frac{b_1-1}{2}\right)\left(\frac{b_2-1}{2}\right)!\left(\frac{b_3}{2}\right)!\cdots\left(\frac{b_r}{2}\right)!};$$

当 b_i 中奇数多于两个时，

$$M(2n;b_1,b_2,\cdots,b_r)=\frac{1}{2}N(2n;b_1,b_2,\cdots,b_r).$$

以上式中的 $N(2n+1;b_1,b_2,\cdots,b_r)$ 和 $N(2n;b_1,b_2,\cdots,b_r)$ 为第二类手镯数(参见“手镯问题”).

夫妻问题(problem of mate)　一种圆排列问题. 吕卡(Lucas, F.-É.-A.)于 1891 年提出的一个趣味组合问题. 有 n 个丈夫和他们的妻子围坐在一张圆桌旁，要使男女依次交错入坐，且使没有一个妻子坐在她的丈夫旁边，求这样的入坐方法总数 $T(n)$. 这就是夫妻问题. 不妨让妇女先入坐，共有 $2n!$ 种方式，然后丈夫再入坐. 设妇女已入坐并按环形顺序给以 $1,2,\cdots,n$ 的编号. 把第 i 号妇女的丈夫编号为第 i 号，把第 i 号妇女和第 $i+1$ 号妇女间的位置称为第 i 号位置($i<n$)，第 n 号和第 1 号妇女间的位置称为第 n 号位置. 现假定男子也已入坐，坐在第 i 号位置的丈夫的编号为 a_i，按要求 $a_i\neq i$ 和 $i+1$(当 $i\leqslant n-1$ 时)，$a_n\neq n$ 和 1. 即要求排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 使得表

$$\begin{matrix}1, & 2, & 3, & \cdots, & n-1, & n\\ 2, & 3, & 4, & \cdots, & n, & 1\\ a_1, & a_2, & a_3, & \cdots, & a_{n-1} & a_n\end{matrix}$$

中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 与同列中前两行之数无一相重. 记这样的排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的总数为 U_n，U_n 称为夫妻数，

$$U_n=n!-\frac{2n}{2n-1}\binom{2n-1}{1}(n-1)!$$
$$+\frac{2n}{2n-2}\binom{2n-2}{2}(n-2)!-\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{2n}{n}\binom{n}{n}0!,$$

$n\geqslant 2$，从而 $T(n)=2n!\,U_n$. 易知，$U_2=0$，$U_3=1$，$U_4=2$，$U_5=13$，$U_6=80$，$U_7=579$.

夫妻数(mate number)　见“夫妻问题”.

形式幂级数(formal power series)　一种不考虑收敛性的级数. 对于数列 $\{a_n|n=0,1,2,\cdots\}$，取级数

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

与它相联系. $G(x)$ 中的 x 是一个符号或不定元，因为不考虑收敛性，故称 $G(x)$ 为形式幂级数. 对于所有形式幂级数的集，定义加法和乘法. 若

$$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\quad C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,$$

则

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,a_n=b_n+c_n\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$A(x)$ 为 $B(x)$ 与 $C(x)$ 之和；又

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n,p_n=b_nc_0+b_{n-1}c_1+\cdots+b_0c_n$$
$$(n=0,1,2,\cdots),$$

$P(x)$ 为 $B(x)$ 与 $C(x)$ 之积. 具有这样的加法与乘法的所有形式幂级数之集成为环. 它的代数称为柯西代数.

柯西代数(Cauchy algebra)　见“形式幂级数”.

阶乘函数(factorial function)　一类特殊的函数. 函数 $[x]^n=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$ $(n\geqslant 1$, $[x]^0=1)$ 称为升阶乘函数；函数 $[x]_n=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ $(n\geqslant 1$, $[x]_0=1)$ 称为降阶乘函数，这里 $x\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{N}$，特别地，记 $[n]_n=n!$. 升、降阶乘函数统称阶乘函数. 幂函数 x^n，以及升、降阶乘函数 $[x]^n$ 和 $[x]_n$ 是组合学中三个基本的计数函数. 升阶乘函数 $[x]^n$ 的组合学意义：将 n 个可分辨的球，分放到 x 个有序盒子中，每个盒子可放入的球数不限，其放法总数等于 $[x]^n$. 降阶乘函数 $[x]_n$ 的组合学意义：集合 $S=\{1,2,\cdots,x\}$ 的 n 元排列的个数等于 $[x]_n$. 三基本计数函数之间的关系如下：若 $[x]_n=S_1(n,0)+S_1(n,1)x+S_1(n,2)x^2+\cdots+S_1(n,n)x^n$，则系数 $S_1(n,k)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 为第一类斯特林数；反之，若 $x^n=S_2(n,0)+S_2(n,1)[x]_1+S_2(n,2)[x]_2+\cdots+S_2(n,n)[x]_n$，则系数 $S_2(n,k)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 为第二类斯特林数；若 $[x]^n=L'(n,0)+L'(n,1)[x]_1+L'(n,2)[x]_2+\cdots+L'(n,n)[x]_n$，则系数 $L'(n,k)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 为带符号的拉氏数. 升阶乘函数 $[x]^n$ 和降阶乘函数 $[x]_n$ 在组合分析、有限差分中的地位与幂级数 x^n 在数学分析中的地位具有同样的重要性.

升阶乘函数(increase factorial function)　见

"阶乘函数".

降阶乘函数(decrease factorial function) 见"阶乘函数".

布利萨德算法(Blissard's calculus) 亦称哑运算.一种特殊的符号演算法.它是英国数学家布利萨德(Blissard,J.)创造的.设数列$\{a_k\}$,$\{b_k\}$,$\{c_k\}$($k=0,1,2\cdots$)的指数型生成函数分别为

$$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_kx^k}{k!},$$

$$B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_kx^k}{k!},$$

$$C(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_kx^k}{k!}.$$

若$a_k=a^k$,$b_k=b^k$,$c_k=c^k$,则$A(x)=e^{ax}$,$B(x)=e^{bx}$,$C(x)=e^{cx}$.按此算出结果后,再将相应指数移到下标位置,可以得出问题的真实答案.例如,将该算法用于指数型生成函数之积,若$A(x)B(x)=C(x)$,$A(x)=e^{ax}$,$a_k=a^k$,$B(x)=e^{bx}$,$b_k=b^k$;$C(x)=e^{cx}$,$c_k=c^k$,则$e^{cx}=C(x)=A(x)B(x)=e^{ax}\cdot e^{bx}=e^{(a+b)x}$,从而$c_k=(a+b)^k$,由此得出

$$c_k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a_{k-i}b_i.$$

哑运算(umbral calculus) 即"布利萨德算法".

贝尔多项式(Bell's polynomial) 一种组合多项式.即形如

$$Y_n(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\sum\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\left(\frac{y_1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{y_2}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{y_n}{n!}\right)^{k_n}$$

的多项式,其中的和式是对$k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n$的所有解$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$求的.前几个贝尔多项式如下:

$$Y_1(y_1)=y_1,Y_2(y_1,y_2)=y_2+y_1^2,$$

$$Y_3(y_1,y_2,y_3)=y_3+3y_2y_1+y_1^3,$$

$$Y_4(y_1,y_2,y_3,y_4)=y_4+4y_3y_1+3y_2^2+6y_2y_1^2+y_1^4.$$

复合函数的高阶导数可通过贝尔多项式表出.设$A(t)=f(g(t))$,令

$$D_t=\frac{d}{dt},\ A_n=D_t^nA(t),\ [D_u^nf(u)]_{u=g(t)}=f_n,$$

则

$$A_n=Y_n(fg_1,fg_2,\cdots,fg_k),$$

$$f^k\equiv f_k\ (k=1,2,\cdots,n).$$

二项多项式序列(binomial polynomial sequence) 一类具有特定性质的多项式序列.即使得$p_0(x)=1$的多项式序列$\{p_n(x)\mid n\in\mathrm{N}\}$.它有性质

$$p_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(x)p_{n-k}(y),$$

其中$x,y\in\mathrm{R}$,即实变量.例如,$\{x^n\}$,$\{[x]_n\}$,$\{[x]^n\}$都是二项多项式序列(参见"阶乘函数").

正规化多项式序列(normalized polynomial sequence) 一种满足一定条件的多项式序列.若一个多项式序列$\{p_n(x)\mid n\in\mathrm{N}\}$满足:$p_0(x)=1$,$p_n(0)=0$,$\forall\ n\geqslant1$,则称它是正规化的.任何二项多项式序列都是正规化多项式序列.但逆命题不成立.

差分法(calculus of differences) 一种运算方法.设x是在域D中变动的实变数,y是定义在D上的x的函数.给出$y(0),y(1),\cdots,y(n),\cdots$都是有限值,定义$\Delta y(n)=y(n+1)-y(n)$为$y$的一阶差分;一阶差分的一阶差分为二阶差分,即$\Delta^2y(n)=\Delta y(n+1)-\Delta y(n)$,于是可以得到$k$阶差分$\Delta^ky(n)=\Delta(\Delta^{k-1}y(n))=\Delta^{k-1}y(n+1)-\Delta^{k-1}y(n)$.把各阶差分列成下表:

$$y(0),y(1),y(2),y(3),\cdots\cdots\cdots,\ y(n),\ \cdots\cdots$$

$$\Delta y(0),\Delta y(1),\Delta y(2),\cdots\cdots\cdots,\Delta y(n-1),\cdots\cdots$$

$$\Delta^2y(0),\Delta^2y(1),\cdots\cdots,\Delta^2y(n-2);\cdots\cdots$$

$$\Delta^3y(0),\cdots\cdots,\Delta^3y(n-3),\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^ny(0)\cdots$$

这个表称为差分表.特别是$y(0)$至$y(n)$以及$\Delta^ny(0)$之间的项,构成了差分三角形.关于差分三角形有牛顿公式

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^ky(0)$$

以及

$$\Delta^ny(0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}y(n-k).$$

差分法在组合数学、函数逼近、应用数学等许多方面都有应用.

差分表(table of differences) 见"差分法".

差分三角形(triangle of differences) 见"差分法".

牛顿差分公式(Newton formula of differences) 见"差分法".

斯特林数(Stirling number) 一类组合数.两类基底函数$\{[x]_n\}$和$\{x^n\}$互相变换的系数.设

$$[x]_n=\sum_{k\geqslant0}S_1(n,k)x^k,$$

$$x^n=\sum_{k\geqslant0}S_2(n,k)[x]_k,$$

这里约定

$$S_1(0,0)=S_2(0,0)=1,$$

$$S_1(n,k)=S_2(n,k)=0,$$

其中$0<k\leqslant n$.这两个展开式中的系数$S_1(n,k)$和$S_2(n,k)$分别称为第一类和第二类斯特林数,统称斯特林数.它们满足:

1. 递归关系

$$S_1(n+1,k)=S_1(n,k-1)-nS_1(n,k);$$
$$S_2(n+1,k)=S_2(n,k-1)+kS_2(n,k).$$

2. 指数型发生函数

$$\frac{[\log(1+t)]^k}{k!}=\sum_{n=k}^{\infty}S_1(n,k)\frac{t^n}{n!};$$
$$\frac{(e^t-1)^k}{k!}=\sum_{n=k}^{\infty}S_2(n,k)\frac{t^n}{n!}.$$

3. 正交关系

$$\sum_{k=j}^{n}S_1(n,k)S_2(k,j)=\delta_{nj},$$

其中 δ_{ij} 为克罗内克符号.

4. 第二类斯特林数可表示为零的高阶差分. 即，$S_2(n,k)=(1/k!)\Delta^k 0^n$（参见“零的差分”）.

因为阶乘函数 $[x]_n$ 在组合分析和有限差分法中的地位，与幂级数 x^n 在数学分析中的地位具有同等的重要性，所以斯特林数在组合学和统计计算等方面有着广泛的应用.

前几个斯特林数的数值表如下：

$S_1(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$n=0$	1								
1	0	1							
2	0	−1	1						
3	0	2	−3	1					
4	0	−6	11	−6	1				
5	0	24	−50	35	−10	1			
6	0	−120	274	−225	85	−15	1		
7	0	720	−1764	1624	−735	175	−21	1	
8	0	−5040	13068	−13132	6769	−1960	322	−28	1

$S_2(n,k)$	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$n=0$	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

第一类斯特林数(Stirling number of the first kind)　见“斯特林数”.

第二类斯特林数(Stirling number of the second kind)　见“斯特林数”.

连带斯特林数(associated Stirling number)　一类组合数. 第一类连带斯特林数 $d(n,k)$ 的组合意义是特殊的 n 元置换，它具有 k 个不相交循环，且其中没有一个是单元循环，这样的置换的个数是 $d(n,k)$. 关于 $d(n,k)$，有递归关系

$$d(n+1,k)=nd(n,k)+nd(n-1,k-1).$$

第一类连带斯特林数 $d(n,k)$ 的值如下表：

n \ k	0	1	2	3
0	1			
1	0	0		
2	0	1		
3	0	2		
4	0	6	3	
5	0	24	20	
6	0	120	130	15
7	0	720	924	210

第二类连带斯特林数为 $b(n,k)$. 它也满足递归关系

$$b(n+1,k)=kb(n,k)+nb(n-1,k-1).$$

第二类连带斯特林数 $b(n,k)$ 的值如下表：

n \ k	0	1	2	3
0	1			
1	0	0		
2	0	1		
3	0	1		
4	0	1	3	
5	0	1	10	
6	0	1	25	15
7	0	1	56	105

第一、二类连带斯特林数统称连带斯特林数.

拉氏数(Lah number)　一类组合数. 由恒等式

$$(x)_n=\sum_{k=0}^{n}L(n,k)[x]_k$$

或

$$(x)_n=\sum_{k=0}^{n}L(n,k)(-x)_k$$

定义的拉氏数 $L(n,k)$ 称为带符号的拉氏数

$$L(n,k)=(-1)^n\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}n\quad(k\geqslant 0).$$

由恒等式

$$(x)^n=\sum_{k=0}^{n}L'(n,k)(x)_k$$

定义的拉氏数 $L'(n,k)$ 称为不带符号的拉氏数

$$L'(n,k)=\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}\quad(k\geqslant 1).$$

带符号、不带符号的两种拉氏数 $L(n,k)$ 和 $L'(n,n)$ 统称拉氏数.

零的差分(difference of zero)　函数的一种特殊运算. 函数 $y(x)=x^r$,在差分表上 0^r 的各阶差分 $\Delta^m 0^r$ 都是零的差分. 于是有

$$\Delta^m 0^r = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^r,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{j=1}^{k}\binom{n+1}{j+1}\Delta^j 0^k.$$

差分算子(difference operator)　一种算子. 对任一实函数$f(x)$,若记

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x),$$

则称 Δ 为差分算子.

移位算子(translation operator)　一种算子. 对任一个实函数 $f(x)$,若记 $Ef(x)=f(x+1)$,则称 E 为移位算子. 若对$f(x)$构造差分表,则 E 表示向右移动一位. E 与 Δ 的关系是 $E^k=(\Delta+1)^k$.

贝尔数(Bell number)　一类组合数. 若

$$Y_n=S_2(n,1)+S_2(n,2)+\cdots+S_2(n,n),$$

式中 $S_2(n,k)$为第二类斯特林数,则 Y_n 称为贝尔数. 贝尔数 Y_n 的组合学解释是:n 元集合 S 的不同分划的个数. 贝尔数满足递归关系

$$Y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y_k,$$

这里规定 $Y_0=1$. 贝尔数的指数型生成函数为

$$e^{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Y_n}{n!}x^n.$$

展开后得

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}i^n.$$

前几个贝尔数值如下表:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Y_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140

伯努利数(Bernoulli numbers)　一类组合数. 在 18 世纪,由瑞士数学家约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann I)所引入. 伯努利数记为 B_n,它由指数型发生函数

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{x^n}{n!}$$

来定义. B_n 可由第二类斯特林数 $S_2(n,k)$表出

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k k!}{k+1}S_2(n,k),$$

因此也有

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\Delta^k 0^n}{k+1}.$$

B_n 满足下列递归关系:

$$B_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j\quad(n\geqslant 2).$$

当 $r>1$ 时,$B_{2r+1}=0$. 前 20 个伯努利数如下表:

n	0	1	2	4	6	8	10
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$

12	14	16	18	20
$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$	$\frac{43867}{798}$	$-\frac{174611}{330}$

吕卡数(Lucas number)　一类组合数. 由

$$F_1^*=1,\ F_2^*=3,\ F_n^*=F_{n-1}^*+F_{n-2}^*$$

所确定的数列$\{F_n^* \mid n=1,2,3,\cdots\}$的每个数 F_n^* 都称为吕卡数. 前几个吕卡数是 $F_1^*=1,F_2^*=3,F_3^*=4,F_4^*=7,F_5^*=11,F_6^*=18$ 等.

高斯系数(Gaussian coefficient)　一类组合数. 即形如

$$\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\cdots(1-q)}$$

的数,记为$\binom{n}{k}_q$,其中 q 为任一复数. 高斯系数有一系列与二项式系数相仿的等式. 如

$$\binom{n}{k}_q=\binom{n}{n-k}_q \text{ 及 } \binom{n}{k}_q=\binom{n-1}{k-1}_q+q^k\binom{n-1}{k}_q.$$

从而,高斯系数也称为高斯二项式系数. $\binom{n}{k}_q$ 的组合学解释是:当 $q=p^s$(p 为素数,s 为正整数)时,$\binom{n}{k}_q$ 表示有限域 GF(q)上 n 维向量空间的 k 维子空间的个数.

高斯二项式系数(Gauss binomial coefficient)　见"高斯系数".

伽罗瓦数(Galois number)　一类组合数. 伽罗瓦数定义为

$$G_{n,q} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_q,$$

式中$\binom{n}{k}_q$ 为高斯系数,$G_{n,q}$称为伽罗瓦数. 其组合学解释是:$G_{n,q}$等于有限域 GF(q)上的 n 维向量空间的子空间的个数.

容斥原理(principle of inclusion and exclusion)　亦称逐步淘汰原理、交叉分类原理等. 它是组合学中常用的一个计数工具. 设有 n 元集 S,对每个元 $a\in S$,指定惟一的权 $w(a)$,$w(a)\in F$,F 是包括有理数

在内的给定环.设有 n 个属性的集

$$P=\{a_i|i=1,2,\cdots,n\},$$

S 的每个元与 P 的一个确定子集相结合.以 $\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_r}\}$ 表 P 的一个 r 元子集,而且 $w(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_r})$ 表示 S 中同时具有每个属性 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_r}$ 的所有元的权之和,记

$$w(r)=\sum w(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_r}),$$

即 S 中那些同时具有 r 个属性的元的权之和.所谓容斥原理就是 S 中同时恰具有 P 中的 m 个属性的所有元的权之和

$$E(m)=\sum_{i=0}^{n-m}(-1)^i\binom{m+i}{m}w(m+i).$$

特别地,若 S 的每个元的权 $w(a)=1$,以 $N(a_1a_2\cdots a_r)$ 表示同时具有特性 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 的元数,$N(a_1'a_2'a_3'\cdots)$ 表示不具有 $a_1,a_2,\cdots$ 属性的元数,则 $N(a_1'a_2'a_3'\cdots)=N-N(a_1)-N(a_2)-N(a_3)-\cdots+N(a_1a_2)+N(a_1a_3)+N(a_2a_3)+\cdots-N(a_1a_2a_3)-\cdots$,所以,这个公式也称为逐步淘汰原理或交叉分类原理.

逐步淘汰原理(principle of inclusion and excursion) 即"容斥原理".

交叉分类原理(principle of inclusion and excursion) 即"容斥原理".

广容斥原理(generalized principle of inclusion and exclusion) 容斥原理的推广.若 S 是一个非空有限集,定义权函数 $w:S\to F$,F 是包含有理数的环,$P=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 是 m 个属性之集,$\bigcup_{i=1}^{n}P_i$ 是 P 的一个分划,$|P_i|=m_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$.对任意 n 个非负整数 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ $(r_i\leqslant m_i,i=1,2,\cdots,n)$,以 $w(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ 表示 S 中恰具有 P_i 中的某 $r_i(i=1,2,\cdots,n)$ 个属性的所有元的权之和,$w_{k_1,k_2,\cdots,k_n}$ 表示 S 中具有第 i 组属性集 P_i 的 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$ 个属性的所有元的权之和,则广容斥原理为 S 中恰具有第 i 组属性集 P_i 的 $r_i(i=1,2,\cdots,n)$ 个属性的所有元的权之和为

$$w(r_1,r_2,\cdots,r_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k_i=r_i}^{m_i}(-1)^{\sum_{j=1}^{n}(k_j-r_j)}\prod_{j=1}^{n}\binom{k_j}{r_j}w_{k_1,k_2,\cdots,k_n}.$$

这个公式是魏万迪于1980年得到的.

反演(inversion) 排列中的一个二元关系.设 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k$ 是由自然数构成的一无重复元的排列.对于序列中的某一对元素 (σ_i,σ_j),若 $i<j$ 有 $\sigma_i>\sigma_j$,则称它为 σ 上的一个反序.n 个元素恰有 r 个反序的排列数等于

$$\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q)}{(1-q)^n}$$

的展开式中 q^r 的系数.

序列反演(inversion of sequences) 亦称级数反演.一对序列或级数可以相互表示的互反关系.联系这种互反关系的公式称为反演公式.其一般形式如下:对于序列 $\{f(n)|n\in\mathrm{N}\}$ 和 $\{g(n)|n\in\mathrm{N}\}$,其中 N 为非负整数集合,若下列两式

$$g(n)=\sum_{r=0}^{n}c_{n,r}f(r)\quad(n\in\mathrm{N}),\tag{1}$$

$$f(n)=\sum_{r=0}^{n}d_{n,r}g(r)\quad(n\in\mathrm{N})\tag{2}$$

中有一式成立,则另一式也成立,这样的(1),(2)两式称为反演公式,也称(1)与(2)为一对互反公式.它等价于相应的系数矩阵 $C=(c_{ij})$ 和 $D=(d_{ij})$ 互逆.因此,只要构造出两个互逆的三角矩阵,就可写出相应的反演公式.例如,设 $\{p_n(x)\}$ 和 $\{q_n(x)\}$ 为两多项式序列,其中 $p_k(x)$ 与 $q_k(x)$ 为 k 次多项式.若对于 $n\in\mathrm{N}$ 满足:

$$q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}p_k(x),$$

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}q_k(x),$$

则有互反公式

$$\begin{cases}a_n=\sum\limits_k a_{n,k}b_k,\\ b_n=\sum\limits_k b_{n,k}a_k.\end{cases}$$

选择不同的多项式 $p_n(x)$ 和 $q_n(x)$,就得到各种各样的反演公式.以下为几对常见的反演公式:

1. 二项式反演公式

$$\begin{cases}a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k,\\ b_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a_k.\end{cases}$$

2. 斯特林反演公式

$$\begin{cases}a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}S_1(n,k)b_k,\\ b_n=\sum\limits_{k=0}^{n}S_2(n,k)a_k,\end{cases}$$

其中 $S_1(n,k)$ 和 $S_2(n,k)$ 分别为第一类和第二类斯特林数.

3. 伯努利反演公式

$$\begin{cases}a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k+1)^{-1}b_n,\\ b_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}a_k,\end{cases}$$

其中,B_i 为伯努利数.

4. 拉氏反演公式

$$\begin{cases} a_k = \sum_{k=0}^{n} L(n,k) b_k, \\ b_n = \sum_{k=0}^{n} L(n,k) a_k, \end{cases}$$

其中 $L(n,k)$ 为拉氏数.

5. 高斯二项式系数反演公式

$$\begin{cases} a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q b_k, \\ b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} \binom{n}{k}_q a_k, \end{cases}$$

其中 $\binom{n}{k}_q$ 为高斯二项式系数.

还有更一般的高而德-徐反演公式(参见"高而德-徐反演")等.

级数反演(inversion of series) 即"序列反演".

反演公式(inversion formula) 见"序列反演".

二项式反演(binomial inversion) 见"序列反演".

斯特林反演(Stirling inversion) 见"序列反演".

伯努利反演(Bernoulli inversion) 见"序列反演".

拉氏反演(Lah inversion) 见"序列反演".

高斯反演(Gauss inversion) 见"序列反演".

高而德-徐反演公式(Gould-Hsu's inversion formula) 一类序列反演公式. 该公式于1965年发现,而于1973年由高而德(Gould, H. W.)和徐利治合作发表. 若 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$ 是两个任意数列,使得

$$\psi(x,n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i x) \neq 0,$$

其中 x, n 为非负整数,而 $\psi(x,0)=1$,则有一对互反公式

$$\begin{cases} f_n = \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} \psi(k,n) g_k, \\ g_n = \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} (a_{k+1} + k b_{k+1}) \psi(n,k+1)^{-1} f_k. \end{cases}$$

这对互反公式还有相应的旋转形式

$$\begin{cases} f_n = \sum_k (-1)^k \binom{k}{n} \psi(n,k) g_k, \\ g_n = \sum_k (-1)^k \binom{k}{n} (a_{n+1} + n b_{n+1}) \psi(k,n+1)^{-1} f_k, \end{cases}$$

此处假定序列 $\{g_n\}$ 或 $\{f_n\}$ 中至多只有有限多项不为零,从而不存在发散性问题. 特别地,若分别选取:

$$\psi(k,n) = n!\binom{a+bk}{n},$$

$$\psi(k,n) = n!\binom{a+n+bk}{n},$$

$$\psi(k,n) = (a+bk)^n,$$

则可分别获得高而德型和阿贝尔型的互反公式,它们都包含二项式反演公式与拉氏反演公式为简单特例. 上述的一般互反公式可用以推证许多著名的组合恒等式,并可用于构造广义的牛顿型插值公式.

默比乌斯反演公式(Möbius inversion formula) 一种序列反演公式. 它是德国数学家默比乌斯(Möbius, A. F.)提出的,最早出现在初等数论的研究中. 设 $f(n)$ 和 $g(n)$ 是定义在自然数集 N 上的两个函数,反演公式

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$

称为(经典的)默比乌斯反演公式. 这里,记号"$\Leftrightarrow$"表示左右两式可以互推. 函数 $\mu(n)$ 是默比乌斯在1832年研究素数分布时首次引入的,后称它为(经典的)默比乌斯函数. 默比乌斯函数 $\mu(n)$ 定义如下:若 $n>1, n=p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}, e_i \in \mathrm{N}, i=1,2,\cdots,r$,其中 $p_i (i=1,2,\cdots,r)$ 为 n 的不同素因子,则

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & (n=1), \\ 0 & (e_i>1), \\ (-1)^r & (e_1=e_2=\cdots=e_r=1). \end{cases}$$

$\mu(n)$ 有如下性质

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & (n=1), \\ 0 & (n>1). \end{cases}$$

默比乌斯函数(Möbius function) 见"默比乌斯反演公式".

分配问题(distribution problem) 一类组合问题. 将 n 件物分到 r 个盒子里,求不同的分配方法数,就构成了分配问题. 所求方法数就是分配数. 对于物和盒子给定不同的规定条件,可以构成不同的分配问题. 基本条件是:

1. 物可辨(相异)或不可辨(相同).
2. 盒子可辨或不可辨.
3. 分到盒子里的物是有序的或无序的.
4. 允许有空盒,或不许有空盒.

物和盒子都是不可辨分配也称为分拆.

罗杰斯-拉马努金恒等式(Rogers-Ramanujan identity) 一类组合恒等式. 当 $|q|<1$ 时,下列一对恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{5n+1})^{-1}(1-q^{5n+4})^{-1},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{5n+2})^{-1}(1-q^{5n+3})^{-1}.$$

分别称为第一和第二罗杰斯-拉马努金恒等式. 其组合学意义分别如下：正整数 n 的分拆为任两部分至少相差 2 的分拆方法数，等于将 n 分拆为部分形如 $5m\pm1$ 的形式的分拆方法数；正整数 n 的分拆为任意两部分至少相差 2 并且每部分都大于 1 的分拆方法数，等于将 n 分拆为两部分形如 $5m\pm2$ 形式的分拆方法数.

戈登恒等式(Gordon's identity)　一类组合恒等式. 当 $1\leqslant i\leqslant k, k\geqslant 2, |q|<1$ 时

$$\sum_{n_1,n_2,\cdots,n_{k-1}>0}\frac{q^{N_1^2+N_2^2+\cdots+N_{k-1}^2+N_i+N_{i+1}+\cdots N_{k-1}}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}\cdots(q)_{n_{k-1}}}=\prod_{n\not\equiv 0,\pm i(\operatorname{mod}2k+1)}(1-q^n)^{-1},$$

其中

$$N_j=\sum_{i=j}^{k-1}n_i,$$

$$(q)_n=(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n),$$

这就是戈登恒等式. 其组合意义如下：若 $B_{k,i}(n)$ 表示正整数 n 的形如下列形式

$$(b_1,b_2,\cdots,b_s),\ b_j-b_{j+k-1}\geqslant 2,$$

且至多有 $i-1$ 个 b_j 等于 1 的分拆方法数，$A_{k,i}(n)$ 表示将 n 分拆为每部分形如 $\not\equiv 0,\pm i\ (\operatorname{mod} 2k+1)$ 的分拆方法数，则 $A_{k,i}(n)=B_{k,i}(n)\ (n=1,2,\cdots)$

雅可比三重积恒等式(Jacobi's triple product identity)　一类组合恒等式. 当 $z\neq 0, |q|<1$ 时,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}z^nq^{n^2}=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n})(1+zq^{2n+1})(1+z^{-1}q^{2n+1}),$$

称为雅可比三重恒等式.

欧拉五边形数定理(Euler's pentagonal number theorem)　一类关于组合恒等式的定理. 当 $|q|<1$ 时,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^mq^{\frac{m}{2}(3m-1)}(1+q^m)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^mq^{\frac{1}{2}m(3m-1)}.$$

它称为欧拉五边形数定理.

阿贝尔恒等式(Abel identity)　一类组合恒等式. 对所有的实数 x,y,z，等式

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x-kz)^{k-1}(y+kz)^{n-k}$$

称为阿贝尔恒等式.

常系数线性齐次递归关系(linear homogeneous recurrence relation with constant coefficients)　一种重要的递归关系. 数列 $\{a_n|n=0,1,2,\cdots\}$ 满足如下的递归关系 (R)：

$$a_n=C_1a_{n-1}+C_2a_{n-2}+\cdots+C_pa_{n-p}\ (n\geqslant p),$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_p$ 都是常数，且 $C_p\neq 0$. 方程

$$x^p-C_1x^{p-1}-C_2x^{p-2}-\cdots-C_p=0$$

称为 (R) 的特征方程；它的根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 称为 (R) 的特征根. (R) 的通解可分为下列两种情形：

1. 当特征根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 是 p 个不同根时，(R) 的通解是：$a_n=\lambda_1\alpha_1^n+\lambda_2\alpha_2^n+\cdots+\lambda_p\alpha_p^n$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 为任意常数.

2. 当特征根出现重根时，即，特征根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q$，其中 α_i 为 $u_i\ (i=1,2,\cdots,q)$ 重根，且 $u_1+u_2+\cdots+u_q=p$，从而 $\alpha_1^n,n\alpha_1^n,n^2\alpha_1^n,\cdots,n^{u_1-1}\alpha_1^n;\alpha_2^n,n\alpha_2^n,n^2\alpha_2^n,\cdots,n^{u_2-1}\alpha_2^n;\cdots;\alpha_q^n,n\alpha_q^n,n^2\alpha_q^n,\cdots,n^{u_q-1}\alpha_q^n$ 是 (R) 的 p 个解，此时 (R) 的通解是：

$$\begin{aligned}a_n=&(\lambda_1^{(1)}\alpha_1^n+\lambda_2^{(1)}n\alpha_1^n+\lambda_3^{(1)}n^2\alpha_1^n+\cdots+\lambda_{u_1}^{(1)}n^{u_1-1}\alpha_1^n)\\&+(\lambda_1^{(2)}\alpha_2^n+\lambda_2^{(2)}n\alpha_2^n+\lambda_3^{(2)}n^2\alpha_2^n+\cdots\\&+\lambda_{u_2}^{(2)}n^{u_2-1}\alpha_2^n)+\cdots+(\lambda_1^{(q)}\alpha_q^n+\lambda_2^{(q)}n\alpha_q^n\\&+\lambda_3^{(q)}n^2\alpha_q^n+\cdots+\lambda_{u_q}^{(q)}n^{u_q-1}\alpha_q^n),\end{aligned}$$

其中 $\lambda_i^{(j)}(i=1,2,\cdots,u;j=1,2,\cdots,q)$ 为 p 个任意常数. 给出 $a_0,a_1,\cdots,a_{p-1}$ 的一组初值，通解中 p 个常数完全确定.

斐波那契数(Fibonacci number)　一类组合数. 13 世纪，意大利数学家利奥纳特(Leonard)(他以斐波那契(Fibonacci,L.)这个名字闻名于世)在他 1202 年出版的《算盘书》中，提出了有趣的兔子问题：开始雌雄一对兔子，而每一对兔子过一个月将生产一对小兔子，问过 n 个月后共有多少对兔子？以 F_n 表示第 $n-1$ 个月中的兔子对数，称 F_n 为第 n 个斐波那契数，简称 F 数. 斐波那契数列 $F_0,F_1,F_2,\cdots,F_n,\cdots$ 满足下列递归关系 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n, n\geqslant 0$，和初始条件 $F_0=F_1=1$. 由此可得

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

F_n 的另一种二项式系数表示式为

$$F_n=\sum_k\binom{n-k}{k}.$$

F 数的组合学意义如下：F_n 等于集合 $S_{n-1}=\{1,2,\cdots,n-1\}$ 中不含两个相继整数的子集的个数. 斐波那契数列的头一些项为：1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,…. 斐波那契数列在最优搜索等问题中有重要的应用.

分拆(partition)　一类组合变换. 将正整数 n 表示为若干个正整数之和，即 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k, n_i>0\ (1\leqslant i\leqslant k)$. 若上述 n 的表示式是一个有序和，则称这样的分拆为 n 的一个有序分拆；反之，若上述 n 的表示式是无序的，则称这样的分拆为 n 的一个无序分拆，或简称分拆. 这里每个 n_i 称为分拆的部分，k 称为分拆的部分数. 正整数的分拆问题是数论和组合论的重要内容，它主要讨论在各种限制条件

下正整数 n 的不同分拆个数及其性质. 例如,以 $p_k(n)$ 表示 n 分为 k 部分的分拆数,$p(n)$ 表示所有可能的分拆数,即 $p(n)=p_1(n)+p_2(n)+\cdots+p_n(n)$. $p_k(n)$ 有下列递归关系:

$$p_k(n)=p_k(n-k)+p_{k-1}(n-k)+\cdots+p_1(n-k),$$

这里 $p_k(k)=p_1(n)=1$;当 $n<k$ 时,$p_k(n)=0$. $p(n)$ 有下列递归关系:

$$p(n)=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+\cdots+(-1)^{k-1}p\left(n-\frac{3k^2-k}{2}\right)+(-1)^{k-1}p\left(n-\frac{3k^2+k}{2}\right)+\cdots,$$

这里约定 $p(0)=1$. 利用上述递归关系可以分别计算 $p_k(n)$ 和 $p(n)$ 的值.

有序分拆(partition with order) 见"分拆".

无序分拆(partiton without order) 见"分拆".

卡塔朗数(Catalan number) 一个组合数. 一些组合计数问题可以归结为解下列形式的递归关系:$u_n=u_1u_{n-1}+u_2u_{n-2}+\cdots+u_{n-1}u_1$, $n\geqslant 2$, 且 $u_1=1$. 它的解为

$$u_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\quad(n=1,2,\cdots),$$

u_n 称为卡塔朗数. 它的生成函数是

$$G\{u_n\}=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

解下列这类问题都能得到卡塔朗数:

1. 把一个凸 $n+1$ 边形用 $n-2$ 条对角线将它分成互不重叠的三角形,这种分法的总数为 u_n.

2. 用 n 条互不相交的弦连结圆周上 $2n$ 个点的不同方式总数为 u_{n+1}.

3. 有 n 个端点(根点除外)的 3 阶平面植树的个数为 u_n.

4. n 个元 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不改变顺序组成连乘积,可以用 $n-1$ 个括号表示相乘的过程,所有不同过程的个数是 u_n.

5. 坐标平面上由 $O(0,0)$ 至点 $U(2n,0)$ 的路径,每段由格点 (i,j) 至 $(i+1,j+1)$ 或 $(i+1,j-1)$,所有在上半平面内且允许经过 x 轴上的点、而不许越过 x 轴的路径数等于 u_{n+1}.

6. 由 $O(0,0)$ 至 $U(2n,0)$ 的路径,但不允许中间经过 x 轴上的点,共有 u_n 条.

卡塔朗数的前几项如下:

$u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=2$, $u_4=5$, $u_5=14$,

$u_6=42$, $u_7=132$, $u_8=429$,

$u_9=1430$, $u_{10}=4862$.

置换的型(type of permutation) 对置换结构特征的描述. 任何一个 n 次置换 α 必可分解为不相交循环之积. 若不区别循环间的顺序,也不区别每个循环以哪个元列为首位,则 α 的这种分解是惟一的. 设 α 分解为 λ_1 个 1 元循环,λ_2 个 2 元循环,$\cdots$,λ_n 个 n 元循环之积,则有 $\lambda_1+2\cdot\lambda_2+\cdots+n\cdot\lambda_n=n$,并称 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$ 为置换 α 的型. n 次对称群 S_n 中,型 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$ 的置换的个数为

$$h(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}i^{\lambda_i}\cdot\lambda_i!},$$

它称为凯莱公式.

凯莱公式(Cayley formula) 见"置换的型".

置换群的循环指标(cyclic index of permutation group) 表示群的结构. 设 G 为 n 阶置换群,$\alpha\in G$,α 的型为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$,$1\cdot\lambda_1+2\cdot\lambda_2+\cdots+n\cdot\lambda_n=n$. 群 G 的循环指标定义为

$$Z(G;s_1,s_2,\cdots,s_n)=\frac{1}{|G|}\sum_{\alpha\in G}s_1^{\lambda_1}s_2^{\lambda_2}\cdots s_n^{\lambda_n}.$$

若 G 中的型为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$ 的置换共有 $C(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 个,则

$$Z(G;s_1,s_2\cdots,s_n)=\frac{1}{|G|}\sum_{(\Lambda)}C(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)s_1^{\lambda_1}s_2^{\lambda_2}\cdots s_n^{\lambda_n},$$

式中 (Λ) 表示置换的型 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$,其中 $\sum$ 对于所有不同的型求和,即对于 $\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=n$ 的所有非负整数解求和.

轨道(orbit) 一个集合在某置换群作用下的分类. 设对象集 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 被 n 阶置换群 A 作用,若对于元 $i,j\in X$,有 $\alpha\in A$,使 $\alpha(i)=j$,则 i,j 是等价的,记为 $i\sim j$. $\sim$ 为一等价关系. 在此等价关系下,X 可分解为若干等价类之并. 这里的等价类就称为 X 被 A 作用所分出的轨道. 伯恩赛德引理断言:轨道数

$$N(A)=\frac{1}{|A|}\sum_{\alpha\in A}\lambda_1(\alpha),$$

式中 $\lambda_1(\alpha)$ 是 α 分解为不相交循环之积中 1 元循环的个数,即当置换 α 的型是 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$ 时,$\lambda_1(\alpha)=\lambda_1$.

伯恩赛德引理(Burnside's lemma) 见"轨道".

函数式样(pattern of function) 亦称函数轨道. 映像的一种等价类. 用函数表示对象和函数的集在置换群作用下分为等价类,这是波利亚计数理论的主要特点. 设有限集 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 和有限或可数集 Y,Y 至少有 2 元,一置换群 A 作用于 X. 对于对象集 $Y^X=\{f\mid f:X\to Y\}$,定义幂群 $E^A=\{(\alpha,1)\mid\alpha\in A,1\in E\}$(1 为恒等群 E 中的恒等置换)对 f 的作用:$(\alpha,1)f(x)=f(\alpha x)$,$\forall\ x\in X$. 由此可确定 f 在 $(\alpha,1)$ 作用下的像 f'. 若有 $(\alpha,1)f=f'$,$\alpha\in A$,则 $f\sim f'$,$\sim$ 为一等价关系. 函数集 Y^X 在此等价关系下,

可分解为若干等价类，Y^X 为这些等价类之并. 波利亚定理断言：若 Y 为有限集，$|Y|=m$，且 n 阶置换群 A 的循环指标为 $Z(A;s_1,s_2,\cdots,s_n)$，则 Y^X 在幂群 E^A 下的等价类的个数为

$$Z(A;\underbrace{m,m,\cdots,m}_{n个}).$$

波利亚定理可以推广到不等权的情形. 仍设 Y 为可数集，至少包含 2 元. 定义权函数 $w:Y\to R$，$R\subseteq \mathrm{N}_0$，N_0 为非负整数集，且对于每个 $k\in R$，Y 中 k 的原像数，记为 c_k，是有限的. 记

$$c(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k,$$

$c(x)$ 为图形计数级数，即 Y 依权数展开的生成函数. 定义函数 $f\in Y^X$ 的权为

$$w(f)=\sum_{x\in X}w(f(x)),$$

若 $f\sim f'$，则必有 $w(f)=w(f')$，即，凡属于同一式样 F 的函数有相等的权. 因此，可定义式样的权 $w(F)=w(f)$，$f\in F$. 记

$$C(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k,$$

式中 C_k 是权为 k 的式样的个数. 于是，波利亚定理指出 $C(x)=Z(A;c(x),c(x^2),\cdots,c(x^n))$.

函数轨道(orbit of function)　即“函数式样”.

波利亚定理(Polya's theorem)　见“函数式样”.

德布莱英定理(de Bruijn's theorem)　波利亚定理的推广. 若两置换群 A 和 B 分别作用于两有限集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 和 $Y=\{y_1,y_2,\cdots y_m\}$，则可定义幂群 $B^A=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha\in A,\beta\in B\}$ 对函数集 $Y^X=\{f\mid f:X\to Y\}$ 的作用为 $(\alpha,\beta)f(x)=\beta(f(\alpha x))$. 若有 $(\alpha,\beta)f=f'$，则称 f,f' 是等价的，记为 $f\sim f'$. $\sim$ 为一等价关系. 于是，Y^X 被分为若干等价类之并，这些等价类称为函数式样或函数轨道. 德布莱英定理断言：函数式样的个数等于

$$\frac{1}{|B|}\sum_{\beta\in B}Z(A;c_1(\beta),c_2(\beta),\cdots,c_n(\beta)),$$

式中群 A 的循环指标为

$$Z(A;s_1,s_2,\cdots,s_n),\quad c_k(\beta)=\sum_{s|k}s\lambda_s,$$

其中 β 的型为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots m^{\lambda_m}$. 哈拉里(F. Harary)推广了德布莱英定理. 设 Y 为可数集，Y 至少含 2 元. 定义权函数 $w:Y\to R$，$R\subset\mathrm{N}_0$，N_0 为非负整数集；又定义函数 f 的权

$$w(f)=\sum_{x\in X}w(f(x)).$$

设 $k\in R$，Y 的子集 $Y_k=\{y\mid y\in Y,w(y)=k\}$，且 $|Y_k|$ 是有限的，$|Y_k|=C_k$. 若 $B(Y_i)=\{\beta(y)\mid\beta\in B,y\in Y_i\}$，则函数集 Y^X 被幂群 B^A 作用所分出的各个式样中的函数有等权的充分必要条件是 $B(Y_i)=Y_i$，$i\in R$. 若条件 $B(Y_i)=Y_i$，满足 $i\in R$，则可定义式样 F 的权为 $w(F)=w(f)$，其中 $f\in F$. 记 $\beta=\prod_{i\in R}\beta_i$，式中 $\beta_i(y)=\beta(y)$，这里 $y\in Y_i$. 若权为 k 的式样为 C_k 个，则式样依权展开的生成函数为

$$C(x)=\sum_k C_kx^k.$$

于是

$$C(x)=\frac{1}{|B|}\sum_{\beta\in B}Z(A;c_1(\beta,x),c_2(\beta,x),\cdots,c_n(\beta,x)),$$

式中 $Z(A;s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 为 A 的循环指标，

$$c_k(\beta,x)=\sum_i\Big(\sum_{s|k}s\lambda_s(\beta_i)\Big)x^{ki},$$

β_i 的型为 $1^{\lambda_1(\beta_i)}2^{\lambda_2(\beta_i)}\cdots m^{\lambda_m(\beta_i)}$.

权函数(weight function)　见“函数式样”和“德布莱英定理”.

积和式(permanent)　亦称正展式. 方阵的一种值. 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n(m\leqslant n)$ 矩阵 $(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$，$A$ 的 m 个两两不在同行同列上的元素之积，称为 A 的一个对角线积，A 的全体对角线积之和 $\sum a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{mi_m}$ 称为矩阵 A 的积和式，记为 $\mathrm{per}(A)$，式中 $\sum$ 遍取 $1,2,\cdots,m$ 的所有 m 排列 $(i_1,i_2,\cdots,i_m)$. 例如，记 n 阶单位矩阵为 I_n，n 阶全 1 矩阵为 J_n，那么 $\mathrm{per}(J_n)=n!$，$\mathrm{per}(J_n-I_n)=D_n$，$D_n$ 是 n 元的重排数. 一般地计算一个 $m\times n$ 矩阵的积和式是困难的. 对于 $m\times n$ 矩阵 A 的积和式有下列计算公式

$$\begin{aligned}&\mathrm{per}(A)\\&=\sum S(A_{n-m})-\binom{n-m+1}{1}\sum S(A_{n-m+1})\\&\quad+\binom{n-m+2}{2}\sum S(A_{n-m+2})-\cdots\\&\quad+(-1)^{m-1}\binom{n-1}{m-1}\sum S(A_{n-1}),\end{aligned}$$

其中 A_r 表示矩阵 A 中 r 个列的各元素用数 0 代换后得到的一个矩阵；$S(A_r)$ 表示矩阵 A_r 中各行的行和之积，称为 A_r 的行和积；$\sum S(A_r)$ 是对所有的矩阵 A_r 求和.

正展式(permanent)　即“积和式”.

行和积(product of row sums)　见“积和式”.

k 积和式(k-permanent)　矩阵积和式的自然推广. 对任意 $m\times n$ 矩阵 $B=(b_{ij})$，称

$$\mathrm{per}_kB=\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m\\ j_1\cdots j_k\in P_k^n}}b_{i_1j_1},b_{i_2j_2},\cdots,b_{i_kj_k}\quad(k\geqslant 1)$$

为矩阵 B 的 k 积和式，这里，P_k^n 为集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有 k 元子集排列的全体. 约定，$\mathrm{per}_0B=1$. 当 k

$>\min(m,n)$时，$\mathrm{per}_kB=0$. 设 $b=\min(m,n)$，当 $k=b$ 时，B 的 b 积和式称为矩阵 B 的上-积和式，记为 $\mathrm{per}_{上}B=\mathrm{per}_bB$. 设 $B_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}$ 表示由矩阵 B 的第 i_1，$i_2,\cdots,i_k$ 行依原顺序安排而成的 $k\times n$ 矩阵，由矩阵积和式定义：

$$\mathrm{per}_kB=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m}\mathrm{per}(B_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}).$$

定义矩阵 $B=(b_{ij})$ 的行和积

$$\sigma(B)=\prod_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{1\leqslant j\leqslant n}b_{ij};$$

记

$$\sigma_l^{(k)}(B)=\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m\\1\leqslant j_1<\cdots<j_l\leqslant n}}\sigma(B_{(i_1,i_2,\cdots,i_k|j_1,j_2,\cdots,j_l)}),$$

这里 $(B_{(i_1,i_2,\cdots,i_k|j_1,j_2,\cdots,j_k)})$ 表示矩阵 $B_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}$ 中删去第 $j_1,j_2,\cdots,j_l$ 列后所得的 $k\times(n-l)$ 矩阵. 那么，矩阵的 k 积和式可利用矩阵的行和积来计算，即

$$\mathrm{per}_kB=\sum_{0\leqslant j\leqslant k-1}(-1)^j\binom{n-k+j}{j}\sigma_{n-k+j}^{(k)}(B).$$

本计算式仅在理论研究中和对一些特殊矩阵的计算有用，至今尚未找到一个简单有效的 k 积和式算法. 由于 $\mathrm{per}_kB=\mathrm{per}_kB^T$，这里 B^T 为 B 的转置矩阵，因此对矩阵的 k 积和式言，行和列的地位平等.

上-积和式(upper-permanent)　见“k 积和式”.

全-积和式(complete-permanent)　k 积和式的拓广. 研究车问题的有用工具. 设 $B=(b_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，称 B 的一切 k 积和式之和为矩阵 B 的全-积和式，记为 $\mathrm{per}_{全}B$. 即

$$\mathrm{per}_{全}B=\sum_{k\geqslant0}\mathrm{per}_kB,$$

约定 $\mathrm{per}_0B=1$. 矩阵 B 的全-积和式有下列性质：

1. $\mathrm{per}_{全}B=\mathrm{per}_{全}B^T$，式中 B^T 为 B 的转置矩阵.

2. $\mathrm{per}_{全}B_1=\mathrm{per}_{全}B$，式中 B_1 是由 B 经行交换或列交换后所得的矩阵.

3. 若 B 是准对角形矩阵

$$\begin{bmatrix}C_1 & & & 0\\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_s\end{bmatrix},$$

其中 C_i 是 $m_i\times n_i$ 矩阵，$i=1,2,\cdots,s$，则

$$\mathrm{per}_{全}B=\prod_{1\leqslant i\leqslant s}\mathrm{per}_{全}C_i.$$

4. 若将 B 中元素 b_{pq} 换为零而其余元素不变所得到的 $m\times n$ 矩阵记为 B_{pq}，从 B 中删去第 p 行和第 q 列后所得的 $(m-1)\times(n-1)$ 矩阵记为 $B_{(p,q)}$，则

$$\mathrm{per}_{全}B=b_{pq}\mathrm{per}_{全}B_{(p,q)}+\mathrm{per}_{全}B_{pq}.$$

范・德・瓦尔登猜想(Van der Waerden conjecture)　关于双随机矩阵积和式下界的一个估计. 若一个 $n\times n$ 矩阵 A 的每个分量都是非负的，而且每个行和与每个列和都等于 1，则称 A 是一个双随机矩阵. 设 A 为一个双随机矩阵，范・德・瓦尔登猜想是 $\mathrm{per}\,A\geqslant n!/n^n$，并且等号成立当且仅当 A 的每个元素均为 $1/n$. 此猜想于 1980 年被苏联学者埃果里切夫(Егорычев, Г. П.)所证实，其证明采用了其他数学家的一系列结果.

双随机矩阵(two-stochastic matrix)　见“范・德・瓦尔登猜想”.

限位排列(forbidden permutation)　相遇问题的自然推广. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 的 m 个给定的子集，若 S 的一个 m 元排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 满足条件 $a_i\in A_i(1\leqslant i\leqslant m)$，则称 m 元排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 是一个 $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 限位排列. $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 限位排列总数 $N_0=N_0(m,n)$，简称限位排列数. 设 $B=(b_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，记

$$\sigma(B)=\prod_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{1\leqslant j\leqslant n}b_{ij},$$

表示 B 的各行的行和之积，简称 B 的行和积，$B_{i_1i_2\cdots i_k}$ 表示由矩阵中第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行依原顺序组成的 $k\times n$ 矩阵，记

$$\sigma_k(B)=\sum_{i_1\cdots i_k}\sigma(B_{i_1\cdots i_k}),$$

式中求和对 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的全体 k 元子集进行，于是

$$N_0(m,n)=\mathrm{per}\,A=\sum_{0\leqslant j\leqslant m-1}(-1)^j\binom{n-m+j}{j}\sigma_{n-m+j}(A),$$

这里 A 为 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集族 $\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 对 S 的关联矩阵.

限位排列的关联矩阵(incidence matrix of forbidden permutation)　一个表征限位排列的 $(0,1)$ 矩阵. 通过对限位排列的关联矩阵积和式的计算，可求出限位排列数. 若矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足条件：

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & (j\in A_i),\\ 0 & (j\notin A_i)\end{cases}\quad(1\leqslant i\leqslant m;1\leqslant j\leqslant n),$$

则它称为集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 对其子集族 $\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 的关联矩阵，也称为 $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 限位排列的关联矩阵. 若 A 是 $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 限位排列的关联矩阵，则 $(0,x)$ 矩阵 xA 称为此 $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 限位排列的 $(0,x)$ 关联矩阵，这里 $xA=Ax=(a_{ij}x)$，而

$$a_{ij}x=\begin{cases}x & (j\in A_i),\\ 0 & (j\notin A_i)\end{cases}\quad(1\leqslant i\leqslant m;1\leqslant j\leqslant n);$$

又称 $A'=(a'_{ij})$ 为此 $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 限位排列的 $(t,1)$ 关联矩阵，这里

$$a'_{ij}=\begin{cases}1 & (j\in A_i),\\ t & (j\notin A_i)\end{cases}\quad(1\leqslant i\leqslant m;1\leqslant j\leqslant n).$$

限位排列问题的研究可化为其相应的关联矩阵的研究. $m\times n$ 的 $(0,1)$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 的补矩阵 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$ 是指满足条件

$$\bar{a}_{ij}=\begin{cases}0 & (a_{ij}=1),\\ 1 & (a_{ij}=0)\end{cases}\quad(1\leqslant i\leqslant m;1\leqslant j\leqslant n)$$

的 $m\times n$ 的(0,1)矩阵.矩阵 $\overline{A}=(\bar{a}_{ij})$ 也称为 $(A_1, A_2,\cdots,A_m)$ 限位排列的关联矩阵 A 的补,与 $\overline{A}$ 相应的限位排列问题,称为原限位排列问题的补问题.一个限位排列问题的补问题与一个车问题相对应.

关联矩阵(incidence matrix) 见"限位排列的关联矩阵".

限位排列的$(0,x)$**关联矩阵**($(0,x)$-incidence matrix of forbidden permutation) 见"限位排列的关联矩阵".

限位排列的$(t,1)$**关联矩阵**($(t,1)$-incidence matrix of forbidden permutation) 见"限位排列的关联矩阵".

车问题(problem of rook) 一类棋盘上的组合问题.设 B 是一个由 m 行 n 列的方格组成的广义棋盘,B 上有一些禁用格,其余均为可用格.车问题是:将 k 只象棋棋子车按下列规则分布在棋盘 B 上,使得:

1. 每个车放在一个可用格上;

2. 任意两个车不在同一行或同一列上;

问不同的分布数是多少?

一个与给定的棋盘 B 相联系的 $m\times n$ (0,1)矩阵 $\overline{A}(\bar{a}_{ij})$ 称为是一个棋阵,这里,当 B 的位于第 i 行、j 列的方格为禁用格时,$\bar{a}_{ij}=1$;而当 B 的位于第 i 行、j 列的方格为可用格时,$\bar{a}_{ij}=0$.若 $A_i=\{j\mid\bar{a}_{ij}=0,1\leqslant j\leqslant n\}$,$i=1,2,\cdots,m$,则 $\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集族.$\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 的关联矩阵就是一个 $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 限位排列的关联矩阵.m 个车在与棋阵 $\overline{A}(\bar{a}_{ij})$ 相应的棋盘 B 上的布阵数,等于 $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 限位排列总数 $N_0(m,n)=\operatorname{per}A$.研究车问题的主要工具是车多项式.

棋阵(chess matrix) 见"车问题".

车多项式(rook polynomial) 研究棋阵问题的主要工具.x 的多项式

$$R(x,\overline{A})=\sum_k r_k(\overline{A})x^k(k\geqslant 0)$$

称为以矩阵 $\overline{A}=(\bar{a}_{ij})$ 为棋阵的车多项式,这里,$r_k(\overline{A})$ 表示 k 只车分布到与棋阵 $\overline{A}$ 相应的棋盘 B 上的不同的分布数,约定 $r_0=1$.当 k 大于棋盘 B 上的可用格个数时,$r_k(\overline{A})=0$.于是,$R(x,\overline{A})$ 是一个 x 的多项式.若在棋阵 $\overline{A}$ 中任选一个可用格 a,把该可用格换为禁用格而其他格不变所得的棋阵记为 $\overline{A}_e$,把该可用格所在行和列都删去所得出的一个 $(m-1)\times(n-1)$ 棋阵记为 $\overline{A}_a$,则 $R(x,\overline{A})$ 按棋阵 $\overline{A}$ 之可用格 a 的展开式是

$$R(x,\overline{A})=xR(x,\overline{A}_a)+R(x,\overline{A}_e).$$

反复利用对可用格的展开式,可将 $R(x,\overline{A})$ 的计算归纳为一些已知的或易算的车多项式的计算.

矩形棋盘(rectangular chessboard) 一类组合构形.一个由 $m\times n$ 个方格排成的 m 行 n 列的矩形.若以 $R_{m,n}(x)$ 表示 $m\times n$ 矩形棋盘的车多项式,则

$$R_{m,n}(x)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(n)_k x^k,$$

其中 $(n)_k=n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

互补棋盘(complementary chessboards) 一类组合构形.即从一个棋盘中去掉它的一个子棋盘所得者的棋盘.设 C 是任一棋盘,A 是 C 的子棋盘,从 C 中去掉属于 A 的格子所得剩余的棋盘 B,称 B 为 A 关于 C 的补棋盘,A 和 B 是关于 C 的互补棋盘.若 C 是 $m\times n$ 矩形棋盘,A,B 的车多项式分别是 $Q(x)$,$R(x)$,并以 $R_{m,n}(x)$ 表示 $m\times n$ 矩形棋盘 C 的车多项式,则

$$Q(x)=R(-xf)R_{m,n}(x),$$
$$f^kR_{m,n}(x)\equiv R_{m-k,n-k}(x).$$

梯形棋盘(trapezoidal chessboard) 一类组合构形.在一个矩形棋盘上,由上而下地去掉每行右端的一些格子,使得每行的格子数不多于下一行的格子数所得到的.以 $T(p,q,a)$ 表行数为 q,第一行有 p 个格子,且从第 2 行起,每行格子数比上一行多 a 个的梯形棋盘,其车多项式记为 $T(p,q,a;x)$,则

$$T(p,1,a;x)=1+px,$$
$$T(p,2,a;x)=1+(2p+a)x+p(p+a-1)x^2,$$
$$T(p,q,a;x)=T(p+a,q-1,a;x)+pxT(p+a-1,q-1,a;x).$$

三角形棋盘(triangular chessboard) 一类梯形棋盘.梯形棋盘 $T(p,q,a)$ 当 $p=a=1$ 时的情形.其车多项式记为 $T_q(x)$,$S_2(n,k)$ 表示第二类斯特林数,则

$$T_q(x)=\sum_{k=0}^{q}S_2(q+1,q+1-k)x^k.$$

象问题(problem of bishops) 一类棋盘上的组合问题.所谓象问题指的是把 n 个象(国际象棋的一种棋子,它的走法是对角线方向),放在 $n\times n$ 棋盘的格子上,使得它们彼此不能攻击,求不同的放置方法数 $b(n,k)$.棋盘上任两相邻格子必一黑一白,所以,黑格的像不能走进白格,反之亦一样,因此,一个 $n\times n$ 棋盘可以看做分别由黑格和白格组成的彼此分离的两个棋盘.把黑格盘或白格盘转动 45°,于是象问题就变成了车问题.$b(n,k)$ 的生成函数,即象多项式 $P_n(x)$ 应等于黑格盘与白格盘的两个车多项式之积.分别以 $B_n(x)$ 与 $w_n(x)$ 表 $n\times n$ 棋盘所分出的黑格盘与白格盘的车多项式,则有

$$P_n(x)=\sum_{k\geqslant 0}b(n,k)x^k,$$

$$P_n(x) = B_n(x)w_n(x),$$
$$B_{2n}(x) = w_{2n}(x) = T^{n-1}(T + x)^n,$$
$$B_{2n+1}(x) = T^{n-1}(T + x)^{n+1},$$
$$w_{2n+1}(x) = T^n(T + x)^n,$$
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S_2(n + 1, n + 1 - k)x^k,$$

式中$T^k \equiv T_k(x)$，$S_2(n+1,n+1-k)$是第二类斯特林数.

西蒙-纽科姆问题(Simon-Newcomb's problem)　确定某种排列数的一个问题. 设π是多重集$S=\{i^{k_i}|i=1,2,\cdots,n\}$的一个排列，把$\pi$分段，使得段数最少且每段中数字呈非降顺序，这样的每一段称为π的一个上升段. 所谓西蒙-纽科姆问题就是求S的恰有r个上升段的排列数$N(1^{k_1},2^{k_2},\cdots,n^{k_n};r)$. 若以$S_2(n,k)$表第二类斯特林数，则$N(1^{k_1},2^{k_2},\cdots,n^{k_n};r)$等于$(A)_1^{k_1}(A)_2^{k_2}\cdots(A)_n^{k_n}$的展开式中$x^r$的系数，其中的$(A)_i=A(A+1-x)(A+2-2x)\cdots\cdot(A+k-1-(k-1)x)$，$A^i\equiv A_i(x)$，$n=1,2,\cdots$，且

$$A_i(x) = x\sum_{k=0}^{i-1} S_2(i, i - k)(i - k)!(x - 1)^k.$$

存在性定理(existence theorem)　一类定性描述. 要把某种离散对象按某个确定的约束条件进行安排，如果这种特定的安排是否存在还不确定，就需要首先讨论这种特定安排的存在性问题. 在经典组合数学中，霍尔定理、拉姆齐定理和狄尔沃斯定理是三个主要的存在性定理.

抽屉原则(drawer principle)　亦称鸽笼原则或鞋盒原则. 确定一些组合对象的存在性的基本定理. 抽屉原则的简单形式是：若把$n+1$件东西分到n个抽屉中，则至少有一个抽屉里有至少2件东西. 抽屉原则的一般形式是：设$q_1,q_2,\cdots,q_n$是正整数，若把$q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$件东西放入n个抽屉里，则或者第一个抽屉里含有q_1件东西，或者第二个抽屉里含有q_2件东西，…，或者第n个抽屉里含有q_n件东西，以上情形必有一种成立. 抽屉原则的简单形式是取$q_1=q_2=\cdots=q_n=2$时之特例.

鸽笼原则(pigeonhole rule)　即“抽屉原则”.

鞋盒原则(shoesbox rule)　即“抽屉原则”.

拉姆齐定理(Ramsey theorem)　一个组合数的存在性定理. 抽屉原则的深刻而重要的推广. 它是英国逻辑学家拉姆齐(Ramsey, F. P.)于1930年首先发现的. 拉姆齐定理断言：若整数$p\geqslant r$，$q\geqslant r$，r为正整数，则必存在一个最小正整数N，记为$N(p,q;r)$，使得对于每一个正整数$n\geqslant N(p,q;r)$，下列性质成立：设集合S有n个元素，若把S的全体r元子集任意划分为两个类X和Y，则或者存在一个S的p元子集，它的所有的r元子集全在X中，或者存在一个S的q元子集，它的所有r元子集全在Y中. 数$N(p,q;r)$称为拉姆齐数. 拉姆齐数$N(p,q,;r)$有下列性质：

$$N(p,q;r)=N(q,p;r),$$
$$N(p,r;r)=p, N(p,q;1)=p+q-1.$$

拉姆齐定理的一般形式为：若$q_1,q_2,\cdots,q_n,t$都是正整数，且$q_1\geqslant t,q_2\geqslant t,\cdots,q_n\geqslant t$，则存在一个最小正整数$N$，记为$N(q_1,q_2,\cdots,q_n;t)$，它只依赖于参数$q_1,q_2,\cdots,q_n$和$t$，并具有下列性质：若$m\geqslant N(q_1,q_2,\cdots,q_n;t)$且$S$是$m$个元素的集合，把$S$的所有$t$元子集任意分拆成$n$类，则或者有一个$q_1$元的类其全部$t$元子集都属于分拆的第一类，或者有一个$q_2$元的类其全部$t$元子集都属于分拆的第二类，…，或者有一个$q_n$元的类其全部$t$元子集都属于分拆的第$n$类，必有一种情形成立. 数$N(q_1,q_2,\cdots,q_n;t)$称为拉姆齐数. 当$t=1$时，拉姆齐定理即为(一般形式的)抽屉原则，此时，拉姆齐数

$$N(q_1,q_2,\cdots,q_n;1)=q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1.$$

在$n>2$的情形，目前得到的主要结果是$N(3,3,3;2)=17$，$N(3,3,3,3;2)=65$；在$t=2$和$n=2$时，目前已知的拉姆齐数$N(p,q;2)$如下：

$N(p,q;2)$ (p \ q)	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18					

拉姆齐数(Ramsey numbers)　见“拉姆齐定理”.

广义拉姆齐数(generalized Ramsey numbers)　一类组合数. 给出正整数$l_i,k_i,i=1,2,\cdots,n$与r，满足条件$l_i\geqslant r\geqslant k_i>0,i=1,2,\cdots,n$，存在一正整数

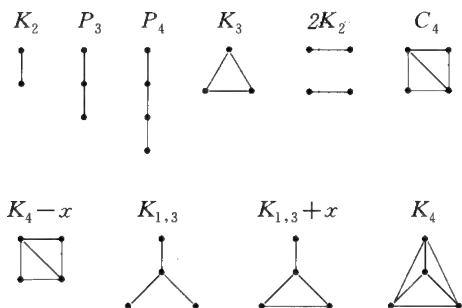
$$N(l_1,k_1;l_2,k_2;\cdots;l_n,k_n;r) = N,$$

它满足下面条件，而且取最小值：若S是$m(\geqslant N)$个点的集，将S任意分为n个r元子集，则对于某个i，$1\leqslant i\leqslant n$，存在S的一个l_i元子集，它的每个k_i元子集属于上述第i个r元子集. 若$n=2$，则有$N(r,k_1;l,k_2;r)=N(l,k_1;r,k_2;r)=l$，$N(l_1,k_1;l_2,k_2;r)\leqslant N(N(l_1-1,k_1;l_2,k_2;r),k_1-1;N(l_1,k_1;l_2-1,k_2;r),k_2-1;r-1)+1$. 若$k_1+k_2=r+1$，则有$N(l_1,k_1;l_2,k_2;r)=l_1+l_2-k_1-k_2+1$. 称$N(l_1,k_1;l_2,k_2;\cdots l_n,k_n;r)$为广义拉姆齐数.

拉姆齐数$r(F_1,F_2)$(Ramsey number $r(F_1,F_2)$)　一类组合数. 关于两个图F_1与F_2的拉姆齐数$r(F_1,F_2)$是一个最小正整数p，它使完全图K_p的边任意染红色或绿色时，必有一个绿F_1或一个红F_2. 以下各种图所构成的拉姆齐数如下表($r(F_1,F_2)$

$=r(F_2,F_1))$

	K_2	P_3	$2K_2$	K_3	P_4	$K_{1,3}$	C_4	$K_{1,3}+x$	K_4-x	K_4
K_2	2	3	4	3	4	4	4	4	4	4
P_3		3	4	5	4	5	4	5	5	7
$2K_2$			5	5	5	5	5	5	5	6
K_3				6	7	7	7	7	7	9
P_4					5	5	5	7	7	10
$K_{1,3}$						6	6	7	7	10
C_4							6	7	7	10
$K_{1,3}+x$								7	7	10
K_4-x									10	11
K_4										18



霍尔定理(Hall theorem)　一个存在性定理.设给定了 p 个非空集合 $S_1,S_2,\cdots,S_p$,不要求它们是相异集合,若 $T=(a_1,a_2,\cdots,a_p)$ 是一个 p 元组,p 个元都相异,其中 $a_i\in S_i,i=1,2,\cdots,p$,则称 T 是集族 $\mathscr{F}=\{S_1,S_2,\cdots,S_P\}$ 的一个相异代表系(组),简称 SDR.霍尔(Hall,P.)于 1935 年给出了 SDR 存在的充分必要条件(霍尔定理):集族 $\mathscr{F}=\{S_1,S_2,\cdots,S_p\}$ 有 SDR 的充分必要条件是,对任一整数 $k,1\leqslant k\leqslant p$,以及对 $\{1,2,\cdots,p\}$ 的任一 k 元子集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$,并集 $S_{i_1}\cup S_{i_2}\cup\cdots\cup S_{i_k}$ 至少含有 k 个元素.

相异代表系(system of distinct representatives)　见"霍尔定理".

婚姻问题(problem of marriage)　亦称舞会问题或工作安排问题.一类组合问题.设有 n 个男子和 n 个女子,每个男子与 n 个女子中的若干个互相认识,问这些男子和女子能否结成 n 对夫妇,使每对夫妇都是已经相互认识的.

舞会问题(problem of dance)　即"婚姻问题".

工作安排问题(problem of assignment)　即"婚姻问题".

广义相异代表系(generalized system of distinct representatives)　相异代表系的推广.若给出有限集 S 的 n 个非空子集 $T_1,T_2,\cdots,T_n$,无需不相交,且满足下列三个条件,则 $(V_1,V_2,\cdots,V_n)$ 称为广义相异代表系,记为 $(m_1,m_2,\cdots,m_n)$-SDR:

1. $V_i\subseteq T_i,i=1,2,\cdots,n$.
2. $|V_i|=m_i,i=1,2,\cdots,n$.
3. $V_i\cap V_j=\varnothing,i,j=1,2,\cdots n,i\neq j$.

若 $m_1=m_2=\cdots=m_n$,则此广义代表系称为 m 元组 SDR.对于子集族 $T_1,T_2,\cdots,T_n$,存在 $(m_1,m_2,\cdots,m_n)$SDR 的充分必要条件是对每一组正整数 k,$i_1,i_2,\cdots,i_k$,满足 $1\leqslant k\leqslant n,1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,条件

$$|T_{i_1}\cup T_{i_2}\cup\cdots\cup T_{i_k}|\geqslant\sum_{j=1}^{k}m_{i_j}$$

成立.

公共代表系(system of common representatives)　代表系的一种.设 T 集有两个分拆:

$T=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m,T=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_m$,

其中 A_i,B_j 都不是空集 $(i,j=1,2,\cdots,m)$.若有 T 的一个 m 子集 E 满足:$A_i\cap E\neq\varnothing,B_j\cap E\neq\varnothing(i,j=1,2,\cdots,m)$,则这 $2m$ 个非空交集都是 1 集,这样的 E 称为上面两个分拆的公共代表系,简称 SCR.上述两个分拆有 SCR 的充分必要条件是:对任一整数 $k,1\leqslant k\leqslant m$,以及对 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的任一 k 子集 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$,并集 $A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}$ 至多包含 m 个子集 $B_1,B_2,\cdots,B_m$ 中的 k 个.

棋盘完全覆盖问题(problem of perfect cover of chessboard)　一类组合问题.一个 8×8 国际象棋棋盘,$m\times n$ 广义棋盘,以及任意形式的残破棋盘都可以被骨牌覆盖.棋盘的一个完全覆盖是若干骨牌安排到棋盘上,使:

1. 每块骨牌覆盖棋盘上相邻两格.
2. 棋盘上每一格都被骨牌覆盖.
3. 没有两块骨牌同时覆盖一格.

独立代表系(system of independent representatives)　代表系的一种.设有集 S,S 上的一个独立关系是一个关系序列 $I_1,I_2,\cdots$,其中 $I_n\subset S^n$(S^n 是 n 个 S 的笛卡儿积,因而 I_n 是 S 上的 n 重关系),使以下特性成立:

1. $(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in I_m\Rightarrow(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})\in I_{m-1}$.
2. $(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in I_m\Rightarrow(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},\cdots,x_{\pi(m)})\in I_m$,$\pi$ 是 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的每个置换.
3. $(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in I_m,(y_1,y_2,\cdots,y_{m+1})\in I_{m+1}\Rightarrow\exists_{y\in\{y_1,y_2,\cdots,y_{m+1}\}}[(x_1,x_2,\cdots,x_m,y)\in I_{m+1}]$.
4. $(x,x)\notin I_2,\forall\ x\in S$.

若 $\xi=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in I_m$,则序列 ξ 是独立的,否则就是不独立的.若 $(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 是集 S 的子集的序列,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in I_n$,且 $x_k\in A_k,k=1,2,$

$\cdots,n$，则$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$的独立代表系，简写为SIR. 若有集S的子集序列$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$，对每个$k\in\{1,2,\cdots,n\}$，任何k个A_i的并集包含$x_1,x_2,\cdots,x_k$，使$(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in I_k$，则称$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$是具有$H$特性的. 若$S$的子集序列具有$H$特性，则必存在$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$的一个SIR.

行和向量(row sum vector)　由一个(0,1)矩阵衍生的一个向量. 设A为一$m\times n$的(0,1)矩阵，A的第i行的n个元素的和$r_i(i=1,2,\cdots,m)$称为行和. 向量$R=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$称为A的行和向量. 当$r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_m$时，$R$称为单调行和向量.

列和向量(column sum vector)　由一个(0,1)矩阵衍生的一个向量. 设A为一$m\times n$的(0,1)矩阵，A的第j列的m个元素的和$s_j(j=1,2,\cdots,n)$称为列和. 向量$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$称为A的列和向量. 当$s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_n$时，称$S$为单调列和向量.

矩阵类$\mathscr{U}(R,S)$(matrix class $\mathscr{U}(R,S)$)　一类(0,1)矩阵. 由所有那些行和向量R，列和向量S的$m\times n$的(0,1)矩阵构成的类记为$\mathscr{U}(R,S)$. 设$R=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$，$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，若有$r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_m>0$，$s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_n>0$，则称非零类$\mathscr{U}(R,S)$为规范类$\mathscr{U}(R,S)$.

规范类$\mathscr{U}(R,S)$(normal class $\mathscr{U}(R,S)$)　见“矩阵类$\mathscr{U}(R,S)$”.

极大矩阵(maximal matrix)　具有某种极大性的一个(0,1)矩阵. 设$R=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$，令$\delta_i=(1,1,\cdots,1,0,0,\cdots,0)$，其前$r_i(i=1,2,\cdots,m)$个分量都是1，后$n-r_i$个分量都是零. 矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \vdots\\ \delta_m\end{bmatrix}$$

称为具有行和向量R的极大矩阵. $\overline{A}$的列和向量$\overline{S}=(\bar{s}_1,\bar{s}_2,\cdots,\bar{s}_n)$是单调的，而且

$$\sum_{i=1}^{m}r_i=\sum_{j=1}^{n}\bar{s}_j,$$

类$\mathscr{U}(R,\overline{S})$只含$\overline{A}$一个矩阵.

向量优超(majority of vectors)　向量间的一种序关系. 设$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$和$S^*=(s_1^*,s_2^*,\cdots,s_n^*)$是分量为非负整数的两个向量，若对下标适当重新编号之后，能使以下关系成立：

$$s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_n,\ s_1^*\geqslant s_2^*\geqslant\cdots\geqslant s_n^*,$$
$$s_1+s_2+\cdots+s_i\leqslant s_1^*+s_2^*+\cdots+s_i^*$$
$$(i=1,2,\cdots,n-1),$$
$$s_1+s_2+\cdots+s_n=s_1^*+s_2^*+\cdots+s_n^*,$$

则称S被S^*所优超，记为$S\prec S^*$. 给定行和向量$R=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$与列和向量$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，其分量都是非负整数，若$\overline{A}$是行和向量为R的极大矩阵，它的列和向量是$\overline{S}$，则矩阵类$\mathscr{U}(R,S)$非空的充分必要条件是$S\prec\overline{S}$.

交换(interchange)　矩阵的一种变换. 对于$m\times n$的(0,1)矩阵A，把A的2×2子矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\text{换为}A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

或者把A_2换为A_1，其余分量不变，这样的矩阵变换称为交换. 交换使矩阵的行和向量与列和向量都保持不变. 若A与A'都属于类$\mathscr{U}(R,S)$，则必可通过有限次交换把A变换成A'.

恒1(invariant 1)　矩阵的一类特殊元. 若A是规范类$\mathscr{U}(R,S)$中的任一矩阵，A在(e,f)位置上的元素$a_{ef}=1$，而且对A进行任何交换都不能使a_{ef}变为0，则称a_{ef}是一个恒1. 此时，$\mathscr{U}$中的任一矩阵在(e,f)位置的元素都是1，所以，$\mathscr{U}$的所有矩阵或者全都没有恒1，或者都有恒1，于是，可以称$\mathscr{U}$没有或有恒1. 规范类$\mathscr{U}$有恒1的充分必要条件是，$\mathscr{U}$中每个矩阵A都可以表为

$$A=\begin{pmatrix}J&*\\ *&0\end{pmatrix},$$

其中，J是全1矩阵，0是零矩阵.

项秩(term rank)　矩阵的一个指标. 设A是$m\times n$的(0,1)矩阵，A中两两不在同一线（矩阵的一行或一列都称为矩阵的一条线）上的1的最大个数称为A的项秩. A的项秩等于A在任意行与列的排列下的迹的最大值. 另外，A的项秩也等于A的具有非零积和式的子方阵的最大阶数，同时又等于A的能包含A中所有的元素1的线的最小个数. 若$\tilde{\rho}$与$\bar{\rho}$是规范类$\mathscr{U}(R,S)$中矩阵的最小项秩与最大项秩，则对于满足$\tilde{\rho}\leqslant\rho\leqslant\bar{\rho}$的$\rho$，$\mathscr{U}$中必存在矩阵$A_\rho$，其项秩恰等于$\rho$.

迹(trace)　矩阵的一个量. 一个矩阵的主对角线上的元素之和. 若有$m\times n$矩阵类$\mathscr{U}(R,S)$，$R=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$，$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，$r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_m>0$，$s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_n>0$，即$\mathscr{U}(R,S)$是规范类，$\mathscr{U}$中矩阵的最小迹记为$\tilde{\sigma}$，最大迹记为$\bar{\sigma}$，则有

$$\tilde{\sigma}=\max_{i,j}\{\min(i,j)-t_{ij}\}$$
$$(i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n);$$

与

$$\bar{\sigma}=\min_{i,j}\{t_{ij}+\max(i,j)\}$$
$$(i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n),$$

且

$$t_{ij}=ij+(r_{i+1}+r_{i+2}+\cdots+r_m)-(s_1+s_2+\cdots+s_j)$$
$$(i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n).$$

线秩(line rank)　矩阵的一个指标. 设A是(0,1)矩阵，A的行与列统称为线. 包含A的全部1的

最小线数称为 A 的线秩.柯尼希定理断言:矩阵的线秩等于项秩.另外,矩阵的线秩等于该矩阵的具有非零积和式的子方阵的最大阶数,亦等于矩阵经行或列的置换,具有全 1 主对角线的子方阵的最大阶数.

柯尼希定理(König theorem) 见"线秩".

α 宽度(α-width) 矩阵的一个指标.设 A 属于 $m\times n$ 规范类$\mathscr{U}(R,S)$,α 满足 $1\leqslant\alpha<r_m$,$\alpha\in\mathbf{N}$.设 E 是 A 的 $m\times\varepsilon$ 子矩阵,而且 E 的每个行和不小于 α,使这样的 E 存在的最小正数 ε 称为 A 的 α 宽度,记为 $\varepsilon(\alpha)$.

德布莱英序列(de Bruijn sequence) 亦称完全循环.一类特殊的组合序列.一个循环是一个依圆周顺序的序列 $a_1a_2\cdots a_r$,即 a_1 在 a_r 之后,且 $a_2\cdots a_ra_1$,$\cdots$,$a_ra_1\cdots a_{r-1}$都是与 $a_1a_2\cdots a_r$ 相同的循环.设 n 是正整数,$N=2^n$,一个由数码 0 和 1 组成的循环 $a_1a_2\cdots a_N$,即 $a_i\in\{0,1\}$,$i=1,2,\cdots,N$,若子序列 $a_ia_{i+1}\cdots a_{i+n-1}$ $(i=1,2,\cdots,N)$就是所有可能的 N 个由数码 0 和 1 组成的有序序列 $b_1b_2\cdots b_n$,则称该循环是一个完全循环或德布莱英序列.例如 $n=1$ 时,循环 01;$n=2$ 时,循环 0011,$n=3$ 时,循环 00010111 和 00011101 均为德布莱英序列.

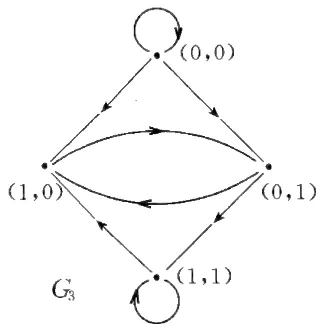
关于德布莱英序列的主要问题是:对任意正整数 n,长为 $N=2^n$ 的德布莱英序列是否存在?若存在,有多少个?德布莱英定理断言:对每个正整数 n,恰存在

$$2^{2^{n-1}-n}$$

个长为 $N=2^n$ 的完全循环.事实上,每个长为 $N=2^n$ 的德布莱英序列恰与德布莱英图 G_n 中的一条完全回路相对应(参见"德布莱英图").

完全循环(perfect cycle) 见"德布莱英序列".

德布莱英图(de Bruijn graph) 一种重要的图,是由(0,1)序列衍生的图.由数码 0 和 1 组成的序列$(c_1,c_2,\cdots,c_r)$称为一个(0,1)序列,r 称为该序列的长.长为 $n-1$ 的(0,1)序列共计 2^{n-1} 个.设每个这样的(0,1)序列$(c_1,c_2,\cdots,c_{n-1})$与一个顶点 p_i 相对应,这里 $1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}$.设每个长为 n 的(0,1)序列$(b_1,b_2,\cdots,b_{n-1},b_n)$与一个起点为$(b_1,b_2,\cdots,b_{n-1})$、终点为$(b_2,b_3,\cdots,b_n)$的有向弧相对应.称具有顶点集$\{p_i:i=1,2,\cdots,2^{n-1}\}$和上述对应有向弧集的有向图为一个德布莱英图,记为 G_n.图示为 G_3.G_n 为有向连通图,且每个顶点处恰有两条入弧和两条出弧.通过给定有向图中每一有向弧恰一次的回路,称为该图的一条有向完全回路.G_n 中的有向完全回路与长为 $N=2^n$ 的德布莱英序列一一对应.德布莱英(de Bruijn,N.G.)证明:G_n 恰有



$$2^{2^{n-1}-n}$$

条有向完全回路.

(0,1)序列((0,1)-sequence) 见"德布莱英图".

组合算法(combinatorial algorithm) 组合学的一个研究分支.一些组合问题需用电子计算机解决,当研究如何进行计算时,就需要研究算法.组合算法是一类不同于代数计算的方法.为使这种算法能够有效地进行,对于每种组合算法,必须研究其组合结构和在此基础上讨论其时间的复杂性和空间的复杂性问题,即对算法所需的时间和存储单元与输入数据量的关系作出估计.

组合最优化问题(combinatorial optimization problem) 一类在离散状态下求极值的问题.把某种离散对象按某个确定的约束条件进行安排,当已知合乎这种约束条件的特定安排存在时,寻求这种特定安排在某个优化准则下的极大解或极小解的问题.组合最优化的理论基础含线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、拟阵论和网络分析等.组合最优化技术提供了一个快速寻求极大解或极小解的方法.

关联代数(incidence algebra) 一种反映集合中元之间关系的代数.设 P 是一局部有限偏序集,K 为一域,其特征数为 0.定义

$$A_k(P)=\{f:P^2\to K,x\nleq y\Rightarrow f(x,y)=0\}.$$

对于函数 f 的集 $A_K(P)$,定义加法、数乘和卷积如下:对于 $f,g\in A_k(P)$,$r\in K$,

$$(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y),$$
$$rf(x,y)=r\cdot f(x,y),$$
$$f*g(x,y)=\sum_{x\leqslant z\leqslant y}f(x,z)g(z,y).$$

$A_k(P)$及其加法、数乘与卷积构成 K 上 P 的关联代数.P 的关联代数的单位元是克洛内克的 δ 函数,而且关于卷积是可结合的.$f\in A_k(P)$是可逆的充分必要条件是,对于$\forall\ x\in P$,$f(x,x)\neq 0$.若此条件满足,则 f 的逆元 f^{-1}为:

$$f^{-1}(x,x)=\frac{1}{f(x,x)},$$

$$f^{-1}(x,y)=\frac{1}{f(y,y)}\Big(-\sum_{x\leqslant z\leqslant y}f^{-1}(x,z)f(z,y)\Big).$$

$A_K(P)$的每个元 f 都称为 K 上 P 的关联函数.重要的关联函数有:

1. δ 函数,$\delta(x,y)=1$,当 $x=y$,$\delta(x,y)=0$,当 $x\neq y$.

2. ζ 函数，$\zeta(x,y)=1$，当 $x\leqslant y$，否则 $\zeta(x,y)=0$.

3. λ 函数，$\lambda(x,y)=1$，当 $x=y$，或 $x<y$，即此时 x 被 y 覆盖，否则 $\lambda(x,y)=0$.

4. 链函数，$\eta=\zeta-\delta$.

5. 覆盖函数，$\kappa=\lambda-\delta$.

6. 默比乌斯函数，$\mu=\zeta^{-1}$.

7. 长度函数，$\rho(x,y)=[x,y]$的长度.

关联函数(incidence function)　见“关联代数”.

递归关系(recurrence relation)　序列的项之间的一种关系. 指序列的任一项均被其前若干项所确定的那种关系. 对于数列$\{a_n|n=0,1,2,\cdots\}$，若当 $n\geqslant 0$ 时，恒有关系式

$$a_{n+k}=F(a_{n+k-1},\cdots,a_n),$$

这里 k 为正整数，F 为元 $a_{n+k-1},\cdots,a_n$ 的代数函数，且 a_n 必在式中出现，则 $a_{n+k}=F(a_{n+k-1},\cdots,a_n)$称为数列$\{a_n|n=0,1,2,\cdots\}$的一个递归关系. 若给定此递归关系，且给出 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$的一组初值，则数列$\{a_n|n=0,1,2,\cdots\}$完全确定. 例如，递归关系 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 及初值 $a_0=a_1=1$ 完全确定数列 1,1,2,3,5,8,…，称为斐波那契数列. 使用计算机，根据给定递归关系和初值计算相应的数列的项很方便. 因此，递归关系是研究数列的一个有力工具.

特征方程(characteristic equation)　见“常系数线性齐次递归关系”.

河内塔问题(puzzle of Hanoi towers)　一个古老的组合学问题. 有三个竹桩分别记为 A,B,C. 把 n 个大小不等的圆盘依其半径大小，从下而上套在竹桩 A 上，最大的在底下，成一圆盘“塔”. 设每次只允许取一个圆盘从一个竹桩转移到另一个上，而且任何时间不允许大圆盘在较小圆盘上方. 在此移动规则下，若要求把 A 上的 n 个圆盘转移到 C 上，问最少要移动多少次. 这就是河内塔问题. 若 S_n 为转移 n 个圆盘所需的最少移动次数，则有递归关系：$S_n=2S_{n-1}+1$，初值是 $S_1=1$，由此解得 $S_n=2^n-1$.

集合分拆(partition of a set)　集合元素的一种分类. 设 m 元集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$. 若 S 的子集 $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 满足下列条件：

1. $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 均非空，即

$$S_i\neq\varnothing\ (i=1,2,\cdots,k);$$

2. 各 $S_i(i=1,2,\cdots,k)$间互不相交，即

$$S_i\cap S_j=\varnothing\ (i\neq j;i,j=1,2,\cdots,k);$$

3. $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 之并为 S，即$\bigcup_{i=1}^{k}S_i=S$；

则称子集族 $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 构成集合 S 的一个分拆，记为分拆$(S_1,S_2,\cdots,S_k)$. 每个子集 S_i 都称为这一分拆的部分. m 元集合 S 的具有 k 个部分的所有分拆的总数为第二类斯特林数 $S_2(m,k)$.

分拆的型(type of partitions)　分拆的一种表示. 设 m 元集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$的一个分拆$(S_1,S_2,\cdots,S_k)$，它的 k 个部分是由 λ_1 个一元子集，λ_2 个二元子集，…，λ_n 个 n 元子集所组成，这里，

$$1\cdot\lambda_1+2\cdot\lambda_2+\cdots+n\cdot\lambda_n=m,\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k,$$

则称这个分拆是 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$型的. m 元集合 S 的具有 k 个部分的 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$型所有分拆总数是

$$\frac{m!}{(1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}\cdots(n!)^{\lambda_n}\cdot(\lambda_1!)(\lambda_2!)\cdots(\lambda_n!)}.$$

有序分拆(ordered partition)　分拆的一种有序表示. 对于给定的正整数 $k(\leqslant n)$，n 的有序和表示 $n_1+n_2+\cdots+n_k$，称为 n 的一个有序 k 分拆，这里 $n_i(1\leqslant i\leqslant k)$为正整数. n_i 称为有序分拆的第 i 个部分数，k 称为有序分拆的部分个数. n 的有序 k 分拆数

$$\bar{p}_k(n)=\binom{n-1}{k-1}.$$

求 $\bar{p}_k(n)$的问题相当于下列问题之一：

1. 在一水平直线上有 n 个不同点，设正整数 $k\leqslant n$，今用 $k-1$ 条竖线以任意方式插入这 n 个点间的 $k-1$ 个间隙中，求竖线插入方式的总数. 这里竖线的插入方式与 n 的有序 k 分拆一一对应.

2. 求将 n 个不可分辨的球放入 k 个不同的盒子，且第 $i(1\leqslant i\leqslant k)$个盒子装入 n_i 个球的放法总数. 对于给定的正整数 k，分拆数的生成函数为

$$G\{\bar{p}_k(n)\}=\left(\frac{x}{1-x}\right)^k.$$

完全分拆(perfect partition)　整数的一种分拆. 若 $n\in\mathrm{N}$ 的一个分拆

$$n=\sum_{r=1}^{s}k_ri_r\quad(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s),$$

$i_r,k_r\in\mathrm{N}\ (r=1,2,\cdots,s)$，具有特性：对于任一正整数 $m<n$，都有且只有一个形如

$$m=\sum_{r=1}^{t}k_{j_r}l_{j_r}\quad(1\leqslant j_1<\cdots<j_t\leqslant s),$$

$k_{j_r}\geqslant l_{j_r}\geqslant 1,r=1,2,\cdots,t$ 的分拆，则此分拆称为完全分拆. 正整数 n 的完全分拆

$$1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}(q_1q_2)^{q_3-1}\cdots(q_1q_2\cdots q_{k-2})^{q_{k-1}}$$

(即分拆有 q_1-1 个 1，q_2-1 个 q_1，q_3-1 个 q_1q_2，…，q_{k-1}个 $q_1q_2\cdots q_{k-2}$)与 $n+1$ 的有序因子分解 $n+1=q_1q_2\cdots q_k(q_r\geqslant 2,r=1,2,\cdots,k)$之间可以建立一一对应关系，因而二者的个数相同.

菲勒图(Ferrer's diagram)　整数分拆的一种图表示. 菲勒图是研究分拆的有力工具. 正整数 n 的一个 k 分拆

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_k,\quad n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_k\geqslant 1,$$

可以用菲勒图来表示. 菲勒图用方格构成，自上而下

依次排列 k 行，左边对齐，第 i 行（$1\leqslant i\leqslant k$）有 n_i 个方格. 这样的一个菲勒图有时记为

$$J(n)=\{(i,j)\mid 1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant n_i\}.$$

于是 n 的分拆与其菲勒图一一对应. 把一个菲勒图的各行改为各列，但其相对位置不变，这样得到的菲勒图，称为原菲勒图的共轭菲勒图. 与共轭菲勒图对应的分拆，称为原分拆的共轭分拆. 一个与其共轭菲勒图相同的菲勒图称为自共轭菲勒图. 与自共轭菲勒图对应的分拆，称为自共轭分拆. 例如，利用菲勒图可得：

1. n 的 k 分拆数等于 n 的最大部分数为 k 的分拆数.

2. n 的自共轭分拆的个数等于 n 分成各部分数都不相等且均为奇数的分拆数.

3. n 分成各部分数互不相等的分拆的个数等于 n 分成各部分数都是奇数的分拆数.

共轭菲勒图(conjugate Ferrer's diagram)　见"菲勒图".

共轭分拆(conjugate partition)　见"菲勒图".

自共轭菲勒图(self-conjugate Ferrer's diagram)　见"菲勒图".

自共轭分拆(self-conjugate partition)　见"菲勒图".

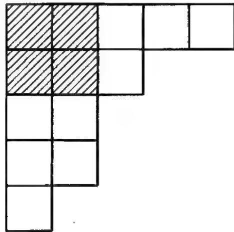
窦菲方(Durfee square)　分拆中的一类局部结构. 对于正整数 n 的一个分拆

$$n=\sum_{i=1}^{k}n_i\quad(n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_k\geqslant 1),$$

若

$$s=\max_{n_i\geqslant i}\{i\},$$

则在此分拆的菲勒图的左上角中有一个含有 s^2 个方格所成的正方形，此正方形称为此分拆的窦菲方，s 为窦菲方的边长. 如图 $13=5+3+2+2+1$，左上角阴影部分为其窦菲方，边长 $s=2$. 一个菲勒图除了它的窦菲方之外，可能有右边和下边两尾巴，右边是某个数 l 的不多于 s 个部分的分拆的菲勒图，下边是某个数 m 的每个部分不大于 s 的分拆的菲勒图.



标准表(standard tableau)　一类由正整数组成的表，它具有一些属性. 设正整数 n 的一个 k 分拆

$$J:n=\sum_{i=1}^{k}n_i\quad(n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_k\geqslant 1),$$

其对应的菲勒图为

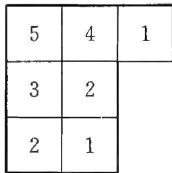
$$J(n)=\{(i,j)\mid 1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant n_i\}.$$

定义函数 $f:J(n)\to\mathbf{N}$，$\mathbf{N}$ 为自然数集，$f(i,j)=n_{ij}$，使得 $\forall\, i$，有 $j\leqslant j'\Rightarrow n_{ij}\leqslant n'_{ij}$，以及 $\forall\, j$，有 $i\leqslant i'\Rightarrow n_{ij}\leqslant n_{i'j}$，换言之，给 n 的一个分拆的菲勒图的每个方格填入一个正整数，使得每行自左至右递增，同时每列自上至下亦递增，则此正整数 n_{ij} 的阵列称为具有基数 n 和格局 J 的一个杨氏表. 它是由杨(Young, A.)于 19 世纪末引进的. 若杨氏表的所有数 n_{ij} 相异，且恰取遍 $1,2,\cdots,n$，则称为标准表. 若以 $e(J)$ 表示具有基数 n 和格局 J 的所有标准表数，则

$$e(J)=\frac{n!}{\prod\limits_{i,j}h_{ij}},$$

式中 h_{ij} 为标准表中方格 (i,j) 的钩长. 所谓钩长是指方格 (i,j) 右面同行和下面同列且包含自己在内的格子数. 式中分母是所有方格的钩长之积. 例如基数 $n=7$，格局 $J:3+2+2$ 的菲勒图（下表所示），在每个方格中填入该方格的钩长，由上面公式可得相应标准表数

$$e(J)=\frac{7!}{1^2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=21.$$



5	4	1
3	2	
2	1	

杨氏表(Young tableau)　见"标准表".

雅可比恒等式(Jacobi identity)　椭圆函数理论中的一个著名恒等式. 若 $|x|<1$，则

$$\prod_{i=1}^{\infty}\{(1-x^{2n})(1+x^{2n-1}z^2)(1+x^{2n-1}z^{-2})\}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})=\sum_{-\infty}^{\infty}x^{n^2}z^{2n}.$$

这就是雅可比恒等式. 雅可比恒等式的一些特殊情形，在分拆理论中有应用. 若把式中的 x 换为 $x^{3/2}$，z^2 换为 $-x^{1/2}$，则得欧拉恒等式

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{1}{2}n(3n+1)}.$$

欧拉恒等式(Euler identity)　一类组合恒等式. 即

$$\varphi(t)=\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^i)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(t^{\frac{1}{2}(3k^2-k)}+t^{\frac{1}{2}(3k^2+k)}\right).$$

若 n 的全部分拆数为 $p(n)$，$p(n)$ 的生成函数为 $p(t)$，则

$$p(t)=\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^i)^{-1}=\frac{1}{\varphi(t)}.$$

为求 $p(t)$ 的展式，欧拉(Euler，L.)先求得 $\varphi(t)$ 的展式. $\varphi(t)$ 的前若干项如下式所示：

$$\varphi(t)=1-t-t^2+t^5+t^7-t^{12}-t^{15}+t^{22}+t^{26}-t^{35}-t^{40}+\cdots.$$

由此可通过待定系数法求得 $p(t)$ 的前若干项：

$$p(t)=1+t+2t^2+3t^3+5t^4+7t^5+11t^6+15t^7+22t^8+\cdots.$$

2 进分拆(binary partition)　数的一类分拆. 即正整数 n 的特殊分拆，使每个分部量都是 2 的幂. 以 $b(n)$ 表 n 的 2 进分拆数，则 $b(n)$ 的生成函数为

$$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b(n)x^n=\prod_{n=0}^{\infty}(1-x^{2^n})^{-1}.$$

平面分拆(plane partition)　数的一类分拆. 设正整数

$$n=\sum_{i,j\geqslant 0}n_{ij}$$

使 $i\leqslant i'$，$j\leqslant j'$ 时，$n_{ij}\geqslant n_{i'j'}$，且 n_{ij} 都是非负整数，称为 n 的一个平面分拆. 换言之，n 的各分部按行列排列，使同行中分部量不增，同列中也一样. 若至多 k 行，至多 r 列，第 i 行首列的分部量为 $n_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的平面分拆数的生成函数记为 $\pi_r(n_1,n_2,\cdots,n_k;x)$，则

$$\pi_{r+1}(n_1,n_2,\cdots,n_k;x)=x^{n_1+n_2+\cdots+n_k}\times\sum_{m_k=0}^{n_k}\sum_{m_{k-1}=m_k}^{n_{k-1}}\cdots\sum_{m_1=m_2}^{n_1}\pi_r(m_1,m_2,\cdots,m_k;x),$$

$$\pi_1(n_1,n_2,\cdots,n_k;x)=x^{n_1+n_2+\cdots+n_k}.$$

反射原则(principle of reflection)　一类求特定组合数的方法. 坐标平面上由整点 $A(a,\alpha)$ 至 $B(b,\beta)(b>a\geqslant 0,\alpha>0,\beta>0,b-a\equiv\beta+\alpha(\mathrm{mod}\,2),b-a\geqslant\beta+\alpha)$ 的经过 x 轴上的点的不同路径(每段由整点 (i,j) 到 $(i+1,j+1)$ 或 $(i+1,j-1)$)数等于由 A 的关于 x 轴的对称点 $A'(a,-\alpha)$ 至 B 的不同路径数，该数等于

$$\frac{(b-a)!}{\left(\dfrac{b-a}{2}-\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right)!\left(\dfrac{b-a}{2}+\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right)!}.$$

特殊情形：由点 $O(0,0)$ 至点 $U(2n,0)$ 的在 x 轴的上半平面而中间不经过 x 轴上的点的路径数为

$$u_n=\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!};$$

允许经过 x 轴上的点，而不越过 x 轴的路径数为

$$u_{n+1}=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!},$$

并且，u_n 和 u_{n+1} 都是卡塔朗数.

撰　稿　于洪全　孙　革　钟　集　徐永华　徐利治
审　稿　沈　灏　蔡茂诚

组合设计

组合设计(combinatorial design)　组合学的主要分支之一. 200 多年前，欧拉(Euler，L.)所讨论的拉丁方及正交拉丁方是组合设计的较早例子. 更早的例子可追溯到中国古代的幻方(即纵横图). 著名的柯克曼女生问题所涉及的可分解平衡不完全区组设计是又一个例子. 这些早期的例子往往以智力游戏的原始形态出现. 由于生产技术的需要，以及诸如试验设计与纠错码这样一些相近学科的发展，为组合设计理论的发展提供了强大的推动力. 近 20 多年来，这一分支正处于迅速成长时期，不仅积累了大量的材料，而且逐步形成了以平衡不完全区组设计为主线，将各种类型的组合设计加以统一处理的理论体系. 1985 年以来，以设计理论或组合设计为题的专著已有多本. 它与码和密码的联系也正在受到越来越多的关注，一份新的国际性杂志《设计、码和密码》(Designs，Codes and Cryptography)已于 1991 年创刊. 设有限集 X 含 v 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_v$，称这些元素为点或处理. 设 $B_1,B_2,\cdots,B_b$ 是 X 的 b 个子集，称这些子集为区组，这一族子集记为 $\mathscr{B}$，并称对子 $(X,\mathscr{B})$ 为一个区组设计. 若每个区组的大小为 k，每个点在 r 个区组中出现，并且每两个相异点恰同时出现在 λ 个区组中，则称这样的区组设计为平衡不完全区组设计. 这一概念由玻色(Bose，R. C.)于 1939 年提出. 20 世纪 60 年代，哈拿匿(Hanani，H.)解决了当 k 值较小时，这一类设计的存在性问题. 至 20 世纪 70 年代，威尔森(Wilson，R. M.)提出了 PBD 闭集的概念并解决了对一般 k 值以及 v 充分大时这一类设计的存在性. 至于 v 充分大这一条件的确切描述已于 1996 年由常彦勋给出.

在设计理论的发展过程中，平衡不完全区组设计受到了几种不同方式的推广. 若放弃区组有统一的大小 k，而允许区组大小在一个正整数集合 K 中取值，则得到的设计称为成对平衡设计. 这一类设计对解决关于正交拉丁方的欧拉猜想以及对威尔森的工作起过重要的作用. 在此基础上形成的 PBD 闭集方法有着统一处理各种不同类型设计存在性问题的作用. 另一方面，若不是要求两个相异点而是任一个 t 元子集恰同时出现在 λ 个区组中，则这样的设计称为 t 设计. 若在区组内部引进点之间的邻接关系，即把区组看成一个图，则得到又一种推广，称为图设计或 G 设计. 若点与点之间有不同的结合关系，有第 i 种结合关系的两点恰在 λ_i 个区组中同时出现，则这样的推广就是部分平衡不完全区组设计. 除了这些形式的推广外，还有一些组合设计与平衡不完全区组设计有着各种各样的联系. 例如，正交拉丁方在具

体应用 PBD 闭集方法时起着重要的作用，而正交拉丁方的存在性也依赖于成对平衡设计的概念和方法. 又如，阿达马矩阵与一类特殊的对称平衡不完全区组设计等价，而罗姆方则等价于一类双可分解的平衡不完全区组设计.

组合设计理论主要讨论各种类型的组合设计的性质、存在性、构造方法及相互关系等问题. 设计的构造方法基本上可分为两类，即直接构造及递推构造. 利用有限几何构造设计以及利用有限群构造设计是主要的直接构造方法. 差集及混差法就是利用有限群构造设计的方法.

由于一些重要的码类常常与某种类型的组合设计有关，有些密码问题的理论分析也涉及某些组合设计，所以设计与码、设计与密码的相互联系近年来受到了特别的关注. 将设计的关联矩阵在某个 q 元域上张成的子空间称为设计的码. 这样就有可能通过研究码来研究设计. 关于 6 阶正交拉丁方不存在性的一个简洁证明以及 10 阶射影平面的不存在性证明是这种研究途径的两个成功的例证.

作为组合学的一个分支，设计问题的研究时常要用到组合计数理论中的结果以及图论中的一些概念，并且，还需要有限群、有限域、有限域上的向量空间及射影空间等代数的和几何的概念和结果作为工具. 随着计算机应用的进一步普及以及信息科学的进一步发展，离散数学的重要性将越来越多地被人们所认识. 组合设计乃至组合学作为离散数学的重要组成部分将有着光明的发展前景.

平衡不完全区组设计(balanced incomplete block design)　一类重要的区组设计. 若 X 为 v 元点集，$\mathscr{B}$ 为 X 的一些 k 元子集组成的族(这些 k 元子集称为区组)，使得 X 中的任意点对$\{x,y\}$恰好出现在 λ 个区组中，则称区组设计$(X,\mathscr{B})$为一个平衡不完全区组设计. 当这个区组设计中区组个数为 b，每个点恰在 r 个区组中出现时，记为(v,b,r,k,λ)-BIBD. 因为这 5 个参数适合以下关系式：$bk=vr$，$\lambda(v-1)=r(k-1)$及 $b\geqslant v$，从而 $r>k$. 这样由 3 个参数即可确定全部参数，所以这个设计也记为(v,k,λ)-BIBD. 一个$(v,3,1)$-BIBD 也称为施泰纳三元系. (v,k,λ)-BIBD 存在的必要条件可表为 $\lambda(v-1)\equiv 0(\bmod k-1)$和 $\lambda v(v-1)\equiv 0(\bmod k(k-1))$. 对于 $k=3,4$ 和 5，哈拿匿(Hanani，H.)证明了除$(15,5,2)$-BIBD 不存在外，参数满足以上必要条件的(v,k,λ)-BIBD 总是存在的. 当 $6\leqslant k\leqslant 9$ 时，BIBD 设计的存在性已有部分结果，但尚未完全解决. 对于上述必要条件，威尔森(Wilson，R. M.)于 1975 年证明了渐近存在定理，即，对于任意给定的 k 和 λ，存在某个与 k,λ 有关的常数 $M(k,\lambda)$，使得当 $v\geqslant M(k,\lambda)$时，这个必要条件也是充分的. 他的证明基于算术级数中素数个数无限的狄利克雷定理，并没有具体指明$M(k,\lambda)$有多大. 如何从 k 和 λ 明确给出 $M(k,\lambda)$，已由常彦勋于 1996 年得到解答. 虽然 BIBD 设计的存在性尚未解决，但当 $r\leqslant 41$ 时关于 BIBD 设计的存在性、计数及可分解性结果，已有现成的表可以查用，其中 $r\leqslant 10$ 的未知设计为$(46,69,9,6,1)$-BIBD 和$(51,85,10,6,1)$-BIBD.

平衡不完全区组设计来源于统计学中称为试验设计法的一个分支，并用于工农业及技术科学实验的安排. 此外，平衡不完全区组设计在编码理论的研究中也有重要的应用.

区组设计(block design)　组合设计研究的主要对象之一. 设有限集 X 含 v 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_v$，这些元素称为点或处理. $B_1,B_2,\cdots,B_b$ 是 X 的 b 个子集(其中可能有相同者)，这些子集称为区组，将这些区组组成的子集族记为 $\mathscr{B}$. 称对子$(X,\mathscr{B})$为一个区组设计. 这样定义的区组设计并不包含多少信息，为在理论研究和实际应用中得到有意义的对象，需要对区组设计加强条件. 当$(X,\mathscr{B})$中有两个区组相同时，称它们为重复区组，无重复区组的设计称为简单设计. 在一个区组设计中，若每个点恰在 r 个区组中出现，且每个区组恰包含 k 个点，则称该区组设计为正则设计，称 r 为重复数，k 为区组大小. 当区组设计中任意两个不同的点恰好同时出现在 λ 个区组中时，称该区组设计为平衡设计，且称 λ 为设计的相遇数. 区组 B 与 X 相同时称 B 为完全区组. 若区组设计中至少有一个区组不是完全区组，则称之为不完全区组设计. 当 $\mathscr{B}$ 中有一部分区组形成集 X 的一个划分时，称这部分区组为一个平行类. 若 $\mathscr{B}$ 可以划分为若干个平行类，则称该区组设计是可分解的. 组合设计的基本问题之一是研究各种区组设计存在的充分必要条件.

重复区组(repeated block)　见“区组设计”.

简单设计(simple block design)　见“区组设计”.

正则设计(regular block design)　见“区组设计”.

平衡设计(balanced block design)　见“区组设计”.

相遇数(index)　见“区组设计”.

不完全区组设计(incomplete block design)　见“区组设计”.

关联矩阵(incidence matrix)　研究区组设计的一种工具. 若 v 元集 X 上的区组设计$(X,\mathscr{B})$的区组为 $\mathscr{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_b\}$，则这个设计的关联矩阵是一个元素为 0 或 1 与 X 和 $\mathscr{B}$ 有关的 $b\times v$ 的(0,1)矩阵 $A=(a_{ij})$，其中对 $x_j\in X$，

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & (x_j\in B_i),\\ 0 & (x_j\notin B_i)\end{cases}\quad(1\leqslant i\leqslant b;1\leqslant j\leqslant v).$$

对于具有某些特定性质的区组设计，它的关联矩阵也相应地具有一些特定的性质. 例如，$b\times v$ 的(0，1)矩阵 A 为一个(v,b,r,k,λ)-BIBD 的关联矩阵的充分必要条件是 $A^TA=(r-\lambda)I_v+\lambda J_v$ 和 $AW_v=kW_v$，其中 I_v 为 v 阶单位阵，J_v 是元素全为 1 的 v 阶方阵，W_v 是元素全为 1 的 $v\times1$ 矩阵.

费希尔不等式(Fisher's inequality) 反映设计存在的一种条件. 指(v,b,r,k,λ)-BIBD 存在时，参数 b 与 v 必须满足的不等式：$b\geqslant v$. 该不等式由费希尔(Fisher, R. A.)于 1940 年发现. 后来雷·乔德里(Ray-Chaudhuri, D. K.)和威尔森(Wilson, R. M.)将这个不等式推广到 t 设计的情形. 他们证明：若 $2s$-(v,k,λ)设计存在，且 $v\geqslant k+s$，则

$$b\geqslant\binom{v}{s};$$

若$(2s+1)$-(v,k,λ)设计存在，且 $v\geqslant k+s+1$，则

$$b\geqslant2\binom{v-1}{s}.$$

以上不等式称为推广的费希尔不等式.

推广的费希尔不等式(extended Fisher's ineguality) 见"费希尔不等式".

补设计(complementary design) 由一个区组设计派生的另一个区组设计. 若一个区组设计$(X,\mathscr{B})$的区组为 $B_1,B_2,\cdots,B_b$，对每个区组 B_i，做 $B_i'=X\backslash B_i$，把这样得到的所有 B_i' 作为区组族 $\mathscr{B}'$，则称$(X,\mathscr{B}')$为区组设计$(X,\mathscr{B})$的补设计. 一个(v,b,r,k,λ)-BIBD 的补设计是一个$(v,b,b-r,v-k,b-2r+\lambda)$-BIBD. 若区组设计$(X,\mathscr{B})$的关联矩阵为 A，则其补设计的关联矩阵 $\overline{A}=J_{b\times v}-A$，这里 $J_{b\times v}$是元素全为 1 的 $b\times v$ 矩阵.

对称平衡不完全区组设计(symmetric balanced incomplete block design) 简称对称设计. 一种特殊类型的平衡不完全区组设计. 即当 $b=v$ 或 $r=k$ 时的 BIBD 设计，记为(v,k,λ)-SBIBD. 对称设计的参数除了应满足 BIBD 设计的参数条件外，还需满足布鲁克-赖瑟-乔拉定理. 从一个(v,k,λ)差集可以得到一个(v,k,λ)-SBIBD，而一个有限射影平面就是一个 $\lambda=1$ 的对称设计. $\lambda=2$ 的对称设计称为双平面. 人们猜测对大于 1 的固定 λ，只存在有限多个对称设计. 双平面情形可用来测试这一猜想. 除 $k=2,3,4,5,6,9,11,13$ 外，目前尚不知道是否存在其他 k 值的双平面. 某些对称设计可用来构作阿达马矩阵，另一些可用来构作双偶自对偶码.

对称设计(symmetric design) 见"对称平衡不完全区组设计".

布鲁克-赖瑟-乔拉定理(Bruck-Ryser-Chowla theorem) 反映对称设计存在的必要条件的一个事实. 若(v,k,λ)-SBIBD 存在，记 $n=k-\lambda$，则当 v 为偶数时，n 为平方数；当 v 为奇数时，不定方程

$$z^2=nx^2+(-1)^{\frac{v-1}{2}}\lambda y^2$$

有不全为零的整数解 x,y,z. 利用这个定理可以确定某些对称设计的不存在性. 例如，因为 22 是偶数，而 $n=5$ 不是平方数，所以(22，7，2)-SBIBD 不存在. 另外，这个定理给出的条件并不是充分的. 例如，最近证明了 10 阶射影平面不存在，即(111，11，1)-SBIBD 不存在.

导出设计(derived design) 一种重要的设计. 指由对称设计导出的平衡不完全区组设计. 具体构作方法如下：若一个(v,k,λ)-SBIBD 的区组为 $B_1,B_2,\cdots,B_v$，取定其中一个区组 B_j，对其余区组 B_i，记 $B_i'=B_i\cap B_j$，且 $\mathscr{B}_j'=\{B_i'\mid1\leqslant i\leqslant v,i\neq j\}$，则$(B_j,\mathscr{B}_j')$是一个$(k,v-1,k-1,\lambda,\lambda-1)$-BIBD. 称这个设计为原对称设计的一个导出设计.

剩余设计(residual design) 一种由对称设计导出的平衡不完全区组设计. 具体的构作方法如下：设$(X,\mathscr{B})$是一个(v,k,λ)-SBIBD，取定一个区组 B_0，对其余的区组 B，记 $B'=B\backslash B_0$，且 $\mathscr{B}'=\{B'\mid B\in\mathscr{B}\backslash\{B_0\}\}$，这样得到的一个区组设计$(X\backslash B_0,\mathscr{B}')$是一个$(v-k,v-1,k,k-\lambda,\lambda)$-BIBD，称为$(X,\mathscr{B})$的剩余设计. 当一个 BIBD 设计的参数为$(v-k,v-1,k,k-\lambda,\lambda)$时，称为拟剩余设计. 若一个拟剩余设计是某个对称设计的剩余设计，则称该拟剩余设计是可嵌入的. 利用康纳-霍尔定理可以证明某些 BIBD 设计不存在.

拟剩余设计(quasi-residual design) 见"剩余设计".

康纳-霍尔定理(Connor-Hall theorem) 关于拟剩余设计的嵌入定理. 该定理断言：$\lambda=2$ 的拟剩余设计都是剩余设计，即都是可嵌入的. 关于可嵌入的情况，除了 $\lambda=2$ 外，因 $\lambda=1$ 时的拟剩余设计是仿射平面，从而也是可嵌入的. 对 $\lambda\geqslant3$，目前仅知道关于 k 的渐近结果. 对于任意给定的 λ，存在关于 λ 的函数 $f(\lambda)$，使得 $k>f(\lambda)$时的拟剩余设计总是可嵌入的. 但是，也有例子说明：并非所有的拟剩余设计都是可嵌入的. 利用嵌入定理可以证明某些 BIBD 设计的不存在性. 例如，若(15，21，7，5，2)-BIBD 存在，则必为某个(22，7，2)-SBIBD 的剩余设计，但由布鲁克-赖瑟-乔拉定理知(22，7，2)-SBIBD 不存在，从而(15，21，7，5，2)-BIBD 也不存在.

BIBD 设计的存在性猜测(existence conjecture of BIBD) 一种对设计存在条件的推测. 对于给定的 k 和 λ，存在常数 $M(k,\lambda)$，使得 $v\geqslant M(k,\lambda)$时，(v,k,λ)-BIBD 存在的充分必要条件为 $\lambda(v-1)\equiv0$

(mod $k-1$)和 $\lambda v(v-1)\equiv 0(\bmod k(k-1))$. 这一猜测已由威尔森(Wilson, R. M.)于1975年证实.

柯克曼女生问题(Kirkman's school girl problem)　一个组合设计问题. 由柯克曼(Kirkman, T. P.)于1850年提出. 某教员打算安排班上的15名女生散步,散步时3名女生成一组,共五组. 问能否在一周内每天安排一次散步,使得每两名女生在这周内恰有一次分在同一组内散步? 下面是该问题的一个解:

{1,2,5}　{3,14,15}　{4,6,12}　{7,8,11}　{9,10,13};
{1,3,9}　{2,8,15}　{4,11,13}　{5,12,14}　{6,7,10};
{1,4,15}　{2,9,11}　{3,10,12}　{5,7,13}　{6,8,14};
{1,6,11}　{2,7,12}　{3,8,13}　{4,9,14}　{5,10,15};
{1,8,10}　{2,13,14}　{3,4,7}　{5,6,9}　{11,12,15};
{1,7,14}　{2,4,10}　{3,5,11}　{6,13,15}　{8,9,12};
{1,12,13}　{2,3,6}　{4,5,8}　{7,9,15}　{10,11,14}.

其中每一行表示一次散步的分组. 柯克曼女生问题后来发展为一般的可分解BIBD设计的存在性问题(参见"可分解平衡不完全区组设计").

可分解平衡不完全区组设计(resolvable balanced incomplete block design)　一类特殊的BIBD设计,缩写为RBIBD. 即其区组全体可以划分为一些平行类(参见"区组设计")的BIBD设计. 一个参数为(v,k,λ)的可分解BIBD设计记为(v,k,λ)-RBIBD. 一个$(v,3,1)$-RBIBD也称为柯克曼三元系. 它的存在性直到1971年才由雷·乔德里(Ray-Chaudhuri, D. K.)和威尔森(Wilson, R. M.)彻底解决. 他们证明:$(v,3,1)$-RBIBD存在的充分必要条件为 $v\equiv 3(\bmod 6)$. 接着他们与哈拿匿(Hanani, H.)一起证明:$(v,4,1)$-RBIBD存在的充分必要条件为 $v\equiv 4(\bmod 12)$. 与此同时,前两位作者还猜测 $v\equiv 5\ (\bmod 20)$是$(v,5,1)$-RBIBD存在的充分必要条件. 目前除5个可能例外的v值(最小为45,最大为645),这个猜测已被证实. 与BIBD设计相类似,可分解BIBD设计的存在性也已有了渐近结果,雷·乔德里和威尔森证明了$\lambda=1$的情形,中国的陆家羲把λ推广为一般的情形. 他们证明:对给定的正整数k和λ,除有限多个正整数v外,(v,k,λ)-RBIBD存在的充分必要条件是 $v\equiv 0(\bmod k)$和 $\lambda(v-1)\equiv 0$ (mod $k-1$). 这里的"有限多个正整数v"并没有明确给出究竟有多少,这是有待进一步解决的问题. 关于RBIBD,玻色(Bose, R. C.)于1942年证明了不等式:$b\geqslant v+r-1$. 当等号成立时,称该设计为仿射的,记为ARBIBD(参见"仿射可分解设计").

柯克曼三元系(Kirkman's triple system)　见"可分解平衡不完全区组设计".

准可分解设计(almost resolvable design)　可分解平衡不完全区组设计的一种变体. 设$(X,\mathscr{B})$是一个$(v,k,k-1)$-BIBD, $v\equiv 1(\bmod k)$, 若区组族$\mathscr{B}$有一个划分$\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2,\cdots,\mathscr{B}_v$,使得对每个$\mathscr{B}_i$,存在点$x$,使$\mathscr{B}_i$是$X\setminus\{x\}$的划分,则称这个BIBD设计为准可分解设计. 当$k=3,4$时,准可分解设计的存在性已经解决,只要$v\equiv 1(\bmod k)$,总存在准可分解的$(v,k,k-1)$-BIBD. 关于$k=5$的准可分解设计的存在性,目前仅剩有限个$v$值尚未确定.

仿射可分解设计(affine resolvable block design)　一类特殊的可分解区组设计. 当一个可分解区组设计中任意两个不在同一个平行类中的区组都恰好有m个公共点时,称这个区组设计是仿射可分解设计. 仿射可分解设计必定是一个可分解BIBD设计. 玻色(Bose, R. C.)证明:当且仅当一个可分解BIBD设计的参数满足$b=v+r-1$时是仿射可分解的. 金勃莱(Kimberley, M. E.)于1971年证明:一个3设计是仿射可分解的充分必要条件是它是一个扩充阿达马2设计,且当$t\geqslant 4$时,没有仿射可分解的t设计. 从仿射可分解的BIBD设计可以得到一类对称设计. 沃利斯(Wallis, W. D.)证明:若存在仿射可分解(v,b,r,k,λ)-BIBD,则存在(v',k',λ')-SBIBD,其中$v'=(r+1)v, k'=kr, \lambda'=k\lambda$. 仿射可分解设计后来被推广为仿射$\alpha$可分解设计. 一个$\alpha$可分解设计的区组族按定义分成组$\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2,\cdots,\mathscr{B}_t$后(参见"$\alpha$可分解设计"),若同一组中的任两个区组有$q_1$个公共点,不同组中的任两个区组有$q_2$个公共点,则称为仿射$\alpha$可分解设计.

α可分解设计(α-resolvable block design)　可分解设计的一种推广. 设$(X,\mathscr{B})$是一个区组设计,若区组族$\mathscr{B}$可以划分为一些组$\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2,\cdots,\mathscr{B}_t$,使得$X$中的每个点在任一$\mathscr{B}_i$中恰好出现$\alpha$次,则称这个设计为$\alpha$可分解设计. α可分解的名称来源于图论中的α因子分解. 当$\alpha=1$时,就是通常的可分解设计. 一个α可分解的(v,k,λ)-BIBD也记为α-$RB_\lambda(v,k)$. 一个α-$RB_\lambda(v,k)$存在的必要条件是$\lambda(v-1)\equiv 0(\bmod \alpha(k-1))$, $\lambda v(v-1)\equiv 0(\bmod k(k-1))$及$\alpha v\equiv 0(\bmod k)$. 对于$k=3$,已经证明当$v\geqslant 3$且$v\neq 6$时上述必要条件也是充分条件. 对$k=4$,也已经有了部分结果.

设计的同构(isomorphism of designs)　同类型区组设计间的一种关系. 设$(X,\mathscr{B})$与$(X',\mathscr{B}')$是两个(v,k,λ)-BIBD,若存在X到X'的一一映射,把$\mathscr{B}$中每个区组映为$\mathscr{B}'$中的区组,并使之成为$\mathscr{B}$到$\mathscr{B}'$的一一映射,则称这两个区组设计是同构的. 当$X=X'$, $\mathscr{B}=\mathscr{B}'$时,这样的同构称为自同构. 设计$(X,\mathscr{B})$的全体自同构组成一个群,称为设计的全自同构群. 这个群的任一子群都称为该设计的自同构群.

设计的全自同构群(total automorphism group

of design) 见"设计的同构".

设计的自同构群(automorphism group of design) 见"设计的同构".

混差法(method of mixed differences) 亦称对称重差法.构造BIBD设计的一种直接方法,它是由玻色(Bose,R.C.)在1939年提出的.该方法用于构造有自同构群G(参见"设计的同构")的BIBD设计$(X,\mathscr{B})$.在G的作用下,X的元被分为一些元素轨道,$\mathscr{B}$亦被分为一些区组轨道.由每个区组轨道中各选出一个区组构成的区组系(B)被称为$\mathscr{B}$的基.构造$(X,\mathscr{B})$的关键是G的选取和(B)的确定.为此需在(B)的每个区组B中分别计算同一元素轨道中元之间的纯差及不同元素轨道中元之间的混差,依据G中使B固定不变的子群的阶数求出诸纯差及混差产生的次数,要求这些次数都等于(v,k,λ)-BIBD中的参数λ.

对称重差法(method of symmetrically repeated differences) 即"混差法".

设计的计数(enumeration of designs) 设计的个数问题之一.指两两不同的同类组合设计的个数计值.通常把同构的BIBD设计看成相同的设计,关于BIBD设计的计数一般是指互不同构的(v,k,λ)-BIBD的个数.若个数为零,则说明这类设计并不存在.所以,设计的存在性问题可以看做计数问题的一个特殊情形.由于目前很多类型设计的存在性问题尚未解决,所以设计计数方面的研究成果还不多.当$r\leqslant 41$时,BIBD设计的计数结果有表可查,很多情形只有个数值的下界,少数情形才有确切的值.例如,已知柯克曼女生问题的解是惟一的,而对于(15,3,1)-BIBD,共有80个互不同构的设计.若在同类型的组合设计中可以规定一种等价关系,将相互等价的设计看做是相同的,则不同设计的个数就是等价类的个数.例如,在拉丁方的计数中就有这种情形.

成对平衡设计(pairwise balanced design) 平衡不完全区组设计的一种推广.设X为v元集,$\mathscr{B}$是X的某些子集(称为区组)的族,$\mathscr{B}$中区组的大小(数)均在某个正整数集合K中,若X的任意两个元素恰含于$\mathscr{B}$的λ个区组中,则将二元组$(X,\mathscr{B})$称为成对平衡设计,记为(v,K,λ)-PBD.当区组大小都相同时,这种特殊的成对平衡设计就是平衡不完全区组设计.

成对平衡设计的概念和方法曾对正交拉丁方及平衡不完全区组设计的存在性和构造方法的研究起过重要的作用.例如,玻色(Bose,R.C.)等关于欧拉猜想的反证,哈拿匿(Hanani,H.)关于区组大小为3,4,5的平衡不完全区组设计存在的充分必要条件,以及哈拿匿等关于区组大小为3,4的可分解平衡不完全区组设计存在的充分必要条件等.在这些重要的工作中,成对平衡设计作为研究组合设计的一般工具也得到了发展.威尔森(Wilson,R.M.)于20世纪70年代引入了PBD闭集的概念,在此基础上形成的PBD闭集方法不仅简化了一些经典结果的证明,也为统一处理新提出的各种组合设计的存在性问题提供了有效的途径.若

$$\alpha(K)=\gcd\{k-1\mid k\in K\},$$
$$\beta(K)=\gcd\{k(k-1)\mid k\in K\},$$

其中gcd表示最大公约数,则(v,K,λ)-PBD存在的必要条件可表为:

$$\lambda(v-1)\equiv(\operatorname{mod}\alpha(K)),$$
$$\lambda v(v-1)\equiv 0\ (\operatorname{mod}\beta(K)).$$

在解决BIBD设计的存在性猜测的同时,威尔森也证明了上述必要条件是渐近充分的.即,对给定的K与λ,存在常数$c(K,\lambda)$,当$v\geqslant c(K,\lambda)$时,(v,K,λ)-PBD存在的必要条件也是充分的.但是,并没有指明这里的$c(K,\lambda)$有多大.

PBD闭集(PBD closed set) 一种特殊类型的正整数集合.以$\mathscr{P}(X)$记集合X的子集全体,若有$\mathscr{P}(X)$到自身的一个映射$\sigma: A\to\sigma(A)$,使对$\mathscr{P}(X)$中任意子集A和B有:$A\subseteq\sigma(A)$,$\sigma(\sigma(A))=\sigma(A)$,$A\subseteq B$蕴含着$\sigma(A)\subseteq\sigma(B)$,则称映射$\sigma$是一个闭包运算.能使$\sigma(A)=A$的子集$A$称为该闭包运算的一个闭集.若$B(K)=\{v\mid$存在$(v,K,1)$-PBD$\}$,则映射$K\to B(K)$是一个闭包运算,相应的闭集称为PBD闭集.例如,$H_a=\{r\geqslant 1\mid r\equiv 0,1(\operatorname{mod} a)\}$,$H_a^a=\{r\geqslant 1\mid r\equiv 1(\operatorname{mod} a)\}$,$R_k=\{r\geqslant 1\mid$存在$(r(k-1)+1,k,1)$-BIBD$\}$都是PBD闭集.

PBD闭集的纤维(fibres of PBD closed set) 一种剩余类.设K为PBD闭集,记$\beta(K)=\gcd\{k(k-1)\mid k\in K\}$.若模$\beta(K)$的某个剩余类$f$至少含$K$中的一个元$k$,即$k\equiv f(\operatorname{mod}\beta(K))$,则称剩余类$f$是PBD闭集$K$的一条纤维.若存在常数$M=M(f)$,使

$$\{v\geqslant M\mid v\equiv f(\operatorname{mod}\beta(K))\}\subseteq K,$$

则称纤维f是完备的.若K的每一条纤维都是完备的,则称PBD闭集K关于周期$\beta(K)$是最终周期的.威尔森(Wilson,R.M.)证明了以下有用结果:PBD闭集的每一条纤维都是完备的.换句话说,每一个PBD闭集K关于周期$\beta(K)$是最终周期的.

PBD闭集的生成集(generating set of PBD closed set) 一种有限生成子集.设K_0为PBD闭集K的子集,若$B(K_0)=K$,则称K_0是PBD闭集K的生成集.已知任意PBD闭集均有有限的生成集.在具体应用PBD闭集的方法时,需要寻找尽可能小的生成集.若PBD闭集K的某个元x不属于$B(K\setminus\{x\})$,则称x是基本的.若以E_K记PBD闭集

K 的全体基本元的集合,则 E_K 是 K 的最小生成集,称为该 PBD 闭集的基. 少数 PBD 闭集的基已经确定. 例如,H_3 及 H_4 的基分别为{3,4,5}及{4,5,8,9,12},H_3^3 及 H_4^4 的基分别为{4,7,10,19}及{5,9,13,17,29,33}. 这些生成集对于确定平衡不完全区组设计及可分解平衡不完全区组设计存在的充分必要条件有重要作用.

PBD 闭集方法(method of PBD closed set) 处理某些组合设计存在性的一种方法,适用于具有PBD 闭性质的设计. 设某种设计由它的某个参数 r 确定,且存在一个$(v,K,1)$-PBD,若对 K 中每一个数 k,所有 $r=k$ 的相应设计的存在性能保证 $r=v$ 的设计的存在性,则称这种设计具有 PBD 闭的性质. 对具有 PBD 闭性质的设计而言,要证明当 r 属于某个 PBD 闭集时设计均存在,只需证明当 r 属于该闭集的某个(有限)生成集(或基)时设计均存在即可. 例如,施泰纳三元系这种组合设计关于它的重复数 r 具有 PBD 闭的性质. 为了证明当 r 属于闭集 H_3 时相应三元系都存在,只需证明当 r 属于 H_3 的基{3,4,6}时相应三元系存在即可.

根据直接构造方法,由此即得到施泰纳三元系存在的充分必要条件为 $r\equiv 0,1 \pmod 3$,即 $v\equiv 1,3 \pmod 6$. 这种方法的好处在于:将本来应对无穷多个 r 值证明设计的存在性归结为只需对生成集中有限多个 r 值证明设计的存在性,这常常使问题变得易于处理;同时,对一种设计所计算的 PBD 闭集的有限生成集往往也适用于另一种设计. 由于许多种组合设计具有 PBD 闭性质,所以这种方法在一定程度上起着统一处理不同设计存在性问题的作用.

可分组设计(group divisible design) 成对平衡设计的一种推广,常用于 PBD 的递推构造. 设 X 为 v 元集,$\mathscr{G}$ 是 X 的某些子集,它们划分 X 且称为组,$\mathscr{A}$ 是 X 的某些子集(称为区组)的族. 若 X 中属于同一个组的任意两个元不同时含于任何区组,而属于不同组的任意两个元恰同时含于 λ 个区组,则称$(X,\mathscr{G},\mathscr{A})$为一个可分组设计. 若组的大小均在集 M 中,而区组大小均在集 K 中,则记该可分组设计为 $\mathrm{GDD}[K,\lambda,M;v]$. 若 $\mathscr{G}$ 中有 t_i 个大小 m_i 的组,$1\leqslant i\leqslant s$,则称 $m_1^{t_1}m_2^{t_2}\cdots m_s^{t_s}$ 为组的型. 一个型为 1^v 的 $\mathrm{GDD}[K,\lambda,\{1\};v]$就是一个$(v,K,\lambda)$-PBD. 关于可分组设计存在性的系统结果仅限于 $K=\{k\}$且型为 m^u 的情形. 可分组设计 $\mathrm{GDD}[\{k\},\lambda,\{m\},um]$存在的必要条件是:$u\geqslant k$,$\lambda(u-1)m\equiv 0 \pmod{k-1}$,$\lambda u(u-1)m^2\equiv 0 \pmod{k(k-1)}$. 当 $k=3,4$ 时,除两个例外情形外,以上必要条件也是充分条件,这两个情形是 $\mathrm{GDD}[\{4\},1,\{2\};8]$及 $\mathrm{GDD}[\{4\},1,\{6\};24]$,它们都不可能存在.

威尔森基本构作法(Wilson's fundamental construction) 由若干已知可分组设计构作新的可分组设计的方法. 设$(X,\mathscr{G},\mathscr{A})$是一个可分组设计 $\mathrm{GDD}[K,\lambda,M;v]$(称为基本的 GDD). 若有权函数 $w:x\to Z^+\cup\{0\}$,使对 $\mathscr{A}$ 中每一个区组 A,均存在可分组设计

$$\mathrm{GDD}\Big[K,\mu,\{w(x)\mid x\in A\};\sum_{x\in A}w(x)\Big]$$

(称为输入设计),则存在一个可分组设计

$$\mathrm{GDD}\Big[K,\lambda\mu,\Big\{\sum_{x\in G}w(x)\mid G\in\mathscr{G}\Big\};\sum_{x\in X}w(x)\Big].$$

该方法由威尔森(Wilson, R. M.)提出,是构造可分组设计的一个基本方法,由此得名.

输入设计(input design) 见"威尔森基本构作法".

不完全可分组设计(incomplete group divisible design) 可分组设计的一种推广. 是用于可分组设计的递推构造. 设 X 为 v 元集,Y 为 X 的某个子集,$\mathscr{G}$ 是一族 X 的子集,它们划分 X 且称为组,$\mathscr{A}$ 是 X 的某些子集(称为区组)的族. 若当 X 中的两个元属于同一个组或同时属于 Y 时,它们不含于任何区组,否则它们恰含于 λ 个区组,则称$(X,Y,\mathscr{G},\mathscr{A})$为一个不完全可分组设计,简记为 IGDD. 称$\{(|G|,|G\cap Y|)\mid G\in\mathscr{G}\}$为该 IGDD 的型,这里重复的数对按重数计算. 例如,在一个 $\mathrm{GDD}[\{3\},1,\{2\};6]$中去掉一个区组 A,则得到一个型为$(2,1)^3$ 的 IGDD,其中 $Y=A$.

PBD 的子设计(subdesign of PBD) 一种组合构形. 指含于 PBD 中的 PBD. 设$(Y,\mathscr{B})$为(u,K,λ)-PBD,$(X,\mathscr{A})$为(v,K,λ)-PBD. 若 $Y\subseteq X$ 且 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}$,则称$(Y,\mathscr{B})$是$(X,\mathscr{A})$的一个子设计. 有了 PBD 的子设计概念后,可以用打碎 GDD 的组的方法构作新的 PBD. 设$(X,\mathscr{G},\mathscr{A})$为 $\mathrm{GDD}[K,\lambda,M;v]$,若对 $\mathscr{G}$ 中每一个组 G,存在$(|G|+d,K,\lambda)$-PBD $(G\cup D,\mathscr{B}_G)$含子设计(d,K,λ)-PBD$(D,\mathscr{C})$,则

$$\Big(X\cup D,\mathscr{A}\cup\Big(\bigcup_{G\in\mathscr{G}}(\mathscr{B}_G\setminus\mathscr{C})\Big)\cup\mathscr{C}\Big)$$

是一个$(v+d,K,\lambda)$-PBD. 该 PBD 还含子设计$(|G|+d,K,\lambda)$-PBD 和(d,K,λ)-PBD.

不完全成对平衡设计(incomplete pairwise balanced design) 带子设计的 PBD 的推广. 设 X 为 v 元集,Y 为 X 的 w 元子集,$\mathscr{A}$ 是 X 的某些子集(称为区组)的族,$\mathscr{A}$ 中区组的大小均在某个正整数集合 K 中. 若当 X 中的任意两个元均属于 Y 时它们不含于任何区组,否则它们恰含于 λ 个区组,则称$(X,Y,\mathscr{A})$为一个不完全成对平衡设计,记为$(v,w;K,\lambda)$-IPBD. 若集 Y 上存在一个(w,K,λ)-PBD$(Y,\mathscr{B})$,则$(X,\mathscr{A}\cup\mathscr{B})$是一个带子设计的 PBD. 但是,集 Y 上未必存在这样的子设计,所以,IPBD 的概念

比带子设计的 PBD 更为一般. 在 PBD 的递推构造中有时需要比 IPBD 更一般的概念. 设 X 为 v 元集, Y_1 与 Y_2 分别为 X 的 ω_1 及 ω_2 元子集, $|Y_1 \cap Y_2| = \omega_3$, $\mathscr{A}$ 是 X 的某些子集(称为区组)的族, $\mathscr{A}$ 中区组的大小均在某个正整数集合 K 中. 若当 X 中的任意两个元均属于 Y_1 或均属于 Y_2 时它们不含于任何区组, 否则它们恰含于 λ 个区组, 则称 $(X, Y_1, Y_2, \mathscr{A})$ 为一个格子不完全成对平衡设计, 记为

$$(v; w_1, w_2, w_3; k, \lambda)\text{-}\diamond\text{-IPBD}.$$

净集(clear set) 成对平衡设计中某些特殊的区组. 将 (v, K, λ)-PBD 中大小为 k_i 的区组全体称为第 i 个等区组分量. 若若干个等区组分量的所有区组之间两两不相交, 则称这些区组构成一个净集. 若前 r 个等区组分量形成一个净集, 则记该设计为 $(v, \{(k_1, \cdots, k_r), \cdots, k_m\}, \lambda)$-PBD. 利用净集的概念, 可以得到正交拉丁方的以下构作方法: 若存在

$$(v, \{(k_1, \cdots, k_r), \cdots, k_m\}, 1)\text{-PBD},$$

则

$$N(v) \geqslant \min \{N(k_1), \cdots, N(k_r), N(k_{r+1})-1, \cdots, N(k_m)-1\}.$$

这一构作方法在欧拉猜想的反证中起过重要的作用.

(r,λ)设计((r,λ)-design) 一类特殊的成对平衡设计. 若一个 (v, K, λ)-PBD 中每个元恰含于 r 个区组, 则称之为 (r,λ) 设计. 在一个 (r,λ) 设计 $(X, \mathscr{A})$ 中, 若 $\mathscr{A}$ 可以划分为一些平行类 $R_1, R_2, \cdots, R_r$, 则称 $R=\{R_1, R_2, \cdots, R_r\}$ 是设计的一个分解. 若还有一个分解 $R'=\{R'_1, R'_2, \cdots, R'_r\}$, 使任一个 R_i 与任一个 R_j' 至多有一个公共的区组, 则称该设计是正交的 (r,λ) 设计. 正交的 (r,λ) 设计在讨论罗姆方等其他组合设计时有用.

正交(r,λ)设计(orthogonal (r,λ)-design) 见"(r,λ)设计".

准可分解可分组设计(almost resolvable group divisible design) 一类特殊的可分组设计. 设 $(X, \mathscr{G}, \mathscr{A})$ 是具有型 m^n 的可分组设计 GDD$[\{k\}, 1, \{m\}; mn]$. 对任一个组 $G \in \mathscr{G}$, 若 $\mathscr{A}$ 中某些区组的族 P 划分集 $X \backslash G$, 则称 P 是一个带洞 G 的准平行类. 若 $\mathscr{A}$ 可划分成一些准平行类, 则称该可分组设计是准可分解的可分组设计, 记为 k 支架. k 支架的概念是在研究可分解平衡不完全区组设计的存在性问题中形成的, 对其他类型的可分解设计也有用. 关于 k 支架的存在性, 史汀生(Stinson, D. R.)于 1987 年证明: 型为 m^n 的 3 支架存在的充分必要条件为 $n \geqslant 4, m \equiv 0 \pmod 2$ 且 $m(n-1) \equiv 0 \pmod 3$.

k 支架(k-fame) 见"准分解可分组设计".

拉丁方(Latin square) 一类重要的组合设计. 若 v 元集 X 上的一个 v 阶方阵的每一行和每一列都是 X 的一个无重复元的排列, 则称该方阵为一个拉丁方. 若把两个 v 阶拉丁方叠合在一起时, 第一个拉丁方的每一元与第二个拉丁方的每一元恰相遇一次, 则称这两个拉丁方正交.

在各种类型组合设计的递推构造中, 经常用到拉丁方的结果. 例如, 哈拿匿(Hanani, H.)及威尔森(Wilson, R. M.)关于平衡不完全区组设计的存在性理论, 沃利斯(Wallis, W. D.)及马林(Mullin, R. C.)关于罗姆方的存在性, 以及陆家羲关于施泰纳三元系大集的工作等. 拉丁方这一类设计不仅在组合设计的理论中有其基本的重要性, 而且在试验设计及纠错编码等方面也有应用.

自从 1782 年, 欧拉(Euler, L.)提出"不存在 $4t+2$ 阶的正交拉丁方"这一猜想以来(其中 $t=1$ 的情形以"36 名军官问题"这一通俗的提法为人们所熟知), 拉丁方的研究经历了漫长和富有成果的发展过程. 到 1974 年, 出现了丹内斯(Dénes, J.)和基特韦尔(Keedwell, A. D.)以《拉丁方及其应用》为题的专著. 该书广泛收罗了到 1974 年为止的丰富文献并且总结了已有的方法和结果, 列出了 73 个有待解决的问题. 以后的近 20 年时间内, 其中约 20 个问题已完全解决, 并至少有 10 个问题得到部分解决. 这两位作者于 1990 年又写了以《拉丁方: 理论和应用方面的新进展》为题的专著, 作为前书的续篇, 在一定程度上反映了拉丁方这一专题的研究现状和动态.

拉丁矩(Latin rectangle) 拉丁方的推广. 设 X 为 n 元集, A 为 X 上的 $r \times s$ 阵列, 若同行和同列都没有重复的元素, 则称 A 为 X 上的一个 $r \times s$ 拉丁矩. 特别地, 当 $r=s=n$ 时, 便得到一个 n 阶拉丁方. 若集 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 上的 n 阶拉丁方 $A=(a_{ij})$ 满足 $a_{ii}=i, 1 \leqslant i \leqslant n$, 则称该拉丁方是幂等的. 若 A 满足 $a_{ij}=a_{ji}, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, 则称之为对称拉丁方. 若一个 n 阶拉丁方的 n 个位置分布在不同行及不同列且含不同的元素, 则称这 n 个位置构成该拉丁方的一个截态. 若一个拉丁方的主对角线(位置 $(i,i), 1 \leqslant i \leqslant n$)及反对角线(位置 $(i, n+1-i), 1 \leqslant i \leqslant n$)均为截态, 则称之为对角拉丁方.

对称拉丁方(symmetric Latin square) 见"拉丁矩".

对角拉丁方(diagonal Latin square) 见"拉丁矩".

尤登方(Youden square) 亦称尤登设计. 一类特殊的拉丁矩. 是尤登(Youden, W. J.)于 1937 年引入的. 若以一个 $k \times v$ 拉丁矩的 v 个列作为 v 个区组可以得到一个 (v, k, λ)-SBIBD, 则称这样的拉丁矩是一个 $k \times v$ 尤登方. 将一个已知 (v, k, λ)-SBIBD 的区组作为列, 适当安排同列中元素的次序, 总可使

同一行上没有相同的元素，从而得到一个 $k\times v$ 尤登设计．设 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 是 v 元集 X 上的两个 $k\times v$ 尤登设计，若 X 的每个二元子集在叠合 A 与 B 时所得的 kv 个 $\{a_{ij},b_{ij}\}(1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant v)$ 中恰出现一次，则称这两个尤登设计是 2 级平衡的．这时必有 $k=(v-1)/2$．若 t 个尤登设计中每两个都是 2 级平衡的，则称它们是 t 级平衡的．已知当 $4t+3$ 为质数幂时，恒存在 $4t+2$ 级平衡的 $(2t+1)\times(4t+3)$ 尤登设计．

尤登设计(Youden design)　见"尤登方"．

塔斯康方(Tuscan square)　一类与拉丁方有关的组合设计．若 n 元集 X 上的 n 阶方阵的每行都含 X 的全部元，则称该方阵为 n 阶的意大利方．对指定的正整数 $k<n$ 及每个正整数 $m\leqslant k$，若在一个意大利方中同行且相距为 m 的两个元素构成的有序对各不相同，则称该方阵为 n 阶塔斯康 k 方．塔斯康 1 方简称塔斯康方．塔斯康 $n-1$ 方称为佛罗伦萨方．若一个佛罗伦萨方还是拉丁方，则称之为梵蒂冈方．塔斯康方的概念来源于图的分解问题．已知 n 阶塔斯康方存在的充分必要条件为 $n\neq3,5$．目前尚不知道是否存在奇数阶的佛罗伦萨方．

意大利方(Roman square)　见"塔斯康方"．

佛罗伦萨方(Florence square)　见"塔斯康方"．

梵蒂冈方(Vatican square)　见"塔斯康方"．

行完备拉丁方(row complete Latin square)　一类特殊的拉丁方．若 n 元集 X 的任意相异元的有序偶在 X 上的某个 n 阶拉丁方的行中作为相邻元素的有序偶至少出现一次，则称该拉丁方是行完备拉丁方．若一个拉丁方的转置是行完备拉丁方，则称之为列完备拉丁方．既是行完备又是列完备的拉丁方称为完备拉丁方．行完备拉丁方的概念是在拉丁方试验设计中为了消除两种因素相继作用时产生的影响而提出的．已知偶数阶的完备拉丁方都存在．若一个 n 阶群的元可排成序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使 a_1，$a_1a_2,a_1a_2a_3,\cdots,a_1a_2\cdots a_n$ 各不相同，则称该群是可序列化的．当存在 n 阶可序列化的群时，也存在 n 阶的完备拉丁方．

列完备拉丁方(column complete Latin square)　见"行完备拉丁方"．

完备拉丁方(complete Latin square)　见"行完备拉丁方"．

拟群(quasigroup)　一种代数系统．设集 Q 上有一个二元运算称为乘法，记为"$\circ$"．若对 Q 中任意元 a,b，方程 $a\circ x=b$ 及 $x\circ a=b$ 在 Q 中都恰有一个解 x，则称 $(Q,\circ)$ 为一个拟群．当 Q 为有限集时，Q 中元素个数称为拟群的阶．在 n 阶拟群 $(Q,\circ)$ 的乘法表中，第 a 行第 b 列的元素为 $a\circ b$，若记 $L=(m_{ab})$，$m_{ab}=a\circ b$，则由乘法表所得的阵列 L 是一个 n 阶拉丁方．反之，由一个 n 阶拉丁方作为乘法表所得的二元运算形成集 Q 上的一个拟群．若对拟群 $(Q,\circ)$ 中的每个元 x 恒有 $x\circ x=x$，则称该拟群是幂等的．若集 Q 上有 $n-2$ 个 n 阶幂等拟群，使对 Q 中任意两个相异元 a,b，集 Q 上 $n-2$ 个值 $a\circ b$ 取遍 $Q\backslash\{a,b\}$，则称这 $n-2$ 个拟群构成一个幂等拟群大集．已知当 $n\geqslant3$ 且 $n\neq6$ 时，n 阶幂等拟群大集总存在，而 6 阶幂等拟群大集则不可能存在．

幂等拟群(idempotent quasigroup)　见"拟群"．

幂等拟群大集(large set of idempotent quasigroups)　见"拟群"．

高尔夫设计(golf design)　一种循环赛的赛程安排．设有 $2n+1$ 个高尔夫球俱乐部各派一个队进行 $2n-1$ 场循环赛．在每一场循环赛中将比赛 $n(2n+1)$ 局，使每两个队正好在一局中对抗．这 $n(2n+1)$ 局比赛将分成 $2n+1$ 轮，每轮比赛由 n 局组成．要求每个俱乐部作为主人组织一轮比赛，而不参加该轮的比赛．若能安排 $2n-1$ 场这样的循环赛，使每两个队在其余 $2n-1$ 个俱乐部恰好各比赛一局，则称这种赛程安排为一个高尔夫设计．对于一场循环赛而言，可以如下对应于一个幂等对称拉丁方：当第 i 队与第 j 队在第 k 个俱乐部进行一局比赛时，设一个 $2n+1$ 阶方阵中 (i,j) 及 (j,i) 位置的元素均为 k，同时 (i,i) 位置的元素为 i．由于在一个俱乐部进行的 n 局比赛中每个客队只参加一局比赛，所以方阵中同行及同列的元素互不相同，因此是一个幂等对称拉丁方．反之，从一个幂等对称拉丁方可以得到一场循环赛的相应安排．于是一个高尔夫设计相应于 $n-2$ 个 $2n+1$ 阶幂等对称拉丁方，使当 $i\neq j$ 时每一位置 (i,j) 上的 $n-2$ 个元素取尽

$$\{1,2,\cdots,2n+1\}\backslash\{i,j\}.$$

这样的一组拉丁方称为幂等对称拉丁方大集．

高尔夫设计的概念由鲁宾孙(Robinson,D. F.)于 1981 年提出．他不仅指出了与幂等对称拉丁方大集的等价性，还指出了问题对 5 个俱乐部是无解的，而对 7 个俱乐部是有解的．沃利斯(Wallis,W. D.)于 1983 年找到了对 17 个俱乐部的解，并指出由施泰纳三元系大集可导出高尔夫设计的存在性．由此得出，只要 $2n+1\equiv1,3(\mathrm{mod}\ 6)$，高尔夫设计总是存在的．

幂等对称拉丁方(idempotent symmetric Latin square)　见"高尔夫设计"．

幂等对称拉丁方大集(large set of symmetric idempotent Latin squares)　见"高尔夫设计"．

36 **名军官问题**(problem of 36 officers)　一个著名的组合设计问题．由欧拉(Euler,L.)于 1779 年

提出.该问题是:设有36名军官,来自6个不同的团队且每个团队6名,他们分属于6种不同的军阶且每种军阶6名,问能否将这36名军官排成6行6列的方阵,使每一行每一列上的6名军官来自不同的团队且属于不同的军阶?按正交拉丁方(参见"正交拉丁方")的术语,问题实际是问:是否存在一对6阶的正交拉丁方?欧拉断言不存在6阶正交拉丁方.塔里(Tarry,G.)于1900年用穷举法证明了欧拉断言的正确性,后来史汀生(Stinson,D. R.)于1984年利用设计与码之间的关系给出了一个简洁的证明.

正交拉丁方(orthogonal Latin squares) 一类组合构形.设A与B是v元集X上的两个拉丁方,若把它们叠合在一起时,第一个拉丁方的每一元与第二个拉丁方的每一元恰相遇一次,则称它们是一对正交拉丁方.称A是B的正交侣.若X上t个v阶拉丁方中每两个都正交,则称它们是相互正交拉丁方,记为tMOLS(v).若以$N(v)$表示v阶相互正交拉丁方的最大个数,则有$N(v)\leqslant v-1$.关于$N(v)$的估值是组合设计的一个重要课题.除$N(6)=1$以及对质数幂q有$N(q)=q-1$外,$N(v)$的确切值均属未知.但是,当$n\to\infty$时有$N(n)\to\infty$.细致地说,当n充分大时有

$$N(n)\geqslant n^{\frac{1}{14.8}}.$$

另外,已经得出:存在一对v阶正交拉丁方的充分必要条件是$v\neq 2,6$.

正交侣(orthogonal mate) 见"正交拉丁方".

欧拉猜想(Euler's conjecture) 关于正交拉丁方的一个重要猜想.欧拉(Euler,L.)于1782年提出的如下猜想:不存在$4t+2$阶的正交拉丁方.当$v\neq 4t+2$时,v阶正交拉丁方总存在.例如,当$v=p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2},\cdots,p_s^{\alpha_s}$是$v$分解为相异质数幂的分解式时,有

$$N(v)\geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant s}\{p_i^{\alpha_i}-1\}.$$

当$v\neq 4t+2$时,由此可得$N(v)\geqslant 2$.对$v=4t+2$,欧拉注意到$N(2)=1$且断言$N(6)=1$,于是导致了上述猜想.欧拉关于$N(6)=1$的断言是正确的(参见"36名军官问题"),但当$v=4t+2>6$时结论是否定的.第一个反例是一对22阶的正交拉丁方,由玻色(Bose,R. C.)等人于1959年给出,接着玻色等人于1960年给出了完整的结论.朱烈于1977年对该结论给出了一个简洁的证明.

正交拉丁方完备组(complete set of MOLS) 一组特殊的正交拉丁方.指$v-1$个相互正交的v阶拉丁方.若$X=\mathrm{GF}(q)=\{a_0=0,a_1,\cdots,a_{q-1}\}$,$q$为大于2的质数幂,$A_k=(a_{ij}^k)$,$a_{ij}^k=a_ka_i+a_j$,$1\leqslant k\leqslant q-1$,则拉丁方$A_1,A_2,\cdots,A_{q-1}$构成$q$阶正交拉丁方完备组.尚不知道是否有非质数幂阶的正交拉丁方完备组存在.由于n阶正交拉丁方完备组的存在性等价于v阶有限射影平面的存在性,所以,也等价于$(n^2+n+1,n+1,1)$-SBIBD的存在性.可利用布鲁克-赖瑟-乔拉定理判别某些阶数的正交拉丁方完备组不存在.例如,当n的平方因数以外部分包含模4余3的质因数时,不存在n阶正交拉丁方完备组.另外,因为10阶射影平面不存在,所以10阶正交拉丁方完备组也不存在.这是除布鲁克-赖瑟-乔拉定理外,目前能判定正交拉丁方完备组不存在的惟一阶数.

共轭正交拉丁方(conjugate orthogonal Latin squares) 一类特殊的拉丁方.若$(Q,\odot)$为一拟群,则在集Q上可定义5个新的二元运算$\odot(i,j,k)$如下:当$a\odot b=c$时,$a\odot(1,3,2)c=b$,$b\odot(2,1,3)a=c$,$b\odot(2,3,1)c=a$,$c\odot(3,1,2)a=b$,$c\odot(3,2,1)b=a$,由此得5个拟群$(Q,\odot(i,j,k))$,称为拟群$(Q,\odot)$的(i,j,k)共轭拟群.若拟群$(Q,\odot)$的乘法表所定义的拉丁方为L,则其(i,j,k)共轭拟群的乘法表所定义的拉丁方称为L的(i,j,k)共轭拉丁方.若拉丁方L与它的(i,j,k)共轭拉丁方正交,则称L为(i,j,k)共轭正交拉丁方,简记为(i,j,k)-COLS(v),其中v为阶数.一个(2,1,3)共轭正交拉丁方通常称为自正交拉丁方.(3,2,1)-COLS(v)的存在性等价于(1,3,2)-COLS(v)的存在性,(3,1,2)-COLS(v)与(2,3,1)-COLS(v)也是同时存在或同时不存在的.共轭正交拉丁方的存在性问题已经解决.当且仅当$v\neq 2,3,6$时,存在(2,1,3)-COLS(v).当且仅当$v\neq 2,6$时,存在(3,1,2)-COLS(v)及(3,2,1)-COLS(v).

自正交拉丁方(self-orthogonal Latin square) 一类特殊的拉丁方.指与自身的转置相正交的拉丁方.亦即(2,1,3)共轭正交拉丁方.v阶自正交拉丁方存在的充分必要条件是$v\neq 2,3,6$.自正交拉丁方可用来安排一种特殊形式的网球赛,即所谓配偶回避的混合双打循环赛.设n对夫妇进行一场混合双打循环赛,要求:

1. 配偶不出现在同一局比赛中,不论是作为伴对还是作为抗对.

2. 性别相同的两个参赛者将作为抗对恰在一局中相遇.

3. 每一对非配偶的异性参赛者将作为伴对在一局比赛中相遇,且作为抗对在又一局比赛中相遇.

这类安排对应于一个拉丁方$A=(a_{ij})$.设第i对夫妇为i先生及i太太.当i先生与j先生在某一局中相遇时,与i先生搭档者设为a_{ij}太太,与j先生搭档者设为a_{ji}太太.于是,由上述安排得到的幂等拉丁方是自正交的.反之,由一个幂等自正交拉丁方可得到相应的循环赛安排.这样,配偶回避的混合双打循环赛安排等价于一个幂等自正交拉丁方.而后

者的存在性又等价于自正交拉丁方的存在性.

可分解配偶回避的混合双打循环赛(resolvable spouse-avoiding mixed doubles round-robin) 一种特定的循环赛.相应于一种自正交拉丁方.在配偶回避的混合双打循环赛(参见“自正交拉丁方”)中,若 $n(n-1)/2$ 局比赛能划分为若干轮,使得当 n 为偶数时,每一参赛者在每一轮中参加一局比赛;而当 n 为奇数时,每一轮中有一对夫妇不参加比赛,而其余参赛者在该轮中参加一局比赛,则称这样的循环赛为可分解配偶回避的混合双打循环赛.这类循环赛安排等价于一个幂等自正交拉丁方带有一个对称的正交侣.该正交侣对应于轮的划分.当 n 为偶数时,共有 $n-1$ 个轮,当 i 先生与 j 先生在第 k 轮相遇时,设 $c_{ij}=k$ 且 $c_{ii}=n$,由此得主对角线元全相等的对称拉丁方.当 n 为奇数时,共有 n 个轮,同样规定 c_{ij} 且 $c_{ii}=i$,由此得幂等对称拉丁方.除 27 个可能例外的阶数,上述类型的自正交拉丁方及对称正交侣总是存在的.

正交对角拉丁方(orthogonal diagonal Latin squares) 一类特殊的正交拉丁方.若一个 v 阶拉丁方的主对角线(位置 (i,i), $1\leqslant i\leqslant v$)与反对角线(位置 $(i,v+1-i)$, $1\leqslant i\leqslant v$)均为截态,则称之为对角拉丁方.两个正交的 v 阶对角拉丁方记为 ODLS(v).正交对角拉丁方曾用于构作幻方.而 ODLS(v)存在的充分必要条件是 $v\neq 2,3,6$.这是经许多作者的努力,由沃利斯(Wallis,W. D.)等人于 1990 年最后完成的.

划分不完全拉丁方(partitioned incomplete latin square) 亦称带洞拉丁方.一类不完全的拉丁方.设 $P=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$ 是集 S 的一个划分($n\geqslant 2$),且用 S 中的元标记一个 $|S|\times|S|$ 的表 L 的行与列,若:

1. L 中一个位置若不是空着则含 S 的一个元;

2. 以 $S_i\times S_i$ ($1\leqslant i\leqslant n$)标记的子表是空的(称这些子表为洞);

3. 当 $s\in S_i$ 时,在行 s(或列)出现的元恰为

$$\frac{S}{S_i};$$

则称 L 是一个划分不完全拉丁方,记为 PILS.设 L 与 M 是两个 PILS 且有相同的划分,若两者叠合时能产生

$$\frac{S^2}{\bigcup_{i=1}^{n} S_i^2}$$

中的每一个序对,则称它们是正交的 PILS,记为 OPILS.当 $h\geqslant 2$ 时,有 n 个大小 h 的洞的 OPILS 存在的充分必要条件为 $n\geqslant 4$.

带洞拉丁方(Latin square with hole) 即“划分不完全拉丁方”.

正交阵列(orthogonal array) 一类组合设计.设 A 是 v 元集 X 上的 $v\times k$ 矩阵,若对任意 $d(2\leqslant d\leqslant k)$列所构成的子矩阵,$X$ 上的每一个 d 元排列作为子矩阵的行各出现 λ 次,则称 A 为大小 N,约束数 k,水平数 v,强度 d 和指数 λ 的正交阵列.在试验设计中称正交表,记为 OA(N,k,v,d).由定义有 $N=\lambda v^d$.强度 2 的正交阵列记为 OA$(v,k;\lambda)$,当 $\lambda=1$ 时简记为 OA(v,k).OA$(v,k;\lambda)$的存在性等价于横截设计 TD$_\lambda[k;v]$的存在性.OA(v,k)的存在性则等价于 $k-2$ 个 v 阶相互正交拉丁方的存在性.

不完全正交拉丁方(incomplete orthogonal Latin squares) 正交拉丁方的变体.设两个正交的 v阶拉丁方的右下角各有一个n阶的子拉丁方,

5	6	3	4	1	2
2	1	6	5	3	4
6	5	1	2	4	3
4	3	5	6	2	1
1	4	2	3		
3	2	4	1		

1	2	5	6	3	4
6	5	1	2	4	3
4	3	6	5	1	2
5	6	4	3	2	1
2	4	3	1		
3	1	2	4		

这两个子拉丁方必定正交,将它们抹去后得到的两个不完全拉丁方称为不完全正交拉丁方,记为 IA(v,n).若 v 阶拉丁方及 n 阶子拉丁方分别基于集 X 及其子集 Y,则两个不完全正交拉丁方的叠合恰产生$X^2\backslash Y^2$中的序对.当 $n=2,6$ 时,虽然不存在 n 阶正交的子拉丁方,但是也可由此定义 IA(v,n).例如,上表所示是一个 IA$(6,2)$.值得一提的是,派克(Parker,E. T.)于 1959 年第一个构作的 10 阶正交拉丁方是一个 IA$(10,3)$.IA(v,n)存在的充分必要条件是 $v\geqslant 3n$ 且$(v,n)\neq(6,1)$.若有 t 个不完全拉丁方,每两个构成一个 IA(v,n),则称之为 t 个不完全相互正交拉丁方,记为 IA$_t(v,n)$.在组合设计的递推构造中,IA$_t(v,n)$常被用到.

直交阵列(perpendicular array) 一类组合设计.设 A 是 v 元集 X 上 $N\times k$ 矩阵,若对任意 $d(2\leqslant$

$d\leqslant k$)列所构成的子矩阵,X 上的第一个 d 元集作为子矩阵的行各出现 λ 次,则称 A 为大小 N,约束数 k,水平数 v,强度 d 和指数 λ 的直交阵列,记为 $\mathrm{PA}(N,k,v,d)$. 由定义有

$$N=\lambda\binom{v}{d}.$$

强度 2 及指数 1 的直交阵列记为 $\mathrm{PA}(v,k)$. $\mathrm{PA}(v,k)$存在的必要条件为 $v\geqslant k$. 当 $k>2$ 时,v 还必须为奇数. 除PA(39,5)的存在性尚不清楚外,当 $k\leqslant 5$ 时,上述必要条件也是充分条件.

正交表(perpendicular array) 见"正交阵列".

横截设计(transversal design) 一类特殊的可分组设计. 即组的大小全相等且组的个数与区组大小相同的可分组设计. 设组的大小为 n 且区组大小为 k,属于不同组的两个元恰含于 λ 个区组,这样的横截设计记为 $\mathrm{TD}_\lambda[k;n]$. 当 $\lambda=1$ 时,记为 $\mathrm{TD}[k;n]$. 由于 $\mathrm{TD}[k;n]$的存在性等价于 $k-2$ 个 n 阶互相正交拉丁方的存在性,横截设计的递推构造方法为正交拉丁方的构造提供了有力的工具. 横截设计在其他类型的组合设计的构造中也很有用.

幻方(magic square) 亦称纵横图或魔方. 一类特殊的整数方阵. 一个 n 阶幻方是 n^2 个数 $1,2,\cdots,n^2$ 排成的 n 阶方阵,使每一行元素的和、每一列元素的和、主对角线元素的和,以及反对角线元素的和均为常数. 该常数为$n(n^2+1)/2$,称为幻和. n 阶幻方存在的充分必要条件是 $n\geqslant 3$. 它有许多种证法. 利用正交对角拉丁方的存在性也是一种证法. 若还要求 n 阶幻方中每一泛对角线(位置$(i,i+k)$,$1\leqslant i\leqslant n$ 或位置

$$(i,n+1-(i+k))\ (1\leqslant i\leqslant n),$$

这里 $0\leqslant k\leqslant n-1$,且加法按模 n 简化)上元素的和都等于幻和,则称这种幻方为泛对角线幻方. n 阶泛对角线幻方存在的充分必要条件是 $n=2m+3$ 及 $n=4m$,$m\geqslant 1$. 另一类幻方还要求每一行、每一列、主对角线及反对角线上 n 个元素的积均为常数(称为幻积),这样的幻方称为 n 阶加乘幻方. 加乘幻方的已知结果很少.

幻方的最早研究始于中国古代,下图中的 3 阶幻方在古代称为九宫图.《数术记遗》一书中对此有如下记载:"九宫者,二、四为肩,六、八为足,左三右七,戴九履一,五居中央".

4	9	2
3	5	7
8	1	6

三阶幻方

纵横图(magic square) 即"幻方".

魔方(magic square) 即"幻方".

幻和(magic sum) 见"幻方".

泛对角线幻方(pandiagonal magic square) 见"幻方".

幻积(magic product) 见"幻方".

加乘幻方(magic square for addition and multiplication) 见"幻方".

九宫图(Jiu Gong Tu) 见"幻方".

有限几何(finite geometry) 含有限个点的几何结构. 在组合设计理论中,所涉及的几何结构是指一类特别的关联系统. 这种系统中有两类不定义的元素,分别称为点和线,以及点线之间的关联关系 $P\in L$,读作点 P 在线 L 上,或者说 L 包含 P. 对这样的关联系统加上不同类型的限制,即规定不同的公理,便得到各种类型的有限几何结构.

最重要的一类几何是射影几何. 从一条线上含 $q+1$ 个点的 n 维射影空间可以导出一类平衡不完全区组设计(v,k,λ)-BIBD,其中

$$v=\frac{q^{n+1}-1}{q-1},\ k=\frac{q^n-1}{q-1},\ \lambda=\frac{q^{n-1}-1}{q-1}.$$

对 $n=2$ 的射影平面情形,得到的还是对称设计

$$(q^2+q+1,q+1,1)\text{-SBIBD}.$$

由于这种对称设计的存在性等价于 q 阶正交拉丁方完备组的存在性,并且还等价于一类横截设计的存在性,因此,可以把有限几何看成是得到各种组合设计的重要途径之一.

若关联系统只要求任意两不同的点恰被一条线同时包含,则称这样的几何结构为线空间. 从设计的观点看,这就是指数为 1 的成对平衡设计. 这反映出区组设计理论有其几何方面的渊源. 设 $V_n(F_q)$是有限域 F_q 上的 n 维向量空间. 在某种典型群(一般线性群、辛群、酉群和正交群)的作用下,$V_n(F_q)$中的子空间分成一些可迁集. 若把某些子空间取作"点",另一些子空间取作"线",并且适当规定点在线上的含义,则可以得到由各种典型群几何导出的部分平衡不完全区组设计. 中国的万哲先等人在这方面做过比较系统的研究.

有限射影空间(finite projective space) 一类组合构形. 满足以下公理的有限点集上的关联系统: 1. 对两相异点,有且仅有一条线含这两个点. 2. 若 A,B,C 是不共线的三点,D 是含 A,B 的线上异于 A 的点,E 是含 A,C 的线上异于 A 的点,则含 D,E 的线与含 B,C 的线含一个公共点 F. 3. 每条线至少含三个相异点.

若射影空间的某个子集在含一条线上的两个点时必含这条线上所有的点,则称该子集为子空间. 将点称为零维子空间,线称为 1 维子空间,由此可归纳

地定义子空间的维数. 若子空间 X_{n-1} 的维数为 $n-1$, P 是射影空间中不属于 X_{n-1} 的一点, 将含 P 及 X_{n-1} 中任一点的所有线上的点的全体记为 X_n, 则 X_n 是子空间, 其维数定义为 n. 在 n 维射影空间中, 2 维子空间称为平面, $n-1$ 维子空间称为超平面. 若某条线上含 $q+1$ 个点, 则每条线上都含 $q+1$ 个点, 此时称射影空间是 q 阶的. q 阶 n 维射影空间记为 $PG(n,q)$. 将 q 元有限域上 $n+1$ 维向量空间中的一维子空间取作"点", 2 维子空间取作"线", 便得到 n 维射影空间 $PG(n,q)$ 的一个例子. 这样的"点"可用一个 $n+1$ 维的非零向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$ 表示, 当 λ 为有限域中非零元时, 向量 $\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$ 将表示同一个"点". 称 $(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$ 为射影空间中点的齐次坐标. $PG(n,q)$ 中共有

$$v=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

个点, 一个超平面含 $k=(q^n-1)/(q-1)$ 个点. 若将一个 $PG(n,q)$ 中所有超平面取作区组, 则得到一个 (v,k,λ)-BIBD, 其中

$$\lambda=\frac{q^{n-1}-1}{q-1}.$$

当 $n\geqslant 3$ 时, $PG(n,q)$ 在同构的意义下是惟一的. 但是, 当 $n=2$ 时, 存在不同类型的射影平面.

超平面(hyperplane)　见"有限射影空间".

有限仿射空间(finite affine)　一类组合构形. 它由 q 阶 n 维射影空间 $PG(n,q)$ 中去掉一个超平面而得到, 记为 $EG(n,q)$. 该仿射空间中一条线上含 q 个点, 共有 q^n 个点. 任一 k 维子空间含 q^k 个点. 以 $EG(n,q)$ 中的全部 k 维子空间作为区组, 可以得到一个 (q^n,q^k,λ)-BIBD, 其中

$$\lambda=\frac{(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})}.$$

有限射影平面(finite projective plane)　一类组合构形. 指二维有限射影空间. 也可用以下三条较为简单的公理定义射影平面:

1. 对两相异点, 有且仅有一条线含这两个点.
2. 任两相异线有且仅有一个公共点.
3. 存在四个点, 其中没有三个点在同一条线上.

若射影平面的一条线上含 $q+1$ 个点, 则每条线都含 $q+1$ 个点, 称 q 为射影平面的阶. q 阶射影平面记为 $PG(2,q)$. $PG(2,q)$ 中共有 q^2+q+1 个点. 将一个 q 阶射影平面中的线作为区组可得到一个

$$(q^2+q+1,q+1,q)\text{-SBIBD},$$

反之亦然. 一个 2 阶射影平面 $PG(2,2)$ 称为法诺平面. 存在德扎格平面, V-W 平面等不同类型的射影平面.

法诺平面(Fano plane)　见"有限射影平面".

有限仿射平面(finite affine plane)　一类组合构形. 它是从有限射影平面 $PG(2,q)$ 中去掉一条线, 由余下的点和线构成的, 记为 $EG(2,q)$, q 为仿射平面的阶数. $EG(2,q)$ 有 q^2 个点, q^2+q 条线, 每条线上有 q 个点. q^2+q 条线可分为 $q+1$ 组, 每组的 q 条线两两不相交, 构成平行线组. 若把线取作区组, 则由 $EG(2,q)$ 可得一个仿射可分解的 $(q^2,q,1)$-BIBD.

卵形(oval)　射影平面或仿射平面中的一类特殊点集. 设 S 是 $PG(2,n)$ 或 $EG(2,n)$ 中的一个 $n+1$ 元点集, 若任一条线与 S 至多有两个交点, 则称 S 是一个卵形. 在利用有限域 $GF(n)$ 得到的 $PG(2,n)$ 及 $EG(2,n)$ 中总存在 $n+1$ 个点的卵形. 当 n 为偶数时, 一个 $PG(2,n)$ 的卵形中还可增加一点 θ, 使任一条线与 $S\cup\{\theta\}$ 至多有两个交点, 这时也称 $S\cup\{\theta\}$ 为卵形. 从一个卵形中去掉 t 个点, $0\leqslant t\leqslant n+1$, 则相应的 $(n^2+n+1,n+1,1)$-SBIBD 变为

$$(n^2+n+1-t,\{n+1,n,n-1\},1)\text{-PBD},$$

而相应的 $(n^2,n,1)$-BIBD 变为

$$(n^2-t,\{n,n-1,n-2\},1)\text{-PBD}.$$

巴尔子平面(Baer subplane)　射影平面中的一类特殊点集. 设 S 是射影平面 $PG(2,q)$ 中的点集, 将 $PG(2,q)$ 中任一条线与 S 的交定义为 S 中的线, 若 S 连同这些线构成一个射影平面, 则称之为 $PG(2,q)$ 的子平面. 若子平面的阶数为 $\sqrt{q}$, 则称之为巴尔子平面. 若 $PG(2,n^2)$ 中有巴尔子平面 $PG(2,n)S$, 则在相应的 $(n^4+n^2+1,n^2+1,1)$-SBIBD 中除去 S 中的点, 便得到一个可分组设计

$$GDD[\{n^2\},1,\{n^2-n\};n^4-n].$$

由此可得

$$(n^4-n+1,\{n^2,n^2-n+1\},1)\text{-PBD}.$$

当 n 为质数幂时, 有这样的巴尔子平面, 因而相应的设计也存在.

子平面(subplane)　见"巴尔子平面".

阻碍集(blocking set)　有限射影平面中的一类特殊子集. 若 q 阶射影平面中的子集 K 不包含任一条线, 但与每一条线均相交, 则称 K 为阻碍集. 若 K 为 $PG(2,q)$ 中阻碍集, 则 $|K|\geqslant 1+\sqrt{q}+q$. 当 K 是一个贝尔子平面时等号成立. 阻碍集可用于区组设计的构作. 例如, $PG(2,q^2)$ 可划分为 q^2-q+1 个巴尔子平面, 若 X 是其中 t 个的并集, 则 X 是一个阻碍集, 且与每一条线或交 t 个点或交 $t+q$ 个点. 由此可得 X 上的一个成对平衡设计

$$(t(q^2+q+1),\{t,t+q\},1)\text{-PBD}.$$

网(net)　一类特殊的关联系统. 若有 n^2 个点及 nk 个子集(称为线), 使得:

1. 每条线恰含 n 个点;
2. 两条线与第三条线均不相交时, 这两条线也

不相交；

3. 存在 k 个平等类，每个类由 n 条两两不相交的线组成；

4. 任意两条相交的线恰有一个交点；

则称这样的关联系统为一个 n 阶的 k 网. 一个 n 阶仿射平面是一个 n 阶的 $n+1$ 网. 一个 n 阶的 k 网等价于 $k-2$ 个相互正交的 n 阶拉丁方. 将一个拉丁方中的 n^2 个位置看做 n^2 个点，拉丁方中的一个元素出现在不同行不同列的 n 个位置，它们组成一条线，于是从一个拉丁方得到 n 条线组成的平行类. n 个行及 n 个列组成两个平行类，连同从 $k-2$ 个拉丁方得到的 $k-2$ 个平行类构成一个 n 阶的 k 网. 反之，从两个平行类构作行及列，则从其他的 $k-2$ 个平行类可得到 $k-2$ 个相互正交的 n 阶拉丁方. 若将 n 阶 k 网中的线取作"点"，而将点取作线(即含该点的线的集合)，"点"在"线"上是指相应的线含该点，则这样得到的 n 阶 k 网的对偶结构是一个横截设计 $TD[k;n]$.

n 弧(n-arc)　射影空间中的一类点集. 若在 $k-1$ 维射影空间 $PG(k-1,q)$ 的 n 元点集 S 中没有 k 个点能含于一个超平面 $PG(k-2,q)$，其中 $n\geqslant k\geqslant 3$，则称集 S 是一个 n 弧. 从一个 n 弧可以得到一个正交表 $OA(q^k,n,q,k)$，也可以导出一类纠错码，即极大距离可分码. 对给定的 k 和 q，找具有最大 n 值的 n 弧是一个有意义的问题，目前尚未解决. 这个问题的另一提法是，在给定的 $GF(q)$ 上的 k 维向量空间中，找最大可能个数的向量，使其中任意 k 个向量形成该空间的基. 射影平面中的卵形就是具最大 n 值的 n 弧. 当 q 为奇数时，是一个$(q+1)$弧；当 q 为偶数时，是一个$(q+2)$弧.

德扎格平面(Desargues plane)　一类射影平面. 能使德扎格定理成立的射影平面. 德扎格定理断言：若 $O,A_1,B_1,C_1,A_2,B_2,C_2$ 是相异点，且 OA_1A_2，OB_1B_2，OC_1C_2 是相异线，线 A_1B_1 与 A_2B_2 交于点 C_3，线 A_1C_1 与 A_2C_2 交于点 B_3，线 B_1C_1 与 B_2C_2 交于点 A_3，则点 A_3,B_3,C_3 落在同一条线上. 以有限域上 3 维向量作为齐次坐标所得到的射影平面是德扎格平面. 并非所有的射影平面都是德扎格平面，不能使德扎格定理成立的射影平面称为非德扎格平面.

德扎格定理(Desargues theorem)　见"德扎格平面".

非德扎格平面(non-Desargues plane)　见"德扎格平面".

默比乌斯平面(Möbius plane)　亦称逆几何或圆几何. 一类组合构形. 设 X 为有限点集，其上有一族子集(称为圆)，若满足以下三条性质，则称之为默比乌斯平面：

1. X 的任意三个相异点恰含于一个圆.

2. 若 P,Q 是 X 中两个点，y 是一个圆，使 $P\in y$，而 $Q\notin y$，则恰有一个圆含 P,Q 且与圆 y 仅有一个公共点 P.

3. X 中有四点不含于同一个圆.

一个有限默比乌斯平面就是一个 3-$(n^2+1,n+1,1)$设计. 从圆几何中去掉任何一点 θ，将含该点的圆去掉该点后称为线，于是得到 $X-\{\theta\}$上的一个仿射平面. 因此，圆几何是仿射平面的一个扩充.

逆几何(inverse geometry)　即"默比乌斯平面".

圆几何(circle geometry)　即"默比乌斯平面".

辛几何(symplectic geometry)　研究一种有限维向量空间的几何. 即关于非退化交错双线性型 B 的有限维向量空间的研究. 这里的交错双线性型是指对任意向量 x 均有 $B(x,x)=0$ 的双线性型 B. 对取定的一组基$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，交错双线性型 B 的矩阵 $K=(B(e_i,e_j))$满足 $K'=-K$ 且主对角线上的元素都是 0，这样的矩阵称为交错矩阵. 交错矩阵的秩必为偶数，该偶数的一半称为该交错矩阵的指数. 若 P 是 $V_n(F_q)$的 m 维子空间，代表该子空间的秩为 m 的 $m\times n$ 矩阵也用 P 表示，则 PKP' 是 m 阶交错矩阵，其指数也称为 P 的指数. 若 $PKP'=0$，则称 P 为 m 维全迷向子空间；若 PKP' 是非奇异的，则称 P 为 m 维非迷向子空间. 利用辛几何中不同类型的子空间，可以构作结合方案及 PBIBD 设计. 例如，当 $n\geqslant 4$ 时取有限域 F_q 上 n 维辛几何中 1 维子空间的全体作为处理的集合. 两个 1 维子空间，若生成一个 2 维全迷向子空间，则称它们间有第一种结合关系；若生成一个 2 维非迷向子空间，则称它们有第二种结合关系，这样便得到一个结合方案. 利用该结合方案可构作 PBIBD 设计，只需取指数为 s 的 m 维子空间的全体作为区组的集合，且将关联关系取作子空间之间的包含关系.

交错矩阵(alternate matrix)　见"辛几何".

全迷向子空间(totally isotropic subspace)　见"辛几何".

非迷向子空间(non-isotropic subspace)　见"辛几何".

正交几何(orthogonal geometry)　一种向量空间的几何，即关于非退化对称双线性型的向量空间的研究. 这里的对称双线性型 B 是指对任意向量 x，y 有 $B(x,y)=B(y,x)$的双线性型. 对有限维空间中取定的一组基$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，当基域的特征不为 2 时，对称双线性型 B 的矩阵 $S=(B(e_i,e_j))$满足 $S'=S$，即为对称矩阵. 设 P 是 $V_n(F_q)$的 m 维子空间，代表该子空间的一个秩为 m 的 $m\times n$ 矩阵也用 P 表示. 当 q 为奇数且 S 为非奇异对称矩阵时，若

$PSP'=0$，则称 P 为全迷向子空间；若 PSP' 非奇异，则称 P 为非迷向子空间. 利用正交几何中不同类型的子空间，可以构作结合方案及 PBIBD 设计. 例如，当 $n \geqslant 4$ 时取奇数特征有限域上 n 维正交几何中 1 维迷向子空间的全体作为处理的集合，两个 1 维迷向子空间，若生成一个 2 维全迷向子空间，则规定它们有第一种结合关系，否则它们有第二种结合关系，这样便得到一个结合方案. 利用该结合方案可构作 PBIBD 设计，比如取 m 维作迷向子空间作为区组，并规定关联关系由子空间之间的包含关系决定.

对称矩阵(symmetric matrix)　见“正交几何”.

酉几何(unitary geometry)　一种向量空间的几何. 即关于非退化埃尔米特型 H 的有限维向量空间的研究. 设基域为含 q^2 个元的有限域 F_{q^2}，其中有一个 2 阶自同构 $a \to \bar{a} = a^q$，它的固定子域为 F_q. 对任意向量 x, y, z 及 F_{q^2} 中任意元 a, b，这里的埃尔米特型由以下两式定义：

$$H(ax+by,z)=aH(x,z)+bH(y,z),$$

$$H(y,z)=\overline{H(x,y)}.$$

对取定的一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，埃尔米特型 H 的矩阵 $H=(H(e_i,e_j))$ 满足 $\overline{H'}=H$，即为埃尔米特矩阵. 设 P 是 $V_n(F_{q^2})$ 的 m 维子空间，代表子空间 P 的秩为 m 的 $m \times n$ 矩阵仍用 P 表示. 设 H 是非奇异埃尔米特矩阵，若 $PH\overline{P'}=0$，则称 P 为全迷向子空间；若 $PH\overline{P'}$ 非奇异，则称 P 为非迷向子空间. 利用酉空间中不同类型的子空间，可以构作 PBIBD 设计及 BIBD 设计. 例如，取有限域 F_{q^2} 上 3 维酉几何中 1 维迷向子空间的全体作为处理的集合，并取其中 2 维非迷向子空间的全体作为区组的集合，规定关联关系为子空间之间的包含关系，于是，由此得到一个 $(q^3+1, q+1, 1)$-BIBD.

埃米尔特矩阵(Hermitian matrix)　见“酉几何”.

罗姆方(Room square)　一类特殊的组合设计. 将一个 $2n$ 元集的所有 2 元子集放在一个 $2n-1$ 阶的方阵中，使其中每个位置或者空着，或者放一个 2 元子集，并使这 $2n$ 个元在每一行各出现一次，且在每一列各出现一次. 称这样的方阵为 $2n-1$ 阶的罗姆方. 罗姆方最早出现在 1850 年柯克曼女生问题的论文中，利用下图的 7 阶罗姆方可以作出 15 女生问题的一个解. 一个解由 7 个平行类构成，每个平行类由一个行得到，将该行上每个 2 元子集连同它的列标号构成一个三元组，共得四个三元组，连同该行三个空格的列标号构成的三元组，形成 15 元集上的一个平行类.

a	b	c	d	e	f	g
			35	17	∞2	46
	26	∞4			15	37
	13	57	∞6	24		
47		16		∞3		25
∞5		23	14		67	
12	∞7			56	34	
36	45		27			∞1

豪韦尔(Howell, E. C.)于 1897 年发现桥牌比赛安排问题也涉及到这一类方阵. 罗姆(Room, T. G.)不知这些情况，于 1955 年提出这一类方阵的存在性问题，后来这类方阵便称为罗姆方. $2n-1$ 阶罗姆方存在的充分必要条件为 $2n-1 \neq 3, 5$. 主要由沃利斯(Wallis, W. D.)及马林(Mullin, R. C.)解决. 在存在性的研究中还发现了与别的组合结构的等价性，例如正交对称拉丁方，正交 1 因子分解等. 罗姆方也与正交施泰纳三元系密切相关. 在推广罗姆方的过程中，还引出了双可分解 BIBD 设计的概念，成为目前感兴趣的研究课题.

正交1因子分解(orthogonal 1-factorization)一类组合对象. 与罗姆方等价. 一个完全图 K_{2n} 的某些边的集合，若含每个顶点恰一次，则称这些边构成一个 1 因子. 若 K_{2n} 的边集可以划分成一些 1 因子，则称这样的划分为一个 1 因子分解. K_{2n} 的 1 因子分解实际上是一个 $(2n, 2, 1)$-RBIBD. 若从 K_{2n} 的两个 1 因子分解中各任取一个 1 因子，它们至多只有一条边公共，则称这两个 1 因子分解为正交 1 因子分解. 一个 $2n-1$ 阶的罗姆方的行构成 K_{2n} 的一个 1 因子分解，列也构成一个 1 因子分解，并且它们是正交 1 因子分解. 反之，若有两个 1 因子分解为正交 1 因子分解，则将 1 因子分别编号，并将第一个分解中第 i 个 1 因子与第二个分解中第 j 个 1 因子的交(空集成作为边的元素对)放在一个 $2n-1$ 阶方阵的 (i,j) 位置，这样便得到一个 $2n-1$ 阶罗姆方.

1 因子分解(1-factorization)　见“正交 1 因子分解”.

正交对称拉丁方(orthogonal-symmetric Latin square)　一类组合对象. 与罗姆方等价. 设 $L=(l_{ij})$ 及 $M=(m_{ij})$ 是两个 n 阶的幂等对称拉丁方，若当 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 时，所有的序对 (l_{ij}, m_{ij}) 两两相异，则称 L 与 M 构成正交对称拉丁方. 值得注意的是正交对称拉丁方不同于通常的正交拉丁方. 若 t 个 n 阶幂等对称拉丁方中每两个构成正交对称拉丁方，则称它们是两两正交对称拉丁方. n 阶正交对称拉丁方等价于 n 阶罗姆方，而 t 个 n 阶两两正交对称拉丁方

等价于一个 n 阶 t 维罗姆方. 当存在 t 个 n 阶两两正交对称拉丁方时，有 $t\leqslant n-2$，一个未解决的猜测断言：$t\leqslant(n-1)/2$.

正交施泰纳三元系(orthogonal Steiner triple system)　一类组合对象. 与罗姆方有关的对象. 设 $(X,\mathscr{A})$ 及 $(X,\mathscr{B})$ 是两个施泰纳三元系，若 $\mathscr{A}\cap\mathscr{B}=\varnothing$ 且当 $\mathscr{A}$ 含 $\{u,v,w\}$ 与 $\{x,y,w\}$，$\mathscr{B}$ 含 $\{u,v,s\}$ 与 $\{x,y,t\}$ 时，必有 $s\neq t$，则称它们为正交施泰纳三元系. 由 $|X|=n$ 时正交施泰纳三元系的存在性可以导出 n 阶罗姆方的存在性.

平衡罗姆方(balanced Room square)　一类特殊的罗姆方. 若将一个罗姆方的每个 2 元子集 $\{x,y\}$ 用有序对 (x,y) 或 (y,x) 代替，则所得的方阵称为有序罗姆方. 设有一个 $2n-1$ 阶有序罗姆方，将每一行中出现在第一个坐标的元组成一个区组，出现在第二个坐标的元也组成一个区组，若这样的 $2(2n-1)$ 个区组构成一个

$$(2n,2(2n-1),2n-1,n,n-1)\text{-BIBD},$$

则称该有序罗姆方为平衡罗姆方. 一个 $2n-1$ 阶平衡罗姆方 BRS$(2n-1)$ 的存在性等价于一个完全平衡豪韦尔旋转 CBHR$(2n)$ 的存在性(参见“完全平衡豪韦尔旋转”). 已有各种构造BRS$(2n-1)$ 的方法，例如，当 q 为模 4 余 3 的质数幂时，存在BRS$(q+1)$ 及 BRS$(2q+2)$.

有序罗姆方(ordered Room square)　见“平衡罗姆方”.

完全平衡豪韦尔旋转(complete balanced Howell rotation)　单打桥牌循环赛的一种赛程安排. 设有 $2n$ 个队参加桥牌单打循环赛，若两个参赛者在一盘比赛中安排在同一方向(南北向或东西向)，则称他们在这盘中对阵. 若赛程安排满足以下条件，则称之为完全平衡豪韦尔旋转，记为 CBHR$(2n)$，这些条件是：

1. 在每一轮中每一盘至多由两个队打，一队一个方向.
2. 比赛过程中每一队与别的队恰好打一次.
3. 在每一轮中每个队恰打一盘.
4. 在每一盘中每个队恰打一次.
5. 每个队与别的队对阵的次数一样多.

若将一平衡罗姆方的行作为盘次，且以列作为轮次，则当 (i,j) 位置有元素对 (a,b) 时，将 a 队与 b 队安排在第 j 轮第 i 盘打，并且 a 队取南北向而 b 队取东西向. 罗姆方的条件保证了上述条件 1,2,3,4，而平衡罗姆方的 BIBD 条件保证了条件 5，因此由平衡罗姆方可得到完全平衡豪韦尔旋转的赛程安排. 反之，也可由完全平衡豪韦尔旋转得到一个平衡罗姆方.

完美罗姆方(perfect Room square)　一类特殊的罗姆方. 若完全图 K_{2n} 的某个 1 因子分解中每两个 1 因子的并是一个长 $2n$ 的圈，则称这样的分解为完美 1 因子分解. 若一个罗姆方的行 1 因子分解与列 1 因子分解(参见“正交 1 因子分解”)都是完美 1 因子分解，则称这样的罗姆方为完美罗姆方.

完美1 因子分解(perfect 1-factorization)　见“完美罗姆方”.

标准罗姆方(standardized Room square)　特殊形式的罗姆方. 设 n 阶罗姆方的元素集合为 $\{\infty,1,2,\cdots,n\}$，若主对角线上元素对依次为 $\{\infty,1\}$，$\{\infty,2\}$，…，$\{\infty,n\}$，则称之为标准罗姆方. 任一个罗姆方都可经交换两行、交换两列这样的变换变为标准罗姆方.

斜罗姆方(skew Room square)　一类特殊的罗姆方. 在一个标准罗姆方中，若关于主对角线对称的每两个位置中恰有一个是空的，则称之为斜罗姆方. n 阶斜罗姆方存在的充分必要条件是 n 为不等于 3 和 5 的奇正整数. 从 n 阶斜罗姆方的存在性可以导出 $2n+1$ 阶和 $2n-1$ 阶罗姆方的存在性，还可导出一个 $(n,4,6)$-BIBD 的存在性.

t 维罗姆方(t-dimensional Room square)　罗姆方的高维推广. 设 n 阶 t 维方阵中每个位置或者放一个元素的无序对或者空着，若它的每一个 2 维投影是一个 n 阶罗姆方，则称之为 n 阶 t 维罗姆方. n 阶 t 维罗姆方的存在性等价于 t 个 n 阶两两正交对称拉丁方的存在性. 当 $t=3$ 时，称 t 维罗姆方为罗姆立方. n 阶罗姆立方存在的充分必要条件与 n 阶罗姆方存在的充分必要条件一样，即，n 是不等于 3 和 5 的奇正整数.

罗姆立方(Room cube)　见“t 维罗姆方”.

罗姆子方(Room subsquare)　特殊的罗姆方，即含于某罗姆方中的罗姆方. 若一个 r 阶罗姆方的某 s 行及某 s 列的交叉位置上的 s 阶方阵也构成某个 $s+1$ 元集上的 s 阶罗姆方，则称该 s 阶罗姆方是 r 阶罗姆方的罗姆子方. 在解决罗姆方的存在性问题时，罗姆子方曾用于递推构造的方法. 因此，罗姆子方的存在性也有不少研究. 一个必要条件是 $r\geqslant 3s+2$. 由于 5 阶罗姆方不存在，$(r,s)=(5,1)$ 是不可能的情形. 史汀生(Stinson, D. R.)于 1981 年猜测：当 r,s 为正奇数，$r\geqslant 3s+2$ 且 $(r,s)\neq(5,1)$ 时，总存在一个 r 阶罗姆方含一个 s 阶的罗姆子方(或者 s 阶的空子方，特别地，当 $s=3,5$ 时).

豪韦尔设计(Howell design)　罗姆方的一种推广. 设 S 为 $2n$ 元集，F 是一个 s 阶方阵，若 F 中每个位置上或者放一个 S 的 2 元子集或者空着，使得 S 的每个元在 F 的每一行及每一列均出现一次，并且 S 的每个 2 元子集在 F 中至多出现一次，则称 F 是一个豪韦尔设计，记为 $H(s,2n)$. 当豪韦尔

$H(s,2n)$存在时，必有 $s+1\leqslant 2n\leqslant 2s$. 一个极端的情形：$H(2n-1,2n)$ 就是一个 $2n-1$ 阶的罗姆方. $H(s,2n)$的存在性已经解决，除了 4 个例外情形$(s,2n)=(2,4),(3,4),(5,6),(5,8)$外，必要条件 $s+1\leqslant 2n\leqslant 2s$ 也是充分条件.

柯克曼方(Kirkman square)　罗姆方的一种推广. 若 V 为 v 元集，F 为一个方阵，其每个位置或者放一个 V 的 k 元子集或者空着，使得 V 的每个元在每行每列恰出现 μ 次，并且所有这些 k 元子集构成一个(v,k,λ)-BIBD，则称 F 为一个柯克曼方，记为 $KS_k(v;\mu,\lambda)$. 一个柯克曼方 $KS_2(v;1,1)$就是一个 $v-1$ 阶罗姆方. 当 $\mu=1$ 时，$KS_k(v;1,\lambda)$等价于一个双可分解(v,k,λ)-BIBD. $KS_2(v;\mu,\lambda)$存在的充分必要条件是：

1. μ 整除 $\lambda(v-1)$.
2. μv 为偶数.
3. $2\lambda>\mu^2$.
4. $v(2\lambda-\mu^2)\geqslant 2\lambda$.
5. $(v,\lambda)\neq(4,1),(6,1)$.

两个例外情形来自 3 阶及 5 阶罗姆方的不存在性. 对于 $k\geqslant 3$ 的柯克曼方目前所知甚少.

双可分解BIBD设计(doubly resolvable BIBD design)　一类特殊的 BIBD 设计. 若一个(v,k,λ)-BIBD 的区组有两种方式划分成区组的平行类 $R_1,R_2,\cdots,R_r$ 及 $R'_1,R'_2,\cdots,R'_r$ 使得当 $i\neq j$ 时，总有 $|R_i\cap R'_j|\leqslant 1$，则称这样的 BIBD 设计是双可分解的. 一个 $2n-1$ 阶罗姆方等价于一个双可分解的$(2n,2,1)$-BIBD. 若将一个双可分解的 BIBD 设计的区组放入一个 r 阶方阵，在(i,j)位置放 R_i 与 R'_j 的交(或为一个区组或为空集)，则得到罗姆方的一种推广，称为柯克曼方. 由于双可分解性要求很强，关于其存在性的结果不多.

差集(difference set)　亦称群差集. 一类组合构形. 来源于对区组设计的自同构的研究. 设 G 为 v 阶乘法群，单位元为 e，若对 G 的 $k(0<k<v)$元子集 D，形如 $xy^{-1}(x,y\in D)$的元中含 G 的每个非单位元恰 λ 次，则称 D 为一个(v,k,λ)差集. 记 $n=k-\lambda$，称之为差集 D 的阶. 当 G 为阿贝尔群(即可换群)或循环群时，分别称 D 为阿贝尔差集或循环差集. 对于 G 中的元 g，记 $Dg=\{dg\mid d\in D\}$，称 Dg 为 D 关于 g 的平移. D 的所有平移的集合记为 $\mathrm{dev}D$，即 $\mathrm{dev}D=\{Dg\mid g\in G\}$. 当 D 为一个(v,k,λ)差集时，$(G,\mathrm{dev}D)$是一个(v,k,λ)-SBIBD. 因此，可以用差集来构作对称设计，并且，差集的参数 v,k,λ 也必须满足布鲁克-赖瑟-乔拉定理的条件. 当 D 为(v,k,λ)差集时，D 的补集 $G\backslash D$ 为$(v,v-k,v-2k+\lambda)$差集，因此，研究差集时可设 $k\leqslant v/2$.

关于差集的存在性. 当 $\lambda=1$ 时，有无穷多个差集存在. 对于 $\lambda\geqslant 2$，有这样的霍尔猜想：当 $\lambda\geqslant 2$ 时，只存在有限多个(v,k,λ)阿贝尔差集. 这个猜想至今没有证实. 由于这个猜想，在差集的研究中，证明一些不存在性定理就成为重要的问题.

群差集(group difference set)　即“差集”.

阿贝尔差集(Abelian difference set)　见“差集”.

霍尔猜想(Hall's conjecture)　见“差集”.

平面差集(planar difference set)　一类组合构形. 即$(v,k,1)$差集. 若平面差集的阶为 n，则 $n=k-1$，因此，平面差集为$(n^2+n+1,n+1,1)$差集. n 阶平面差集的存在性等价于具有恰可迁自同构群的 n 阶射影平面的存在性. 阶为质数幂的循环平面差集均已作出. 但是，当 n 不是质数幂时，一个这样的平面差集都没有发现. 究竟有没有非质数幂阶的平面差集，这是至今未解决的一个问题.

循环差集(cyclic difference set)　一类特殊差集，即循环群中的差集. 例如，若循环加群 $\mathbf{Z}_{15}$的元素记为$\{0,1,\cdots,14\}$，则 $D=\{0,1,2,4,5,8,10\}$是一个$(15,7,3)$循环差集. 循环差集和循环对称设计之间有着一一对应关系：当且仅当 D 是循环群 G 中的(v,k,λ)差集时，$(G,\mathrm{dev}\,D)$是一个循环的(v,k,λ)-SBIBD.

循环设计(cyclic design)　一类特殊的对称设计. 设$(X,\mathscr{B})$是一个(v,k,λ)-SBIBD，若存在该设计的一个自同构 α(参见“设计的同构”)，使 $X=\{x,\alpha(x),\alpha^2(x),\cdots,\alpha^{v-1}(x)\}$，$\mathscr{B}=\{B,\alpha(B),\alpha^2(B),\cdots,\alpha^{v-1}(B)\}$，则称这个对称设计是循环设计. 例如，若取 $X=\{0,1,2,\cdots,14\}$，$B=\{0,1,2,4,5,8,10\}$，$\alpha(x)\equiv x+1(\mathrm{mod}\,15)$，$\mathscr{B}=\{B,\alpha(B),\cdots,\alpha^{14}(B)\}$，则$(X,\mathscr{B})$是一个参数为$(15,7,3)$的循环设计. 循环设计与循环差集之间有着一一对应的关系.

差集的刻画(description of difference set)　对差集的一种表征. 按定义差集是群中的特殊子集，为讨论问题方便起见，考虑阿贝尔群 G 的群环 $\mathbf{Z}G$，其中 $\mathbf{Z}$ 为整数环，则 G 中的差集 D 可用群环中元

$$T(D)=\sum_{d\in D}d$$

来刻画. 若 α 为 G 的自同构，记

$$T(D^{\alpha})=\sum_{d\in D}d^{\alpha},$$

则 G 的 k 元子集 D 为(v,k,λ)差集的充分必要条件为 $T(D)T(D^{-1})=n+\lambda S$，式中 $n=k-\lambda$，

$$S=\sum_{g\in G}g.$$

循环差集还可由霍尔多项式(参见“霍尔多项式”)及循环序列来刻画. 以 $0,1,\cdots,v-1$ 记循环加群 $\mathbf{Z}_v$ 中元，定义一个序列 $a_0,a_1,\cdots,a_{v-1}$，使得 i 属于循环差集 D 时 $a_i=1$，否则 $a_i=0$，则称该序列是循环差集

D 的特征序列. 一个长为 v 的(0,1)序列 $a_0,a_1,\cdots,a_{v-1}$是一个(v,k,λ)循环差集的特征序列的充分必要条件是和式

$$\sum_{i=0}^{v-1} a_i a_{i+j}$$

只取两个值,当 $j\equiv 0(\bmod v)$时值为 k,而对别的 j 均取值 λ,和式中下标 $i+j$ 按模 v 简化. 循环差集的特征序列刻画法便于差集在数字通信理论中的应用.

霍尔多项式(Hall's polynomial) 对循环差集的一种刻画. 当 G 为 v 阶循环群时,群环 ZG 与多项式环 $\mathbf{Z}[x]/(x^v-1)$同构. 若 $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_k\}$为 G 的一个差集,则 D 的群环刻画 $T(D)$对应于 $\mathbf{Z}[x]/(x^v-1)$中的元 $\theta(x)=x^{d_1}+x^{d_2}+\cdots+x^{d_k}$. 称 $\theta(x)$为 D 的霍尔多项式. D 为 v 阶循环群中(v,k,λ)差集的充分必要条件是霍尔多项式适合

$$\theta(x)\theta(x^{-1})\equiv n+\lambda T(x) \pmod{x^v-1},$$

式中$T(x)=1+x+\cdots+x^{v-1}$,$n=k-\lambda$.

乘子(multiplier) 亦称乘数. 一类特殊的自同构. 设 D 为群 G 的一个(v,k,λ)差集,G 的运算以加法记,α 为 G 的一个自同构. 若存在 $a,b\in G$,使 $D^\alpha=a+D+b$,则称 α 为 D 的乘子. 当 a 为零元时,称 α 为右乘子. 当 G 为阿贝尔群时,若存在整数 m,使 α 为映射 $x\to mx$,则称 α 为一个数值乘子,有时也称 m 为数值乘子. 例如,$\{1,3,9,5,4\}$是 $\mathbf{Z}_{11}$中的(11,5,2)差集,$m=3$ 是它的一个数值乘子. D 的所有乘子成为一个群,而所有右乘子为这个群的子群. 当 G 是阿贝尔群时,所有的乘子为右乘子;当 G 是循环群时,所有的乘子为数值乘子. 当 D 为阿贝尔差集时,D 的一个乘子必固定 D 的某个平移. 利用这个性质及乘子定理可以构造某些差集及证明某些差集的不存在性(参见"乘子定理").

乘数(multiplier) 即"乘子".

右乘子(right multiplier) 见"乘子".

数值乘子(numerical multiplier) 见"乘子".

乘子定理(multiplier theorem) 用来判别差集乘子存在性的定理. 乘子定理有多种形式,以下的乘子定理也称为第二乘子定理. 设 D 是 v 阶阿贝尔群 G 的(v,k,λ)差集,m 是 $n=k-\lambda$ 的一个与 v 互素的因子,且 $m>\lambda$. 若整数 t 与 v 互素,使得对 m 的每个素因子 p 存在相应的非负整数 f,适合 $t\equiv p^f(\bmod v^*)$,其中 v^* 为 G 的指数,即使 $x^e=1$ 对 G 中一切 x 成立的最小正整数 e,则 G 的自同构 $x\to x^t$ 是 D 的数值乘子. 该定理由曼(Mann,H. B.)于1965 年得到. 当 G 为循环群且 $\lambda=1$ 时的较早形式由霍尔(Hall M. Jr.)得到. 由于阿贝尔差集 D 的乘子必固定 D 的某个平移,所以,可由乘子定理作出一些差集或证明某些参数的差集不存在. 例如,可做(11,5,2)循环差集如下:设这样的差集存在,则 3 是 D 的一个数值乘子,不妨设 3 固定 D,则 D 必为循环群 Z_{11}的元素在自同构 $x\to 3x$ 作用下的某些轨道的并. 而 Z_{11}的元素轨道为$\{0\}$,$\{1,3,9,5,4\}$及$\{2,6,7,10,8\}$. 于是,两个轨道均是 $\mathbf{Z}_{11}$ 中的(11,5,2)差集. 又例如,若存在循环(31,10,3)差集 D,则 7 应是 D 的乘子,不妨设 7 固定 D. 但是,在自同构 $x\to 7x$ 作用下 $\mathbf{Z}_{31}$分成 3 个元素轨道,长度分别为 1,15 及 15,这说明 D 不存在. 在第二乘子定理中取 m 为素数 p,可得到定理的特例(称为第一乘子定理):设 D 是一个(v,k,λ)阿贝尔差集,p 为素数,$p\mid n$,$p\nmid v$,若 $p>\lambda$,则 p 是 D 的一个乘子. 这个定理的证明依赖于条件 $p>\lambda$,但事实上对每一个已知的阿贝尔差集,只要素数 p 是 n 的因子且不整除 v,则一定是差集的乘子. 因此,人们猜想第一乘子定理中去掉条件 $p>\lambda$ 后结论仍成立. 这个猜想称为乘子猜想.

乘子定理说明,n 的因数是乘子的重要来源. 但这并不是惟一的来源. 例如,11 是(21,5,1)循环差集 $D=\{3,6,7,12,14\}$的数值乘子,而 11 并不是 $n=4$ 的因子. 当一个数值乘子不是 n 的因子时,称为额外乘子. 已知某些数不可能成为差集的额外乘子. 例如,2 不可能是阿贝尔差集的额外乘子,$v-1$ 不可能是任何(v,k,λ)循环差集的额外乘子.

乘子猜想(multiplier conjecture) 见"乘子定理".

额外乘子(extraneous multiplier) 见"乘子定理".

辛格定理(theorem of Singer) 关于一类循环差集的存在性定理. 若 q 为素数幂,则存在

$$\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1},\frac{q^n-1}{q-1},\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)$$

循环差集. 该定理由辛格(Singer,J.)于 1938 年利用有限射影几何证得. 将有限域 $\mathrm{GF}(q)$上的 $n+1$ 维非零向量 $x=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$取作 n 维射影几何的点,当 b 为 $\mathrm{GF}(q)$中非零元时,把 bx 与 x 看做相同的点. 这些点的集合记为 $\mathrm{PG}(n,q)$. 若 ξ 为扩域 $\mathrm{GF}(q^{n+1})$中的原根,则 ξ^i 与 ξ^j 表示 $\mathrm{PG}(n,q)$中相同点的充分必要条件为 $i\equiv j(\bmod v)$,这里

$$v=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

于是,$\mathrm{PG}(n,q)$中的所有点可表为 $\xi^0,\xi^1,\cdots,\xi^{v-1}$. 设 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是 $\mathrm{GF}(q)$上 n 个线性无关的 $n+1$ 维向量,把一切向量 $b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_ny_n$(式中 $b_i\in\mathrm{GF}(q)$)所对应的点的集合称为一个超平面,其中的点可表为$\{\xi^{d_1},\xi^{d_2},\cdots,\xi^{d_k}\}$,这里

$$k=\frac{(q^n-1)}{(q-1)}.$$

辛格证明:$\{d_1,d_2,\cdots,d_k\}$是循环群 Z_v 中的(v,k,λ)

差集，其中，$\lambda=(q^{n-1}-1)/(q-1)$.

分圆类(cyclotomic class) 一种等价类. 设 q 为奇素数幂，w 为有限域 GF(q)的一个原根. 若 e 为 $q-1$ 的因子，$q-1=ef$，$\varepsilon=w^e$，则 $H^e=\{1,\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots,\varepsilon^{f-1}\}$是 GF($q$)的乘法子群. 将子群 H^e 的陪集 $H^e_a=H^e w^a$ 称为分圆类，这里 a 取 $0,1,\cdots,e-1$.

分圆数(cyclotomic number) 构造差集的工具之一. 设 $q=ef+1$ 为奇质数幂，取定原根 ω 后可得分圆类 H^e_a，$a=0,1,\cdots,e-1$(参见"分圆类"). 对取定的 i,j，方程 $x+1=y$ 的使 $x\in H^e_i$，$y\in H^e_j$ 的解(x,y)的个数，称为 e 阶分圆数，记为$(i,j)_e$. 事实上，分圆数$(i,j)_e$ 也就是方程 $w^{es+i}+1=w^{et+j}$的解(s,t)的个数，这里 $0\leqslant s,t\leqslant f-1$. 通过对分圆数的计算可以构造一些差集. 例如，$H^e_0$ 构成GF(q)加法群中$(q,f,(f-1)/e)$差集的充分必要条件为

$$(i,0)_e=\frac{f-1}{e}\ (i=0,1,\cdots,e-1),$$

且 $2\nmid f$；而 $H^e_0\cup\{0\}$构成$(q,f+1,(f+1)/e)$差集的充分必要条件为

$$1+(0,0)_e=(i,0)_e=(f+1)/e\ \left(i=1,2,\cdots,\frac{e-2}{2}\right),$$

且 $2\nmid f$. 因此，当素数幂 $q\equiv3 \pmod 4$)时，H^2_0 是

$$\left(q,\frac{q-1}{2},\frac{q-3}{4}\right)$$

差集，称为二次剩余差集；当 $q=1+4y^2\equiv5 \pmod 8$)时，$H^4_0\cup\{0\}$是$(q,3+y^2,(3+y^2)/4)$差集.

广义分圆数(generalized cyclotomic number) 分圆数的推广. 设 v 是两个相异奇质数的积，g 为这两个质数 p 和 q 的公共原根. 以 m 记 $p-1$ 与 $q-1$ 的最大公因数，若 $d=(p-1)(q-1)/m$，则可取整数 h 使$\{g^s h^i\mid 0\leqslant s\leqslant d-1,0\leqslant i\leqslant m-1\}$成为模 v 的一个既约剩余系. 若记 $E_i=\{g^s h^i\mid 0\leqslant s\leqslant d-1\}$，$0\leqslant i\leqslant m-1$，则方程 $x+1\equiv y \pmod v$，$x\in E_i$，$y\in E_j$的解(x,y)的个数，即为方程 $g^s h^i+1\equiv g^t h^j \pmod v$，$0\leqslant s,t\leqslant d-1$ 解(s,t)的个数. 称该数为广义分圆数，记为$(i,j)_m$. 利用广义分圆数证得：若 p,q 为两个孪生质数，即 $q=p+2$，则存在

$$\left(pq,\frac{pq-1}{2},\frac{pq-3}{4}\right)$$

循环差集.

梅农差集(Menon difference set) 一类特殊参数的差集. 梅农(Menon，P. K.)于 1962 年证明：若一个(v,k,λ)差集中 $v=4n$，这里 $n=k-\lambda$，则这个差集的参数一定具有形式$(4m^2,2m^2\pm m\ ,m^2\pm m)$. 后来把有这种参数的差集称为梅农差集. 当 $m=2^r3^s$ 时，梅农差集均存在. 但是，当 m 为其他形式的正整数时，尚未发现相应的梅农差集. 人们猜测梅农差集中的 m 只能取 2^r3^s 的形式，其中 r,s 为非负整数. 梅农差集可以用来构造阿达马矩阵. 首先，由梅农差集可以得到一个$(4m^2,2m^2\pm m,m^2\pm m)$-SBIBD；然后，将该对称设计的关联矩阵中的数 0 换作 -1，就得一个 $4m^2$ 阶的阿达马矩阵. 所得的矩阵还是正则阿达马矩阵，即每行含相同个数的 -1.

差集的收缩(contraction of difference set) 作用在差集上的一种运算. 若 D 为群 G 中的差集，H 为 G 的正规子群，在同态 $G\rightarrow G\backslash H$ 下 D 的像记为 $\overline{D}$，则称 $\overline{D}$ 为 D 的收缩. 若与$|G/H|$互素的某个整数 t 是 $\overline{D}$ 的一个乘子，则称 t 为 D 的 G/H 乘子. 例如，$D=\{0,1,2,4,5,8,10\}$为 Z_{15}中的(15,7,3)循环差集，若取 $H=\{0,3,6,9,12\}$，则 $\overline{D}=G/H$，这时与 3 互素的整数都是 D 的 G/H 乘子. 当 H 仅含 G 的单位元时，G/H 乘子就是通常的数值乘子，因此，G/H 乘子是一般数值乘子的推广. 对 G/H 乘子也有类似于乘子定理的存在性定理，从而也可用来构造差集或否定某些差集的存在性.

可分差集(divisible difference set) 差集的一种推广. 若 G 为 mn 阶群，具有 n 阶正规子群 N，D 为 G 的 k 元子集，使对任意 $g\in G/N$ 恰有 λ_2 种方式表 g 为 $d_1d_2^{-1}$ 的形式，其中 $d_1,d_2\in D$，而对 N 中任意非单位元，恰有 λ_1 种这样的表示方式，则称 D 为可分差集，记为$(m,n,k,\lambda_1,\lambda_2)$-DDS. 特别地，当 $\lambda_1=0$ 时，称 D 为相对差集. 当 $\lambda_1=\lambda_2$ 或 $n=1$ 时，即为通常的差集. 由可分差集 D 可得到 G 上的对称可分组设计，其区组族为 dev$D=\{Dg\mid g\in G\}$. 这是一类具两个结合类的部分平衡不完全区组设计. 若有整数 t，$(t,mn)=1$，使 $D^t=\{d^t\mid d\in D\}=Dg$ 对某个 $g\in G$ 成立，则称 t 为 D 的乘子. 当 $D^t=D$ 时，称 t 为 D 的强乘子.

强乘子(strong multiplier) 见"可分差集".

循环加集(cyclic addition set) 循环差集的一种推广. 设 $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_k\}$为 v 阶循环群 $\mathbf{Z}_v$ 的 k 元子集，g 为小于 v 的一个正整数. 若对 $\mathbf{Z}_v$ 中任一非零元 s，方程 $x+gy=s$ 在 $D\times D$ 中的解(x,y)的个数都是 λ，则称 D 是一个(v,k,λ,g)循环加集. 当 $g=-1$ 时，$(v,k,\lambda,-1)$循环加集就是通常的(v,k,λ)循环差集. 若 $\theta(x)$为 D 的霍尔多项式(参见"霍尔多项式")，则 D 是(v,k,λ,g)循环加集的充分必要条件为

$$\theta(x)\theta(x^g)\equiv\beta+\lambda T(x)\ (\mathrm{mod}\ x^v-1),$$

式中 $T(x)=1+x+\cdots+x^{v-1}$. 当 $1<k<v-1$ 时，(v,k,λ,g)循环加集的参数满足 $\beta=k^2-\lambda v$，$0\leqslant\beta+\lambda\leqslant k$，$0<\lambda<k$ 及 $|\beta|<k$. 对于循环加集，也可以定义乘子，并且有类似于循环差集的乘子定理.

差族(difference family) 组合设计的一种工具. 用于构作 BIBD 设计或 PBD. 设 $B_1,B_2,\cdots,B_s$ 是

v 阶群 G 的子集，运算以加法表示，$B_i=\{b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_{k_i}}\}$，$K=\{k_i\mid 1\leqslant i\leqslant s\}$，若 G 中每个非零元在所有的差 $b_{i_j}-b_{i_l}(1\leqslant i\leqslant s)$ 中恰出现 λ 次，则称 $\mathscr{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_s\}$ 是一个 (v,K,λ) 差族. 若

$$\mathrm{dev}B_i=\{B_i+g\mid g\in G\},\mathrm{dev}\mathscr{B}=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant s}\mathrm{dev}B_i,$$

则 $(G,\mathrm{dev}\mathscr{B})$ 是一个 (v,K,λ)-PBD. 当 $K=\{k\}$ 时得 (v,K,λ)-BIBD. 对差族也可定义乘子，但没有相应的乘子定理. 分圆数理论可用于讨论差族的存在性，但目前尚没有系统的结果. 当 G 为阿贝尔群时，一个 (v,K,λ) 差族有时也称为补差集，记为 s-$(v;k_1,k_2,\cdots,k_s;\lambda)$ 补差集.

$$4\text{-}\left(v;k_1,k_2,k_3,k_4;\sum_{i=1}^{4}k_i-v\right)$$

补差集和 $2\text{-}(2v;k_1,k_2;k_1+k_2-v)$ 补差集可用来构作 $4v$ 阶的阿达马矩阵. 若 $\{D_1,D_2\}$ 为一个 $2\text{-}(2m+1;m,m;m-1)$ 补差集，且满足条件：$x\in D_1$ 就有 $x^{-1}\notin D_1$，则称 $\{D_1,D_2\}$ 为采克勒斯差集. 从一个采克勒斯差集可得到一个 $4(m+1)$ 阶反型阿达马矩阵. 当 $2m+1$ 满足以下条件之一时存在采克勒斯差集：$4m+3$ 为素数幂；$2m+1\equiv5(\mathrm{mod}\,8)$ 且 $2m+1$ 为素数幂；$m=4n$，$2m+1=p^t$，p 为素数，$p\equiv5(\mathrm{mod}\,8)$ 且 $t\equiv2(\mathrm{mod}\,4)$.

补差集(complementary difference set)　见“差族”.

采克勒斯差集(Szekeres difference set)　见“差族”.

阿达马矩阵(Hadamard matrix)　一类特殊矩阵，其元素取 ±1，与一类 BIBD 设计等价. 若元素为 1 或 -1 的 n 阶矩阵 H 适合等式 $HH^T=nI$，其中 I 为单位矩阵，则称 H 为 n 阶阿达马矩阵，简称 H 矩阵. 由于阿达马(Hadamard, J. (-S.))曾证明 n 阶实数方阵 A 的行列式适合不等式 $|\det A|\leqslant n^{n/2}$，而阿达马矩阵是使其中等号成立的 n 阶实矩阵，这就是阿达马矩阵这一名称的来由.

因为 n 阶 H 矩阵存在时，n 只可能为 1，2 或 4 的倍数，所以，1 阶和 2 阶 H 矩阵是存在的，但当 $n>2$ 时是否总存在 $n=4t$ 阶的 H 矩阵还是一个未解决的突出问题. 人们猜测这样的矩阵总存在，称为阿达马矩阵猜测. 一个 $4t$ 阶 H 矩阵的存在性等价于一个 $(4t-1,2t-1,t-1)$-SBIBD 的存在性. 利用有限域，佩利(Paley, R. E. A. C.)直接构作了 $q+1$ 阶的 H 矩阵，其中 q 为模 4 余 3 的质数幂. 有许多递推构作 H 矩阵的方法. 例如，若 $A=(a_{ij})$，B 分别是 m 阶及 n 阶 H 矩阵，则 (i,j) 位置为 $a_{ij}B$ 的分块矩阵 $A\otimes B$ 是一个 mn 阶的 H 矩阵. 利用其他特殊类型的矩阵，例如，威廉森型矩阵、鲍默特-霍尔表、对称 C 矩阵等，也可递推构作 H 矩阵. 还有一些递推构作方法需要特殊类型的 H 矩阵，例如，反型 H 矩阵、对称 H 矩阵，以及 H 矩阵睦偶等. 利用补差集也可构作 H 矩阵.

H 矩阵在数字通信中可用于构造纠错码，人类从宇宙空间发回的第一张行星照片曾采用了 32 阶的 H 矩阵以提高清晰程度(参见“阿达马码”). H 矩阵在模式识别中用于构造有限沃尔什变换. H 矩阵与一类对称 BIBD 设计及二水平正交阵列的等价性提供了它在统计应用方面的重要性. 阿达马矩阵有各种推广，例如，复阿达马矩阵、正交设计等.

阿达马矩阵猜测(Hadamard matrix conjecture)　见“阿达马矩阵”.

阿达马设计(Hadamard design)　一类特殊参数的对称设计. 即 $(4t-1,2t-1,t-1)$-SBIBD. 当 $4t$ 阶 H 矩阵存在时，经交换两行、交换两列、某行乘以 -1、某列乘以 -1 这些变换的连续施行后，得到的仍然是 H 矩阵，因而总存在首行首列元素全为 1 的 $4t$ 阶 H 矩阵. 若将划去首行首列后得到的子矩阵记为 A，则将 A 中 -1 换作 0 得到的矩阵作为关联矩阵，可以得到一个 $(4t-1,2t-1,t-1)$-SBIBD. 反之，若存在一个 $(4t-1,2t-1,t-1)$-SBIBD，则将其关联矩阵中的 0 换作 -1，并且在上面及左边加上元素全为 1 的行及列，便得到一个 $4t$ 阶 H 矩阵. 因此，$(4t-1,2t-1,t-1)$-SBIBD 的存在性等价于 $4t$ 阶 H 矩阵的存在性，这就是将这类设计称为阿达马设计的来由.

正规阿达马矩阵(regular Hadamard matrix)　一类特殊的阿达码矩阵. 其行和为常数. 这类矩阵每行所含 1 的个数都相同. 当 $4n$ 阶正规阿达马矩阵存在时，n 必为完全平方数. 将 $4u^2$ 阶正规 H 矩阵中的 -1 换作 0，便得到一个 $(4u^2,2u^2\pm u,u^2\pm u)$-SBIBD 的关联矩阵；反之将 $(4u^2\ 2u^2\pm u,u^2\pm u)$-SBIBD 的关联矩阵中的 0 换成 -1，便得到一个 $4u^2$ 阶的正规 H 矩阵. 因此，正规 H 矩阵的存在性与又一类对称设计的存在性等价. 若存在 $u-2$ 个相互正交 $2u$ 阶拉丁方，则存在 $4u^2$ 阶正规 H 矩阵. 当 n 阶 H 矩阵存在时，也存在 n^2 阶正规 H 矩阵. 并且当 m 阶及 n 阶正规 H 矩阵都存在时，必存在 mn 阶正规 H 矩阵.

反型阿达马矩阵(skew Hadamard matrix)　一类特殊阿达马矩阵. 若一个阿达马矩阵与单位矩阵的差是反对称矩阵，则称这个阿达马矩阵为反型的. 这一概念是为了递推构造 H 矩阵而提出的. 如果存在 n 阶反型 H 矩阵，则存在 $n(n-1)$ 阶 H 矩阵. 从 n 阶反型 H 矩阵及 $n+4$ 阶对称 H 矩阵可得到 $n(n+3)$ 阶 H 矩阵. 已有一些直接的和递推的构造反型 H 矩阵的方法. 例如，利用一类特殊的差族，即采克勒斯差集的存在性可得到相应阶数的反型 H 矩阵. 由

一个 m 阶反型 H 矩阵及一对 n 阶 H 矩阵睦偶可以得到一个 mn 阶反型 H 矩阵(参见“阿达马矩阵睦偶”).

阿达马矩阵睦偶(amicable Hadamard matrix) 特殊的阿达马矩阵对. 设 M 是一个反型 H 矩阵, N 是一个同阶的对称 H 矩阵,若它们适合等式 $MN^T=NM^T$,则称它们是一对阿达马矩阵睦偶. H 矩阵睦偶可用于反型 H 矩阵的递推构造. 当 q 为模 4 余 3 的质数幂时,存在 $q+1$ 阶 H 矩阵睦偶. 当 m 阶及 n 阶 H 矩阵睦偶都存在时,也存在 mn 阶 H 矩阵睦偶.

对称C 矩阵(symmetric conference matrix) 与阿达马矩阵有关的一类矩阵. 若元素为 ±1 的 n 阶对称矩阵 C 的对角线元均为 1 且适合等式

$$(C-I)^2=(n-1)I,$$

则称 C 为对称 C 矩阵. 这类矩阵在研究会议电话系统时遇到,因而得名. 这类矩阵可用于 H 矩阵的递推构造. 若存在 m 阶$(m>1)$H 矩阵且存在 n 阶对称 C 矩阵,则存在 mn 阶 H 矩阵. 一个对称 C 矩阵的阶数模 4 必余 2. 当 q 为模 4 余 1 的质数幂时,存在 $q+1$ 阶的对称 C 矩阵. 由 n 阶反型 H 矩阵可得到 $(n-1)^2+1$ 阶对称 C 矩阵. 由 n 阶对称 C 矩阵可得到$(n-1)^k+1$ 阶对称 C 矩阵,其中 k 为任意正整数. 此外,已知 $n=226$ 时对称 C 矩阵存在,而 $n=46$ 是一个未解决的最小的阶.

威廉森型矩阵(Williamson matrix) 一组特殊的矩阵,其元素为±1. 元素为±1 的 4 个 m 阶矩阵 A,B,C,D,若满足

$$AA^T+BB^T+CC^T+DD^T=4mI,$$

且对其中的任两个矩阵 M,N 均有 $MN^T=NM^T$,则称它们为威廉森型矩阵. 这类矩阵是因为递推构造 H 矩阵的需要而提出的. 若存在 m 阶威廉森型矩阵且存在 t 阶鲍默特-霍尔表,则存在 $4mt$ 阶 H 矩阵. 当 q 为模 4 余 1 的质数幂时,存在$(q+1)/2$ 阶及 $q(q+1)/2$阶的威廉森型矩阵. 对于阶数不大于 29 的奇数及其他较小的阶数,存在威廉森型矩阵.

鲍默特-霍尔表(Baumert-Hall array) 阿达马矩阵的推广,因递推构造阿达马矩阵而提出. 若元素为未定元$\pm A$,$\pm B$,$\pm C$,$\pm D$ 的 $4t$ 阶矩阵的每一行及每一列含每个未定元 X(包括$-X$)各 t 次,并且把 A,B,C,D 看做可换环中元素时每两行都是正交的,则称该矩阵为 t 阶鲍默特-霍尔表,记为 $BH[4t]$. 若存在 t 阶的鲍默特-霍尔表 $BH[4t]$,且存在 m 阶的威廉森型矩阵,则存在 $4mt$ 阶的 H 矩阵. 该 H 矩阵可将 $BH[4t]$中的未定元 A,B,C,D 换作 4 个威廉森型矩阵而得到. 若取 $A=B=C=D=1$,则从一个 $BH[4t]$得到一个 $4t$ 阶的 H 矩阵. 当 $t=1+2^a10^b26^c$,a,b,c 为非负整数时,存在$BH[4t]$. 当 t 为不大于 33 的奇数或其他一些奇数时,也存在 $BH[4t]$. 以下是$BH[4]$的一个例子:

$$BH[4]=\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & -D & C \\ -C & D & A & -B \\ -D & -C & B & A \end{bmatrix}.$$

T 矩阵(T-matrix) 一类特殊的矩阵,可用于构作鲍默特-霍尔表. 若 $G=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$为加法可换群,$X\subseteq G$,$M=(m_{ij})$,当 $g_j-g_i\in X$ 时 $m_{ij}=1$,否则 $m_{ij}=0$,则称 M 是关于 X 的 I 型关联矩阵. 若 X 可划分为 $X=X_1\cup X_2$,使 $g_j-g_i\in X_1$ 时 $m_{ij}=1$,$g_i-g_j\in X_2$ 时 $m_{ij}=-1$,$g_j-g_i\notin X$ 时 $m_{ij}=0$,则称 M 为 I 型$(0,1,-1)$矩阵. 若 M_1,M_2,M_3,M_4 是 n 阶可换群 G 上的 4 个$(0,1,-1)$矩阵,使对 n^2 个位置的每一个恰有一个 M_i 在此位置上元素不为零,且

$$M_1M_1^T+M_2M_2^T+M_3M_3^T+M_4M_4^T=nI_n,$$

其中 I_n 为单位矩阵,则称这 4 个矩阵为 T 矩阵. 若存在 t 阶 T 矩阵,则存在 t 阶鲍默特-霍尔表 $BH[4t]$. 许多已知的 $BH[4t]$是从 T 矩阵得到的.

正交设计(orthogonal design) 鲍默特-霍尔表的推广. 设 X 是元素为 $0,\pm x_1,\cdots,\pm x_l$ 的 n 阶矩阵,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_l$ 看做某个可换环中的元素. 若存在正整数 $s_1,s_2,\cdots,s_l$ 使

$$XX^T=(s_1x_1^2+s_2x_2^2+\cdots+s_lx_l^2)I_n,$$

则称 X 是型为$(s_1,s_2,\cdots,x_l)$的 n 阶正交设计. 型为(t,t,t,t)的 $4t$ 阶正交设计就是鲍默特-霍尔表 $BH[4t]$. 利用正交设计的概念,沃利斯(Wallis,J. S.)于 1976 年证明:对任意给定的正整数 q,只要整数 $s\geqslant[2\log_2(q-3)]$,则存在 2^sq 阶阿达马矩阵. 关于 H 矩阵存在性问题的最一般结果,多年来未有大的推进.

称重矩阵(weighing matrix) 阿达马矩阵的推广. 若 W 是元素为 $0,\pm1$ 的 n 阶矩阵,且使 $WW^T=kI_n$,则称 W 为 n 阶称重矩阵. $k=n$ 的称重矩阵就是 n 阶阿达马矩阵. $k=n-1$ 的对称称重矩阵就是 n 阶对称 C 矩阵. 人们猜测:对每个正整数 t 及每个 $k=0,1,\cdots,4t$,存在 $4t$ 阶称重矩阵. 当 $k=4t$ 时,这就是阿达马矩阵猜测. 若将 v 阶称重矩阵中的-1 换作 1,得到的是某个(v,k,λ)-SBIBD 的关联矩阵,则称这样的称重矩阵为平衡称重矩阵. 这类矩阵的讨论有助于发现新的 BIBD 设计.

复阿达马矩阵(complex Hadamard matrix) 阿达马矩阵的推广. 设 n 阶复矩阵 C 的元素为±1 或$\pm$i,若 $CC^*=nI_n$,则称 C 为复阿达马矩阵,这里 C^* 是 C 的厄米特共轭矩阵,即 $C^*=\overline{C}^T$. 当 C 为实矩阵时,便得到 n 阶 H 矩阵. 当 n 阶复 H 矩阵存在时, n 必为 1 或偶数. 人们猜测:偶数阶复 H 矩阵都存

在；但是，这个猜测尚未解决. 因为，当 n 阶复 H 矩阵存在时可推出 $2n$ 阶 H 矩阵存在，所以，上述猜测包含了阿达马猜测. 更一般地，当 n 阶复 H 矩阵及 m 阶 H 矩阵都存在时，必存在 mn 阶 H 矩阵.

若复 H 矩阵 C 适合 $(C-I)^*=-(C-I)$，则称 C 是反型复 H 矩阵. 若 $I+N$ 是对称 C 矩阵，则 $I+\mathrm{i}N$ 是反型复 H 矩阵. 若 M 是反型复 H 矩阵且 N 是同阶的复 H 矩阵，使 $N^*=N$ 且 $MN^*=NM^*$，则称 M,N 为复 H 矩阵睦偶. 反型 H 矩阵和 H 矩阵睦偶的许多递推构造方法可以推广到复 H 矩阵的情形.

反型复H矩阵(skew complex Hadamarde matrix) 见“复阿达马矩阵”.

复H矩阵睦偶(amicable complex Hadamard matrices) 见“复阿达马矩阵”.

广义阿达马矩阵(generalized Hadamard matrix) 阿达马矩阵的推广. 设 $H=H(p,n)$ 是元素为 p 次复单位根的 n 阶矩阵，若满足 $HH^*=nI_n$，则称 H 为广义阿达马矩阵. $H(2,n)$ 即为通常的 n 阶 H 矩阵，而 $H(4,n)$ 就是 n 阶复 H 矩阵. 由一个 H 矩阵 $H(2,n)$ 及任意正整数 p 可以得到一个广义阿达马矩阵 $H(2p,n)$. 当 p 为质数时，存在 $H(p,2^m p^k)$，其中 m 为非负整数，且 $m\leqslant k$.

阿达马等价(Hadamard equivalence) 阿达马矩阵间的一类等价关系. 若两个阿达马矩阵可经一系列交换两行、交换两列、一行乘 (-1)、一列乘 (-1) 的变换从一个变为另一个，则称这两个阿达马矩阵为阿达马等价. 阿达马等价是一个等价关系，n 阶阿达马矩阵的全体可以划分成一些等价类，该类数记为 $h(n)$. 同一类中所有阿达马矩阵的共同性质称为阿达马等价不变量. 当阶数较小时借助于不变量，已找出数 $h(n)$ 及每个类中的代表. 例如，当 $n\leqslant 12$ 时 $h(n)=1$，而 $h(16)=5$，$h(20)=3$，$h(24)=60$.

t 设计(t-design) 平衡不完全区组设计的一种推广. 设 $(X,\mathscr{B})$ 为一正则设计(参见“区组设计”)，其中 $|X|=v$，区组大小为 k. 若 X 的任一 t 元子集恰含于 $\mathscr{B}$ 的 λ 个区组之中，则称 $(X,\mathscr{B})$ 为 t-(v,k,λ) 设计，简称 t 设计. 一个 2-(v,k,λ) 设计就是 (v,k,λ)-BIBD. 没有重复区组的 t 设计称为简单 t 设计. $\lambda=1$ 的 t-(v,k,λ) 设计称为施泰纳系，记为 $S(t,k,v)$，从而 t 设计有时也记为 $S_\lambda(t,k,v)$. 一个 t-(v,k,λ) 设计也是一个 s-(v,k,λ_s) 设计，式中

$$\lambda_s=\lambda\binom{v-s}{t-s}\Big/\binom{k-s}{t-s}\quad(s=0,1,\cdots,t-1).$$

这提供了 t 设计参数 t,v,k,λ 应满足的必要条件：

$$\lambda(v-s)(v-s-1)\cdots(v-t+1)$$
$$\equiv 0(\bmod (k-s)(k-s-1)\cdots(k-t+1)).$$

这些参数还必须满足推广的费希尔不等式. 若 $(X,\mathscr{B})$ 是一个 t-(v,k,λ) 设计，并且 $|\mathscr{B}|=b$，则当 $t=2s$ 且 $v\geqslant k+s$ 时，

$$b\geqslant\binom{v}{s};$$

当 $t=2s+1$ 且 $v\geqslant k+s+1$ 时，

$$b\geqslant 2\binom{v-1}{s}.$$

若 X 的每个 k 元子集在 $\mathscr{B}$ 中出现相同次数，则称 t 设计 $(X,\mathscr{B})$ 是平凡的. 例如，v 元集 X 的全体 k 元子集构成一个平凡的 t 设计. 泰尔林克(Teirlink, L.)证明：对所有 t 都存在非平凡的简单 t 设计. 威尔森(Wilson, R. W.)指出：当 λ 充分大时，上述关于 t-(v,k,λ) 设计存在的必要条件也是充分的. 哈拿匿(Hanani, H.)得到了 3-$(v,4,\lambda)$ 设计存在性的完整结果：3-$(v,4,\lambda)$ 设计存在的充分必要条件是

$$\lambda(v-2)\equiv 0(\bmod 2),$$
$$\lambda(v-1)(v-2)\equiv 0(\bmod 3)$$

且 $\lambda v(v-1)(v-2)\equiv 0(\bmod 8)$. 对其他参数情形，目前很少有完整结果.

施泰纳系(Steiner system) 一类组合构形. 即 $\lambda=1$ 的 t 设计，记为 $S(t,k,v)$. 一个 $S(2,3,v)$ 称为施泰纳三元系，记为 STS(v). 一个 $S(3,4,v)$ 称为施泰纳四元系，记为 SQS(v). STS(v) 存在的充分必要条件是 $v\equiv 1,3(\bmod 6)$. 哈拿匿(Hanani, H.)于 1960 年证明：SQS(v) 存在的充分必要条件是 $v\equiv 2,4(\bmod 6)$. 当 $t=4$ 或 5 时，目前仅知一些零星的施泰纳系，其中一些与马修群有关(参见“马修设计”). 当 $t\geqslant 6$ 时，目前尚不清楚是否有这样的施泰纳系存在.

马修设计(Mathieu design) 与马修群有关的几个施泰纳系. 若 G 是 v 元集 X 上的一个 t 可迁置换群，Δ 是 X 的一个 k 元子集，G 将 X 的全体 k 元子集划分成一些区组轨道，则含 Δ 的区组轨道形成一个 t-(v,k,λ) 设计. 若以 G_Δ 记 Δ 的集稳定子群，则轨道大小为 $|G|/|G_\Delta|$，由此可计算参数 λ. 已知两个 5 可迁的马修群 M_{12} 及 M_{24}，两个 4 可迁的马修群 M_{11} 及 M_{23}，与之有关的还有一个 3 可迁的马修群 M_{22}. 适当选取区组轨道，可以从这些 t 可迁群得到一些施泰纳系 $S(5,8,24)$，$S(5,6,12)$，$S(4,7,23)$，$S(4,5,11)$，以及 $S(3,6,22)$. 称这几个设计为马修设计. 这些设计在同构意义下还是惟一的.

比例向量法(method of ratio vector) 构作 t 设计的一种方法. 设 X 为 v 元集，G 为 X 上的一个置换群. 若 X 的 t 元子集全体 $\binom{X}{t}$ 在 G 作用下划分成 m 个可迁类 $T_1,T_2,\cdots,T_m$，则称

$$(|T_1|:|T_2|:\cdots:|T_m|)$$

为 G 在 X 上的 t 比例向量. 若 B 为 X 的某个 k 元子集 $(t<k<v-1)$，记

$$u_i = |\{S \in T_i \mid S \subset B\}|,$$

则称$(u_1 : u_2 : \cdots : u_m)$为$B$的$t$比例向量. 阿尔托(Alltop,W. O.)说明了如果G在X上的t比例向量与B的t比例向量相同,则$(X,\mathscr{B})$是一个t-(v,k,λ)设计,式中$\mathscr{B}$是G作用下$\binom{X}{k}$中含B的可迁类,而

$$\lambda = \frac{u_i|\mathscr{B}|}{|T_i|} \quad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

这一方法也可推广到若干个可迁类的并. 设$\mathscr{B}_1$,$\mathscr{B}_2,\cdots,\mathscr{B}_n$为$G$作用下$\binom{X}{k}$的不同可迁类,它们的代表元分别为$B_1,B_2,\cdots,B_n$. 若$B_j$的集稳定子群为$G_{B_j}$,记$u_{ij} = |\{S \in T_i | S \subset B_j\}|$,

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{u_{ij}}{|G_{B_j}|},$$

则称$(u_1 : u_2 : \cdots : u_m)$为$\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$的$t$比例向量. 当$G$在$X$上的$t$比例向量与$\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$的$t$比例向量相同时,

$$(X,\bigcup_{j=1}^{n}\mathscr{B}_j)$$

是一个t-(v,k,λ)设计,式中

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} \frac{u_{ij}|\mathscr{B}_j|}{|T_i|} \quad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

t 比例向量(t-ratio vector) 见"比例向量法".

设计的扩充(extension of designs) 构作t设计的一种方法. 若$(X,\mathscr{B})$为一t-(v,k,λ)设计,取定X中某个元x,记$\mathscr{D} = \{B \backslash \{x\} | B \in \mathscr{B}, x \in B\}$,则$(X\backslash\{x\},\mathscr{D})$是一个$(t-1)$-$(v-1,k-1,\lambda)$设计,称该$(t-1)$设计是原$t$设计的一个收缩. 反之,若存在某个$t$设计使得它的一个收缩同构于某个给定的$(t-1)$设计,则称该$t$设计是给定$(t-1)$设计的一个扩充,并称给定的$(t-1)$设计是可扩充的. 若一个有$b$个区组的$t$-$(v,k,\lambda)$设计可扩充,则必有$b(v+1) \equiv 0(\mathrm{mod}\, k+1)$. 阿尔托(Alltop,W. O.)于1975年证明:当t为偶数时,任一个t-$(2k+1,k,\lambda)$设计可扩充成一个$(t+1)$-$(2k+2,k+1,\lambda)$设计.

设计的收缩(contraction of design) 见"设计的扩充".

t 设计大集(large set of t-designs) 一类组合构形. 指子集族的一种划分. 为避免一些平凡情形,t-(v,k,λ)设计的大集只对极小的λ定义. 当t-(v,k,λ)设计存在时,其参数满足

$$\lambda\binom{v-s}{t-s} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\binom{k-s}{t-s}\right),$$

$s=0,1,\cdots,t-1$. 设λ^*是使上述同余式成立的最小正整数λ,若v元集X的全体k元子集$\binom{X}{k}$可以划分为互不相交的t-(v,k,λ^*)设计的并,则称这样的划分为t-(v,k,λ^*)设计的大集. 大集中含

$$\binom{v-t}{k-t}\Big/\lambda^*$$

个不相交的设计.

最简单的t设计大集是施泰纳三元系大集,其存在问题已最后解决. 除不存在STS(7)的大集外,当$v \equiv 1,3(\mathrm{mod}\,6)$时STS($v$)的大集都存在. STS($v$)的大集记为LSTS($v$),共含$v-2$个不相交STS($v$). 凯莱(Cayley,A.)于1850年指出:只可能有两个不相交的STS(7),因而,不存在LSTS(7). 柯克曼(Kirkman,T. P.)于1850年指出:LSTS(15)存在. 在随后的100多年中,虽有多人研究而无大的进展. 泰尔林克(Teirlink,L.)于1973年证明:LSTS(v)的存在蕴含着LSTS($3v$)的存在性,从而,得到LSTS(3^m)的存在性. 随后,罗萨(Rosa,A.)于1975年证明:当LSTS(v)存在时,必存在LSTS($2v+1$). 此外,还知道一些v值较小时的LSTS(v). 中国的陆家羲于1983—1984年连续发表的6篇论文,使该问题接近了最后解决. 陆家羲为此引进了一类辅助设计,称为LD设计(参见"LD设计"). 后来,泰尔林克证明了LD设计的PBD闭的性质,从而对陆遗留的6个v值也证明了LSTS(v)的存在性. 对其他参数的t设计大集尚缺少一般结果,只对较小的v值有大集存在或不存在的参数表,但未知者甚多,其中参数最小的未知大集为2-(12,4,3)设计的大集. 很久以来就有人研究一种特殊的LSTS(v),即其中每一个STS(v)都是可分解的. 虽然LSTS(v)的存在性已彻底解决,但这一类大集问题的结果很少(参见"西尔维斯特问题").

LD 设计(LD design) 一类辅助设计. 在解决施泰纳三元系大集问题中由中国的陆家羲引入. 设X为n元集,$\mathscr{L}^1$与$\mathscr{L}^2$分别为X上的正交表OA$(n,4)$(参见"正交表"),对每个$x \in X$,$\mathscr{L}_x$是$X\backslash\{x\}$上的正交表OA$(n-1,3)$. 若存在$c \in X$,使对任一$x \in X$有$(x,x,x,c) \in \mathscr{L}^1 \cap \mathscr{L}^2$,且对任一$(u,v,w) \in X^3$,或存在$x \in X$使$(u,v,w) \in \mathscr{L}_x$,或存在$t \in X$及$j \in \{1,2\}$使$(u,v,w,t) \in \mathscr{L}^j$,则称$\{\mathscr{L}^1,\mathscr{L}^2\} \cup \{\mathscr{L}_x | x \in X\}$为LD设计,记为LD($n$). 这类设计对施泰纳三元系大集问题有重要作用,对别的组合设计的存在性问题也有用. LD(n)的存在性已基本解决,除十几个n值外LD(n)都是存在的.

西尔维斯特问题(Sylvester's problem) 一类组合构形. 即柯克曼三元系的大集问题. 在凯莱(Cayley,A.)于1850年发表的一篇论文中曾提到西尔维斯特(Sylvester,J. J.)的一个问题,即要求柯克曼15女生问题所述的一周散步连续安排13周,使得每周都满足柯克曼问题的要求,且在第13周结束时每三个女生恰有一次分在同一组. 这实际上要

求一个 LSTS(15)使其中每一个三元系都是柯克曼三元系. 西尔维斯特问题的一般提法是:找一个 LSTS(v),使每一个三元系都是柯克曼三元系,即求柯克曼三元系KTS(v)的大集,记为 LKTS(v). 目前只知道LKTS($3^n m$)的存在性,其中 $m\in\{1,5,11,17,25,35,43\}$而 n 为任意正整数.

循环t 设计(cyclic t-design) 一类特殊的 t 设计. 若在一个 t 设计($X,\mathscr{B}$)中,$X=\{0,1,\cdots,v-1\}$,且当$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}\in\mathscr{B}$ 时也有$\{a_1+1,a_2+1,\cdots,a_k+1\}\in\mathscr{B}$,这里的加法按模 v 进行,则称($X,\mathscr{B}$)为循环 t 设计. 循环 2-(v,k,λ)设计也记为 CB[$k,\lambda;v$]. 目前已完全弄清楚 CB[$3,\lambda;v$]存在的参数条件,但对别的循环 t 设计的存在性还缺少完整结果. 当 $v\equiv\lambda\equiv 2 \pmod 4$ 或 $(v,\lambda)=(9,1),(9,2)$时不存在 CB[$3,\lambda;v$];除此之外,只要 $\lambda(v-1)\equiv 0 \pmod 2$且 $\lambda v(v-1)\equiv \pmod 6$,就一定存在 CB[$3,\lambda;v$].

简单t 设计(simple t-design) 一种 t 设计. 指没有重复区组的 t 设计. 若将 v 元集的所有 k 元子集取作区组,则得到的平凡 t 设计有最大可能的 λ 值

$$\lambda_{\max}=\binom{v-t}{k-t}.$$

λ 值再增大就必然出现重复区组,当($X,\mathscr{B}$)是一个简单 t-(v,k,λ)设计时,

$$\left(X,\binom{X}{k}\Big\backslash\mathscr{B}\right)$$

是一个简单 t-($v,k,\lambda_{\max}-\lambda$)设计,而且将每个区组 B 的补集 $X\backslash B$ 取作区组可得又一个简单

$$t\text{-}\left(v,v-k,\lambda\binom{v-t}{t}\Big/\binom{k}{t}\right)$$

设计. 因此,实际上只需考虑 $\lambda\leqslant\lambda_{\max}/2$ 及 $k\leqslant v/2$ 的简单 t 设计. 当 $v\leqslant 30$ 时已有这样的参数表,但其中未知者甚多. 当 $t=2,k=3$ 时,简单 2-($v,3,\lambda$)设计的存在性已由德洪(Dehon,M.)于 1983 年解决.

不可约t 设计(indecomposable t-design) 一种特殊的 t 设计. 设($X,\mathscr{B}$)是一个 t-(v,k,λ)设计,若存在 $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{B}$,使($X,\mathscr{D}$)是一个 t-(v,k,μ)设计,其中 $1\leqslant\mu<\lambda$,则称原设计是可约 t 设计,否则称为不可约 t 设计. 关于不可约 t-(v,k,λ)设计的已有结果仅限于 $t=2,3\leqslant k\leqslant 5$ 及某些 λ.

可约t 设计(decomposable t-design) 见"不可约 t 设计".

道因-威尔森定理(Doyen-Wilson theorem)关于设计之间的关系的定理. 论述施泰纳三元系包含子施泰纳三元系的问题. 若($X,\mathscr{A}$)和($Y,\mathscr{B}$)为两个 BIBD 设计,且 $X\supset Y$,$\mathscr{A}\supset\mathscr{B}$,则称($Y,\mathscr{B}$)是($X,\mathscr{A}$)的子设计,或称($Y,\mathscr{B}$)可嵌入于($X,\mathscr{A}$). 道因-威尔森定理断言:存在($v$,3,1)-BIBD 含有($u$,3,1)-BIBD 作为子设计的充分必要条件是 $v\geqslant 2u+1$ 且 $v,u\equiv 1,3,\pmod 6$. 后来,斯特恩(Stern,G.)将这些结果推广到一般($v,3,\lambda$)-BIBD 的嵌入. 目前关于($v,4,\lambda$)-BIBD 的嵌入问题也已得到了完全的解决. 在另一些组合设计中也有类似的子设计存在问题. 例如,可分解 BIBD 设计、正交拉丁方、罗姆方等.

覆盖设计(covering design) t 设计的一种推广. 设 X 为 v 元集,$\mathscr{B}$ 为 X 的某些 k 元子集的族,若 X 的任一 t 元子集至少包含在 $\mathscr{B}$ 的 λ 个成员(区组)中,则称($X,\mathscr{B}$)为 t-(v,k,λ)覆盖设计. t-(v,k,λ)设计也是一个覆盖设计.

对给定的参数 t,v,k,λ,使 t-(v,k,λ)覆盖设计存在的最小区组数称为覆盖数,记为 $C_\lambda(v,k,t)$. 有关系式 $C_\lambda(v,k,t)\geqslant B_\lambda(v,k,t)$,其中

$$B_\lambda(v,k,t)=\left\lceil\frac{v}{k}\left\lceil\frac{v-1}{k-1}\left\lceil\cdots\left\lceil\frac{v-t+1}{k-t+1}\lambda\right\rceil\cdots\right\rceil\right\rceil\right\rceil,$$

这里$\lceil x\rceil$表示不小于 x 的最小整数. 哈拿匿(Hanani,H.)证明:对每一正整数 λ 及 $v\geqslant 3$ 有 $C_\lambda(v,3,2)=B_\lambda(v,3,2)+\varepsilon$,其中,当 $\lambda(v-1)\equiv 0 \pmod 2$且 $v\equiv\lambda\equiv 2 \pmod 3$时 $\varepsilon=1$,否则 $\varepsilon=0$. 米尔斯(Mills,W.H.)等人对每一正整数 λ 及 $v\geqslant 4$ 给出了覆盖数 $C_\lambda(v,4,2)$的确切值. 当 $t\geqslant 3$ 时,$C_1(v,4,3)=B_1(v,4,3)$,其中 $v\not\equiv 7 \pmod{12}$.

覆盖数(covering number) 见"覆盖设计".

填充设计(packing design) t 设计的一种推广. 设 X 为 v 元集,$\mathscr{B}$ 为 X 的某些 k 元子集的族,若 X 的任一 t 元子集至多包含在 $\mathscr{B}$ 的 λ 个成员(区组)中,则称($X,\mathscr{B}$)为 t-(v,k,λ)填充设计. t-(v,k,λ)设计也是一个填充设计. 对给定的参数 t,v,k,λ,使 t-(v,k,λ)填充设计存在的最大区组数称为填充数,记为 $D_\lambda(v,k,t)$. 有关系式 $D_\lambda(v,k,t)\leqslant J_\lambda(v,k,t)$,其中

$$J_\lambda(v,k,t)=\left\lfloor\frac{v}{k}\left\lfloor\frac{v-1}{k-1}\left\lfloor\cdots\left\lfloor\frac{v-t+1}{k-t+1}\lambda\right\rfloor\cdots\right\rfloor\right\rfloor\right\rfloor,$$

这里$\lfloor x\rfloor$表示不大于 x 的最大整数. 填充设计对编码理论有重要的应用. 事实上,填充数 $D_1(v,k,2)$就是字长 v,极小距离为 $2(k-1)$且码字重量均为 k 的二元码的最大码字个数. 当 $t=2$ 及 $k=3,4$ 时,填充数 $D_\lambda(v,k,t)$的确切值已经得到.

填充数(packing number) 见"填充设计".

***G* 设计**(G-design) 平衡不完全区组设计的一种推广. 设 G 是有 k 个顶点且无孤立点的简单无向图,λK_n 是 n 个顶点的 λ 重完全无向图,重边看做不同的边,若该完全图能分解成若干个无公共边的子图,每一个都与 G 同构,则称这样的分解为一个图

设计，记为$(n,k,\lambda)G$设计. 当$G=K_k$时，一个$(n,k,\lambda)G$设计就是一个(n,k,λ)-BIBD. 图设计可以看成BIBD设计的区组中引入点之间的某种邻接关系后的推广. 这些同构子图称为G区组. 当G为有向图时，将λK_n改为λ重完全有向图λK_n^*，可类似定义$(n,k,\lambda)G$设计. 当G为无向图且$(n,k,\lambda)G$设计存在时，$\lambda n(n-1)\equiv 0(\bmod 2e)$且$\lambda(n-1)\equiv 0(\bmod d)$，式中$e$是图$G$的边数而$d$是$G$的所有顶点度数的最大公因数. 当$G$为有向图且$(n,k,\lambda)G$设计存在时，$\lambda n(n-1)\equiv 0(\bmod e)$，$\lambda(n-1)\equiv 0(\bmod d^+)$且

$$\lambda(n-1)\equiv 0(\bmod d^-),$$

式中的e是图G中弧的条数，而d^+与d^-分别是所有顶点的出度数的最大公因数及入度数的最大公因数.

黑尔(Hell,P.)和罗萨(Rosa,A.)于1972年首先引入了图设计这一概念，并研究了$(n,k,\lambda)P_k$设计的存在性，这里P_k表示k个顶点$k-1$条边的路. 由于图G的变化千姿百态，G设计的存在性研究面广量大. 已有结果大多是关于路和圈这些简单而规则的图G的，只有当k较小时才考察所有可能的图G，而完整的结果仅限于$k=3,4$的情形. 图设计的直接构造方法是玻色(Bose,R.C.)的对称重差法的变形，而递推构造方法则主要利用多部完全图的分解. 与BIBD设计的情形类似，也有可分解性问题以及平衡图设计问题.

图设计(graph design)　见“G设计”.

G区组(G-block)　见“G设计”.

平衡G设计(balanced G-design)　一类特殊的G设计. 若在一个G设计中每个顶点在G区组中出现的次数都相同，则称该图设计是平衡G设计. 当G为正则无向图(即顶点的度数均相同的图)或强正则有向图(即每个顶点的出度数和入度数为同一个常数的图)时，G设计总是平衡的. 平衡G设计的参数除必须满足一般G设计的必要条件外，还必须满足进一步的条件：当G为无向图时，应有

$$\lambda k(n-1)\equiv 0(\bmod 2e);$$

当G为有向图时，应有

$$\lambda k(n-1)\equiv 0(\bmod e).$$

当G为k个顶点$k-1$条边的路或星形图时，平衡$(n,k,\lambda)G$设计存在的必要条件也是充分条件. 当$3\leqslant k\leqslant 5$且G为无向图时，平衡$(n,k,\lambda)G$设计的存在性也已得到完全解决.

带洞G设计(G-design with holes)　亦称带洞图设计. 用于递推构作G设计的一类辅助设计. 设$\lambda K_{n_1,n_2,\cdots,n_h}$是$\lambda$重$h$部无向完全图，顶点集$X$划分为互不相交的$X_1,X_2,\cdots,X_h$，使

$$|X_i|=n_i,\quad \sum_{i=1}^{h}n_i=n.$$

设G为k个顶点且无孤立点的无向简单图. 若该多部完全图能分解成若干个无公共边的子图，每一个都与G同构，则称这样的分解为一个带洞$(n,k,\lambda)G$设计，称$(n_1,n_2,\cdots,n_h)$为其型. 这样的G设计可以看做λK_n的通常G设计中带有一些洞$X_1,X_2,\cdots,X_h$，当$G=K_k$时这些洞实际上是可分组设计的组. 若每个顶点在G区组中出现的次数相同，则称这种带洞图设计是平衡的. 利用带洞图设计可以递推地构造图设计. 若存在型为$(n_1,n_2,\cdots,n_h)$的带洞$(n,k,\lambda)G$设计，且对每$i(1\leqslant i\leqslant h)$存在$(n_i+\varepsilon,k,\lambda)G$设计，其中$\varepsilon=0$或1，则存在$(n+\varepsilon,k,\lambda)G$设计. 特别地，若存在型为$(l,l,\cdots,l)$的平衡带洞$(hl,k,\lambda)G$设计，且存在平衡的$(l+\varepsilon,k,\lambda)G$设计，其中$\varepsilon=0$或1，则存在平衡的$(hl+\varepsilon,k,\lambda)G$设计. 对于有向图情形，也可类似定义带洞图设计概念，并且，有相应的递推构造图设计的方法.

带洞图设计(graph design with holes)　即“带洞G设计”.

完全门德尔森设计(perfect Mendelsohn design)　一种特殊类型的图设计. 以$\vec{C}_k$记k个顶点k条弧的有向圈，称$(n,k,\lambda)\vec{C}_k$设计为门德尔森设计，简记为(n,k,λ)-MD. 若对每一个$r(1\leqslant r\leqslant k-1)$以及对任意两个相异顶点$x$和$y$，某个$(n,k,\lambda)$-MD中恰有$\lambda$个$G$区组含$x$及$y$，使每一个这样的有向圈中从$x$到$y$的有向距离为$r$，则称该MD为完全门德尔森设计，记为$(n,k,\lambda)$-PMD. 若忽略掉$G$区组中顶点之间的邻接关系而将$G$区组看做顶点集的一个子集，则从一个$(n,k,\lambda)$-PMD可以得到一个$(n,k,\lambda(k-1))$-BIBD. 另一方面，从每一点开始按$G$区组的有向圈方向写下所有$k$个顶点作为正交表的一行，这样可得$\lambda n(n-1)$个行，再添上$\lambda$个形如$xx\cdots x$行，这里$x$取遍$n$个顶点，于是，可得一个正交表$OA(\lambda n^2,k,n,2)$. 特别地，当$(n,k,1)$-PMD存在时，也存在$OA(n,k)$，这等价于$k-2$个$n$阶相互正交拉丁方的存在性. 因此，$(6,5,1)$-PMD与$(6,6,1)$-PMD都不存在. 门德尔森(Mendelsohn,N.S.)证明：$(n,3,\lambda)$-PMD存在的充分必要条件是

$$\lambda n(n-1)\equiv 0(\bmod 3)\text{且}(n,\lambda)\neq(6,1).$$

他还首先研究了$(n,4,1)$-PMD，指出这样的设计等价于满足拟群恒等式$yx\cdot xy=x$的一个n阶幂等拟群. 目前，当$k=4,5$时，(n,k,λ)-PMD的存在性已基本解决.

门德尔森设计(Mendelsohn design)　见“完全门德尔森设计”.

可分解PMD(resolvable PMD)　一类图设计. 若一个图设计的G区组全体可以划分为一些G区组子集，使每个这样的子集含每个顶点恰一次，则称该图设计是可分解的. 当可分解的$(n,k,\lambda)G$设计存

在时,必有 $n\equiv 0(\bmod k)$. 对于 $n\equiv 1(\bmod k)$的$(n,k,\lambda)G$ 设计,若它的 G 区组全体可以划分为一些 G 区组子集,使对每个这样的子集存在一个顶点,除这顶点以外的每个顶点在该子集中恰出现一次,则称这样的图设计是准可分解的. 可分解的和准可分解的 PMD 统称可分解 PMD,记为 RPMD. 关于(n,k,λ)-RPMD 的存在性,目前比较完整的结果仅限于 $k=3$.

准可分解PMD (guasi-resolvable PMD) 见“可分解 PMD”.

施泰纳k 圈系统(Steiner k-cycle system) 一类特殊的图设计. 以 C_k 表示 k 个顶点 k 条边的圈无向图,若对任意 $r(1\leqslant r<k/2)$以及任意两个相异顶点,在某个$(n,k,1)C_k$ 设计中恰有一个圈含这两个顶点且使它们在该圈中的距离为 r,则称该图设计为施泰纳 k 圈系统,记为 SCS(n,k). 一个 SCS$(n,3)$即为通常的 STS(n),而一个 SCS$(n,4)$就是一般的$(n,4,1)C_4$ 设计.

当 k 为奇数时,若忽略掉 SCS(n,k)的 G 区组中顶点之间的邻接关系而将 G 区组看做顶点集的一个子集,则从一个 SCS(n,k)可以得到一个

$$(n,k,(k-1)/2)\text{-BIBD}.$$

由于(15,5,2)-BIBD 不存在,所以 SCS(15,5)也不存在. 除这一例外,SCS$(n,5)$存在的必要条件 $n\equiv 1,5(\bmod 10)$也是充分条件. 史汀生(Stinson,D. R.)与泰尔林克(Teirlink,L.)指出:当 k 为奇数时,SCS(n,k)可用于一类密码问题中的加密方案. 但当 $k>5$ 时,SCS(n,k)的已知结果甚少. 当 k 为奇数时,若存在一个 SCS(n,k),则将每个圈 C_k 按两个方向定向得两个 $\vec{C}_k$,所有这些有向圈构成一个$(n,k,1)$-PMD. 由此得 SCS(n,k)与正交拉丁方的关系(参见“完全门德尔森设计”).

门德尔森三元系(Mendelsohn triple system) 一类组合构形. 即$(n,3,1)\vec{C}_3$ 设计. 若 G 含三个顶点 x,y,z,且含三条弧(x,y),(y,z),(x,z),则称 G 为可迁三元组,而称$(n,3,1)G$ 设计为可迁三元系. 这两种三元系分别记为 MTS(n)及 TTS(n). 它们存在的必要条件为 $n\equiv 0,1(\bmod 3)$,除 MTS(6)不存在外,这个必要条件也是充分条件. 与 STS(n)的情形类似,对MTS(n)及 TTS(n)也讨论大集的问题. 若 $T(X)$是 n 元集 X 的全部可迁三元组的集,则

$$|T(X)|=n(n-1)(n-2).$$

一个 TTS(n)含 $n(n-1)/3$ 个可迁三元组. 若 $T(X)$可以划分为 $3(n-2)$个子集,使每个子集中的 $n(n-1)/3$ 个可迁三元组正好是一个 TTS(n)的全部可迁三元组,则称 $T(X)$的这个划分为TTS(n)的一个大集,记为 LTTS(n). 已经证明 LTTS(n)存在的充分必要条件为 $n\equiv 0,1\ (\bmod 3)$,$n\geqslant 3$,这由林德纳(Lindner,C. C.)等人于 1983 年开始研究,且由中国的康庆德等人最后完成. 关于MTS(n)的大集已有不少结果,但尚未最终解决.

嵌套(nesting) 由已知图设计构造新的图设计的一种方法. 以 C_k 表 k 个顶点 k 条边的无向圈,以 S_{k+1}表 $k+1$ 个顶点 k 条边的星形图. 若对一个$(n,k,1)C_k$ 设计存在一个映射 f,将每个圈 B 映为不在 B 中的某个顶点 $f(B)$,并且使所有的星形图 $K_{k+1}-B(K_{k+1})$的顶点集 $V(B)\cup\{f(B)\}$,它形成一个$(n,k+1,1)S_{k+1}$设计,则称映射 f 是一个嵌套. 当$(n,k,1)C_k$ 设计有嵌套映射时,称该设计是可嵌套的. 若用 W_{k+1}表示 $k+1$ 个顶点 $2k$ 条边的轮形无向图,则从一个可嵌套的$(n,k,1)C_k$ 设计可得到一个$(n,k+1,2)W_{k+1}$设计. 一个$(n,k,1)C_k$ 设计可嵌套的必要条件是 $n\equiv 1(\bmod 2k)$. 史汀生(Stinson,D. R.)于 1985 年证明:当 $k=3$ 时,这一必要条件也是充分条件. 史汀生等人还证明:对每个整数 $k\geqslant 3$,除了至多 13 个可能例外的 n 值,这个必要条件也是充分条件.

着色设计(coloured design) 一种特殊类型的图设计. 设对 K_k 用 c 种颜色 $C_1,C_2,\cdots,C_c$ 将边着色,着色 C_i 的边有 n_i 条,着色后的图记为 G. 以 g 记所有 n_i 的最大公因数,

$$\lambda=\binom{k}{2}\Big/g.$$

将 λK_n 中连结任意两个顶点的 λ 条边中的 n_i/g 条着色 C_i,所得的图记为 $\mathscr{C}\circ K_n$. 若 $\mathscr{C}\circ K_n$ 可以分解为若干子图,使每个子图都与 G 同构(连同着色),则称这样的分解是一个着色设计. 当 $c=1$ 时,一个着色$(n,k,1)G$ 设计就是一个$(n,k,1)$-BIBD. 当 $k=4$,$c=2$ 并使着色 C_1 的边形成长为 3 的圈,着色 C_2 的边形成一个星形图,则一个着色设计中长为 3 的圈形成一个STS(n),而第二种颜色的星形图形成该 STS(n)的一个嵌套(参见“嵌套”). 当 $k=4$,且$\{a,b,c,d\}$上 K_4 的边$\{a,b\}$,$\{c,d\}$着色 C_1,$\{a,c\}$,$\{b,d\}$着色 C_2,而$\{a,d\}$,$\{b,c\}$着色 C_3,利用相应的着色设计的 G 区组定义顶点集上的一个幂等拟群,使

$$a\circ b=c,b\circ a=d,c\circ d=a,d\circ c=b,$$

则该幂等拟群必满足拟群恒等式 $xy\circ yx=x$(参见“拟群”). 从着色设计还可得到别的类型的组合设计,因此,着色设计在一定程度上起着统一不同类型的设计的作用. 对 $k=4$ 及各种可能的着色情况,着色设计的存在性已基本解决.

部分平衡不完全区组设计(partially balanced incomplete block design) 平衡不完全区组设计的一种推广. 简记为 PBIBD. 它是基于结合方案的概念,最早由玻色(Bose,R. C.)及内尔(Nair,K. R.)于 1939 年提出. 若 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_v\}$为一 v 元集,且

$(S\times S)\backslash\{(s,s)\mid s\in S\}$可表为 m 个两两不相交的非空子集 $R_1,R_2,\cdots,R_m$ 的并，则称 R_i 为结合关系. 若诸关系 R_i 满足：

1. 每一关系 R_i 是对称的，即当$(x,y)\in R_i$ 时必有$(y,x)\in R_i$.

2. 对 S 中的每个元 x，与 x 有第 i 种结合关系的元 y 的个数，即$|\{y\in S\mid (x,y)\in R_i\}|$只依赖于 i，与 x 的具体选择无关，此数记为 n_i.

3. 设 x,y 有第 i 种结合关系，则与 x 有第 j 种结合关系且与 y 有第 k 种结合关系的元 z 的个数 p^i_{jk}只依赖于数 i,j,k，而与 x,y 的具体选择无关，

则称集 S 连同诸关系 R_i 为一个具有 m 个结合类(或关系)的结合方案. 诸数 $v,n_i,p^i_{jk}(1\leqslant i,j,k\leqslant m)$ 称为该结合方案的参数. 基集 S 的元称为处理.

设 v 元集 S 上有 m 个结合关系 $R_i(1\leqslant i\leqslant m)$的结合方案，且 S 上的一个区组设计有 b 个区组，若每个区组大小为 k，S 中任一元恰在 r 个区组中出现，并且任意两个有第 i 种结合关系的元恰同时出现在 λ_i 个区组之中，则称该区组设计是一个具有 m 个结合类的 PBIBD 设计. 诸数 $b,v,r,k,\lambda_i,n_i,p^i_{jk}(1\leqslant i,j,k\leqslant m)$称为 PBIBD 设计的参数. 当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m\equiv\lambda$ 时，PBIBD 设计就是一个(v,k,λ)-PBIBD. 在试验设计中，PBIBD 设计被用来安排试验的方案，其中有两个结合类且参数较小的 PBIBD 设计最为有用，它们的存在性及构造已有表可查. 结合方案与一类结合的交换代数有关，称为结合方案的玻色-梅斯纳代数. 最重要的一类结合方案与编码理论有关，称为汉明结合方案. 另一类结合方案与强正则图关系密切，称为度量方案. 此外还有三角形结合方案等其他类型的结合方案. 按结合方案的类型，具有两个结合类的 PBIBD 设计可分为可分组 PBIBD 设计、三角形设计、拉丁方型设计等. 利用有限域上向量空间以及利用多种有限几何(辛几何、酉几何、正交几何等)构造结合方案和相应 PBIBD 设计在中国有比较活跃的研究，它起源于班成的工作，而万哲先等人则做了较为系统的研究(参见“有限几何”).

结合方案(association scheme)　一集合的一类划分. 设 v 元集 S 上的结合方案有结合关系 $R_1,R_2,\cdots,R_m$(参见“部分平衡不完全区组设计”). 若定义矩阵 D_i 使得当 S 中第 s 及第 t 个元有第 i 种结合关系时 D_i 的第 s 行 t 列元为 1，否则为 0，则称 D_i 为结合矩阵. 每个结合矩阵必为对称矩阵，

$$I+\sum_{i=1}^{m}D_i=J,$$

这里 I 为单位阵，J 是元素全为 1 的矩阵. 记 $D_0=I$，还有

$$D_jD_k=\sum_{i=0}^{m}p^i_{jk}D_i=D_kD_j,$$

其中 $p^0_{jk}=n_j\delta_{jk}$，$p^i_{j0}=\delta_{ij}=p^i_{0j}$. $D_0,D_1,\cdots,D_m$ 是实数域上的 $m+1$ 个线性无关的 v 阶矩阵，它们张成 v 阶矩阵代数的 $m+1$ 维子代数，这个代数是结合且交换的，称为该结合方案的玻色-梅斯纳代数.

玻色-梅斯纳代数(Bose-Mesner algebra)　见“结合方案”和“部分平衡不完全区组设计”.

可分组设计(group divisible design)　一类设计. 指有两个结合类的 PBIBD 设计. 设基集 S 由互不相交的大小均为 n 的 h 个子集组成，每个子集称为一个组. 若两个点属于同一个组，则称为有第一种结合关系，否则，称为有第二种结合关系. 相应的 PBIBD 设计称为可分组 PBIBD 设计. 当 $\lambda_1=0$ 时，便得到通常的可分组设计 GDD$[\{k\},\lambda_2,\{n\};nh]$. 依参数情形，可以把可分组 PBIBD 设计分为三类：当 $r-\lambda_1=0$ 时，称为奇异的；当 $r-\lambda_1>0$ 且 $rk-v\lambda_2=0$ 时，称为半正规的；当 $r-\lambda_1>0$ 且 $rk-v\lambda_2>0$ 时，称为正规的.

三角形设计(triangular design)　一类 PBIBD 设计. 它有两个结合类. 设 $v=n(n-1)/2$，$S=\{x_1,x_2,\cdots,x_v\}$，将 S 中的 v 个元以某种次序放在一个 n 阶方阵的右上角，左下角则放相应元素使该方阵为对称方阵，对角线位置则空着. 当 S 中的两个元 x_i 与 x_j 出现在方阵中的同一行或同一列时，称它们有第一种结合关系；否则，称它们有第二种结合关系. 这样便得到 S 上有两个结合类的结合方案，称为三角形结合方案. 集 S 中相应的 PBIBD 设计称为三角形设计. 三角形结合方案的参数由 n 确定：当 $n\neq 8$ 时，三角形结合方案是在同构意义下由参数惟一确定的；当 $n=8$ 时，则不惟一.

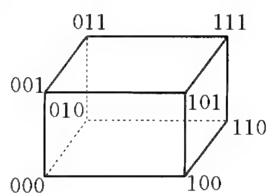
拉丁方型设计(Latin square type design)　一类具有两个结合类的 PBIBD 设计. 设有 $i-2$ 个相互正交的 n 阶拉丁方，以 S 记方阵中 n^2 个位置，若两个位置落在同一行或同一列，或者在某个拉丁方中这两个位置上的元素相同，则称它们有第一种结合关系；否则，称它们有第二种结合关系. 这样得到集 S 上有两个结合类的结合方案，称为拉丁方型结合方案. S 上相应的 PBIBD 设计称为拉丁方型设计，简称 L_i 型设计.

L_i 型设计(L_i type design)　见“拉丁方型设计”.

循环型设计(cyclic design)　一类具有两个结合类的 PBIBD 设计. 以 $\mathbb{Z}_v$ 记模 v 整数加群，元素为 $0,1,\cdots,v-1$. 设 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 是 $\mathbb{Z}_v$ 中两两相异的非零元，以 ΔD 记 $n(n-1)$个差 d_i-d_j 的全体$(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j)$，$D=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$. 如果 D 中每个元在 ΔD 中恰出现 α 次，而 $\mathbb{Z}_v\backslash(D\cup\{0\})$中每个元在 ΔD 中恰出现 β 次，并且如果对每个 $d_i\in D$ 均有

$-d_i\in D$，则可由集合 D 规定结合方案：当 Z_v 中两个元的差在 D 中时称为有第一种结合关系，否则有第二种结合关系. 这样的结合方案称为循环型结合方案，相应的 PBIBD 设计称为循环型 PBIBD 设计.

汉明结合方案(Hamming association scheme) 亦称超立方体结合方案. 一类度量方案. 设 $H(n,q)$ 是一个 q 元集合上的有 n 个分量的有序组的全体. 若两个有序组恰好在 i 个位置上的分量不同，则称它们的汉明距离为 i，将 $H(m,q)$ 取作处理的集合，两个有序组的汉明距离为 i 时称它们有第 i 种结合关系，便得到具 q^n 个处理及 n 个结合类的结合方案，称为汉明结合方案. 例如，当 $n=3$ 且 $q=2$ 时，汉明方案可用右面的立方体表示. 立方体的 8 个顶点表示方案的 8 个处理. 从顶点 x 到顶点 y 若至少需经过 i 条边，则表示处理 x 与处理 y 有第 i 种结合关系. 汉明结合方案中的一个子集称为一个码，因此汉明结合方案在编码理论中有重要的应用.



超立方体结合方案(hypercube association scheme) 即"汉明结合方案".

约翰生结合方案(Johnson association scheme) 亦称三角形结合方案. 一类度量方案. 设 $k\leqslant v/2$，以 $J(v,k)$ 记某个 v 元集的 k 元子集的全体. 若当两个 k 元子集的交为 $k-i$ 元子集时，规定它们有第 i 种结合关系，则 $J(v,k)$ 是有 $\binom{v}{k}$ 个处理及 k 个结合类的结合方案，称为约翰生结合方案. 当 $k=2$ 时，约翰生结合方案即为三角形设计中的结合方案. 约翰生结合方案在编码理论中也有重要应用，例如，每一个等重量码都可看做某个约翰生结合方案中的子集.

三角形结合方案(triangular association scheme) 即"约翰生结合方案".

度量方案(metric scheme) 一类结合方案. 它由距离正则图定义. 若 Γ 为直径 d 的距离正则图，规定两个顶点的距离为 i 时它们有第 i 种结合关系，则在 Γ 的顶点集合上有一个 d 个结合类的结合方案，称为度量方案. 许多最重要的结合方案都是度量方案. 例如，具两个结合类的结合方案一定是度量方案. 汉明结合方案与约翰生结合方案也都是度量方案. 但是，并非所有的结合方案都是度量方案.

距离正则图(distance-regular graph) 一类与结合方案有关的图. 设 Γ 是一个连通图，有 v 个顶点，无环边及重边. Γ 中两顶点间的距离是连结这两点的最短路所含的边数. Γ 中任意两个顶点之间距离的最大值称为 Γ 的直径. 若对 Γ 中距离为 k 的任意两个顶点 x,y，与 x 的距离为 i 且与 y 的距离为 j 的顶点 z 的个数是一个常数 C_{ijk}，与 x,y 的选择无关，则称 Γ 为距离正则图. 直径为 2 的距离正则图称为强正则图.

强正则图(strongly distance-regular graph) 见"距离正则图".

张图(Chang graphs) 一种重要的图组，由张里千于 1960 年发现，它是与三角形图 $T(8)$ 具有相同参数但互不同构的三个强正则图. 三角形设计中所出现的结合方案是一个约翰生结合方案 $J(n,2)$，因而是一个度量方案(参见"度量方案")，相应的距离正则图是强正则图，记为 $T(n)$，称为三角形图. 张里千于 1959 年、霍夫曼(Hoffman, A. J.)于 1960 年证明：若 Γ 为与三角形图 $T(n)$ 有相同参数的强正则图，则当 $n>8$ 时，Γ 与 $T(n)$ 同构. 当 $n=4,5,6,7$ 时，上述结论也成立. 张里千指出：当 $n=8$ 时，除 $T(8)$ 外，恰有三个与 $T(8)$ 有相同参数但不同构的强正则图，通常记为 $T'(8)$，$T''(8)$ 及 $T'''(8)$，它们被称为张图，名称由此而来.

三角形图(triangular graph) 见"张图".

码(code) 组合设计的一个重要概念. 它是为达到信息传递的可靠性和安全性等目的而对信息所做的某种变换. 在无线电通信中需要有克服天电干扰的措施，特别在宇航通信中更为突出，纠错码主要用于抗干扰的要求. 另一方面，在军事、外交及商业方面，要求信息传递过程中的保密性，这类码就是密码. 分组码是一类重要的纠错码. 设 Q 为 q 元集，$Q^n=Q\times Q\times\cdots\times Q$ 为笛卡儿积集合. Q^n 的一个非空真子集 C 称为一个 q 元分组码，简称码. 当 $|C|=1$ 时，称这个码是平凡的. 称 Q 为字母表，而称 Q^n 的元为字或向量，称 C 的元为码字，n 为字长. 当 $|C|=M$ 时，称 C 为 q 元 (n,M) 码. 伪随机码则用于密码. 在经典密码体制中加密密钥同时又是解密密钥，因而称为单钥体制. 在现代的公开密钥体制中则每个通信者拥有两个密钥，其中加密密钥是公开的，只需将解密密钥严格保密. 虽然人类在通信中采用种种明码和密码的历史相当久远，但编码理论可以认为是在电子技术飞速发展以后，针对当代数字通信和数字存储等的具体需要，于 20 世纪 50 年代发展成为一门面目全新的应用数学，目前已有丰富的内容. 随着近 20 年来组合设计理论的迅猛发展，码与设计、密码与设计之间的相互联系已经受到特别的关注. 以促进和发展这种相互联系为宗旨的一份新的国际性杂志《设计、码与密码》已于 1991 年问世.

分组码(block code) 见"码".

平凡码(trivial code) 见"码".

伪随机码(pseudo random code) 见"码".

汉明距离(Hamming distance) 为刻画纠错码的纠错能力所需要的一种度量. 设 $\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,$

x_n)，$\underline{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是两个字，以$d(\underline{x},\underline{y})$记相异分量的个数，即集合$\{i|1\leqslant i\leqslant n,x_i\neq y_i\}$的基数，称这个数为字$\underline{x}$与字$\underline{y}$的汉明距离，简称距离. 在一个非平凡码$C$中，任两个码字间距离的最小值称为码$C$的极小距离. 码$C$的极小距离是衡量它的检错能力和纠错能力的一个数. 例如，一个极小距离为$2e+1$的码用于数字通信时，即可检查出含于接收信息中的$2e$个差错又能纠正e个差错. 当$\underline{0}=(0,0,\cdots,0)\in C$时，称$d(\underline{x},\underline{0})$为码字$\underline{x}$的重量，记为$w(\underline{x})$. 码$C$中所有非零码字的重量中的最小者称为码$C$的极小重量.

极小距离(minimum distance)　见“汉明距离”.

极小重量(minimum weight)　见“汉明距离”.

辛格尔顿界(Singleton bound)　码字的一个度量. 它是当码字长度及极小距离给定时码字个数的一个上界. 通常称极小距离为d的q元(n,M)码为q元(n,M,d)码，使(n,M,d)码存在的最大M值记为$A(n,d)$. 辛格尔顿界指出：$A(n,d)\leqslant q^{n+1-d}$. 关于$A(n,d)$的研究是组合编码论中的一个基本问题. 关于$A(n,d)$的确切值目前所知甚少，大量的工作限于确定它的上、下界.

汉明界(Hamming bound)　亦称球填充界. 码字的一个度量. 它是码字个数的一个上界. 对Q^n中的字$\underline{x}$，以$B_r(\underline{x})$表示Q^n中与$\underline{x}$的距离不超过r的所有字的集合，称为以$\underline{x}$为中心r为半径的球. 球$B_r(\underline{x})$中所含字的个数与$\underline{x}$的取法无关，记为$V_q(n,r)$. 事实上

$$V_q(n,r)=\sum_{i=0}^{r}\binom{n}{i}(q-1)^i.$$

当$\underline{c}$取遍一个$(n,M,2e+1)$码的所有码字时，M个球$B_e(\underline{c})$两两不相交，因此，有$MV_q(n,e)\leqslant q^n$. 于是，当$d=2e+1$时，对M的最大值$A(n,d)$有汉明界：$A(n,d)\leqslant q^n/V_q(n,e)$. 例如，当$q=2,n=13,d=5$时，因$V_2(13,2)=1+13+78=92$，从而有

$$A(13,5)\leqslant\frac{2^{13}}{92}=89.$$

球填充界(sphere packing bound)　即“汉明界”.

支撑集(support)　码字的一个度量刻画. 它是讨论码与设计关系时常用到的一个概念. 设$0\in Q$，$\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是$Q^n$中的一个字. $\underline{x}$中非零分量所对应的下标的集合，即$\{i|1\leqslant i\leqslant n,x_i\neq 0\}$，称为$\underline{x}$的支撑集. 因此，字长$n$的码字的支撑集是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的一个子集，它的基数就是该码字的重量. 这样就有可能用码C中重量为w的码字来构造t-(n,w,λ)设计(参见“完全码”、“极值双偶自对偶码”和“阿斯莫斯-马特森定理”).

完全码(perfect code)　一类特殊的码. 设C是一个q元$(n,2e+1)$码，若每一个字恰与C中一个码字的距离$\leqslant e$，则称C为完全码. C是完全码时，以码字为中心e为半径的球无重叠地填满了集合Q^n，于是$|C|V_q(n,e)=q^n$. 从而完全码是达到汉明界的q元$(n,2e+1)$码. 当q为质数幂时非平凡的完全码只能为q元$(n=(q^m-1)/(q-1),q^{n-m},3)$码、二元$(23,2^{12},7)$码，及三元$(11,3^6,5)$码. 存在这些参数的完全码，分别称为汉明码、二元戈莱码，及三元戈莱码. 若C为二元$(n,2e+1)$完全码，且$\underline{0}=(0,0,\cdots,0)\in C$，则已知$C$在重量为$2e+1$的码字的支撑集的全体构成集$\{1,2,\cdots,n\}$上的一个施泰纳系$S(e+1,2e+1,n)$. 例如，由二元$(23,2^{12},7)$戈莱码可以得到一个施泰纳系$S(4,7,23)$.

汉明码(Hamming code)　见“完全码”.

戈莱码(Golay code)　见“完全码”.

极大距离可分码(maximum distance separable code)　亦称MDS码. 达到辛格尔顿界的码. 若$M=q^{n+1-d}$，则称q元(n,M,d)码为极大距离可分码. 当$n-d+1=2$时，q元(n,q^2,d)MDS码的存在性等价于$n-2$个q阶相互正交拉丁方的存在性. 当C为$[n,k,d]$线性码时(参见“线性码”)，C为MDS码的充分必要条件为$d=n-k+1$. MDS线性码有许多有趣的性质. 例如，MDS线性码的对偶码也是MDS码. 一个$[n,k,d]$线性码是MDS码的充分必要条件为生成矩阵中任意k列均线性无关. 此外，若在射影几何PG$(k-1,q)$中存在n个点的集合S使其中没有k个点位于同一个超平面内，则存在一个$[n,k,d]$MDS码.

MDS码(MDS code)　即“极大距离可分码”.

线性码(linear code)　一类重要的码. 为便于编码与译码，人们希望码C具有一定的代数结构. 取字母表Q为q元有限域$\mathscr{F}_q$，称n维向量空间$\mathscr{F}_q^n$中的子空间C为q元线性码. 若C的维数为k，则称为q元$[n,k]$线性码. 当C的极小距离为d时，亦称为q元$[n,k,d]$线性码. 由于$\mathscr{F}_2^n$的加法群的子群一定是子空间，所以有时也把二元线性码称为群码.

群码(group code)　见“线性码”.

循环码(cyclic code)　一类特殊的线性码. 设C为q元$[n,k]$线性码，若$(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$是C中的码字时它的循环移位$(a_{n-1},a_0,a_1,\cdots,a_{n-2})$也是$C$中的码字，则称$C$为循环码. 向量空间$\mathscr{F}_q^n$与剩余类环$\mathscr{F}_q[x]/(x^n-1)$之间存在一个向量空间的同构对应. 在这个同构对应下，q元$[n,k]$循环码C惟一确定了$\mathscr{F}_q[x]/(x^n-1)$中的一个理想，每一个码字$\underline{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$惟一地对应于一个多项式$a(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，而码字$(a_{n-1},a_0,\cdots,a_{n-2})$对应于多项式$xa(x)(\bmod x^n-1)$. 于是，$q$元$[n,k]$

循环码可看做 $\mathscr{F}_q[x]/(x^n-1)$ 中的一个理想. 设 $f(x)$ 为码字，E 是含 n 次本原单位根的 $\mathscr{F}_q$ 的扩域，若 $S=\{s\in E\mid f(s)=0\}$，称 S 为码字 $f(x)$ 的根集. 利用根集可以估计码字 $f(x)$ 的重量，从而提供了计算循环码的极小重量的途径. 归纳地定义 E 的某个子集族(这些子集称为 S 独立集)：

1. $\varnothing\in\mathscr{I}$.

2. 若 $A\subseteq S$，且 $A\in\mathscr{I}$ 而 $b\notin S$，则 $A\cup\{b\}\in\mathscr{I}$.

3. 若 $A\in\mathscr{I}$ 且 $C\in E\setminus\{0\}$，则 $CA\in\mathscr{I}$.

范・林特(van Lint, J. H.)及威尔森(Wilson, R. W.)于 1986 年指出：若 S 是码字 $f(x)$ 的根集，A 为 S 独立集，则 $f(x)$ 的重量不小于 $|A|$.

S 独立集(S-independent set)　见"循环码".

BCH 码(BCH code)　一类特殊的循环码. 设 E 为 $\mathscr{F}_q$ 上多项式 x^n-1 的分裂域，β 是 E 中的 n 次本原单位根. 若 q 元$[n,k]$循环码 C 的每一个码字在 E 中有根 $\beta^a,\beta^{a+1},\cdots,\beta^{a+\delta-2}$，则称 C 为 BCH 码，称 δ 为它的设计距离. 设计距离为 δ 的 BCH 码由首 1 多项式 $g(x)$ 的倍式组成，其中 $g(x)$ 是 $\beta^a,\beta^{a+1},\cdots,\beta^{a+\delta-2}$ 的极小多项式的最小公倍式，该码的极小距离 $d\geqslant\delta$. 这类码分别由玻色(Bose, R. C.)、雷・乔德里(Ray-Chaudhuri, D. K.)于 1960 年及霍昆格姆(Hocquenghem, A.)于 1959 年独立地发现，因此称为 BCH 码.

生成矩阵(generator matrix)　线性码的一种表示. q 元$[n,k]$线性码 C 的一个生成矩阵是有限域 $\mathscr{F}_q$ 上的一个 $k\times n$ 矩阵，其行向量构成子空间 C 的一组基. 设 C 与 C' 是两个 q 元线性码，G 与 G' 分别为生成矩阵，若存在置换 P 使 $G=G'P$，则称 C 与 C' 为等价码. 在等价意义下，每个 q 元$[n,k]$码有一个形为$[I_k\ A]$的生成矩阵，这里 I_k 是 k 阶单位矩阵，A 是一个 $k\times(n-k)$ 阵. 当$[n,k]$码 C 有生成矩阵$[I_k\ A]$时，其对偶码 $C^{\perp}$ 有生成矩阵$[-A^T\ I_{n-k}]$. 由于 $\mathscr{F}_q[x]/(x^n-1)$ 是主理想环，所以每个 q 元$[n,k]$循环码 C 由 C 中次数最低的首 1 多项式 $g(x)$ 的倍式组成，称 $g(x)$ 是该循环码的生成多项式. 由此可得循环码 C 的一个生成矩阵

$$G=\begin{bmatrix} g(x) \\ xg(x) \\ \vdots \\ x^{k-1}g(x) \end{bmatrix}.$$

线性码的生成矩阵是研究线性码的编码与译码的一个重要工具.

生成多项式(generator polynomial)　见"生成矩阵".

等价码(equivalent code)　见"生成矩阵".

对偶码(dual code)　研究线性码的一种工具. 是从一个码派生出的另一个码. 在 $\mathscr{F}_q^n$ 中定义两个向量 $\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $\underline{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的内积为 $\underline{x}\cdot\underline{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$. 当 $\underline{x}\cdot\underline{y}=0$ 时，称 $\underline{x}$ 与 $\underline{y}$ 正交. 与 $\mathscr{F}_q^n$ 中线性码 C 的每一个码字正交的向量 $\underline{y}$ 的集合，称为 C 的对偶码，记为 $C^{\perp}$. 当 C 为$[n,k]$线性码时，$C^{\perp}$ 为$[n,n-k]$线性码. 当 C 为循环码时，$C^{\perp}$ 也是循环码. 当 C 为 MDS 码时，$C^{\perp}$ 也是 MDS 码. 因此，对偶码这一概念有助于线性码性质的研究. 麦克威廉斯(MacWilliams, F. J.)揭示了线性码与它的对偶码的重量计数子之间的联系，从而有助于计算线性码的重量计数子.

重量计数子(weight enumerator)　对码的一种度量刻画. 它是码的重量分布的生成多项式. 设 q 元$[n,k]$线性码 C 中重量为 i 的码字有 A_i 个，$i=0,1,\cdots,n$，则称数列$(A_0,A_1,\cdots,A_n)$为码 C 的重量分布，而称多项式 $A(z)=A_0+A_1z+\cdots+A_nz^n$ 为码 C 的重量计数子. 当 C 的极小重量为 w 时，A_wz^w 就是 $A(z)$ 中除常数项外次数最低的项，因此从 C 的重量计数子可以得到它的极小重量. 对于线性码而言，极小重量与极小距离相等，因而对判别码的检错能力与纠错能力十分重要. 对此，麦克威廉斯定理提供了一个有效的方法.

麦克威廉斯定理(MacWilliams theorem)　关于编码理论中的一个重要结论. 它给出了线性码 C 与它的对偶码 $C^{\perp}$ 的重量计数子之间的相互联系. 该定理断言：若 $A(z)$ 是 q 元$[n,k]$线性码 C 的重量计数子，$B(z)$ 是对偶码 $C^{\perp}$ 的重量计数子，则

$$B(z)=q^{-k}[1+(q-1)z]^nA\left(\frac{1-z}{1+(q-1)z}\right).$$

这个定理由麦克威廉斯(MacWilliams, F. J.)于 1962 年得到. 范・林特(van Lint, J. H.)于 1971 年利用特征标理论给出了该定理的一个简洁证明. 若 $C^{\perp}$ 的重量计数子已知，则该定理给出了关于 $n+1$ 个未知数 $A_0,A_1,\cdots,A_n$ 的 $n+1$ 个方程的线性方程组，从而可解方程组求得线性码 C 的重量计数子.

双偶自对偶码(doubly-even self-dual code)　一类特殊的线性码. 若线性码 C 的对偶码 $C^{\perp}$ 与 C 相同，即 $C^{\perp}=C$，则称 C 为自对偶码. $[n,k]$线性码的生成矩阵 G 必定满足等式 $GG^T=0$，且 $k=n/2$. 若一个自对偶码 C 的每个码字的重量均为 4 的倍数，则称 C 为双偶自对偶码. 若存在 q 元$[n,n/2]$双偶自对偶码，则 q 只能为 2，n 必为 8 的倍数，并且其极小重量 d 必满足不等式

$$d\leqslant 4\left\lfloor\frac{n}{24}\right\rfloor+4.$$

例如，若以 I_4 表 4 阶单位阵，B 表示对角线元为 0 而其余元为 1 的 4 阶方阵，则以$[I_4B]$为生成矩阵的二元$[8,4]$线性码是一个双偶自对偶码，该码称为扩充的二元汉明码.

极值双偶自对偶码(extremal doubly-even self-dual code)　一类特殊的双偶自对偶码.字长 n 的双偶自对偶码的极小距离 d 满足不等式

$$d \leqslant 4\left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 4.$$

若某个双偶自偶码能使等号成立,即

$$d = 4\left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 4,$$

则称该码为极值双偶自对偶码.只可能存在有限多个极值双偶自对偶码,但它们的存在性尚未完全确定.这类码与设计有如下关系:当字长 n 的极值双偶自对偶码存在时,具有极小重量的码字的支撑集全体构成 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的 t 设计,其中 $t=5-2i$,而 $n\equiv 8i(\bmod 24)$ $(i=0,1,2)$.

阿斯莫斯-马特森定理(Assmus-Mattson theorem)　由线性码构造 t 设计的一个定理.该定理适用于极小重量比较大而其对偶码的重量分布中非零项较少的线性码.若 C 为 q 元 $[n,k,d]$ 线性码.若存在整数 $t(0<t<d)$,使得对偶码 $C^{\perp}$ 中至多有 $d-t$ 个非零重量 ω 适合 $1\leqslant\omega\leqslant n-t$,则 C 中重量 d 的码字的支撑集全体构成集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的一个 t 设计.当 $q=2$ 时,C 中任一重量 τ 的码字的支撑集全体构成 t 设计.下面以扩充戈莱码为例说明这一定理的应用.设 U 为一个 11 阶方阵,其 $(i,i+1)$ 位置为 1,其余的元素为 0.记

$$A=I+U+U^3+U^4+U^5+U^9,$$

其中 I 为单位阵.以 E 及 Φ 分别记元素全为 1 及全为 0 的行向量.若

$$G=\begin{bmatrix} E^T & I & \Phi^T & A \\ 0 & \Phi & 1 & E \end{bmatrix},$$

则以 G 为生成矩阵的二元 $[24,12]$ 线性码称为扩充戈莱码.这是一个双偶自对偶码,其重量计数子为

$$A(z)=1+759z^8+2576z^{12}+759z^{16}+z^{24}.$$

由阿斯莫斯-马特森定理得到:重量 8 的码字构成一个施泰纳系 $S(5,8,24)$;而重量 12 及 16 的码字分别构成 5-(24,12,48)设计及 5-(24,16,78)设计.

阿达马码(Hadamard code)　一种重要的码.它是从阿达马矩阵产生的二元码.设 H_n 是一个 n 阶阿达马矩阵,用 0 代替 H_n 与 $-H_n$ 中的元素 -1,这样可得 $2n$ 个行,它们都是 $\mathscr{F}_2^n$ 中的元.由于阿达马矩阵的任意两行在一半位置上的元素相异,这 $2n$ 个向量便构成了一个二元 $(n,2n,n/2)$ 码,称为阿达马码.字长为 32 的阿达马码曾被 1969 年美国发射的航海者号(Mariner)宇宙飞船实际采用,得到了人类从宇宙空间发回的第一张行星照片.从火星及水星等行星拍摄到的每一张黑白照片分成 600 行 600 列,共由 36 万个点组成.每个点(即一小方格)的明暗程度分为 64 个等级,由 6 维的二元向量来表示.经过编码后每个 6 维向量变为字长为 32 的阿达马码中的某个码字,然后发回地面.即使在宇宙空间中因各种干扰使字长为 32 的码字发生畸变,但只要发生差错的位置不超过 $[(n/2-1)/2]=7$ 个,地面上收到畸变的码字后仍能正确译出原来的 6 维二元向量.1977 年发射的旅行者号(Voyager)则采用别的码发回了彩色的照片.

设计的码(code of a design)　由区组设计得到的一类线性码.设 $(X,\mathscr{B})$ 为一区组设计,其中 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_v\}$,$\mathscr{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_b\}$.定义 $v\times b$ 矩阵 $D=(d_{ij})$,由 $x_i\in B_j$ 时,$d_{ij}=1$,否则 $d_{ij}=0$.由 D 的行向量张成的 $\mathscr{F}_q^b$ 中的子空间称为该设计的码.设计 $(X,\mathscr{B})$ 所具有的性质反映为它的码具有相应的性质,因而有可能通过研究码的性质来研究原设计.关于 10 阶射影平面的不存在性的证明以及 6 阶正交拉丁方不存在性的简洁证明是这种研究途径的成功例证.设 C 是某个 (r,λ) 设计在域 $\mathscr{F}_q$ 上的码,其中 $q=p^t$,p 为质数.当 $p\mid r-\lambda$ 时,若 $p\mid r$,则有 $C\subset C^{\perp}$;否则,若 $p\nmid r$,则有 $\dim(C\cap C^{\perp})=\dim C-1$.若 10 阶射影平面存在,则相应的对称设计(111,11,1)-SBIBDD 是一个 (r,λ) 设计.若取 $q=p=2$,则可推得 $\dim C=56$,$\dim C^{\perp}=55$ 且 $C^{\perp}\subset C$.若 $\underline{x}\in C$,则其重量 $\omega(\underline{x})\equiv 0,3(\bmod 4)$.由此,$C$ 的重量计数子

$$A(z)=\sum_{t=0}^{27}A_{4t}z^{4t}+\sum_{t=0}^{27}A_{4t+3}z^{4t+3},$$

且 $C^{\perp}$ 的重量计数子为

$$B(z)=\sum_{t=0}^{27}A_{4t}z^{4t}.$$

利用麦克威廉斯定理可得,C 的重量计数子由 A_{12},A_{15},A_{16} 完全确定.至 1985 年,已有 $A_{12}=A_{15}=A_{16}=0$,从而可得 $A_{19}=24675$.设 10 阶射影平面的关联矩阵的行相应于线而列相应于点.于是,一个重量为 19 的码字将对应于 19 个点组成的集合 V.平面上任一条线与 V 的交点个数只能为 1,3 或 5.在 111 条线中恰有 6 条线能与 V 有 5 个交点,称之为重线.V 与 6 条重线共有 66 种不同的关联结构,每一个结构是原关联矩阵的一个 6 行 19 列的子矩阵.兰姆(Lam,C. W. H.)等用理论方法证明了 21 种子矩阵不能扩充成 111 阶的关联矩阵,对其余 45 种情形利用计算机证明了同样的结论.从而得到,不存在 10 阶射影平面的结论.

移位寄存器序列(shift register sequence)　一类重要的码.它是数字通信中利用反馈移位寄存器产生的一种伪随机码.由初始状态 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 依反馈逻辑函数 $x_{n+1}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 产生的二元序列 $x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots$,称为移位寄存器序列,简称移存器序列.这里 f 是 $\mathscr{F}_2^n$ 到 $\mathscr{F}_2$ 的一个映射,它所产

生的状态转移图是二元域上德布莱英-古德图的一个部分图. 当 f 的多项式表示是 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性齐次式时，相应的移存器序列称为线性的，否则称为非线性的. 当状态转移图是两两不相交的圈的并时，相应的 f 及序列称为非奇的. 移存器序列中最简单的两种是由 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1$ 及 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1+x_1$ 所产生的，分别称为纯轮换移存器及补轮换移存器. 它们都是非奇的，其状态转移图中圈的总数分别是

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)2^{\frac{n}{d}} \text{及} \frac{1}{2n}\sum_{d|m}\varphi(d)2^{\frac{n}{d}},$$

其中 m 为 n 的最大奇因子. 这两种移存器在移存器序列理论中占重要地位. n 级线性移存器序列中周期最长（等于 2^n-1）的一种称为 m 序列，它共有 $\varphi(2^n-1)/n$ 个，恰与 $\mathscr{F}_2$ 上全部 n 次本原多项式一一对应. 由于它具有很好的伪随机性，已得到充分研究和广泛应用. n 级移存器中周期最长（等于 2^n）的一种称为 M 序列，它是非线性的，非奇的. 它共有

$$2^{2^{n-1}-n}$$

个，恰与 n 级德布莱英-古德图的全部欧拉游一一对应. 由于它具有巨大的数量和较好的伪随机性，已受到保密通信界的普遍重视. 移存器序列是一类有着广泛应用的伪随机码，不但在保密通信中起加密的作用，在连续波雷达中可用作测距信号，在遥控系统中可用作遥控信号，在多址通信中可用作地址信号，在数字通信中可用作群同步信号，此外还可用作噪声源等.

移存器序列（register sequence） 见“移位寄存器序列”.

密码（cryptography） 密码理论的基本概念. 它是数字通信中为保证信息的保密性及真实性而对信息所做的变换. 这里的信息表现为某个 q 元字母表集合上的序列，原始的信息称为明文，经加密变换后得到的序列称为密文. 若按照某种规则重新安排明文中元素的次序而得出密文，则这样的变换称为移位密码. 若字母表到自身有一个一一对应，将明文中每个元素用其对应的元素替代而得到密文，则这样的变换称为代换密码. 例如，设明文为

THESE ARE EXAMPLES，

将其写成 4 行 4 列的方阵，然后按一个 4 阶幻方

THES	16	3	2	13
EARE	5	10	11	8
EXAM	9	6	7	12
PLES	4	15	14	1

中元素顺序来改变明文中字母的次序，得到的密文为 SEHPEXAEEARMSELT，这是一个移位密码. 若将 $A,B,\cdots,Z$ 依次恒同于循环群 $\mathbf{Z}_{26}$ 中的元 $0,1,\cdots,25$，将代换密码中的对应取作

$$f: \mathbf{Z}_{26}\to\mathbf{Z}_{26},\quad a\to a+3,$$

则相应的密码称为凯撒密码. 以下是加密过程：

明文	*T*	*H*	*E*	*S*	*E*	*A*	*R*	*E*	*E*	*X*	*A*	*M*	*P*	*L*	*E*	*S*
a	19	7	4	18	4	0	17	4	4	23	0	12	15	11	4	18
$a+3$	22	10	7	21	7	3	20	7	7	0	3	15	18	14	7	21
密文	*W*	*K*	*H*	*V*	*H*	*D*	*U*	*H*	*H*	*A*	*D*	*P*	*S*	*O*	*H*	*V*

在这两个例中，4 阶幻方及数 3 起着重要作用，称为密钥. 而移位密码及代换密码这种加密方式称为密码体制. 在密码通信中密码体制与密钥是两个基本要素.

凯撒密码是很容易破译的，稍稍的改进则有维吉利亚密码. 例如，以 BED 为密钥时对明文中第 1，4，7，…个字母做变换 $a\to a+1$，第 2，5，8，…，个字母做变换 $a\to a+4$，第 3，6，9，…个字母做变换 $a\to a+3$. 但因密钥长度只为 3，仍然是容易破译的. 若将密钥长度增加，则安全性也随之增大. 若密钥长度足够长并且其中字母有随机性，则这样的密码是难以破译的，称为一次一密. 在实践中，明文长度有一个限度设为 N，取密钥长度也为 N. 以 $\underline{m}=m_1m_2\cdots m_N$ 表明文，$\underline{k}=k_1k_2\cdots k_N$ 表密钥，这里 $m_i,k_i\in\mathbf{Z}_{26}$，则密文为 $\underline{c}=c_1c_2\cdots c_N$，其中 $c_i=m_i+k_i$. 这种密码曾用于华盛顿与莫斯科之间的热线联系. 它虽然安全，但密钥的管理比较麻烦. 通信双方必须持有相同的密钥本，一个密钥只用一次，因此密钥的消耗量较大. 一个变通的办法是双方用电子式的密码机产生随机数序列，用作密钥，这里的随机数序列实际是按一定规律生成而具有随机特征的序列，称为伪随机序列. 但用来产生伪随机序列的密钥仍需双方约定且严格保密，这种密码体制称为伪随机码.

以上这些经典的密码体制的共同特点是一方的加密密钥与另一方的解密密钥是同一个密钥，因而统称为单钥体制. 其主要缺点是密钥管理和分配上的困难. 针对这一缺点，1976 年，迪费（Diffie，W.）与海尔曼（Hellman，M. E.）提出了公开密钥的密码体制，称为公钥体制. 在这种体制中，参加通信的每一方有一个加密密钥 E 及一个解密密钥 D. 满足以下条件：

1. $D(E(M))=M=E(D(M))$.
2. E 和 D 应是易于计算的.
3. E 可以公开而 D 必须由通信者自己严格保密.

如果通信者 A 要将明文 P 发送给通信者 B，A 先查得 E_B，计算出密文 $C=E_B(P)$，并发送给 B，B 再解密得明文 $P=D_B(C)=D_B(E_B(P))$. 第三者即使得到了 C 和 E_B，因 D_B 由 B 自己严格保密，仍不

能发现明文 P. 这一体制还可发送签了名的信息，因而对银行界用计算机系统转移款项特别有用. 公钥体制已有下列两项：利用质数性质的 RSA 体制；利用超递增序列的背包体制. 这些体制的安全性的讨论是很复杂而又至关重要的问题，目前还在进一步研究之中. 另外，利用组合设计来构造加密方案以及讨论密码的理论安全性近年来也受到了重视.

明文(plaintext)　见“密码”.

密文(eiphext)　见“密码”.

移位密码(shift cryptography)　见“密码”.

代换密码(transformation cryptography)　见“密码”.

密钥(key)　见“密码”.

密码体制(cryptosystem)　见“密码”.

凯撒密码(Caesar cryptography)　见“密码”.

维吉利亚密码(Vigenère cryptography)　见“密码”.

伪随机码(pseudo random code)　见“密码”.

单钥体制(simple key cryptosystem)　见“密码”.

公钥体制(public key cryptosystem)　见“密码”.

撰稿　朱　烈　康庆德
审阅　刘璋温　常彦勋

组 合 序

二元关系(binary relation)　一个基本的数学概念. 指集合 X 中元素与元素之间的特定联系，记为 R. 关系 R 可视作笛卡儿积集 $X\times X$ 的子集. 当 X 的元素 x,y 具有关系 R 时，记为 xRy 或 $(x,y)\in R$；否则，记为 $x\overline{R}y$ 或 $(x,y)\notin R$. 二元关系里，往往涉及元素 x,y 的次序，因此，当有 xRy 时，不一定有 yRx. 数集上的相等关系、不大于关系、严格小于关系、自然数之间的整除关系、集合之间的包容关系、划分之间的精细关系等均为二元关系. 若对于 X 的任意元素 x，均有 xRx，则称 R 为自反的；否则，R 称为非自反的. 若对于 X 的任意元素，当有 xRy 时，必有 yRx，则称 R 为对称的；否则，称 R 为非对称的. 若由 xRy 和 yRx，能推出 x,y 为同一元素，则称 R 为反对称的. 若对于 X 的任意元素 x,y 和 z，当有 xRy 及 yRz 时，必有 xRz，则称 R 为可传递的.

欧几里得公理断言：若两个量均等于第三个量，则这两个量相等. 因此，传递关系是它的推广. 若对于 X 的任意元素 x,y，当有 xRy 时，就有元素 z 使得有 xRz 或者有 zRy，则称 R 为负传递的. 例如，X 为圆周上有限多个点的集，R 为两点间的相邻关系. 若对于 X 的任意元素 x,y，均有 xRy 或者有 yRx，则称 R 为完备的. 集合 X 连同其上的二元关系 R 构成的二元组 (X,R)，称为关系集. 若在 X 的子集 S 上仍保留关系 R，则 (S,R) 为 (X,R) 的子关系集.

关系集(relative set)　见“二元关系”.

子关系集(sub-relative set)　见“二元关系”.

自反的二元关系(reflective binary relation)　见“二元关系”.

非自反的二元关系(irreflective binary relation)　见“二元关系”.

对称的二元关系(symmetric binary relation)　见“二元关系”.

反对称的二元关系(anti-symmetric binary relation)　见“二元关系”.

可传递的二元关系(transitive binary relation)　见“二元关系”.

负传递的二元关系(negatively transitive binary relation)　见“二元关系”.

完备的二元关系(complete binary relation)　见“二元关系”.

等价关系(equivalence relation)　一种最重要的二元关系. 它是集合 X 上具有自反性、对称性和传递性的二元关系. 例如数的相等关系 R_1、数的不小于或不大于关系 R_2、自然数的同余关系 R_3、平面三角形的相似关系 R_4、图的顶点的连通关系 R_5 等均为等价关系. 集合 X 上的等价关系 R 把 X 划分为若干类 $X_1,X_2,\cdots,X_k$：X 的元素 x,y 属于同一类，当且仅当 x 和 y 有关系 R，即有 xRy. 称 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 为等价关系 R 产生的等价类. 例如：R_1 产生的等价类即为数集 X 的元素；对于 R_2，等价类为数集 X 本身，即只一个等价类；R_3 产生的等价类为同余类. 集合 X 上的等价关系 R 产生的等价类 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 构成 X 的一个划分：

1. $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 的并集 $\bigcup_{i=1}^{k}X_i=X$.

2. 对于任意的不相同的 i,j，$X_i\cap X_j=\varnothing$.

反之，集合 X 的一个划分，亦决定了 X 上的一个等价关系. 在划分之间引入精细关系，导致以划分为基础的一类特殊序集.

等价类(equivalence class)　见“等价关系”.

划分(partition)　见“等价关系”.

包容关系(inclusion)　集合之间元素的从属关系. 称集合 B 包容 A，记为 $A\subseteq B$，当且仅当 A 的元素必为 B 的元素. 包容关系构成组合理论的基本序关系. 因为它本身可以构造出典型的组合形态如布尔代数 $\mathscr{B}(2^E,\subseteq)$. 同时借助于它可以刻画更为复杂的关系. 设 f 和 g 均为从集合 N 到集合 M 的映射，若只关心 N 中有多少元素，而不理会是哪些元

素映入到它们的像域时，则其像域 $g^{-1}(b)$ 可表示为

$$\operatorname{im}(f)=\{b^{|f^{-1}(b)|}\mid b\in M\},$$

$$\operatorname{im}(g)=\{b^{|g^{-1}(b)|}\mid b\in M\}.$$

这样在映射 f,g 之间建立包容关系：$f\subseteq g$ 当且仅当对 M 的所有元素 b 均有 $|f^{-1}(b)|\leqslant|g^{-1}(b)|$.

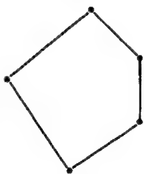
精细关系(refinement)　一种基本序关系.它是划分之间的一种序关系.称集合 N 的划分 π 精细于划分 σ，当且仅当对于 N 的任意元素 a,b，若 a 和 b 同属于 π 的一个划分块，则它们亦必属于 σ 的同一划分块.精细关系是自反的、传递的，但一般不是反对称的.

复合关系(composition of binary relations)　一种重要的二元关系.它是由集合 X 上两个二元关系 R 和 S 构造出的二元关系，记为 RS.对于 X 的任意元素 x,y 有关系 RS，即 $xRSy$，当且仅当集合 X 中有元素 z，使得 x 和 z 有关系 R，即 xRz，且 z 和 y 有关系 S，即 zSy.例如 X 为自然数集，xRy 为 $x<y$，xSy 为 $x\mid y$，即 x 能整除 y，当 $x=2,y=4$ 时，有 $xRSy$.

拟序(quasi-order)　一种特殊的二元关系.它是集合上具有自反性及可传递性的二元关系.如 a 为一固定复数，对于任意复数 x,y，有 xR_1y 当且仅当 $|x-a|\geqslant|y-a|$.又如对于有向图 G 的任意两个节点 u,v，有 uR_2v 当且仅当 $u=v$ 或者从 u 出发有一条有向路能够连结 u 与 v.集合 X 连同拟序 R 组成的二元组 (X,R) 称为拟序集.

拟序集(quasi-order set)　见“拟序”.

偏序集(partially set, poset)　特定的集.它是一类主要的序关系集.具体地说，集合 E 连同其上的偏序 R 构成的关系集 (E,R)，一般记为 $P=(E,\leqslant)$.所谓偏序(或序关系)是一类具有自反性、反对称性和传递性的二元关系.例如，数之间的不大于关系，自然数之间的整除关系，集合之间的包容关系等.把集合 E 的基数称为偏序集 P 的阶.阶为有限值的偏序集称为有限偏序集.而在 P 上，对于任意元素 x,y，区间 $[x,y]$ 均为有限偏序集时，称 P 为局部有限偏序集.这两类偏序集是组合理论中的主要研究对象.偏序集上所有链的长度的最小上界，或上确界，称为偏序集的长度，记为 $l(P)$.偏序集中最大反链包含的元素数目，称为偏序集的宽度，记 $w(p)$.对于以右图为哈塞图的偏序集 P，有 $l(P)=3$，$w(P)=2$.偏序集的子关系集仍为偏序集，而且必有全序集作为其子关系集.



偏序(partial order)　见“偏序集”.

序关系(order)　见“偏序集”.

偏序集的阶(order of poset)　见“偏序集”.

有限偏序集(finite poset)　见“偏序集”.

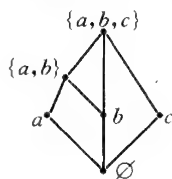
局部有限偏序集(locally finite poset)　见“偏序集”.

偏序集的长度(length of poset)　见“偏序集”.

偏序集的宽度(width of poset)　见“偏序集”.

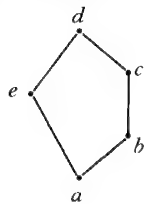
覆盖(cover)　偏序集中元素之间的直接序关系.具体地，对于偏序集中的元素 x,y，y 覆盖 x，当且仅当 $x\leqslant y$，且不存在其他元素 z 使得 $x\leqslant z$ 及 $z\leqslant y$.覆盖亦可等价地叙述为：区间 $[x,y]$ 仅含元素 x 和 y.对于有限偏序集 $P=(E,\leqslant)$，其全部序关系可由覆盖关系确定.

哈塞图(Hasse diagram)　一类特殊的图.它是与偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 一一对应的图.图的顶点对应于 E 的元素，且仅当 y 覆盖 x(即 $x\leqslant y$ 但不存在 $z\neq x,y$ 使得 $x\leqslant z$ 和 $z\leqslant y$)时，顶点 x 位于顶点 y 的下方，并用一条直线连结 x,y.例如，若 $E=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$，$\leqslant$ 为包含关系，则有如右的哈塞图.它为偏序集提供了直观表象.



偏序集的链(chain of poset)　一类组合构形.具体地说，链是偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 上满足如下条件的 E 的子集 C：C 中任意两个元素 x,y 均有序关系，换言之，有 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$.对偶地，若 E 的子集 A 中的任意两个元素 x,y 均无序关系，换言之，A 中的元素均互不可比，此时称 A 为偏序集 P 的反链.

设有 P 的链 C，若没有 C 以外的元素 x，使得把 x 添加入 C 之后仍为 P 的链，则称 C 为 P 的极大链.例如，右图所示的 P 中，$C_1=\{a,b,c,d\}$，$C_2=\{a,e,d\}$ 均为 P 的极大链，但 $C_3=\{a,b,c\}$ 不是极大链.当链 C 由 n 个元素构成时，$C=\{e_0,e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}\}$，称其链长 $l(c)=n-1$.



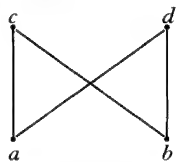
偏序集的极大链(maximal chain of poset)　见“偏序集的链”.

偏序集的反链(antichain of a poset)　见“偏序集的链”.

偏序集的区间(interval of poset)　一类组合构形.偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 上，元素 x,y 决定的集合 $\{z\in E\mid x\leqslant z$ 且 $z\leqslant y\}$ 称为一个区间，并记为 $[x,y]$.当 x,y 有序关系时，$[x,y]$ 非空，而当 x,y 无序关系时，$[x,y]$ 为空集.当 y 覆盖 x 时，$[x,y]=\{x,y\}$.

偏序集的极大元(maximal element of a poset)　偏序集上的一种特殊元素.偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 的子集 S 中的元素 a，若在 S 中不存在其他元素 x，使得 $a\leqslant x$，则称 a 为 S 上的极大元.对称地，若在 S 中不

存在其他元素 x，使得 $x\leqslant a$，称 a 为 S 上的极小元. 若取 $S=E$，则分别称 a 为偏序集 P 的极大元，a 为偏序集 P 的极小元. 当 P 为有限偏序集时，其极大元和极小元总是存在的. 若对于 P 的所有元素 x，均有 $x\leqslant a$，则称 a 为 P 的最大元. 对称地，若对于 P 的所有元素 x，均有 $a\leqslant x$，则称 a 为 P 的最小元. 一般分别以 1 和 0 记 P 的最大元和最小元. 偏序集并不总有最大元和最小元. 若它是有限全序集，则它总有最大元和最小元. P 的最大(小)元必为 P 的极大(小)元，但反之不然. 上图所示的偏序集，c,d 为 P 的极大元，但不是最大元. a,b 为 P 的极小元，但不是最小元.

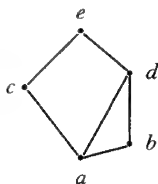


偏序集的极小元(minimal element of a poset) 见“偏序集的极大元”.

偏序集的最大元(greatest element of poset) 见“偏序集的极大元”.

偏序集的最小元(least element of poset) 见“偏序集的极大元”.

偏序集的元素高度(height of an element on poset) 一类组合不变量. 指刻画元素 x 在一个具有最小元的有限偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 里相对位置的整数值，记为$h(x)$. 从最小元到 x 之间所有链的链长的最小上界称为元素 x 的高度. 设 P 如下图所示，a 为最小元，e 为最大元，有 $h(a)=0,h(b)=1,h(c)=1,h(d)=2,h(e)=3$. 当 P 有最大元时，则称最大元的高度 $h(1)$为 P 的高度，记为 $h(P)$. 偏序集 P 中，高度为 1 的元素称为 P 的基元或基点. 在几何格中，基元的作用类似于向量空间里的基向量.



基元(atom point) 见“偏序集的元素高度”.

基点(atom point) 见“偏序集的元素高度”.

偏序集的秩(rank of poset) 一类组合不变量. 它是偏序集上满足下述条件的非负整值函数 r：

1. P 有最小元 0，且 $r(0)=0$.

2. 若 y 覆盖 x，则 $r(y)=r(x)+1$.

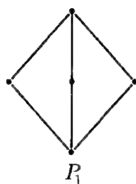
可定义秩的偏序集称为有秩偏序集. 在刻画偏序集的结构性质时，秩的作用是本质的. 例如有秩偏序集必为有最小元的分层偏序集.

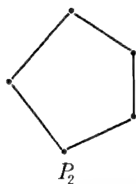
有秩偏序集(ranked poset) 见“偏序集的秩”.

分层偏序集(graded poset) 一种组合构形. 若偏序集 $P=(X,\leqslant)$上有定义在 X 上的整值函数 g，它满足：

1. 对于 X 的元素 $x\neq y$，若 $x\leqslant y$，则$g(x)<g(y)$；

2. 若 y 覆盖 x，则 $g(y)=g(x)+1$；

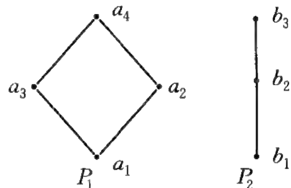




则称 P 可由 g 分层，或称 P 为分层偏序集. 分层偏序集具有良好的结构特性，其中一个重要的不变量为若尔当-戴德金链条件：若 P 上两元素之间有极大链存在，则这些极大链具有相同长度. 特别地，偏序集 P 的极大链的长度均相同. 如上图所示，P_1 为分层偏序集，但 P_2 不是.

若尔当-戴德金链条件(Jordan-Dedekind condition on chains) 见“分层偏序集”.

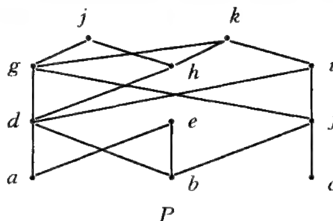
保序映射(order-preserving mapping) 一类带特殊性质的映射. 从偏序集 $P_1=(E_1,R_1)$ 到偏序集 $P_2=(E_2,R_2)$的映射 θ，若满足如下条件：对于 E_1 的任意元素 x,y，由 xR_1y 得出$\theta(x)R_2\theta(y)$，则称 θ 是一个保序映射. 设 P_1,P_2 如图所示，若$\theta(a_1)=b_1,\theta(a_2)=\theta(a_3)=b_2,\theta(a_4)=b_3$，则 θ 为保序映射.



偏序集的同构映射(isomorphism of posets) 一类特殊的保序映射. 它确定二偏序集间的同构. 若有从偏序集 $P_1=(E_1,R_1)$到偏序集 $P_2=(E_2,R_2)$的双射 θ，满足条件：θ 为保序映射；对于 E_1 任意元素 x,y，由 $\theta(x)R_2\theta(y)$得到 xR_1y，则称 θ 是从 P_1 到 P_2 的同构映射. 此时，称 P_1 和 P_2 为同构偏序集，记为 $P_1\cong P_2$.

同构偏序集(isomorphic poset) 见“偏序集的同构映射”.

狄尔沃斯定理(Dilworth's theorem) 关于偏序集的极大极小的定理. 该定理断言：对于任意有限偏序集，其最大反链中元素的数目必等于最小链划分中链的数目. 对于如右图所示的偏序集 P，$A=\{e,g,h,i\}$为一最大反链. $Q=\{c_1,c_2,c_3,c_4\}$为最小链划分. 其中，$c_1=\{a,d,g,j\},c_2=\{b,e\},c_3=\{h,k\},c_4=\{c,f,i\}$. 有 $|A|=|Q|=4$. 此定理的对偶形式亦真，它断言：对于任意有限偏序集，其最长链中元素的数目必等于其最小反链划分中反链的数目. 由偏序集 P 按如下方式产生的图 G 称为偏序集的可比图：G 的节点集由 P



的元素组成，而 e 为 G 中的边，仅当 e 的两端点在 P 中是可比较的. 有限全序集的可比图为完全图.

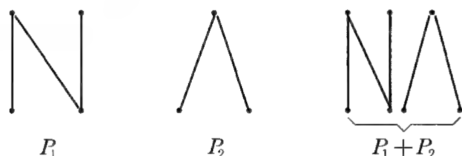
局部有限偏序集上的默比乌斯反演公式（Möbius inversion formula on a locally finite poset） 一类函数反演公式. 设 P 为局部有限偏序集，$f(x)$，$g(x)$为定义在 P 上的实值函数，在 P 中存在一个元 a，使得当 $x<a$ 时 $f(x)=0$，则对每个 $x\in P$，反演公式

$$f(x)=\sum_{y\leqslant x}g(y) \text{ 与 } g(x)=\sum_{y\leqslant x}f(y)\mu(y,x)$$

是等价的.

偏序集的运算（operations on posets） 由已知偏序集按一定规则导出新偏序集的过程. 偏序集的运算有以下几种：

1. 由两个偏序集 $P_1=(X,R)$ 和 $P_2=(Y,S)$ 导出的新偏序集 $P=(X\cup Y,R\cup S)$，称为 P_1，P_2 的基



P_1 P_2 P_1+P_2

和或直和，记为 P_1+P_2，其中 $X\cup Y$ 为 X，Y 的并集，对于 $X\cup Y$ 的任意元素 x，y，有 $x(R\cup S)y$，当且仅当有 xRy 或有 xSy. 如上图给出基和的图像. 关于基和，有性质：$A+B\cong B+A$；$A+(B+C)\cong(A+B)+C$；若 $A+B\cong A+C$ 则 $B\cong C$ 等.

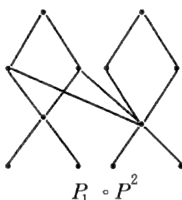
2. 由 P_1，P_2 导出新偏序集 $P=(X\times Y,R\cap S)$，称为 P_1，P_2 的直积，或基积，记为 $P_1\cdot P_2$. 其中，$X\times Y$ 为 X，Y 的笛卡儿积集. 对于其中任意元素(x,y)和(x',y')有$(x,y)(R\cap S)(x',y')$当且仅当有 xRx' 和 ySy'. $P_1\cdot P_2$ 如上图所示. 关于直积，有性质：

$P_1\cdot P_2$

$$A\cdot B\cong B\cdot A;$$
$$A\cdot(B\cdot C)\cong(A\cdot B)\cdot C;$$
$$A\cdot(B+C)\cong A\cdot B+A\cdot C;$$
$$(B+C)\cdot A\cong B\cdot A+C\cdot A.$$

3. 由 P_1，P_2 导出的新偏序集 $P=(X\times Y,T)$，称为 P_1，P_2 的字典序积，记为 $P_1\circ P_2$. 其中，$(x,y)T(x',y')$当且仅当或者 $x\neq x'$ 且有 xRx'，或者 $x=x'$ 且有 ySy'. $P_1\circ P_2$ 如下图所示.

4. 由 P_1，P_2 产生的新偏序集 $P=(Z,V)$，称为关于 P_1，P_2 的基幂，记为 $P_1^{P_2}$. 其中 Z 的元素为从集 Y 到集 X 的映射 f，且满足条件：若有 ySy'，则有 $f(y)Rf(y')$；而对于 Z 中的任意映射 f，g，有 fVg，当且仅当对 Y 的所有元素 y，

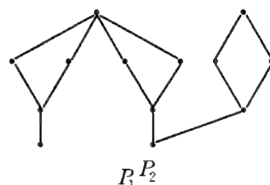


$P_1\circ P^2$

均有 $f(y)Rg(y)$. $P_1^{P_2}$，如下图所示. 关于基幂，有性质：

$$A^{B+C}\cong A^B\cdot A^C,$$
$$(A^B)^C\cong A^{B\cdot C},$$
$$(A\cdot B)^C\cong A^C\cdot B^C.$$

5. 由偏序集 $P=(X,R)$ 导出的新偏序集 $P=(X,R^*)$，称为 P 的对偶或 P 的逆，对于 X 的任意元素 x，y，有 xR^*y，当且仅当有 yRx. 关于对偶，有性质：



$P_1^{P_2}$

$$(A+B)^*\cong A^*+B^*,$$
$$(A\cdot B)^*\cong A^*\cdot B^*,$$
$$(A^B)^*\cong(A^*)^{B^*},$$
$$(A^*)^*\cong A.$$

偏序集的基和（cardinal sum of posets） 见"偏序集的运算".

偏序集的直积（direct product of posets） 见"偏序集的运算".

偏序集的基积（cardinal product of posets） 见"偏序集的运算".

偏序集的字典序积（lexicographic product of posets） 见"偏序集的运算".

偏序集的基幂（cardinal power of posets） 见"偏序集的运算".

偏序集的对偶（dual of poset） 见"偏序集的运算".

偏序集的逆（converse of poset） 见"偏序集的运算".

偏序集的闭算子（closure operator on poset） 偏序集的一种变换. 它是关于偏序集 $P=(E,\leqslant)$，满足如下条件的从集族 2^E 到其自身的映射 σ：

1. 对于 E 的任意子集 S 及任意元素 e，若 S 包含 e，则 $\sigma(S)$包容集合$\{a\in E\mid a\leqslant e\}$.

2. 对于 E 的任意子集 S，T，若$\sigma(T)$包容 S，则亦包容 $\sigma(S)$.

例如，P 上子集 S 产生集合$\{e\in E\mid$有元素 $s\in S$ 使得 $e\leqslant s\}$. 这一对应关系称为闭算子. E 的子集 S，当有$\sigma(S)=S$ 时，称 S 为偏序集 P 的平集. 它们除具有闭集的通常性质（如有限个平集的交集仍为平集等）外，还具有如下特殊性质：若记 $\overline{F}=\{e\in E\mid$有 $f\in F$ 使得 $e\leqslant f\}$，则对于 P 的任意闭算子 σ 有 $F\subseteq\overline{F}\subseteq\sigma(F)$；换言之，在集合包容关系的意义下，算子 $F\to\overline{F}$ 为最小闭算子. 从偏序集过渡到如格之类的代数结构时，平集是必不可少的中介. 特别地，把如下闭算子称为偏序集的嵌入算子：对于 E 的任意元

素 x，$\sigma(\{x\})=\{e\in E\mid e\leqslant x\}$，记后者为$(x]$. 因此算子 σ 在元素 x 和集合$(x]$之间建立了对应关系. 当由 P 的闭集构成的格 $L=\{S\subseteq E\mid\sigma(S)=S\}$ 为一完备格时，此算子就能把偏序集 P 嵌入到格 L 之中.

偏序集的平集(flat of poset)　见“偏序集的闭算子”.

偏序集的嵌入算子(embedding operator on poset)　见“偏序集的闭算子”.

格(lattice)　一类代数结构. 它是建立在偏序集 $P=(E,\leqslant)$之上的. 由 E 的任意元素 x,y 构造的如下两个集合 $N_1(x,y)=\{z\in E\mid x\leqslant z$ 且 $y\leqslant z\}$及 $N_2(x,y)=\{z\in E\mid z\leqslant x$ 且 $z\leqslant y\}$. 它们作为 P 的子集均仍为偏序集，一般不一定有最小元或最大元. 若对 P 的任意元素 x,y，$N_1(x,y)$均有最小元，$N_2(x,y)$均有最大元，则称 P 为格，并记为 L. 在格 L 上，把$N_1(x,y)$和其最小元的对应关系视为一类二元运算，称为 x 和 y 的交，记为 $x\wedge y$. 对称地，把 $N_2(x,y)$和 其最大元的对应关系视为 x 和 y 的结，记为 $x\vee y$. 它们是格上最基本的运算. 这两类运算满足：

1. 同一律 $x\vee x=x, x\wedge x=x$.
2. 交换律 $x\vee y=y\vee x; x\wedge y=y\wedge x$.
3. 结合律 $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$,
   $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$.
4. 吸收律 $x\wedge(x\vee y)=x\vee(x\wedge y)=x$,

其中 x,y 和 z 均为 E 的任意元素. 因此格又可视为满足上述四条规律的代数结构 $L=(E,\vee,\wedge)$.

虽然格的理论建立较晚，大约在 20 世纪 30 年代左右，但是很快就在解决序集问题和组合问题及代数问题中迅速发展，成为有关研究的有效理论基础. 格理论伴随拟阵理论的发展就是一个明显的例证. 与一般具有序特征的代数结构不同的是，格中元素的序特征不是外在的，而是内在的. 这是由于它们的序关系完全可以等价地由格的内在运算来刻画：$x\leqslant y$ 当且仅当 $x\vee y=y$ 或者 $x\leqslant y$ 当且仅当 $x\wedge y=x$. 这也反映了格的交运算与结运算的对称性. 有一些重要的格的例子. 例如，$B=(2^E,\subseteq)$是格，这里 2^E 为 E 的所有子集的构成的集族，而$|E|=n$，其上的结运算 $x\vee y$ 为集 x 和集 y 的并集，交运算 $x\wedge y$ 为集 x 和集 y 的交集. 又如，若自然数 n 的所有正整除数组成集合为 E，E 的元素 x,y 有序关系 xRy 当且仅当 x 能整除 y，则偏序集 $P=(E,R)$为格，$x\vee y$ 为 x 和 y 的最小公倍数，$x\wedge y$ 为 x 和 y 的最大公约数.

结运算(join operation)　见“格”.

交运算(meet operation)　见“格”.

链格(chain lattice)　一种基本的格，它是与数集$\{0,1,2,\cdots,n\}$同构的格，记为 $\mathscr{C}(n)$. 其元素 i，可有秩 $r(i)=i$. 因此，可把区间$[a,b]$的秩定义 $r(b)-r(a)=k$. 链格是格的基本类型，其他格有的可以用链格刻画. 如布尔格 B_n 可视为 n 个二元链格 $\mathscr{C}(1)$ 的连乘积 $\mathscr{C}(1)^n$，换言之，B_n 和 $\mathscr{C}(1)^n$ 同构. 链格是平凡分配格. 而且，链格的每个子格都是分配格.

布尔格(Boolean lattice)　一种特殊的格. 它是与布尔代数 $B=(2^E;\cup,\cap)$同构的格. 布尔格的结运算和交运算分别对应于布尔代数的并运算和交运算. 布尔格为分配格、模格、几何格、补格. 当$|E|=n$ 时，记布尔格为 B_n.

除数格(divisor lattice)　一种特殊的格. 在以正整数组成的集 N 上，以整除性为序关系建立的格. 对于 N 的任意元素 n,m，有序关系 mRn 当且仅当 m 能整除 n. 这个格上的结运算 $m\vee n$ 为 m 和 n 的最小公倍数；交运算 $m\wedge n$ 为 m 和 n 的最大公约数. 除数格为分配格. 其上的区间，可以表示为若干链格之积. 如区间$[1,360]$同构于 $\mathscr{C}(3)\times\mathscr{C}(2)\times\mathscr{C}(1)$，这是因为有分解式 $360=2^3 3^2 5^1$，其中，$\mathscr{C}(i)$ 为具有 $i+1$ 个元素的链格，$i=1,2,3$.

向量空间格(vector space lattice)　组合理论中常用的一种格. 它是在可除环 K 上的 n 维向量空间 V 的所有子空间，连同包容关系构成的格，记为 $\mathscr{L}(V)$. 当 n 和 K 确定之后，也就在同构的意义上确定了 $\mathscr{L}(V)$，因此亦记此格为$\mathscr{L}(n,K)$. 此类格是不可分解的、可补的模格. 在组合理论中，常取 K 为有限域 GF(q).

划分格(partition lattice)　一种特殊的格. 它是集合 E 上的划分连同精细关系构成的格. E 上的一个划分 π 惟一地确定了 E 中元素之间的一个等价关系，记为(π). $a(\pi)b$ 当且仅当 a,b 同属 π 的一个划分块. 划分格的交运算为 $a(\pi\wedge\sigma)b$，当且仅当 $a(\pi)b$ 且 $a(\sigma)b$；结运算为 $a(\pi\vee\sigma)b$，当且仅当有元素 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 使得 $a=c_1,b=c_k$，并对所有 $1\leqslant i\leqslant k$ 有 $c_i(\pi)c_{i+1}$或$c_i(\sigma)c_{i+1}$. 例如，若 $E=\{1,2,\cdots,11\}$，$\pi=(1,2)(3,4,5)(6,7,8)(9,10,11)$，$\sigma=(1,3,4)(2,5)(6,7,11)(8)(9,10)$，则有

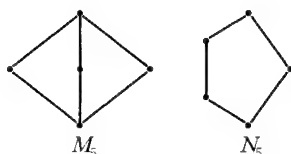
$\pi\vee\sigma=(1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)$,

$\pi\wedge\sigma=(1)(2)(3,4)(5)(6,7)(8)(9,10)(11)$.

子格(sublattice)　一种组合构形. 格 $L=(E;\vee,\wedge)$的子集 N 连同原有的结运算 $\vee$ 和交运算 $\wedge$ 构成的格. 例如，L 上的区间$[x,y]$为一子格.

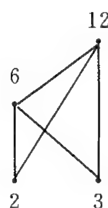
模格(modular lattice)　一种组合构形. 它是满足如下条件的格：对于格的任意元素 x,y 和 z，若 $x\leqslant z$，则 $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge z$. 因此，模格是把满足分配律的要求仅局限在可比较元素之间，从而模格可视为分配格的推广，一个格是分配格，则必为模格. 下图里，M_5，N_5 均不是分配格，但 M_5 是模格，而 N_5 不是模格. 在模格 L 上，映射 φ_a 把 x 映照为 $x\wedge a$；映射 ψ_b 则把 y 映照为 $y\vee b$，这里 a 和 b 均为 L 的

固定的元素. 于是 φ_a 和 ψ_b 为区间$[b,a\vee b]$和$[a\wedge b,a]$之间互逆的同构映射,因而这两个区间是同构的. 模格的这一基本性质,亦可作为模格的另一等价定义. 在模格上,把形如 $I_1=[a\wedge b,a]$,$I_2=[b,a\vee b]$的区间称为传递区间. 若在两区间$[x,y]$和$[x',y']$之间存在一组区间 $I_1,I_2,\cdots,I_k$,使得相邻两个区间都是传递区间,而且 $I_1=[x,y]$,$I_k=[x',y']$,则称$[x,y]$和$[x',y']$中一个为另一个的投影区间. 模格的投影区间均是同构的. 这种结构上的均匀性是模格的主要特性.



模格也可由模元素来定义:格 L 为模格,当且仅当 L 的所有元素均为模元素. 若 L 的元素 a 满足:对于 L 的任意元素 x,y,由 $x\leqslant y$ 得到 $x\wedge(a\vee y)=(x\wedge a)\vee y$,则称 a 为模元素. 此外,格 L 上的一对元素 a 和 b,若对于 L 的所有元素 z 它们满足:若 $b\geqslant z$,则有 $b\wedge(a\vee z)=(b\wedge a)\vee z$,此时称 a,b 为模元素对. 由定义知,在模元素对 a 和 b 之间是有序关系的. 这就是说,当 a 和 b 为模元素对时,b 和 a 不一定为模元素对. 因此,一般把模元素对 a 和 b 记为二元序对$(a,b)_M$,或 aMb. 格模亦可由模元素对刻画:格 L 为模格,当且仅当 L 的每对元素均为模元素对. 关于模元素对的序关系为对称的格,即若 a 和 b 为模元素对,则 b 和 a 也为模元素对,相应的格称为模对称格.

半格(semilattice)　格的推广. 它是只关联到格的结运算和交运算二者之一的一类代数结构. 对于格 $L=(X;\vee,\wedge)$而言,只关联到结运算的半格,称为结-半格,记为 $L'=(X;\vee)$. 对称地,称 $L''=(X;\wedge)$为交-半格. 例如,$X=\{2,3,6,12\}$,结运算$\vee$为求两数的最小公倍数,则$(X;\vee)$不是格,但为半格,即结-半格,其哈塞图如图所示.



模元素(modular element)　见"模格".

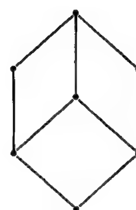
模元素对(modular element pair)　见"模格".

模对称格(modular-symmetric lattice)　见"模格".

传递区间(transfer interval)　见"模格".

投影区间(projective interval)　见"模格".

次模格(sub-modular lattice)　亦称半模格. 一种组合构形. 它是满足下面的条件1的一类格. 条件1:对于格的任意元素 a,b,若 b 覆盖 $a\wedge b$,则有 $a\vee b$ 覆盖 a. 条件1刻画了一种局部对称性,一般弱于格的模对称性. 当格的长度有限时,这两种对称性才等价. 与模格比较,次模格广泛得多. 人们在20世纪70年代才获得证明,次模格不能再如同模格那样可以由某类特殊子格来刻画. 但是次模格为分层格,因而满足若尔当-截德金链条件. 因此,次模格可以借助于格的高度函数来判定:当格 L 的长度有限时,它为次模格当且仅当对于 L 的任意元素 a,b 均有



$$h(a\vee b)+h(a\wedge b)\leqslant h(a)+h(b),$$

这里 h 为元素的高度函数. 而且,当 L 为长度有限的半模格时,元素 a 和 b 为模元素对,当且仅当

$$h(a\vee b)+(h(a\wedge b)=h(a)+h(b).$$

半模格通过它的一个子类——几何格,与组合系统建立起密切的联系. 上图是一次模格但不是模格.

半模格(semi-modular lattice)　即"次模格".

补格(complement lattice)　一类特殊的格. 它是所有元素均有其补元存在的格,亦称此格是可补的. 例如,布尔格 B_n 是可补的. 这里,所谓 a 为 b 的补元,或 b 为 a 的补元是指格 L 中元素 a 和 b 满足条件:$a\vee b=1$ 和 $a\wedge b=0$,其中1和0分别为格 L 的最大元和最小元. 此时,亦称元素 a 和 b 是互补的. 当把可补性仅仅限于格 L 的所有区间时,称此格为相对补格,亦称为局部补格.

相对补格(relatively complemented lattice)　见"补格".

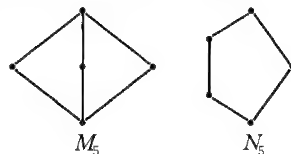
局部补格(locally complemented lattice)　见"补格".

补元(complemented element)　见"补格".

分配格(distributive lattice)　一种组合构形. 它是满足下述条件的格:对于格的任意元素 x,y 和 z,均有 $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$. 由于格中结运算和交运算的对称性,上述条件等价于

$$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z).$$

当 L 为分配格时,交运算对于结运算满足分配律,而且反之亦真. 布尔格、除数格、理想格、链等均为分配格. 分配格可以表示理想格. 右图中 M_5 和 N_5 均不是分配格,因此,凡以 M_5,N_5 为子格的格均不是分配格.



格的理想(ideal of a lattice)　一种组合构形,是偏序集中一类特殊的子集. 偏序集 $P=(X,\leqslant)$的非空子集 I,且满足条件:若 $b\in I$ 且 $x\leqslant b$ 则 $x\in I$. 特别地,当 P 为格 L 时,称 I 为格 L 的理想. 对于 P 的子集 A,集合$\{x\in X\mid A$ 中有元素 a 使得 $x\leqslant a\}$称为由 A 产生的理想. 特别地,当 A 只含单个元素 a 时,A 产生的理想称为主理想. 格 L 的理想一般不一定是主理想. 但是,当格 L 的长度有限时,则每一理想均为主理想. 对于已知格 L,其上所有理想连同

集合间的包容关系构成一个格，称这个新的格为理想格. 在理想格中，主理想格最为重要，因为它不但是 L 的子格，而且与格 L 同构. 这样，对格的研究就归结为对主理想格的研究. 从映射观点看，理想本质上是一类闭映射. 把格 L 的理想与 L 的结运算和交运算联系起来. 对于理想 I，若 a,b 均为 I 的元素，且 $a\vee b$ 仍为 I 的元素，则称 I 为结-理想. 对称地，有交-理想.

格的主理想(principle ideal of a lattice)　见"格的理想".

理想格(lattice of ideals)　见"格的理想".

结-理想(join-ideal)　见"格的理想".

交-理想(meet-ideal)　见"格的理想".

不可约元素(irreducible element)　一类特殊的元素. 是格中的一类非最小元素. 格 L 非最小元素 a，若满足当 $a=b\vee c$ 时必有 $a=b$ 或 $a=c$，则称 a 为结-不可约元素. 简言之，此类元素不可能表示为其他二元素之结. 对称地有交-不可约元素，它不可能表示为其他二元素之交. 结-不可约元素和交-不可约元素统称为不可约元素. 当格 L 为单链 C 时，其所有元素均为不可约元素.

结-不可约(join-irreducible)　见"不可约元素".

交-不可约(meet-irreducible)　见"不可约元素".

几何格(geometric lattice)　一种组合构形. 它是满足下述条件 1 的有限半模格. 条件 1：格的每个元素均可表示为基元的结运算. 而满足条件 1 的格，亦称为基元格或点格. 简言之，几何格既是半模格，又是基元格. 在几何格里，可按不同秩的平集相应地引入基本的几何概念. 例如，把秩为 1 的平集称为点，秩为 2 的平集称为线，秩为 3 的平集称为面等. 而当空集 $\varnothing$ 的闭集 $\overline{\varnothing}$ 非空时，其中的元素称为自环. 当元素 a 和 b 与闭集 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$(闭集的定义见"拟阵的闭包算子")相同时，则称 a 和 b 为相互平行元素.

几何格和组合几何的关联极为密切. 设 A 为几何格 L 的基元集，A 的子集 X 为某组合几何 $G_L(A)$ 的平集，当且仅当 L 有元素 x，使得 $X=\{a\in A\mid a\leqslant x\}$. 而组合几何 $G_L(A)$ 的秩函数可以由格 L 的高度函数 h 来定义：$r(X)=h(\vee X)$，这里

$$\vee X=a_{i_1}\vee a_{i_2}\vee\cdots\vee a_{i_k},X=\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}\}.$$

因此，组合几何的有关概念均可以等价地用几何格的语言表述. 例如，几何格基元素 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是独立的，当且仅当 $h(x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_n)=n$. 另一方面，组合几何 G 的所有平集组成的格 $L(G)$ 为几何格，其基元是 G 中秩为 1 的平集. 因此，几何格是组合几何的基本理论工具. 几何格的每个区间 $[a,b]$ 仍是几何格，且几何格在直积下仍为几何格. 在几何格中，基元的等远性为等价关系.

基元格(atomic lattice)　见"几何格".

平集格(lattice of flats)　一种组合构形. 在偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 上所有平集构成的格 L，其序关系为集合包容关系. 在平集格 L 中，交运算为 $S\wedge T=S\cap T$，而结运算为 $S\vee T=\bigcap\{A\in L\mid S\cup T\subseteq A\}$，即 L 中包容 S 和 T 之并集的所有集合的交集.

完备格(complete lattice)　一种组合构形. 满足下述条件的格称为完备格：它的任意一个非空子集均有最大元和最小元. 例如，链格为完备格.

独立系统(independence system)　一种组合构形. 设有限集 E 的某些子集构成的集族 $\mathscr{I}$，若还满足条件：

1. 空集为 $\mathscr{I}$ 中的元素；

2. $\mathscr{I}$ 中元素 J 的子集 I 仍为 $\mathscr{I}$ 的元素；

则称 $\mathscr{I}$ 为独立系统，且其元素称为独立集. 从序观点看，独立系统是集合包容关系这类序关系决定的一个下降链集族. 例如，若 $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 为平面上的 4 点，且 e_1,e_2 和 e_3 在一条直线上，e_4 不在此直线上，则 E 的子集 I 为独立集，当且仅当 I 中的点为线性独立集. 由于独立系统所满足的条件不可能带来明显的优越性，所以它并不构成主要的组合系统，而是作为其他组合系统如拟阵等的一个前置基础.

独立集(independence set)　见"独立系统".

拟阵(matroid)　一种组合构形. 设二元系统 $M=(E,\mathscr{I})$满足下述条件：

1. 空集 $\varnothing$ 为集族 $\mathscr{I}$ 的元素.

2. 若集合 J 为 $\mathscr{I}$ 的元素，则 J 的任意子集 I 亦为 $\mathscr{I}$ 的元素.

3. 若 I 和 J 均为 $\mathscr{I}$ 的元素，且集合 I 中元素的数目少于 J 中元素的数目，则在差集 $J-I$ 中有元素 e，使得集合 $I\cup\{e\}$ 为 $\mathscr{I}$ 的元素.

这里 E 为有限集，$\mathscr{I}$ 为 E 的某些子集组成的集族. 条件 1 和 2 为定义独立系统的条件，拟阵就定义为满足条件 3 的独立系统. 对于拟阵 $M=(E,\mathscr{I})$，称 $\mathscr{I}$ 中的元素为独立. 称不属于 $\mathscr{I}$ 的 E 的子集为相关集. 拟阵的极大独立集称为拟阵的基；而拟阵的极小相关集称为拟阵的圈，这二类互为对称的集合在拟阵中占重要位置. 对于 E 的元素 e_1,e_2，若 $\{e_1\}$，$\{e_2\}$ 均为独立集，但 $\{e_2,e_2\}$ 为相关集，称 e_1,e_2 为拟阵的平行元素. 条件 3 是独立集之间的交换性质，它类似于线性空间中线性独立向量组之间的交换性质. 对于拟阵而言，条件 3 是本质的，称为拟阵交换性质. 不同类型的交换性质往往导致不同类型的组合系统. 条件 1,2,3 以独立的形式出现，因此称为拟阵的独立性公理. 拟阵有多达数十种形式迥异但本质等价的公理系统. 这是拟阵独有的特点.

当惠特尼(Whitney,H.)于 1935 年奠定了拟阵的基本理论之后，拟阵在理论和应用方面均获得了迅速的发展.图论，尤其是平面图及其对偶的研究是刺激拟阵发展的一个重要方面.当一个平面图以不同的形式嵌入到一个平面上时，其对偶图往往并不同构.但是它们却具有许多共同性质，并体现在不同对偶图中那些不构成圈的边所组成的子集之上.而用拟阵的语言来说，就是在拟阵的独立集上.因此，在这个意义上，可把拟阵视为图论的推广.在另一个方面上，由于有限几何格本质上就是拟阵，拟阵和格论的结合，一方面拟阵得益于格论在理论上的帮助，另一方面拟阵也刺激了格论的研究.拟阵研究发展的第三个重要方向是拟阵和组合优化的结合.建立在拟阵上的组合优化问题不仅本身就代表相当广泛的实际问题，而且更主要的是，此类问题的突出的优越性使得这类问题成为组合优化问题中较为容易的一类问题.它们带来的启示，为其他组合优化问题开拓了理论上的视野.作为拟阵的例子，取 A 为域 F 上的 $m\times n$ 矩阵，A 的 n 个列向量组成集合 E，E 中所有线性独立向量组构成拟阵的独立集族 $\mathscr{I}$.又如，取 E 为图 $G=(V,E)$中的边集 E，拟阵的独立集为 E 的不含圈的子集.若 E 本身就是有限阶的矩阵的集合，独立性视为线性无关，则这种拟阵被称为矩阵拟阵.特别地，当 E 为有限维的向量的集合时，被称为向量拟阵.若向量拟阵中，其向量均为二元有限域上的，则称它为二元拟阵.

相关集(dependent set)　见“拟阵”.

拟阵的基(base of a matroid)　见“拟阵”.

拟阵的圈(circuit of a matroid)　见“拟阵”.

拟阵的独立性公理(independence axioms of matroid)　见“拟阵”.

拟阵交换性质(exchange-property of matroid)　见“拟阵”.

矩阵拟阵(matrix matroid)　见“拟阵”.

向量拟阵(vector matroid)　见“拟阵”.

二元拟阵(binary matroid)　见“拟阵”.

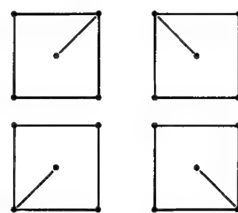
对偶拟阵(dual matroid)　亦称正交拟阵.一种组合构形.它是由拟阵 M 导出的拟阵 M^*.当拟阵 M 以基集族 $\mathscr{B}$ 表示时，$M=(E,\mathscr{B})$，则 $M^*=(E,\mathscr{B}^*)$，其中 $\mathscr{B}^*=\{E-B:B\in\mathscr{B}\}$.因此，当 B 为拟阵 M 的基时，$E-B$ 就是对偶拟阵的基.对于拟阵而言，其对偶拟阵总存在，而且 $M^{**}=(M^*)^*=M$.如此完整的对称性是拟阵特有的重要性质.这一点，在将拟阵应用到组合优化的理论时更为明显.

正交拟阵(orthogonal matroid)　即“对偶拟阵”.

匹配拟阵(matching matroid)　一类特殊的拟阵.它是建立在图 $G=(V,E)$上的拟阵.节点集 V 的子集 A 为此拟阵的独立集，当且仅当图 G 有匹配覆盖 A.例如，当 G 为三角形时，若其顶点为 a,b,c，则相应的匹配拟阵的独立集为$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$.

圈拟阵(circuit matroid)　亦称多边形拟阵.一类特殊的拟阵.它是建立在图 $G=(V,E)$上的一类拟阵 $M(G)$，其独立集为不含圈的边集 E 的子集.因此，圈拟阵的直观形象十分鲜明.由于不同构的图会有相同的圈拟阵，对圈拟阵的研究并不能取代图的研究，它只能看做图的一种延伸.对于圈拟阵 $M(G)$，其圈正是图 G 的圈，所以圈拟阵亦称多边形拟阵.图 G 的上圈是 E 的子集 A，将 A 从 G 中移去以后会增加 G 的连通分支的数目.正如 G 的圈构成 $M(G)$的圈一样，以 G 的上圈为圈，对应地得到 G 上的另一类拟阵，称为上圈拟阵，上圈拟阵亦称键拟阵.圈拟阵和上圈拟阵互为对偶，且在任何域上均可表示.记上圈拟阵为$M^*(G)$.

由于圈拟阵和上圈拟阵具有明显的图的特征，所以借助于同构的概念，可将它们延伸到其他一般拟阵.拟阵 $M_1=(E_1,\mathscr{I}_1)$，$M_2=(E_2,\mathscr{I}_2)$同构，当且仅当在 E_1 和 E_2 之间有双射 φ，并保持独立性.对于拟阵 M，若有图 G 存在，使得 M 与 G 的圈拟阵同构，则称 M 是可图的或称 M 为图拟阵.对应地，若 M 与 G 的上圈拟阵同构，则称 M 是可上图的，或称 M 为上图拟阵.例如，完全图 K_5，完全二部图 $K_{3,3}$的圈拟阵$M(K_5)$和 $M(K_{3,3})$是可图的，但不是可上图的.更一般地，G 为平面图，当且仅当它的圈拟阵 $M(G)$是可上图的.因此，拟阵的可图性，本质上刻画了图的平面性.



特别地，当 G 为欧拉图时，它的边集能划分为圈.而在欧拉图上建立的圈拟阵，称为欧拉拟阵.更一般地，对于建立在集合 E 上的拟阵 M，若 E 可以表示为 M 的互不重叠的圈的并集，则称 M 为欧拉拟阵.若 M 的所有圈，其中元素的个数均为偶数时，则称 M 为偶拟阵.二元拟阵为欧拉拟阵当且仅当其对偶是二元拟阵.作为一个既不是图拟阵也不是上图拟阵的例子，它就是旋拟阵.此拟阵由轮图 $W_{n+1}=K_1+C_n$ 产生，它的圈对应为 C_n 添加一条幅.例如，对于 W_5，其圈如上图.

多边形拟阵(polyhedral matroid)　即“圈拟阵”.

图拟阵(graphic matroid)　见“圈拟阵”.

上图拟阵(cographic matroid)　见“圈拟阵”.

欧拉拟阵(Euler matroid)　见“圈拟阵”.

键拟阵(bond matroid)　见“圈拟阵”.

偶拟阵(even matroid)　见“圈拟阵”.

旋拟阵(whirl matroid)　见“圈拟阵”.

拟阵的基公理(basis axiom of matroid)　刻画拟阵的一种法则. 有限集 E 的某些子集构成的集族 $\mathscr{B}$ 满足如下条件：

1. $\mathscr{B}$ 非空.

2. $\mathscr{B}$ 中的元素之间均不具有集合的包容关系.

3. B_1,B_2 为 $\mathscr{B}$ 中的元素，且 $e_1\in B_1$，则在 B_2 中有元素 e_2，使得 $(B_1-\{e_1\})\cup\{e_2\}$ 为 $\mathscr{B}$ 中的元素.

这几个条件即为基公理，由它决定的集族 $\mathscr{B}$，其元素即为拟阵的基. 因此，基公理是刻画拟阵的又一等价形式. 条件 2 表明 $\mathscr{B}$ 是一条反链，而条件 3 称为基交换公理，它和线性空间理论中的基交换定理是一致的. 基交换公理可以等价叙述为如下的中间基公理：对于 E 的任意子集 X,Y，且 $X\subseteq Y$，若在 $\mathscr{B}$ 中有元素 B_1,B_2，使得 $X\subseteq B_1,B_2\subseteq Y$，则在 $\mathscr{B}$ 中有元素 B_3 存在，使得 $X\subseteq B_3\subseteq Y$.

拟阵的基(bases of matroid)　见“拟阵的基公理”.

基交换公理(basis exchange axiom)　见“拟阵的基公理”.

中间基公理(middle basis axiom)　见“拟阵的基公理”.

拟阵的圈公理(circuit axiom of matroid)　刻画拟阵的一种法则. 有限集 E 的某些子集构成的集族 $\mathscr{C}$ 满足如下条件：

1. 空集 $\varnothing$ 不是 $\mathscr{C}$ 中的元素.

2. $\mathscr{C}$ 中的所有元素之间均不具有集合的包容关系.

3. 对于 $\mathscr{C}$ 中任意元素 C_1,C_2，以及 E 中任意元素 e，在 $\mathscr{C}$ 中存在 C_3 使得 $C_3\subseteq(C_1\cup C_2)-\{e\}$.

这几个条件即为圈公理，并称 3 为圈消去公理. 对于 E 的子集 C，它为拟阵 $M(E,\mathscr{I})$ 的圈，当且仅当它为 $\mathscr{C}$ 的元素，而 $\mathscr{C}$ 由圈公理决定. 因此，拟阵圈公理是拟阵的一个等价形式.

消去公理(circuit eliminate axiom)　见“拟阵的圈公理”.

拟阵的秩(rank of matroid)　刻画拟阵的一个函数. 设 r 是定义在有限集 E 的子集族上的函数：

$$r(A)=\max\{|I|\mid I\subseteq A \text{ 且 } I\in\mathscr{I}\},$$

这里 $|I|$ 表示集合 I 中元素的数目，$\mathscr{I}$ 为拟阵的独立集族 $A\subset E$. 这就是拟阵的秩. 从序观点看，拟阵的秩函数与集合之间的包容关系保持同序性：对于 E 的任意子集 X,Y，若 $X\subseteq Y$，则 $r(X)\leqslant r(Y)$. 拟阵秩函数最重要的性质是它的半模性：对于 E 的任意子集 X,Y，有

$$r(X\cup Y)+r(X\cap Y)\leqslant r(X)+r(Y).$$

表明了拟阵和半模格的本质关联，这对于拟阵的处理带来明显的优越性. 与其他组合系统不相同之处，从秩函数观点看，是单一秩增性. 对于 E 的任意子集 X 和任意元素 e，有 $r(X\cup\{e\})=r(X)$ 或 $r(X)+1$.

拟阵的秩公理(rank axiom of matroid)　刻画拟阵的一种法则. 它是定义在有限集 E 的子集族上的函数 r 所满足的条件：

1. 对于 E 的任意子集 X，有 $r(X)\leqslant|X|$.

2. 对于 E 的任意子集 X,Y，若 $X\subseteq Y$，则

$$r(X)\leqslant r(Y).$$

3. 对于 E 的任意子集 X,Y，有

$$r(X\cup Y)+r(X\cap Y)\leqslant r(X)+r(Y).$$

r 为拟阵 $M=(E,\mathscr{I})$ 的秩函数，当且仅当 r 满足上述秩公理. 而秩函数决定之后，可由它来决定拟阵的独立集：E 的子集 I 为独立集，当且仅当 $r(I)=|I|$. 因此，拟阵的秩公理是拟阵的等价形式. 若将条件 1，2 换成条件 1′，2′：

1′. $r(\varphi)=0$.

2′. 对于 E 的任意子集 X 和任意元素 e，有

$$r(X\cup\{e\})=r(X) \text{ 或 } r(X)+1,$$

则秩公理可以等价地改换为条件 1′，2′ 和 3.

拟阵的闭包算子(closure operator of matroid)　一类特殊的映射. 指从有限集 E 的所有子集构成的集族 2^E 到其自身的映射，这里 E 由拟阵 $M=(E,\mathscr{I})$ 给定. 拟阵的闭包算子 σ 要满足下述闭映射的条件：

1. 对于 E 的任意子集 X，有 $X\subseteq\sigma(X)$.

2. 对于 E 的任意子集 X,Y，若 $X\subseteq Y$，则

$$\sigma(X)\subseteq\sigma(Y).$$

3. 对于 E 的任意子集 X，$\sigma(\sigma(X))=\sigma(X)$.

此外，σ 还要满足闭包交换公理：对于 E 的任意子集 X 及任意元素 e_1,e_2，若 $e_1\in\sigma(X\cup\{e_2\})-\sigma(X)$，则 $e_2\in\sigma(X\cup\{e_1\})-\sigma(X)$. 此交换公理具有良好的对称性，对于拟阵而言，它是本质的. 对于矩阵拟阵，向量集的线性包为闭包算子. 对于由图 $G=(V,E)$ 建立的图拟阵，边集 E 的子集 A，定义 $e\in\sigma(A)$ 当且仅当 e 的两端点可由 A 的一条路连结，此时 σ 为该图拟阵上的一个闭包算子. 由拟阵闭包算子 σ 决定闭集，它是满足下述条件的 E 的子集 A：$\sigma(A)=A$，亦称为拟阵的平集. 拟阵的平集具有一般平集所共有的性质，例如，平集族对于集合交运算是封闭的. 此外，还具有特殊的单一秩增性：若 F 为拟阵的平集，且 F 不包含元素 e，则

$$r(F\cup\{e\})=r(F)+1,$$

这里 r 为拟阵的秩函数.

以拟阵 M 的所有平集为元素构成格 $L(M)$，其序关系为集合包容关系，则此格是几何格. 拟阵 M 正是借助于 $L(M)$ 过渡到格理论，例如：$L(M)$ 的基

元为 M 的秩为 1 的平集；拟阵 M 的秩函数作用在 M 的平集上时，给出格 $L(M)$ 的高度函数等. 设有拟阵的极大平集 H，若 $H\neq E$，则称 H 为拟阵的超平面. 换言之，拟阵的超平面 H 满足 $r(H)=r(E)-1$. 拟阵的超平面除具有通常的性质(例如，超平面之间的不可比性等)外，还具有如下特有性质：对于拟阵的两个不相同的超平面 H_1,H_2 以及 E 的任意元素 e，有超平面 H 存在，它包容$(H_1\cap H_2)\cup\{e\}$. 类似于一般的作法：把闭集的补集定义为开集，对于拟阵而言，则把平集的补集称为拟阵的开集. 换言之，E 的子集 O 为拟阵的开集，当且仅当有拟阵的平集 F，使得 $O=E-F$.

闭包交换公理(closure exchange axiom) 见"拟阵的闭包算子".

拟阵的平集(flat of matroid) 见"拟阵的闭包算子".

拟阵的超平面(hyperplane of matroid) 见"拟阵的闭包算子".

拟阵的闭集(closed set of matroid) 见"拟阵的闭包算子".

拟阵的闭包公理(closure axiom of matroid) 刻画拟阵的一种法则. 具体地说，从有限集 E 的所有子集构成的集族 2^E 到其自身的映射 σ，满足如下称之为为闭包公理的条件：

1. 对于 E 的任意子集 X，有 $X\subseteq\sigma(X)$.

2. 对于 E 的任意子集 X,Y，若 $X\subseteq Y$，则

$$\sigma(X)\subseteq\sigma(Y).$$

3. 对于 E 的任意子集 X，有 $\sigma(\sigma(X))=\sigma(X)$.

4. 对于 E 的任意子集 X 以及任意元素 e_1,e_2，若 $e_1\in\sigma(X\cup\{e_2\})-\sigma(X)$，则有

$$e_2\in\sigma(X\cup\{e_1\})-\sigma(X).$$

简言之，拟阵的闭包公理给出满足闭包交换公理的闭包算子的存在性. 映射 σ 为拟阵 $M=(E,\mathscr{I})$ 的闭包算子，当且仅当 σ 满足上述闭包算子公理. 当闭包算子 σ 给定之后，相应的拟阵也就惟一决定，这是因为：E 的子集 I 为独立集，当且仅当对于 I 的任意元素 e，均有 $\sigma(I-\{e\})$不包含 e. 因此，拟阵的闭包公理为拟阵的等价形式.

拟阵的平集公理(flat axiom of matroid) 亦称拟阵的闭集公理. 刻画拟阵的一种法则. 它是有限集 E 的某些子集组成的集族 $\mathscr{F}$，满足如下称之为平集公理的条件：

1. 集合 E 为 $\mathscr{F}$ 的元素.

2. 对于 $\mathscr{F}$ 的任意元素 F_1,F_2，其交集 $F_1\cap F_2$，仍为 $\mathscr{F}$ 的元素.

3. 记 $\mathscr{F}$ 的全部元素为 $F_1,F_2,\cdots,F_k$，它们均包容集 F，且对于任意 $1\leqslant i\leqslant k$，在 F 和 F_i 之间不存在其他平集，则 $F_1-F,F_2-F,\cdots,F_k-F$ 为 $E-F$ 的一个划分.

其中条件 3 对于拟阵而言是本质的，这就是说，对于不是拟阵的其他组合系统的平集，一般并不满足条件 3. 上述公理决定的 $\mathscr{F}$ 惟一地决定了拟阵的平集. 而平集决定后，可由其上的高度函数惟一地决定拟阵的秩函数. 因此，拟阵的平集公理为拟阵定义的等价形式.

拟阵的闭集公理(closed set axiom of matroid) 即"拟阵的平集公理".

拟阵的超平面公理(hyperplane axiom of matroid) 刻画拟阵的一种法则. 即有限集 E 的某些子集构成的集族 $\mathscr{H}$，满足如下称之为超平面公理的条件：

1. 集合 E 不是 $\mathscr{H}$ 的元素.

2. 对于 $\mathscr{H}$ 的任意两个不相同的元素 H_1,H_2，它们均不可比，即 $H_1\not\subseteq H_2$ 且 $H_2\not\subseteq H_1$.

3. 对于 $\mathscr{H}$ 的任意两个不相同的元素 H_1,H_2，以及 E 的任意元素 e，在 $\mathscr{H}$ 中存在元素 H，使得

$$(H_1\cap H_2)\cup\{e\}\subseteq H.$$

此公理决定的 $\mathscr{H}$ 惟一决定了拟阵的超平面. 换言之，E 的真子集 H 为拟阵的超平面，当且仅当 $H\in\mathscr{H}$. 当 $\mathscr{H}$ 决定以后，可由其元素的交集决定出拟阵的平集. 因此，拟阵的超平面公理为拟阵的等价形式.

拟阵的相关性公理(dependent axiom of matroid) 刻画拟阵的一种法则. 有限集 E 的某些子集构成的集族 $\mathscr{D}$，满足如下称之为相关性公理的条件：

1. 空集$\varnothing$不是 $\mathscr{D}$ 的元素.

2. 若 E 的子集 D_1 包容 $\mathscr{D}$ 的某一元素 D，则 D_1 亦为 $\mathscr{D}$ 的元素.

3. 对于 $\mathscr{D}$ 的任意二元素 D_1,D_2，或者 $D_1\cap D_2$ 为 $\mathscr{D}$ 的元素，或者对于 E 的任意元素 e，使得$(D_1\cup D_2)-\{e\}$为 $\mathscr{D}$ 的元素.

上述公理确定的集族 $\mathscr{D}$，完全确定了拟阵的相关集. 换言之，E 的子集 D 为拟阵的相关集，当且仅当 $D\in\mathscr{D}$. 因此，拟阵的相关性公理为拟阵的等价定义. 拟阵相关性公理和拟阵独立性公理，二者之间呈现着对应. 例如关于它们的第 2 条公理，一个是集合扩充构成 $\mathscr{D}$ 中一条上升的链，另一个是集合元素减少构成 $\mathscr{I}$ 中一条下降的链.

拟阵的开集公理(open set axioms of matroid) 刻画拟阵的一种法则. 有限集 E 的某些子集构成的集族 $\mathscr{O}$，满足如下称之为开集公理的条件：

1. 空集合$\varnothing$为 $\mathscr{O}$ 的元素.

2. 对于 $\mathscr{O}$ 中任意两元素 O_1,O_2，其并集 $O_1\cup O_2$，仍为 $\mathscr{O}$ 的元素.

3. 对于 $\mathscr{O}$ 中的任意元素 O_1, O_2 以及 $O_1 \cap O_2$ 中任意元素 e，在 $\mathscr{O}$ 中有元素 O 使得

$$(O_1 \cup O_2) - \{e\} \supseteq O \supseteq (O_1 \cup O_2) - (O_1 \cap O_2).$$

将开集公理与平集公理比较，可见二者之间有良好的对应. 拟阵的开集公理为拟阵的等价形式.

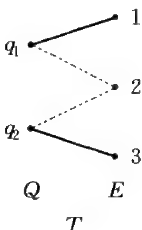
仿射拟阵(affine matroid)　一种组合构形. 它是与矩阵拟阵类似的拟阵 $M(E)$，不同的是，这里的 E 是仿射空间 A 中的有限点构成的集合，而且在 A 中没有真子仿射空间可以包含 E. 仿射拟阵 $M(E)$ 的独立集依次为单点集、两点构成的线段、三点构成的三角形、四点构成的四面体、多点组成的单纯形. 其单纯形上秩函数之值为构成单纯形的点数. 仿射拟阵的平集，是有关点集的仿射包与 E 的交集. 而它的基则是张成 E 的单纯形.

截元(transverse)　一种组合构形. 它是与有限集 E 的给定子集族有特定关系的 E 的一个子集. 对于有限集 $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 的特定子集 $T=\{e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_t}\}$，称这样的 T 为 Q 的偏截元或相异代表集. 若它满足：

1. T 中的元素均不相同.

2. 对于由 E 的子集 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ 构成的集族 $Q=\{q_1, q_2, \cdots, q_m\}$，若从指标 $j_1, j_2, \cdots, j_t$ 出发，可以得到一组互不相同的指标 $i_1, i_2, \cdots, i_t$，并使得 $e_{j_k} \in q_{i_k}$，对所有的 k $(1 \leqslant k \leqslant t)$ 均成立.

在这里允许 $1 \leqslant t \leqslant n$. 而当 $t=m$ 时，称 T 为 Q 的截元. 例如，若 $E=\{1,2,3\}$，$q_1=\{1,2\}$，$q_2=\{2,3\}$，$Q=\{q_1, q_2\}$，则 $T_1=\{1\}$，$T_2=\{2\}$，$T_3=\{3\}$ 均为 Q 的偏截元，而 $T_4=\{1,3\}$，$T_5=\{2,3\}$，$T_6=\{1,2\}$ 均为 Q 的截元. 从组合论观点看，截元相应于二部图上的匹配，或者说一种对应关系. 它把集族归约为一个更容易处理的集合. 容易看到，当 T 为 Q 的偏截元时，T 的子集仍为 Q 的偏截元. 这种序关系类似于拟阵中独立集的相应性质.



因此，把以偏截元为其独立集的拟阵，称为截元拟阵. 对于截元拟阵，其对偶拟阵一般不再是截元拟阵. 但是，截元拟阵和匹配拟阵本质上是一回事，因为：一个拟阵是匹配拟阵，当且仅当它是截元拟阵. 这同时表明截元拟阵在组合论中的重要性.

当在拟阵 $M=(E, \mathscr{I})$ 和截元拟阵 M_T 之间有一一对应关系时，换言之，对于拟阵 M，有 $|E|=n$，此时以 E 的子集 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ 构成的集族 $Q=\{q_1, q_2, \cdots, q_m\}$，使得独立集族 $\mathscr{I}$ 与 Q 的偏截元集族一一对应，则称 Q 为拟阵 M 的截元表示. 例如，$E=\{a,b,c,d,e\}$，独立集为元素个数不超过 3 的 E 的所有子集. 若 $q_1=\{a,b,c\}$，$q_2=\{a,b,d\}$，$q_3=\{a,b,e\}$，则 $Q=\{q_1, q_2, q_3\}$ 为此拟阵的截元表示. 拟阵的截元表示并不惟一，例如，除 Q 以外，$\mathscr{E}=\{E,E,E\}$ 也是该拟阵的截元表示. 一般地，若 $Q=\{q_1, q_2, \cdots, q_m\}$ 是拟阵的截元表示，则满足 $q_i \subseteq T_i \subseteq E$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 的 $\mathscr{T}=\{T_1, T_2, \cdots, T_m\}$ 也是拟阵的截元表示. 借助于截元表示，可以判定已知拟阵和截元拟阵的关系. 若 $M(E)$ 是秩为 k 的拟阵，$M'(E)$ 为一截元拟阵，且其截元表示为 $Q=\{q_1, q_2, \cdots, q_k\}$，则 $M(E)$ 的每一独立集亦为 $M'(E)$ 的独立集，当且仅当对于 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的任意子集 I，均有

$$r(\bigcap_{i \in I}(E-q_i)) \leqslant k-|I|,$$

这里 r 为拟阵的秩函数.

偏截元(partially transverse)　见"截元".

截元拟阵(transverse matroid)　见"截元".

截元表示(transverse presentation)　见"截元".

霍尔定理(Hall's theorem)　刻画集族的截元存在性的原理. 令 $\mathscr{A}$ 为有限集 E 的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 组成的集族，则 $\mathscr{A}$ 有截元存在当且仅当对于指标集 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的任意子集 J，均有

$$|\bigcup_{i \in J} A_i| \geqslant |J|.$$

拉都定理(Rado's theorem)　刻画拟阵的截元存在性的原理. 若 r 为拟阵 $M(E)$ 的秩函数，E 的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 构成的集族 $\mathscr{A}$ 有截元存在且为拟阵 $M(E)$ 的独立集，当且仅当对于指标集 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的任意子集 J 均有

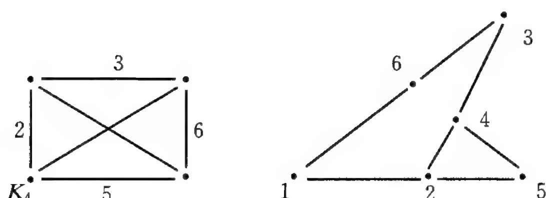
$$r(\bigcup_{i \in J} A_i) \geqslant |J|.$$

划分拟阵(partition matroid)　一种组合构形. 它是由在有限集 $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 上的划分 π 导出的拟阵 M. 若划分 π 把 E 分割为划分块 $B_1, B_2, \cdots, B_m$，并相应地设定非负整数 $d_1, d_2, \cdots, d_m$，则 E 的子集 I 为划分拟阵的独立集，当且仅当对于 $i=1,2,\cdots,m$，均有 $|I \cap B_i| \leqslant d_i$. 例如对于有向图 $G=(V,A)$，A 的子集 I 为这样一类集合：I 中没有两条边同指向一个节点，以这样的 I 为独立集可得一划分拟阵. 相应地，J 为 A 的这样一类集合：J 中没有两条边始于同一节点，以这样的 J 为独立集可得另一划分拟阵.

可表示拟阵(representable matroid)　亦称可坐标化拟阵. 一种组合构形. 它是与有限域GF(q)上的矩阵拟阵$M(A)$有一一对应关系的拟阵$M(E)$. 称$M(A)$为拟阵$M(E)$的表示，矩阵 A 为拟阵的表示矩阵. 例如，在完全图 K_4 上的图拟阵 $M(K_4)$ 在二元域GF(2)上是可表示的；但是，均匀拟阵 $U_{2,4}$ 在二元域GF(2)上却是不可表示的，尽管它在其他域上是可表示的(见下图和下表). 可表示拟阵的对偶拟阵、子拟阵亦均为可表示的. 这是可表示拟阵的优越

性所在.

1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1



特别地,把能够在二元域 GF(2)上表示的拟阵称为二元拟阵. 均匀拟阵 $U_{2,3}$为二元拟阵. 因为对于三元素集 $E=\{a,b,c\}$,其任意真子集都是 $U_{2,3}$的独立集,而 E 为相关集. 相应的表示向量为 $\alpha(a)=(1,0)$, $\alpha(b)=(0,1)$, $\alpha(c)=(1,1)$. 均匀拟阵 $U_{2,4}$却不是二元拟阵. 二元拟阵包含了单模拟阵和图拟阵等重要拟阵. 在拟阵的表示理论中,二元拟阵是研究较早的一类.

可坐标化拟阵(coordinatizable matroid)　即"可表示拟阵".

拟阵的表示(representation of matroid)　见"可表示拟阵".

拟阵的表示矩阵(representative matrix of matroid)　见"可表示拟阵".

单模拟阵(unimodular matroid)　亦称正则拟阵. 一类特殊的可表示的拟阵. 指在任何域上均可表示的拟阵. 单模拟阵亦可等价地由其表示矩阵定义. 设 $m\times n$ 矩阵 A 为拟阵$M(E)$在域 F 上的表示矩阵,$m<n$,且 A 的元素均取整数值. 若对于任意 k $(1\leqslant k\leqslant m)$,$A$ 的每个 $k\times k$ 子阵的行列式等于 0 或 ±1,则称矩阵 A 为全单模的. 拟阵 $M(E)$为单模拟阵,当且仅当$M(E)$有全单模的表示矩阵. 此外,单模拟阵亦可用其子结构刻画:$M(E)$为单模拟阵,当且仅当它没有与均匀拟阵 $U_{2,4}$、法诺拟阵 F_7 及其对偶 F_7^* 同构的子拟阵. 系数矩阵为全单模矩阵的线性规划关联许多组合优化问题,它们的优越性在于有多项式算法求其最优解.

全单模矩阵(total unimodular matrix)　见"单模拟阵".

正则拟阵(regular matroid)　即"单模拟阵".

单形拟阵(simplicial matroid)　一类特殊的拟阵. 它是以独立单形为独立集的拟阵. 当单形为 k 单形时,记单形拟阵为 S_k^A,这里 $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$,以 k 单形构成的集合$\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$的独立性是由$\partial(X_1,)$, $\partial(X_2)$, $\cdots$, $\partial(X_m)$的线性独立性来确定的,其中 ∂ 为边缘算子,满足:

$$\partial(\varnothing)=0,\partial(\{a_i\})=0,$$

$$\partial(\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}\})=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\{a_{i_1}\cdots\hat{a}_{i_j}\cdots a_{i_k}\},$$

这里 $\hat{a}_{i_j}$表示把元素 a_{i_j}从该集合中删除掉. 因此若 X 为 k 单形,则 $\partial(X)$为$(k-1)$单形. 单形拟阵 S_k^A 是可表示拟阵,其表示矩阵记为 $s(n,k)=(s_{p,q})$,为

$$\binom{n}{k-1}\times\binom{n}{k}$$

矩阵. 其产生方法为,先把$(k-1)$单形按字典序排列,并以 p 表示其中之一,再把 k 单形亦按字典序排列,以 q 表示其中之一. 当 q 不包含 p 时令 $s_{p,q}=0$,当 q 包含 p 时,差集 $q-p$ 只含一个元素,则 $s_{p,q}$的值按此元素 a_{i_j}的下标 j 确定为$(-1)^{j-1}$. 例如,$s(4,3)$为如下矩阵:

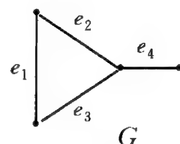
$$S(4,3)=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\{1,2,3\} & \{1,2,4\} & \{1,3,4\} & \{2,3,4\}\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \{1,2\}\\ \{1,3\}\\ \{1,4\}\\ \{2,3\}\\ \{2,4\}\\ \{3,4\}\end{array}$$

因此,$\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}\}$是独立的,且为单形拟阵 S_3^4 的基. 但是,$\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$是相关的.

拟阵多面体(matroid polyhedron)　一种组合构形. 它是由拟阵 $M=(E,\mathscr{I})$的所有独立集的关联向量生成的多面体 P. 记 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,独立集 I 的关联向量 $v(I)=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$,当 I 包含元素 e_i 时,$v_i=1$,否则 $v_i=0$. 拟阵多面体的优越性在于,它可以借助拟阵的秩函数 r 而表示为约束不等式的形式 $I(E,r)$:对于 E 的任意子集 F,有

$$\sum_{e\in F}x_e\leqslant r(F),$$

且对于 E 的任意元素 e,有 $x_e\geqslant 0$. 拟阵多面体 P 的顶点均为整值点. 这样建立在拟阵上的优化问题就可以归结为不考虑其解是否取整数值的一般线性规划问题,从而为拟阵上的优化问题开辟了一个新的领域. 例如,下图 G 上的图拟阵 $M(G)$,其多面体由下述不等式决定:



$$x_{e_1}\leqslant1,x_{e_2}\leqslant1,x_{e_3}\leqslant1,x_{e_4}\leqslant1,$$

$$x_{e_1}+x_{e_4}\leqslant2,$$

$$x_{e_2}+x_{e_4}\leqslant 2,$$
$$x_{e_3}+x_{e_4}\leqslant 2,$$
$$x_{e_1}+x_{e_2}+x_{e_3}\leqslant 2,$$
$$x_{e_1}+x_{e_2}+x_{e_4}\leqslant 3,$$
$$x_{e_1}+x_{e_3}+x_{e_4}\leqslant 3,$$
$$x_{e_2}+x_{e_3}+x_{e_4}\leqslant 3,$$
$$x_{e_1}+x_{e_2}+x_{e_3}+x_{e_4}\leqslant 3,$$
$$x_{e_1}\geqslant 0,\ x_{e_2}\geqslant 0,\ x_{e_3}\geqslant 0,\ x_{e_4}\geqslant 0.$$

在以约束不等式表示的拟阵多面体里，若以 G 的满足下述条件的一般整值次模函数 f 取代拟阵的秩函数：

1. $f(\varnothing)=0$；

2. 对于 E 的任意子集 A,B，若 $A\subseteq B$ 则
$$f(A)\leqslant f(B);$$

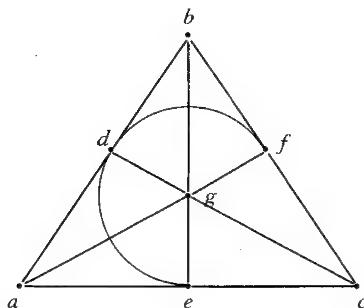
3. 对于 E 的任意子集 A 和 B，有
$$f(A\cup B)+f(A\cap B)\leqslant f(A)+f(B);$$
则不等式组 $I(E,f)$ 决定的多面体，其顶点仍对应于某个拟阵的独立集. 由 $I(E,f)$ 决定的拟阵称为多面体拟阵.

次模函数(submodular function)　见“拟阵多面体”.

多面体拟阵(polymatroid)　见“拟阵多面体”.

法诺拟阵(Fano matroid)　一种特殊的拟阵. 即二元拟阵 F_7，仅含有 7 个元素，其表示矩阵为

$$\begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$



而其在投影平面上的图像中，三个点位于同一条直线或同一条曲线上时，此三点构成 F_7 的相关集；否则为基. F_7 不是单模拟阵，因此，以 F_7 为其子拟阵的拟阵也不是单模拟阵.

拟阵的删除运算(deletion on matroid)　一种变化拟阵的规则. 在拟阵 $M(E)$ 上，由 E 去除元素 e 后产生新拟阵 $M'=M_e(E')$ 的运算. $E'=E-\{e\}$ 的子集 I 为 M' 的独立集，当且仅当 I 为原拟阵 M 的独立集. 更一般地，设 T 为 E 的真子集，由 T 导出的新拟阵 $M(T)$，T 的子集为其独立集，当且仅当 T 为原拟阵的独立集. 这时把这一过程称为拟阵 M 对于 T 的限约运算. 并把经限约运算得到的新拟阵称为拟阵 M 的子拟阵. 与删除运算对称的有拟阵的收缩运算，它产生的新拟阵 $M''=M_e(E')$，E' 的子集 I 为 M'' 的独立集，当且仅当 $I\cup\{e\}$ 为原拟阵 M 的独立集. 删除运算和收缩运算互为对偶，且可交换，
$$(M')^*=(M^*)'',\quad (M'')^*=(M^*)',$$
其中用“ * ”表示对偶. 把拟阵 M 经过若干次删除运算和收缩运算之后得到的新拟阵称为拟阵 M 的次形. 子拟阵和次形的结构特征，有时可刻画原拟阵的性质. 例如，图拟阵 $M(G)$ 为上图拟阵，当且仅当 $M(G)$ 不含次形 $M(K_5)$ 和 $M(K_{3,3})$. 它是图论中的库拉托夫斯基定理对应的拟阵形式.

均匀拟阵(uniform matroid)　一种特殊的拟阵. 它是只以有限集 E 的子集 I 中包含元素的数目多少决定其独立性的拟阵 $U_{k,n}$，其中 $n=|E|$，E 的子集 B 为拟阵的基，当且仅当 B 由 k 个元素组成. 类似地，C 为拟阵的圈，当且仅当 C 为 $k+1$ 个元素组成. H 为拟阵的超平面，当且仅当 H 由 $k-1$ 个元素组成. 例如，$U_{2,3}$ 中的 E 视为欧氏空间里一条直线上的 3 点，每一个单点构成 $U_{2,3}$ 的超平面，每两点构成该拟阵的一个基，而全部三个点是它的惟一的圈.

拟阵的限约运算(restriction on matroid)　见“拟阵的删除运算”.

拟阵的收缩运算(contraction on matroid)　见“拟阵的删除运算”.

子拟阵(submatroid)　见“拟阵的删除运算”.

拟阵的次形(minor on matroid)　见“拟阵的删除运算”.

拟阵的自环(loop of matroid)　一种组合构形. 指拟阵中不构成独立集的单个元素集. 当拟阵为图拟阵 $M(G)$ 时，拟阵的自环和图 G 的自环是一致的. 拟阵的自环可等价地描述为：

1. 空集 $\varnothing$ 的闭包 $\overline{\varnothing}$ 中的元素.

2. $r(\{e\})=0$，r 为拟阵的秩函数.

3. 若包含 e 的集合 A 为拟阵 M 的支撑集，则 $A-\{e\}$ 亦为 M 的支撑集.

4. e 不在拟阵的任一基之中等.

与拟阵自环对应的有拟阵的单点割集：当 e 为对偶拟阵 M^* 的自环时，称 e 为拟阵 M 的单点割集.

单点割集(isthmus of matroid)　见“拟阵的自环”.

拟阵的并(union of matroids)　产生新拟阵的运算. 它是 E 上的两个拟阵 $M_1(E)$ 和 $M_2(E)$ 按如下方式产生新拟阵 $\widetilde{M}=(M_1\vee M_2)(E)$ 的一种二元运算：$I_1\cup I_2$ 为 $\widetilde{M}$ 的独立集，当且仅当 I_1 为 M_1 的独

立集或 I_2 为 M_2 的独立集. 其秩函数 $\tilde{r}$ 亦由 M_1, M_2 的秩函数 r_1, r_2 给出：

$$\tilde{r}(A)=\min_{H\subseteq A}\{r_1(H)+r_2(H)+|A-H|\}$$
$$=\max_{H\subseteq A}\{r_1(H)+r_2(A-H)\}.$$

对称地，有拟阵的交，可以对偶地表示为

$$M_1\wedge M_2=(M_1^*\vee M_2^*)^*.$$

拟阵的交(intersection of matroids)　见"拟阵的并".

拟阵的直和(direct sum of matroids)　拟阵的一种运算. 由拟阵 $M_1=M_1(E_1)$ 和 $M_2=M_2(E_2)$ 产生新拟阵 $M=M_1\oplus M_2$ 的二元运算，这里 E_1, E_2 满足 $E_1\cap E_2=\varnothing$. $E_1\cup E_2$ 的子集 B 为 M 的基，当且仅当 B 可表示为 M_1 的基 B_1 和 M_2 的基 B_2 的并集. M 的秩函数 r 由 M_1, M_2 的秩函数 r_1 和 r_2 给出：对于 $E_1\cup E_2$ 的任意子集 A，

$$r(A)=r_1(A\cap E_1)+r_2(A\cap E_2).$$

拟阵的贪婪算法(matroid greedy algorithm)　一种解决极值问题的算法. 具体地说，给出建立在拟阵 $M(E,\mathscr{I})$ 上的极值问题

$$\max_{I\in\mathscr{I}}\sum_{e\in I}w(e)$$

最优解的一类直接算法，其中 $w(e)\geqslant 0, e\in E$ 为定义在 E 上的权. 此算法的结论是，字典序最大的独立集是此问题的最优解. 换言之，把 E 中的元素按权从大到小排列，先取第一个元素，然后按序依次扩充独立集直到不能扩充为止，这样得到的独立集为问题的最优解. 具体的算法可写为：

1. $w(e_1)\geqslant w(e_2)\geqslant\cdots\geqslant w(e_n)$.
2. $B\leftarrow\varnothing$.
3. $i\leftarrow 1$.
4. IF $B\cup\{e_i\}\in\mathscr{I}$ THEN $B\leftarrow B\cup\{e_i\}$.
5. $i\leftarrow i+1$.
6. IF $i\leqslant n$ THEN GOTO 4.
7. STOP.

贪婪算法能够奏效，这对拟阵而言是本质的. 拟阵的独立性公理等价于下述条件：

1. 空集 $\varnothing$ 为 $\mathscr{I}$ 的元素.
2. $\mathscr{I}$ 的元素 J 的任意子集 I 仍为 $\mathscr{I}$ 的元素.
3. 对于 E 上的任意权 $w(e)\geqslant 0, e\in E$，均有独立集 I 使得

$$\sum_{e\in I}w(e)$$

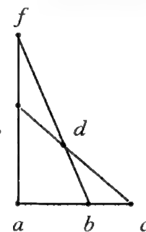
达到最大.

组合几何(combinatorial geometry)　一种组合构形. 它是既不含自环也不含平行元素的拟阵 $M(E)$. 这样的拟阵亦称简单拟阵. 从 $M(E)$ 上的闭包算子看，组合几何为满足下述条件的拟阵：

1. 空集 $\varnothing$ 的闭包 $\overline{\varnothing}=\varnothing$.
2. 对于 E 的任意元素 e，有 $\bar{e}=e$.

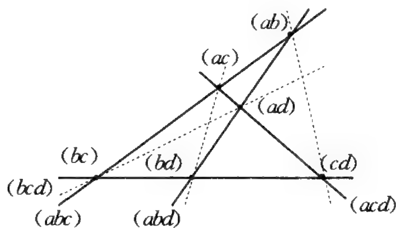
组合几何的点、线、面等分别为秩为 1,2,3 的平集，上点、上线、上面则分别为上秩为 1,2,3 的平集. 特别地，上点又称为组合几何的超平面. 组合几何关切的点、线、面这些基本要素的关系是由集合包容关系导出的序关系，一种特殊的关联关系，例如，一个点是否在一条线中，一条线是否在一个面中等. 其背景在具体意义上可以差别极大，既可以是集合划分之间的精细关系，也可以是连通图上边集构成的圈的关系. 当组合几何的维数较低时，可以把其点、线、面等要素之间的关联关系一一对应于投影空间上点集的线性相关性，从而使得组合几何具有明显的直观性.

考虑在投影平面 S 上的点 a,b,c,d,e,f 组成的点集 E，其中 $\{a,e,f\},\{a,b,c\},\{b,d,f\},\{c,d,e\}$ 共线如右图所示. S 中平集的秩为决定该平集的最少点数. 因此，此组合几何 $G(E)$ 的平集可由 S 上的平集 F 与 E 的交集 $F\cap E$ 给出，$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\}$ 为第一类平集，$\{a,b,c\},\{c,d,e\},\{b,d,f\},\{a,e,f\},\{a,d\},\{c,f\},\{b,e\}$ 为第二类平集. 它们的秩由满足 $F\cap A=A$ 的投影空间上的平集 F 的秩给出. 因此，第一类平集的秩为 1，这样它们是 $G(E)$ 中的点；而第二类平集的秩为 2，它们为 $G(E)$ 中的线，尽管平集 $\{a,d\},\{b,e\},\{e,f\}$ 中并没有联线，这是组合几何与投影几何的不尽相同之处.



简单拟阵(simplicial matroid)　见"组合几何".

划分几何(partition geometry)　一类组合几何. 它是由有限集 E 上的划分导出的组合几何. 设 $|E|=n$，划分 π 包含有 k 个划分块，记 π 的秩 $r(\pi)=n-k$. 因此，划分 π 为划分几何的一个点，当且仅当 π 的最大划分块惟一且仅含两个元素. 例如，$n=4$，$\pi_1=(ab)(c)(d)$，$\pi_2=(a)(bc)(d)$ 均为点. 此时，简记 $\pi_1=(ab)$，$\pi_2=(bc)$. 而划分 π 为线，既可为 $\pi_3=(abc)(d)$，也可为 $\pi_4=(ab)(cd)$ 等. 在划分几何中，点与线的共线关系由划分之间的精细关系决定. 例如，π_1,π_2 均为 π_3 的精细划分，所以，π_1 和 π_2 这两点均在线 π_3 之上. 其他如图所示. E 的元素可由划分 π 建立等价关系 (π)，$a(\pi)b$ 当且仅当 a,b 同属 π 的一个划分块. 对于任意划分 a 和 π 均可建立格的



结运算和交运算. $a(\pi\vee\sigma)b$ 当且仅当有元素 $u_0=a$, $u_1,u_2,\cdots,u_t=b$,使得对所有的 $0\leqslant i\leqslant t$ 有 $u_i(\pi)u_{i+1}$ 或 $u_i(\sigma)u_{i+1}$;$a(\pi\wedge\sigma)b$ 当且仅当 $a(\pi)b$ 且 $a(\sigma)b$. 从而,由划分几何导致格.

接合函数(incidence function)　亦称关联函数. 一类映射. 即从局部有限偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 的笛卡儿积集 $P\times P$,到数域 F 上且满足如下条件的映射 f:当 E 的任意元素 x,y 没有序关系,即 $x\not\leqslant y$ 时,$f(x,y)=0$. 从组合几何观点看,x,y 没有序关系也就是没有接合关系. 例如,δ 函数 $\delta(x,y)$ 仅当 $x=y$ 时其值为 1,其他情形均为 0;ζ 函数 $\zeta(x,y)$ 仅当 $x\leqslant y$ 时其值为 1,而其他情形均为 0. 若 $\mathscr{A}_F(p)$ 为如上所有接合函数组成的集合,并在其上定义接合函数的加法运算、数乘运算以及卷积运算:

$$(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y);$$

$$(rf)(x,y)=rf(x,y),r\in F;$$

$$(f*g)(x,y)=\sum_{x\leqslant z\leqslant y}f(x,z)g(z,y),$$

则称 $\mathscr{A}_F(P)$ 为 P 的接合代数. 而且它关于偏序集 P 是惟一的,不仅如此,当不同的偏序集 P_1,P_2 产生的接合代数 $\mathscr{A}_F(P_1)$ 和 $\mathscr{A}_F(P_2)$ 同构时,偏序集 P_1 和 P_2 亦同构.

关联函数(incident function)　即"接合函数".

接合代数(incidence algebra)　见"接合函数".

默比乌斯函数(Möbius function)　一类结合函数. 即从有限偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 的笛卡儿积集 $P\times P$ 映到整数集 $\mathbf{Z}$ 上且满足如下条件的映射 μ:

1. 若 $x\not\leqslant y$ 则 $\mu(x,y)=0$.

2. $\displaystyle\sum_{x\leqslant z\leqslant y}\mu(x,z)=\delta(x,y)$,

这里 $\delta(x,y)$ 的值仅当 $x=y$ 时为 1,其他均为 0. 条件 1和 2 分别对应于 x 和 y 之间无接合关系及有接合关系. 且条件 2 等价于 $\mu(x,x)=1$ 和

$$\mu(x,y)=-\sum_{x\leqslant z<y}\mu(x,z).$$

因此,$\mu(x,y)$ 的值可以从 $y=x$ 出发,依次递推地求出. 这表明 $\mu(x,y)$ 仅与区间 $[x,y]$ 有关,而与 P 的其他部分无关. 特别地,当 y 覆盖 x 时,$\mu(x,y)=-1$. 这样偏序集 P 的结构可表现为函数 $\mu(x,y)$ 的简洁数字值. 条件 2 还可代之以其对称形式:

$$\sum_{x\leqslant z\leqslant y}\mu(z,y)=\delta(x,y).$$

对于 P 上的函数 f 和 g,若 g 为 f 的和函数:

$$g(x)=\sum_{y\geqslant x}f(y),$$

则可借助于 μ 而把 f 表示出来

$$f(x)=\sum_{y\geqslant x}\mu(x,y)f(y).$$

从形式上看,若把 g 对应于积分,则 μ 对应于积分逆公式中的导数. 若 μ^* 为 P 的对偶偏序集 P^* 上的默比乌斯函数,则 $\mu^*(x,y)=\mu(y,x)$. 此外,对于偏序集 P 和 Q 的笛卡儿积集 $P\times Q$ 上的默比乌斯函数,有 $\mu_{P\times Q}((x,y),(u,v))=\mu_P(x,u)\mu_Q(y,v)$.

默比乌斯不变量(Möbius invariant)　一种度量. 指默比乌斯函数在拟阵 $M(E)$ 上的不变量,记为 $\mu(L)=\mu_L(0,1)$,这里 L 为 M 的平集构成的格,0 和 1 分别为 L 上的最小元和最大元,$\mu_L(x,y)$ 为格 L 上的默比乌斯函数. 对于 L 上的区间 $[u,v]$,其上的默比乌斯不变量为 $\mu_L(u,v)$. 这样可以把偏序集上的默比乌斯函数扩充到拟阵 $M(E)$ 上:当 X,F 均为 L 的元素时,取 $\mu_M(X,F)=\mu_L(X,F)$;当 F 为 L 的元素,而 X 不是 L 的元素时,取 $\mu_M(X,F)=0$;当 F 不是 L 的元素时,$\mu_M(X,F)$ 无定义;当 F 为 L 的元素,W 为 E 的子集时,

$$\mu_M(W,F)=\sum_{\substack{W\subseteq X\subseteq F\\ \overline{X}=F}}(-1)^{|X-W|},$$

其中,$\overline{X}$ 为 X 的闭包. 对于均匀拟阵 $U_{k,n}$,其默比乌斯不变量

$$\mu(U_{k,n})=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^{r+1}\binom{n}{r}\quad(0<k\leqslant n).$$

而对于布尔代数 $B_n=U_{n,n}$,$\mu(B_n)=(-1)^n$.

拟阵上的默比乌斯不变量 $\mu(M)$ 具有类似于图的不变量的如下性质:

1. 当 E 的元素 e 不是拟阵的单点割集时,则

$$\mu(M)=\mu(M-e)-\mu\left(\frac{M}{e}\right),$$

这里 $M-e$,$M\backslash e$分别为关于 e 的删除和收缩.

2. 若 M 为 M_1,M_2 的直接和,即 $M=M_1\oplus M_2$,则 $\mu(M)=\mu(M_1)\mu(M_2)$.

塔特-格罗腾迪克不变量(Tutte-Grothendieck invariant)　一种度量. 指拟阵 M 上的且满足如下条件的不变量 f:

1. 当拟阵 M_1,M_2 同构时,$f(M_1)=f(M_2)$.

2. 若 M 为 M_1,M_2 的直接和,即 $M=M_1\oplus M_2$,则 $f(M)=f(M_1)f(M_2)$.

3. 当 M 的元素 e 不是自环,或单点割集时,

$$f(M)=f(M-e)+f\left(\frac{M}{e}\right),$$

这里 $M-e$ 和$M\backslash e$分别为 M 关于 e 的删除和收缩.

例如,拟阵 M 的秩母函数为此类不变量:

$$R(M;u,v)=\sum_{X\subseteq E}u^{r(M)-r(X)}v^{|X|-r(X)}.$$

拟阵特征多项式(characteristic polynomial of matroid)　一类组合不变量. 拟阵 M 上的如下多项式:

$$P(M;\lambda)=\sum_{F\in L}\mu_M(\varnothing,F)\cdot\lambda^{r(M)-r(F)}.$$

这里 L 为 M 之平集组成的格,μ_M 为拟阵 M 上的默比乌斯函数. 当 $\lambda=0$ 时,$P(M,0)=\mu(M)$,即默比乌

斯不变量. 关于拟阵的直接和、删除运算和收缩运算，拟阵特征多项式具有类似于默比乌斯不变量的性质. 均匀拟阵 $U_{k,n}$ 和布尔代数 B_n 的特征多项式分别为：

$$P(U_{k,n};\lambda) = (-1)^{k-1}(\lambda-1)\sum_{j=0}^{k-1}(-\lambda)^j\binom{n-1}{k-1-j},$$

$$P(B_n;\lambda)=(\lambda-1)^n.$$

语集(language)　一类组合构形. 二元系统 $L=(A,\mathscr{L})$，其中 A 为由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的有限集，$\mathscr{L}$ 为若干词组成. 所谓词是以 A 的若干元素组成的序串，如 $\alpha=a_1a_2\cdots a_k$. $\mathscr{L}$ 中的词称为语集 L 的可行词，并约定空集 $\varnothing$ 为可行词. 对于 L 的每一可行词 $\alpha=a_1a_2\cdots a_k$，做集合 $\tilde{\alpha}=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$. 这样的 $\tilde{\alpha}$ 构成集族 $\widetilde{\mathscr{L}}$，记为 $\mathscr{F}$. 于是，语集 $L=(A,\mathscr{L})$ 导致组合系统 $\widetilde{L}=(A,\mathscr{F})$. 反之，亦可由组合系统，例如，拟阵 $M=(E,\mathscr{I})$ 按如下方式构造语集：A 为拟阵 M 的独立集，E 的元素组成的序串 $\alpha=a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为语集 L 的可行词，当且仅当 α 的字母均不相同，而且对于 $i=1,2,\cdots,k$，对称差

$$A\triangle\{a_1\}\triangle\{a_2\}\triangle\cdots\triangle\{a_i\}$$

均为 M 的独立集. 因此，语集这种有序系统亦可视作组合系统.

语集的性质一般由词的遗传性质和词的替换性质刻画. 换言之，可行词的哪一部分称为因子——仍为可行词. 而交换性质通常有如下的三条规定：

1. $a_1a_2\cdots a_k$ 为可行词，对于 A 的元素 a，$aa_1\cdots a_k$ 却不是可行词，则有 a_i 存在使得 $aa_1\cdots\hat{a}_i\cdots a_k$ 为可行词，这里 $\hat{a}_i$ 表示将 a_i 从词中消去.

2. 对于可行词 α,β，若 α 的长度小于 β 的长度，记为 $l(\alpha)<l(\beta)$，则在 β 中有子词 β' 存在，使得 $l(\beta')\geqslant l(\beta)-l(\alpha)$，且 $\alpha\beta$ 为可行词.

3. 对于可行词 α,β，若 $l(\alpha)<l(\beta)$，则在 β 中有 a 使得 αa 为可行词.

称词的元素均不相同的语集为简单语集；而词中相邻的元素均不相同的语集，称为正常语集.

从形式上，可以在语集上引入组合系统的一些基本概念. 称 L 的极大可行词为 L 的基词. 而在 $\widetilde{L}$ 上对于任意子集 X，定义秩函数

$$r(X)=\max\{|I|:I\subseteq X \text{ 且 } I\in\mathscr{F}\}.$$

但是，它们能起多大作用，只能视具体情况而定.

可行词(feasible word)　见"语集".

简单语集(simple language)　见"语集".

正常语集(normal language)　见"语集".

序阵(greedoid)　一种带一定条件的语集. 它是满足下述条件的一类简单语集 $G=(E,\mathscr{L})$：

1. 空集 $\varnothing$ 为可行词.

2. 将可行词 α 任意分解为因子 β 和 γ，$\alpha=\beta\gamma$，则 β 为可行词.

3. 对于任意可行词 α,β，若 α 中元素数目多于 β，即 $|\alpha|>|\beta|$，则在 α 中有元素 e，将其拼接到 β 之后，βe 仍为可行词.

条件 2 是序阵 G 满足的遗传性质，而条件 3 刻画了替换性质. 序阵 G 对应的组合系统记为 $\widetilde{G}=(E,\widetilde{\mathscr{L}})$，其中 $\widetilde{\mathscr{L}}=\{\tilde{\alpha}=\{a_1,\cdots,a_k\}\mid\alpha=a_1\cdots a_k\in\mathscr{L}\}$. 此时，条件 2 与 3 的无序形式分别为：

2′. 若 $A\in\widetilde{\mathscr{L}}$，则有 $e\in A$，使得 $A-\{e\}\in\widetilde{\mathscr{L}}$.

3′. 若 $A,B\in\widetilde{\mathscr{L}}$，且 $|A|=|B|+1$，则有 $e\in A-B$，使得 $B\cup\{e\}\in\widetilde{\mathscr{L}}$.

反之，若组合系统 $M=(F,\mathscr{F})$ 满足 1 和 3，则有惟一的序阵 $G=(E,\mathscr{L})$，使得 $\widetilde{\mathscr{L}}=\mathscr{F}$.

因此，在两种意义上序阵是拟阵的推广. 其一是从无序情形推广到有序情形；其二是若把它们都视为无序情形的组合系统，则序阵对应的遗传条件已大大减弱. 对拟阵而言，独立集的所有子集均仍为独立集. 对序阵而言，只要求一个次级子集仍为可行集. 这样，拟阵的许多良好性质，对于序阵而言均不复存在了. 例如，序阵一般不具有对偶结构；序阵的秩函数不再是次模函数，也不具有单一秩增性；序阵对应的多面体不再具有对偶全整性；贪婪算法对序阵不能奏效等. 然而，序阵在一定程度上刻画了某些组合问题. 例如搜索序阵. 设 r 为有向图 $G=(V,A)$ 上的特定节点，A 的子集 S 为其可行词，当且仅当 S 为以 r 为根的森林. 它的基词相应于 G 的以 r 为始点的搜索. 而当 G 为无向图时，设可行词为包含 r 的连通子图，这样得到的序阵称为线搜索序阵. 再如剥脱序阵. 对于图上的已知的树 T，当 T 删除掉节点集 X 之后仍保持连通，称此余留部分 $T-X$ 为序阵的可行词对应地亦可从边集产生剥脱序阵：对于边集的子集 X，当 $T-X$ 仍保持连通时，称其为序阵的可行词. 对弦图实施剥脱，则可获得弦图的剥脱序阵. 又如耳型分解序阵. e_0 为 2 连通图 $G=(V,E)$ 上的特定边，$E-\{e_0\}$ 的子集 X 为可行词，当且仅当 $X\cup\{e_0\}$ 连通，且 $X\cup\{e_0\}$ 每个不可分离块均为单一边组成，否则这块必包含 e_0.

搜索序阵(searching greedoid)　见"拟序".

剥脱序阵(deleting greedoid)　见"拟序".

耳型分解序阵(ear decomposing greedoid)　见"拟序".

多面体拟阵的序阵(polymatroid greedoid)　一种组合构形. 它是由多面体拟阵 (E,f) 派生的序阵 $G=(E,\mathscr{L}_f)$，这里 f 为符合要求的次模函数. 序串 $a_1a_2\cdots a_k$ 为序阵 G 的可行词，当且仅当对于任意的 $i=1,2,\cdots,k$，均有 $f(a_1,a_2,\cdots,a_i)=i$. 例如，在偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 上，对于 E 的任意子集 X，设

$f(X)$表示由 X 产生的理想$I(X)$包含元素的个数. 此时(E,f)为一多面体拟阵. 于是,可由(E,f)派生序阵,记为$G=(E,\mathscr{F})$,$X\in\mathscr{F}$ 当且仅当 X 为 P 上的一个理想. 称 $G=(E,\mathscr{F})$为偏序集序阵,或时间表序阵.

偏序集序阵(poset greedoid) 见"多面体拟阵的序阵".

时间表序阵(scheduling greedoid) 见"多面体拟阵的序阵".

序阵的秩函数(rank function of greedoid) 一类组合不变量. 设 $\tilde{L}=(E,\mathscr{F})$为组合形式序阵,对于 E 的子集 X,其秩函数为 $r(X)=\max\{|A|\,|A\subseteq X$ 且 $A\in\mathscr{F}\}$,并满足:

1. $r(\varnothing)=0$.
2. 对于 E 的任意子集 X,$r(X)\leqslant|X|$.
3. 对于 E 的任意子集 X,Y,若 $X\subseteq Y$,则 $$r(X)\leqslant r(Y).$$
4. 若 $r(X)=r(X\cup\{e_1\})=r(X\cup\{e_2\})$,则 $$r(X)=r(X\cup\{e_1\}\cup\{e_2\}).$$

在这里,本质的条件 4 表明序阵的秩函数不是次模函数. 与拟阵类似,一个序阵由上述四个条件决定的秩函数惟一确定.

撰　稿　颜基义
审　阅　丁　仁　马仲蕃

图与超图

图论(graph theory) 组合学的一个分支. 它所研究的是一个集合连同其上的一个二元关系所形成的模型,称之为图. 历史上最早以这种抽象的图的模型研究问题的是欧拉(Euler,L.),他于 1736 年,以这种抽象的模型解决了哥尼斯堡七桥问题,并且发现了一个图存在欧拉环游的条件. 此外,欧拉对图论的贡献还有:第一次引进了哈密顿圈;注意到多面体的顶点数、棱数和面数之间存在一个简单的关系. 他所解决的骑士在棋盘上的旅行路线问题就是讨论哈密顿圈的存在. 这些足以使他成为图论之鼻祖. 可惜的是在中国文化发展的浩瀚文献中除了几何图形之外竟至今还没有发现在 20 世纪之前有关这种抽象的图的蛛丝马迹.

图论的早期发展多起因于数学游戏. 欧拉之后半个世纪,高斯(Gauss,C. F.)提出棋盘上的 8 后问题,实际上相当在一图上求一个最大独立集. 他还研究过平面上的闭曲线的相交问题. 第一次引出一个序列的交图并且提出仅用交图之结构性质即可确定一个序列是否对应于一个平面闭曲线交点形成的序列的一个猜想. 19 世纪中叶,在利斯廷(Listing,J. B.)的文章中出现了迷宫的游戏. 其后,塔里(Tarry,G.)所提供的方法实际上就是人们今天所说的深探法和追踪法. 英国数学家柯克曼(Kirkman,T. P.)以他解决的 15 女生问题而著称. 实际上,这个问题可以转化为确定一个图的色数的问题. 1852 年,格思里(Guthrie,F.)提出四色问题. 40 年后,希伍德(Heawood,P. J.)又提出一般的地图着色问题. 1880 年泰特(Tait,P. G.)就注意到了 3 正则图的 1 因子分解. 1891 年,佩特森(Petersen,J.)证明了 3 正则图存在一个 1 因子,从而,真正开始了图的对集、因子以及因子分解的理性发展. 直到 1947 年,塔特(Tutte,W. T.)才建立了图的因子分解理论的成熟基础.

另一方面,从 19 世纪中叶起,首先是德国物理学家基尔霍夫(Kirchhoff,G. R.)从电网络的研究中发现图中的圈可以用基本圈表示,并且得到了基本圈的数目与图的节点数和边数的线性关系. 接着,凯莱(Cayley,A.)第一次使引进树,并且研究了各种树的计数,他在这方面的工作一直影响到 1935 年波利亚(Polya,G.)关于一般图的计数理论的建立,可惜的是,凯莱关于树的计数的成果开始并未在他的故乡英国引起注意,却很快在德国产生了影响. 由于那时布朗(Brown,A. C.)引进了原子的图形表示,所以这就使得树的计数可以直接应用到确定同分异构的碳水化合物的工作,这就是化学中应用图论的开端. 1878 年,西尔维斯特(Sylvester,J. J.)在他的学术文章中第一次用现代意义下"图"这个术语.

20 世纪初,开始跨入平面图的理论. 虽然,若尔当(Jordan,M. E. C.)首先意识到平面上不自交的闭曲线将平面分划为内、外部两个区域,但是,直到 1905 年,才由维布伦(Veblen,O.)给出第一个正确的证明. 20 世纪 30 年代初,库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)发表了第一篇判定一个图是否为可平面图的文章. 其后不久,惠特尼(Whitney,H.)的一系列有关图论的理论结果大部分是对于可平面图的,特别是他提出代数对偶的概念解决了判定图的平面性问题. 接着,麦克莱恩(MacLane,S.)、吴文俊、塔特等都曾相继在这方面建立了他们各自的理论. 在 20 世纪初,伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)第一次引进图的色多项式的概念并对此做了系统的研究,开辟了图论中一个重要新课题. 近半个世纪之后,塔特发展到范色多项式并且揭示了它与图的内在结构性质的关系,而这种关系在其后 20 余年琼斯(Jones,V. F. R.)发现的在 3 维空间中扭结的新的拓扑不变量——琼斯多项式中竟得到再现.

然而,不管怎样,塔特等人于 1940 年所发表的关于拼方的文章,创立了电网络上的一种数学理论,

解决了纯数学的一个难题，打开了现代图论研究的序幕.这篇文章不仅解决了拚方的问题，而且引出了一系列重要的图论问题，例如，图的连通性、定向、对称性以及还用到了平面性与对偶性等，这些至今在图论的研究中仍很活跃.尤其是他们所揭示的方法还深刻地影响到网络流的理论、曲面嵌入的理论，并促进了集以及因子分解的理论、着色理论，以至拟阵论与组合几何的形成与发展.

图论在近半个世纪以来的发展是空前的.除上面提及的一些重要方面外，还出现了极图理论、随机图论、代数图论、拓扑图论等新的分支.同时，也出现了各种统一性的理论研究，如超图、拟阵以至于组合几何，其发展更是日新月异.图论还广泛而且愈来愈深入地渗透和应用到其他科学中去.除原来在物理学和化学中的应用又得到广泛和深入的发展之外，还深入到了生物学和生物工程以及经济和社会科学的各领域.尤其值得注意的是，随着电子技术和现代计算机的发展，提出了层出不穷的新的数学问题，其中，很多问题与图论有密切的关系，对于它们的深入研究将会形成新的理论分支.例如，算法及其复杂性的理论和组合计算几何的出现与发展等，就是直接的产物.在图论近 50 年来的成果中，四色问题的计算机验证、希伍德地图着色问题的解决以及塔特多项式的出现等，也是对整个数学领域的重要贡献.

关于中国在图论方面近 30 年来的发展，可参见颜基义等人在《中国自然科学年鉴》1989 年卷的数学进展专栏中发表的文章.

撰　稿　刘彦佩
审　阅　徐利治　颜基义

图(graph)　图论的研究对象.一个图是一个集合上的一种二元关系.这个集合的元素称为图的节点，若两节点之间有这种确定的二元关系，则称有一条边连这两个节点.一个图的节点的数目称为这个图的阶；图的边的数目称为它的度.在文献中，总是将一般的图记为 $G=(V,E)$，其中，$V=V(G)$和 $E=E(G)$分别表示 G 的节点集和边集.

若有一条边连一个图的某两个节点，则称这两个节点相邻，并称这两个节点为这条边的端点.若某一节点是某一条边的端点，则称这个节点和这条边关联.若两条边和同一节点关联，则称这两条边相邻，两个端点是同一个节点的边称为环.若某条边的两个端点不是同一个节点，且只有一条边连这两个节点，则称这条边为杆.

只有一个节点而没有边的图称为平凡图；没有边的图称为孤立图.以某两节点为端点的边可能不止一条，这时称连这两个节点的边为重边.既可以有环，也可以有重边的图称为准图；没有环而可能有重边的图称为带重图；没有重边而可能有环的图称为带环图；既没有重边也没有环的图称为简单图.若一个图的阶是有限的，则称这个图为有限图，否则称这个图为无限图.每两个节点都相邻的简单图称为完全图.若一个 n 阶图的节点用 $1,2,\cdots,n$ 来代表，则称它为标定图.若在图的每一条边上赋以一个实数或者对于每个节点赋以一个实数，则称它为赋权图.

平凡图(trivial graph)　见“图”.

孤立图(isolated graph)　见“图”.

准图(pseudo graph)　见“图”.

带重图(multi-graph)　见“图”.

带环图(graph with loops)　见“图”.

简单图(simple graph)　见“图”.

完全图(complete graph)　见“图”.

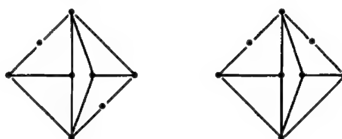
有限图(finite graph)　见“图”.

无限图(infinite graph)　见“图”.

标定图(labeled graph)　见“图”.

赋权图(weighted graph)　见“图”.

图的同构(isomorphism of graphs)　从抽象代数移植过来的术语.若图 G 的节点集和图 H 的节点集之间存在一个一一对应关系，使得 G 的任意两个相邻节点所对应的 H 的两个节点也相邻，反之亦然，则称图 G 和图 H 是同构的，记为 $G\cong H$ 或 $G=H$.这个一一对应关系称为 G 和 H 之间的一个同构.一个图的自同构是指这个图与它自身之间的一个同构.一个有割点的图的一次割点分裂是指该图的如下的运算：将这个图的一个割点分裂为两个节点，并将关联于此割点的诸边分为两部分，使它们分别与分割后的两节点关联，原来的连通分支变为两个连通分支.若连通图 G 经若干次割点分裂后所得的图与连通图 H 经若干次割点分裂后所得的图同构，则称 G 与 H 是 1 同构的.所有阶数相同的树都是 1 同构的，两个 2 连通图是 1 同构的当且仅当它们是同构的.一个图的旋转运算是指如下的图的运算：这个图有一 2 点割集$\{x,y\}$，将 x,y 各分裂为两个节点，使 x,y 所在的连通分支变为两个分支，再把其中一个连通分支的与 x,y 相应的两节点交换标记，然后再与另外一分支的同标记的 x,y 点分别粘合，使这两个分支又合为一个连通分支.若 2 连通图 G 经若干次割点分裂的运算和若干次旋转运算后所得的图与 2 连通图 H 经若干次割点分裂的运算和若干次旋转运算后所得图同构，则称 G 与 H 是



2 同构的. 例如下述两图是 2 同构,但不是 1 同构的.

自同构(automorphism)　见"同构".

1 同构(1-isomorphism)　见"同构".

2 同构(2-isomorphism)　见"同构".

割点分裂的运算(operation of cut point splitting)　见"同构".

旋转运算(rotation operation)　见"同构".

图的同态(homomorphism of graphs)　从抽象代数移植过来的一个术语. 若存在由图 G 的节点集到图 H 的节点集内的一个映射 φ,使得 G 的任意两个相邻节点所对应的 H 的两个节点也相邻,则称 φ 为从 G 到 H 中的一个同态. 若 H' 是 H 的这样一个子图,使得 $V(H')$ 是 $V(G)$ 在 φ 下的像,并且对于 H' 的任何一条边 (u',v') 都存在 G 的一条边 (u,v),有 $(u',v')=(\varphi u,\varphi v)$,则称 H' 为 G 在 H 中的同态像,记为 $H'=\varphi G$. 特别地,若 $H'=H$,即 $H=\varphi G$,则称 φ 为 G 到 H 上的一个同态. 若 H 是 G 的子图,则称 φ 为 G 的一个自同态. 若 φ 把 G 的两个不相邻的节点映射到同一节点,而使别的节点保持不变,则称 φ 为 G 的初等同态. 若 G 在 φ 下的同态像是一个 n 阶完全图,则称这个同态是一个 n 阶完全同态.

图的自同态(endomorphism of a graphs)　见"图的同态".

初等同态(elementary homomorphism)　见"图的同态".

***n* 阶完全同态**(n-complete homomorphism)　见"图的同态".

子图(subgraph)　图论的基本概念之一. 指节点集和边集分别是某一图的节点集的子集和边集的子集的图. 若这个节点子集或边子集是真子集,则称这个子图为真子图. 若图 G 的每一个节点也是它的子图 H 的节点,则称 H 是 G 的支撑子图. 设 S 是 $V(G)$ 的子集,以 S 为节点集,以 G 的所有那些两端点都在 S 内的边组成边集,所得到的 G 的子图称为 S 在 G 中的导出子图,或更确切地,节点导出子图. 设 B 是 $E(G)$ 的子集,由 G 的所有与 B 内至少有一条边关联的节点组成节点集,以 B 为边集,所得到的 G 的子图称为 B 在 G 中的边导出子图. 对于某种性质 P,若一个图的具有 P 的子图不是任何具有 P 的子图的真子图,则称它为具有 P 的极大子图. 在所有极大子图中,边数最多的那个称为最大子图.

真子图(proper subgraph)　见"子图".

支撑子图(spanning subgraph)　见"子图".

节点导出子图(vertex-induced subgraph)　见"子图".

边导出子图(edge-induced subgraph)　见"子图".

极大子图(maximal subgraph)　见"子图".

最大子图(maximum subgraph)　见"子图".

次形(minor)　一类特殊的图. 它是在一个图上通过一次或多次去掉边和(或)收缩边为一个节点的运算所得的图. 从图 G 的节点集 $V(G)$ 到图 H 的节点集 $V(H)$ 上的映射 φ,称 φ 为初等收缩. 若存在 G 的两个节点 u 和 v,使得:

1. G 中只有这两个节点 u 和 v 在 φ 下的像相同.

2. G 的任意两个不恰为 u 和 v 的节点在 G 上相邻,当且仅当 φu 和 φv 在 H 上相邻.

3. 对于 G 上任意一个不同于 u 和 v 的节点 w,φu 和 φw 在 H 上相邻,当且仅当 u 和 w 或 v 和 w 在 G 上相邻.

若从 $V(G)$ 到 $V(H)$ 上的映射是有限个初等收缩的合成,则称这个映射为一个收缩. 收缩是在图上做一系列收缩边为一个节点的运算. 相仿地,称从图中去掉一边的运算为初等去边,所谓去边是指在图上做一系列的初等去边运算.

收缩(contraction)　见"子形".

去边(deletion of edges)　见"子形".

图的同胚(homeomorphism of graphs)　两个图之间的一种关系. 若某两个图都能从同一个图经细分后得到,则称它们同胚. 所谓边细分是指从一个非空图依如下方式得到另一个图:去掉这个图上的一条边,添上一个新节点,并让这个新节点与被去掉的那条边的两端点分别有一条边相连. 所谓细分就是从一个非空图经一系列边细分所得到一个新图.

细分(subdivision)　见"图的同胚".

边细分(edge subdivision)　见"图的同胚".

部图(partite graph)　一类特殊的图. 即一个图的节点集可分成若干个子集,使得每一条边的两端点不在同一子集内. 若一个图的节点集能分成 k 个两两不交的非空子集,使得这个图的每一条边的两端点不在同一个子集内,则称这个图为 k 部图. 若 $k=2$,则称这种 k 部图为二部图;若 $k=3$,则称这种 k 部图为三部图. 若在一个 k 部图中,任一节点与其他部的所有节点都相邻,则称它为完全 k 部图.

二部图(bipartite graph)　见"部图".

三部图(tripartite graph)　见"部图".

***k* 部图**(k-partite graph)　见"部图".

完全 *k* 部图(complete k-partite graph)　见"部图".

次(degree, valency)　亦称度或价. 与节点有关的一个不变量. 一个图上某节点的次是指与这节点关联的边的数目. 注意,若一条边是环,则它在关联节点的次中数两次. 图上次为 1 的节点称为悬挂点;与悬挂点关联的边称为悬挂边. 一个图上某一节

点的邻域是指与这个节点相邻的所有节点组成的集合;这个节点的闭邻域是指由它和它的所有相邻节点所组成的集合.一个有向图上某一节点的出次是指从这个节点指向它的相邻点的所有边的数目;它的入次是指从它的相邻点指向它的所有边的数目.

悬挂点(articulate vertex) 见“次”.

悬挂边(articulate edge) 见“次”.

邻域(neighborhood) 见“次”.

闭邻域(closed neighborhood) 见“次”.

出次(out-degree) 见“次”.

入次(in-degree) 见“次”.

路(path) 图论的基本概念之一.指一个图上的边序列.若用 $v_0, v_1, \cdots, v_r$ 表示一个图上的 $r+1$ 个节点,而 $v_iv_{i+1}(0 \leqslant i \leqslant r-1)$ 表示以 v_i 和 v_{i+1} 为端点的边,则称边序列 $v_0v_1, \cdots, v_{r-1}v_r$ 为这个图上的一条迹,并称 v_0 和 v_r 分别为这条迹的始节点和终节点.若所有这些边两两不同,则称这条迹为径.若所有这些节点都不相同,则称这条径为路.并称这条路的长度为 r.若图上任意两节点均有路连结,则称该图连通.若一个图上的两条路没有公共边,则称这两条路为边不交;若一个图上的两条路没有公共节点,则称这两条路为点不交.若 $v_0, v_2, \cdots, v_r$ 是一个有向图上的节点,$v_iv_{i+1}(0 \leqslant i \leqslant r-1)$ 是从 v_i 指向 v_{i+1} 的有向边(也称为弧),则称边序列 $v_0v_1, \cdots, v_{r-1}v_r$ 是一条有向迹;若这些有向边两两互不相同,则称这条有向迹为有向径;若 $v_0, v_1, v_2, \cdots, v_r$ 是两两互不相同的节点,则称这条有向径为有向路.

图的迹(walk on a graph) 见“路”.

径(trail) 见“路”.

边不交(edge-disjoint) 见“路”.

点不交(vertex-disjoint) 见“路”.

有向迹(diwalk) 见“路”.

有向路(dipath) 见“路”.

圈(circuit) 图论的基本概念之一.指没有重复节点的闭径.始节点和终节点是同一节点的迹称为闭迹,或迁;始节点和终节点是同一节点的径称为闭径或游.含有 l 条边的圈称为 l 圈.这里 l 称为这个圈的长度.一个图上最长的圈的长度称为这个图的周长,最短的圈的长度称为这个图的围长.设 S 是图 $G=(V,E)$ 的节点子集,记 $\overline{S}=V-S$ 为 V 中除 S 中节点外的节点子集.若 S 和 $\overline{S}$ 在 G 上的导出子图是连通的,则边的子集 $(S,\overline{S})=\{(u,v)\in E \mid u\in s, v\in\overline{S}\}$ 称为 G 的一个上圈.任何一个上圈没有一个真子集也是上圈.在一个上圈中所含边的数目称为它的宽度.宽度为 l 的上圈称为 l 上圈.

迁(closed walk) 见“圈”.

游(closed trail) 见“圈”.

l 圈(l-circuit) 见“圈”.

图的周长(circumference of a graph) 见“圈”.

围长(girth) 见“圈”.

上圈(cocircuit) 见“圈”.

正则图(regular graph) 一类特殊的图.指所有节点的次都相同的图.节点的次为 k 的正则图称为 k 正则图.一个图上某一条边的次是指这个图上与这条边有公共端点的边的数目.所有边的次都相同的图称为边正则图.对于一个图,若存在正整数 k, λ, μ,使得下列条件成立,则称该图为强正则图:

1. G 是 k 正则图.

2. 对于图上任意两个不同节点 v 和 w,若 v 和 w 相邻,则 G 上与 v 和 w 都相邻的节点的数目是 λ,否则,G 上与 v 和 w 都相邻的节点的数目是 μ.

3. 正则图是指所有节点的次都是 3 的图.每个连通片不是圈就是二阶完全图,即由一条杆组成的图,称为一个半正则图.

边正则图(edge regular graph) 见“正则图”.

强正则图(strongly regular graph) 见“正则图”.

不变量(invariant) 图论的基本概念之一.指图的特征数,它们在组合同构的意义下保持不变.一个图的极大完全子图称为这个图的团.一个图的团数是指这个图上阶最大的团的阶.一个图 G 在某一曲面 S 上的一个描画是指 G 的不同节点到 S 上不同点,G 的边到 S 上的不同弧的一个映射,使得满足条件:

1. 在 S 上相应 G 的边的弧没有内点相应 G 的节点.

2. 任何一条边 vw 在 S 上的映射的像是以 v 和 w 对应的两个点为端点的弧.

若图还满足下列三个条件,则称其为一个好的描画:

1) G 的任意两条有公共端点的边在 S 上映射的像无公共内点(即不相交).

2) G 的任意两条边在 S 上的映射的像至多有一个交点.

3) G 的任意三条边在 S 上的映射的像不会交于同一内点.

一个图在平面上的一个好的描画的两条弧的交叉的点称为一个交叉,而一个图的交数就是指这个图的所有在平面上好的描画中,使得其交叉的数目最少的描画中交叉的数目.

设有一个图的某性质,若这个图的每个子图都有这个性质,则称该性质为传递的.设有一个图的自同构群,若对于该图上任意两个不同的节点,存在一个自同构映射把其中一个节点映射到另一个节点,则称该自同构群为可迁的.对于图 H,以 $k(H)$ 表示该图的连通片的数目.对于一个图 G,若从 $k(G-S)$

>1 能导出 $|S|\geqslant t\times k(G-S)$ 对 G 的任何一个节点集 S 成立，这里 $G-S$ 表示从图 G 上去掉 S 中每一节点后所得到的图，则称图 G 为 t 坚韧的. 若 G 不是完全图，则称使 G 为 t 坚韧的最大 t 值为 G 的坚韧度. 上面所述的团数、交数、遗传性、可迁性和坚韧度等都是图的不变量. 当然，除此以外图还有很多其他的不变量，例如：距离、复杂度、荫度、连通度、亏格、厚度、交数、色多项式、范色多项式等.

团数(clique number)　见"不变量".

交数(crossing number)　见"不变量".

遗传性(hereditary)　见"不变量".

坚韧性(toughness)　见"不变量".

可迁性(transitivity)　见"不变量".

距离(distance)　图论的基本概念之一. 指一个图上连两个节点的边数最少的路(即最短路)的边数. 常用 $d_G(x,y)$ 表示图 G 上节点 x 和 y 之间的距离. 一个图上距离最长的两节点的距离称为这个图的直径. 一个连通图的某节点的离心度是指这个图上所有别的节点与这个节点的距离中的最大值. 一个连通图的半径是指所有节点的离心度中的最小值. 一个图的中心是指由所有离心度与图的半径相等的节点组成的集合. 图的周点是指其离心度与图的直径相等的节点. 一个图上连两个节点的最短的路也称为该图的一条测地线.

图的直径(diameter a graph)　见"距离".

离心度(eccentricity)　见"距离".

图的半径(radius a graph)　见"距离".

图的中心(center a graph)　见"距离".

周点(peripheral point)　见"距离".

测地线(geodesic)　见"距离".

图的运算(operation)　由已知图产生出其他图的方法. 设 V_1 和 E_1 分别为图 G_1 的节点集和边集，V_2 和 E_2 分别为图 G_2 的节点集和边集. 图 G_1 与 G_2 的并，用 $G_1\cup G_2$ 表示，是指节点集为 $V_1\cup V_2$，边集为 $E_1\cup E_2$ 的图. 图 G_1 与 G_2 的交是指节点集为 $V_1\cap V_2$，边集为 $E_1\cap E_2$ 的图. 图 G_1 与图 G_2 的联是指节点集为 $V_1\cup V_2$，边集为 $E_1\cup E_2\cup J(V_1,V_2)$的图，这里$J(V_1,V_2)$表示由所有一端在 V_1 中另一端在 V_2 中的节点对作为边组成的集合. 图 G_1 与 G_2 的积，也称笛卡儿积，用 $G_1\times G_2$ 表示，是指这样的图：它的节点集为$\{(x,y)\}|x\in V_1,y\in V_2\}$，$(x_1,y_1)$与$(x_2,y_2)$相邻当且仅当 $x_1=x_2$ 且 y_1 与 y_2 在 G_2 上相邻，或 $y_1=y_2$ 且 x_1 与 x_2 在 G_1 上相邻. 图 G_1 与 G_2 的合成，或字典式积，是指这样的图：节点集为$\{x,y)|x\in V_1,y\in V_2\}$，两节点$(x_1,y_1)$与$(x_2,y_2)$有一条边相连，当且仅当 x_1 与 x_2 在 G_1 上相邻，或 $x_1=x_2$，且 y_1 与 y_2 在 G_2 上相邻，这个合成图常记为 $G_1[G_2]$.

一个图 G 的补图是指这样的一个图：节点集为 G 的节点集，两个节点有一条边相连，当且仅当这两个节点在 G 上不相邻，G 的补图常记为 G^C 或 $\overline{G}$. 一个图，若它的补图与它自身同构，则称为自补图. 设 H 是 G 的子图，从 G 中去掉所有 H 的边所得的图称为 H 关于 G 的相对补图. 图 G_1 与 G_2 的结合，记为 $G_1\otimes G_2$，是指这样的图：节点集是$\{(x,y)|x\in V_1,y\in V_2\}$，$(x_1,y_1)$与$(x_2,y_2)$有一条边相连，当且仅当 x_1 与 x_2 在 G_1 上相邻和 y_1 与 y_2 与 G_2 上相邻. 设 G_1 的阶为 k，$G_{2,1},\cdots,G_{2,k}$是 k 个与 G_2 同构的图，把图 G_1 的第 $i(1\leqslant i\leqslant k)$个节点与图 $G_{2,i}$上每一个节点相连，这样所得的图称为 G_1 对于 G_2 的冠，常记为 $G_1\circ G_2$.

补图(complement graph)　见"图的运算".

交邻图(intersection graph)　一类特殊的图. 它是由一个子集族产生的图. 设 $\mathscr{F}=\{S_1,S_2,\cdots,S_p\}$是由一个有限集 S 的 p 个不同的非空子集 S_1，$S_2,\cdots,S_p$ 组成的族. 以 $\mathscr{F}$ 为节点集，节点 S_i 和 S_j 有边相连当 $S_i\cap S_j\neq\varnothing$ $(i\neq j)$，这样所得的图称为 $\mathscr{F}$ 的交邻图，常记为 $\Omega(\mathscr{F})$. 以数轴上的一些区间作为节点，两节点有一条边相连当且仅当它们所对应的区间的交非空，这样所得的图称为区间图. 区间图还有两种有意义的推广. 一种叫盒图：节点集为 n 维立方体的集合，两节点相邻当且仅当它们对应的两个立方体相交. 另一种叫树路图：节点集为一树上的一些路组成的集合，两节点相邻当且仅当它们对应的两条路有公共部分(包括有公共端点). 若将节点代表平面上一个圆的不包括二端点的弦，两节点相邻当且仅当它们相应的弦有一个公共点，称这样的图为圆图.

一个图 G 的边图是指由 G 这样得到的图：节点集为 G 的边集，两节点有一条边相连当且仅当它们所对应的边在 G 中相邻. 常用 $L(G)$表示 G 的边图. 图 $L(G)$的边图称为 G 的 2 叠边图，常记为$L^2(G)$. 类似地，G 的 k 叠边图就是指 G 的$(k-1)$叠边图的边图，常记为 $L^k(G)$. 一个图 G 的团图是指这样的图：以 G 的每个团作为节点，两节点有一条边相连当且仅当它们所对应的团有公共节点. G 的团图常记为$\mathrm{cl}(G)$. $\mathrm{cl}(G)$也称为 G 的 1 叠团图. G 的$(k-1)$叠团图的团图称为 G 的 k 叠团图，常记为$\mathrm{cl}^k(G)$，$k\geqslant 2$. 一个图 G 的块图是指这样的图：以 G 的每个块作为节点，两节点有一条边相连当且仅当它们所对应的块有公共节点. G 的块图常记为$B(G)$. 一个图 G 的割点图是指这样的图；以 G 的每一个割点作为节点，两节点有一条边相连当且仅当它们所对应的割点在同一块中. G 的割点图常记为$C(G)$. 一个图 G 的块-割点图是指这样的图：以 G 的所有块和所有割点组成的集合为节点集，两节点有一条边相连，当

且仅当它们对应于一个块和一个割点,并且这个块含这个割点. G 的块-割点图常记为BC(G). 一个图 G 的 k 幂图($k\geqslant1$)是指这样的图:以 G 的节点集为节点集,两节点有一条边相连,当且仅当它们对应于 G 的节点在 G 上的距离最多为 k. G 的 k 幂图常记为 G^k. 当然,G 的 1 幂图就是 G 本身.

上面所列的图中,区间图、边图、团图、块图、盒图、圆图和树路图均是交邻图;但是,割点图、块-割点图和幂图皆非交邻图.

边图(edge graph) 见"交邻图".

区间图(interval graph) 见"交邻图".

树路图(tree path graph) 见"交邻图".

圆图(circle graph) 见"交邻图".

盒图(boxing graph) 见"交邻图".

团图(clique graph) 见"交邻图".

块图(block graph) 见"交邻图".

块-割点图(block-cutvertex graph) 见"交邻图".

幂图(power graph) 见"交邻图".

图的因子(factor of a graph) 图论的基本概念之一. 指图的一个支撑子图. 若一个图可以表示为若干个边不交的某些因子的并,则这个图对这些因子可进行因子分解. 图的这种表示称为图的因子分解. 一个图的 k 正则支撑子图称为它的 k 因子. 若一个图可以分解成若干个 k 因子的并,则称这种分解是这个图的 k 因子分解.

设有一个图的边集的一个子集,若其中的边都不是环,且互不相邻,则称该子集为这个图的一个对集. 一个图的边数最多的对集称为它的一个最大对集. 一个图的完满对集是指这样的对集:该图的每一个节点与这个对集中的一条边关联. 事实上,完满对集就是 1 因子. 设 M 是图 G 的一个对集,若 G 的一条路的每对相邻的边中都恰有一条是 M 中的边,则称这条路为 M 交错路. 若一个图只要表示成另外两个图的积,则这两图中必有一个为平凡图,这个图就称为素图. 不是素图的图称为复合图. 若一个图 G 可以惟一地表示成若干个非平凡素图的积 $G=G_1\times\cdots\times G_k$,则称 $G_i(1\leqslant i\leqslant k)$是 G 的素因子. 若两个图没有相同的素因子,则称这两个图为互素图. 若一个图 G 的支撑子图的每一个节点在这生成子图上的次均不大于 2,则这个支撑子图称为 G 的线性子图.

图的对集(matching of a graph) 见"图的因子".

完满对集(perfect matching) 见"图的因子".

交错路(alternative path) 见"图的因子".

素图(prime graph) 见"图的因子".

复合图(compound graph) 见"图的因子".

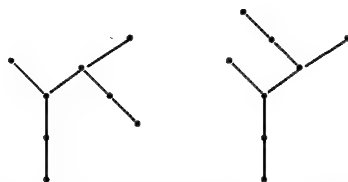
树(tree) 一类特殊的图. 没有圈的连通图称为树. 若 T 是图 G 的一支撑子图,且是树,则称 T 的对于 G 的补图 $\overline{T}$ 为上树,而称 T 为 G 的支撑树. G 的上树 $\overline{T}$ 的每一条边都称为 T 的弦. 每一条弦与 T 恰形成一个圈,称这种圈为基本圈. G 的支撑树 T 的每一条边称为 T 的杈. 每一条杈与 $\overline{T}$ 恰形成一个上圈,称之为基本上圈. 没有圈的图称为森或林. 自然,连通的森就是树. 以一个连通图 G 的各个支撑树的所有边的积为项,G 的树多项式(一个形式多项式)就是所有这些项的和,常记为 $P(T(G))$. 凯莱公式是计算带号完全图的不同带号树的数目的公式:n 阶带号完全图 K_n 的不同带号支撑树的数目为 n^{n-2}. 一个带号图中不同的带号支撑树的数目称为这个图的复杂度. 设 T 是一个树,v 是 T 上的一个节点. T 上以 v 为悬挂点的边数最多的子树的阶称为 T 上 v 的点权. 以 v 为悬挂点的 T 的极大子树,即这样的子树,它不是任何其他子树的真子树,称它为 v 处的枝. 可见,v 的点权就是以 v 为悬挂点的最大子树的阶数,或者说 v 处含边数最多的枝的阶. 连通图 G 的树图是从 G 派生出的一个图:G 的每一支撑树作为一个节点,两个节点有一条边相连,当且仅当它们所对应的支撑树各有一条边不是另一个树的边.

森(forest) 见"树".

树多项式(tree polynomial) 见"树".

树图(tree graph) 见"树".

根点树(rooted vertex tree) 一类特殊的树. 它是带有一个被指定的节点 r 的树. 这个被指定的节点称为根节点. 根节点的次为 1 的根树称为植树. 一个树的平面嵌入称为平面树. 当然,任何一个树都可以嵌入到平面上. 但是,嵌入的方式一般不惟一. 例如,在下图中所示的是同一个树的两个不同的平面树.



平面树(plane vertex tree) 见"根点树".

有向树(directed tree) 一类特殊的树. 它是每条边给予一确定的方向的树. 一个有向树,若有一个节点,存在由此节点到达任何别的节点的有向路,则称这个节点为源或根,称这个树为出树或外向树. 入树定义为这样的有向树:有一个节点,从任何一个节点出发都有树上的一个有向路达到这个节点. 这个节点称为这个入树的汇,也可以称为根. 出树和入树统称为树形图.

一个图 G 上的一个支撑树 T,若可以将它的边定向而成为一个外向树,使得所有对 T 的上树的边都存在一种定向得到一个有向基本圈,则称这个树

为深探树. G 的具有这种性质的定向的有向图称为它的棕图. 事实上,深探树可以用如下的方式得到:任选 G 的一个节点作为始节点标号为 0,达到它的一个邻节点. 每达到一个节点,若它的相邻节点均已标号,则沿达到此节点的边退回它的另一端点;否则,沿一条边达到一个未标号的节点,标此节点为最大标号加 1,并将此边记录下来;直到所有节点均已标号,这样,所有记录下来的边就是一个深探树. 这就是深探之由来. 若将树边定向为由小标号到大标号和上树边为从大标号到小标号,则可得一个棕图. 任取 G 的一个未注销的已标号节点(开始时,任取 G 的一节点并假定该点的标号为 1),从最大标号加 1 起,按自然顺序标号该节点的所有未标号邻节点,并记下该节点与这些节点之间的所有边,然后将该节点注销. 重复这样的过程,直到所有的节点都被注销为止,最终记录下来的边形成一棵树. 这样,所有记录下来的边也形成一个树,称它为广探树. 一个有向图,若其中没有有向圈,则称为无回路图. 如上所述,深探树和广探树均为外向树. 若在图中它们的上树边均定向为由小标号到大标号,则所得的有向图均为无回路图.

内向树(in-tree) 见"有向树".

外向树(out-tree) 见"有向树".

树形图(arborescence) 见"有向树".

深探树(depth-first tree) 见"有向树".

广探树(breadth-first tree) 见"有向树".

棕图(palm graph) 见"有向树".

无回路图(acyclic grahp) 见"有向树".

平面图(plane graph) 一类重要的图. 指任何一个图在平面上的一个嵌入. 即图的这样一种在平面上的表示:它的不同节点可用平面上不同的点表示,它的边用平面上连相应其二端点的两点的一条曲线或直线段表示,使得除两端点外与代表图的其他部分不再有公共点. 若把平面图上的点从平面上去掉,则在平面上剩下的点集为若干无公共点的连通开集的并,这些开集称为这个平面图的面. 平面图的节点常称为顶点. 与一个面关联的边的集合称为这个面的边界. 一个面的边界上边的数目(割边在边界上数两次)称为这个面的次. 包含无限远点的面称为无限面,其他的面为有限面. 一个平面图,若它的所有顶点全在无限面的边界上,则称它为外平面图. 设有一个平面图,若在它上不能再添加一条边使所得的图仍是平面图,则称该平面图为极大平面图. 设有一个平面图 G,若它的每一面的边界的次均为 3,则称 G 为平面三角割分图. 事实上,任何极大平面图都是平面三角割分. 若一个平面图的每条边都是直线段,则称为直线表示. 若一个直线表示的每个面均为凸多边形,则称为凸表示.

外平面图(outerplanar graph) 见"平面图".

极大平面图(maximal planar graph) 见"平面图".

有向图(directed graph,digraph) 一类重要的图. 它是对每一条边都规定一个方向的图. 确切地说,一个有向图 D,就是一个集合的二元组 $D=(V(D),A(D))$,其中$V(D)$是一个非空的有限集,其元素称为节点,$A(D)$是由$V(D)$的元素的一些有序对构成的集合. 称$A(D)$的元素为 D 的弧. 与弧关联的两个节点也称为它的端点,并规定弧的方向为从始端指向终端. 在一个有向图中,它的一个节点的出次就是离开这个节点的关联边的数目;入次就是指向这个节点的关联边的数目. 一个节点的次就是它的出次与入次的和. 若把一个有向图的每一条弧代之以无向的连结相同端点的边,则称所得图为该有向图的基础图或母图. 若把一个有向图的每一条弧代之以连结相同端点的相反方向的弧,则称所得有向图为原有向图的逆向图. 若在一个有向图上,每一条弧都有一条与它方向相反且端点相同的弧,则称这个有向图为对称有向图. 若存在一个整数 k,一个有向图的邻接矩阵的 k 次幂中的元素都为正数,则称这个有向图为本原有向图. 对于有向图有一些与方向有关的对偶概念,如出次和入次、出树和入树等. 若一个与方向有关的命题成立,将其中的概念换为其对偶概念,则所得命题也一定成立. 这就是方向对偶原则.

一个有向图 D 的基础图的一条路的所有边所对应的 D 中的弧的导出子图称为 D 的半路. 一个半路,若它的所有弧方向相同则称它为有向路. 类似地,D 的基础图的一个圈上所有边所对应的 D 中的弧的导出子图称为 D 的半圈. 一个半圈,若它的所有弧的方向相同,则称它为有向圈. 设有一个有向图,若对于其上任何两节点 u 和 v,存在从 u 到 v 或从 v 到 u 的有向路,则称该有向图为单向连通的. 设有一个有向图,若对于其上任何两节点 u 和 v,既存在从 u 到 v 的有向路,也存在从 v 到 u 的有向路,则称该有向图为双向连通或强连通的. 设有一个有向图,若对于其上任何两个节点,存在一条半路连这两个节点,则称该有向图为弱连通的. 设有一个单向连通有向图,若不是强连通的,则称为严格单侧有向图. 单向连通的有向图也称单侧有向图. 设有一个弱连通有向图,若不是单向连通的,则称为严格弱有向图. 设有有向图 D 的一个节点子集 S,若 S 是符合下列条件的极小集:S 中节点两两互不相邻,且 D 的每一节点或在 S 中,或存在一条弧从 S 中一节点指向它,则称 S 为 D 的 1 基,也称为核. 设有有向图 D 的一个节点子集 S,若 S 是符合如下条件的极小集:D 的每一个节点或在 S 中,或存在一条弧从 S

中一节点指向这一节点，则称 S 为 D 的点基. 一个有向图的点基是一个 1 基，当且仅当它在基础图中是独立的.

若一个有向图上每一节点的出次均为 1，则称它为功能有向图. 若一个有向图的每一节点的入次均为 1，则称它为逆功能有向图. 设 D 是一有向图，D 的弧有向图，常记为 $L(D)$，是指这样的有向图：以 D 的所有弧组成的集合作为节点集，两节点 u 和 v 有一条弧从 u 指向 v，若 u 所对应的 D 中的弧的终端与 v 所对应的 D 中的弧的始端是同一个节点. 一个有向图的一个子图称为它的强片，若它是这个有向图的一个极大强连通子图. 一个有向图的凝聚，是指一个这样的有向图 D^*：以 D 的强片作为节点，两节点 u_1 和 u_2 有一条弧从 u_1 指向 u_2，若 u_1 所代表的强片上有一节点与 u_2 所代表的强片上一节点相邻，并且前面一个节点指向后一个节点. 所谓竞赛图，是指基础图为完全图的有向图. 三个节点的竞赛图有如下两种：图(a)所示的称为可迁三元组；图(b)所示的称为循环三元组.



基础图(underlying graph)　见"有向图".

对称有向图(symmetric digraph)　见"有向图".

本原有向图(primitive digraph)　见"有向图".

单侧有向图(unilateral digraph)　见"有向图".

功能有向图(functional digraph)　见"有向图".

竞赛图(tournament)　见"有向图".

凝聚(condensation)　见"有向图".

连通片(component)　亦称连通分支或分图. 一类重要的图. 极大连通子图. 若对于一个图上任何两个节点，存在一条路连这两个节点，则称该图为连通的. 设有一个图的一节点，若从这个图上去掉这个节点以及与它关联的所有边后所得的图的连通片的数目比原图的连通片多，则称该结点为该图的一个割点. 没有割点的连通图称为块. 类似地，一个图的一条边称为它的割边，若从这图上去掉这条边后所得到的图的连通片比原图的连通片多. 一个连通图的一个节点子集 S 称为它的一个节点分离子集，若从这个图上去掉 S 中所有节点，以及与 S 中节点关联的所有边后所得到的图不再是连通图. 有 l 个节点的节点分离子集称为 l 点分离集. 当 $l=2$ 时，称为分离节点对. 设 H 是图 G 的子图，$G-E(H)$ 表示从图 G 上去掉 H 的所有边后所得到图. 图 H 在 G 上的一个断片是指 $G-E(H)$ 的这样一个子图：对于这个图上的任何两条边 e 和 f，存在 $G-E(H)$ 上的一条迹 W，其始边和终边分别为 e 和 f，使得除端点可能外，其他节点均不在 H 上. 一个图的原子是指将这个图的每个不相邻的分离节点对添上一边后所得图的极大 3 连通子图. 即，图中这样的 3 连通子图，它不是此图的任何 3 连通子图的真子图. 一个图的 k 连通片是指将这个图的每个 $(k-1)$ 点分离集中任何两个不相邻的节点都连上边后所得图的极大 k 连通子图.

块(block)　见"连通片".

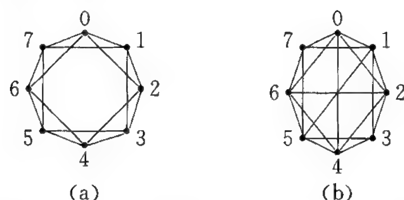
割点(cut-vertex)　见"连通片".

连通度(connectivity)　图的一类组合不变量. 它是节点连通度的简称. 一个图 G 的节点连通度是指这样一个最小整数 $k(G)$：G 上存在 k 个节点，从 G 上去掉所有这些节点以及和它们关联的所有边后，所得的图不再是连通图或者是平凡图. G 的节点连通度常记为 $k(G)$. 连通度不小于 k 的图称为 k 连通图. 一个连通图的边分离子集是指该图的这样一个边子集：从这个图上去掉这个边子集的所有边后，所得的图不再是连通的图. 不可分离图也就是指节点不可分离图，即没有割点的连通图，或者说是 2 连通图. 边不可分离图就是指没有割边的连通图. 图的边连通度就是指这样一个最小整数 $k_l(G)$：从这个图上去掉某 $k_l(G)$ 条边后所得的图不再是连通图. 常用 $k_e(G)$ 表示图 G 的边连通度. 边连通度不小于 k 的图称为 k 边连通图. 一个图上两个不相邻的节点 x 和 y 的局部连通度是指这样一个最小整数 k，从图上去掉某 k 个节点后，所得的图上不存在连 x 和 y 的路. x 和 y 的局部连通度记为 $k(x,y)$. 一个图 G 的连通度对是指这样一个自然数有序对 (a,b)：G 上存在 a 个节点和 b 条边，从 G 上去掉所有这些节点和边之后所得的图不再是连通图；而且，G 上不存在 $a-1$ 个节点和 b 条边，或 a 个节点和 $b-1$ 条边具有这一性质. 对于任意整数 a：$0\leqslant a\leqslant k(G)$，存在惟一一个连通度对 (a,b_a). 定义函数 $f(a)=b_a$. $0\leqslant a\leqslant k(G)$，称 f 是 G 的连通度函数.

连通度函数(connectivity function)　见"连通度".

门杰定理(Menger's theorem)　关于图的连通性的一个定理. 门杰定理断言：若 X 和 Y 是图 G 的两个不交的节点子集，k 是一个正整数，则 G 上存在 k 条分别以 X 和 Y 中的节点为端点而且两两除端点外互不交的路，当且仅当每一个 XY 分离点集包含至少 k 个节点. 上述的 XY 分离点集指 G 的这样一个节点子集，若从 G 上去掉该子集的所有节点，所得到的图不存在连 X 中节点与 Y 中节点的路. 这个定理是门杰(Menger, K.)于 1927 年首先发现的，

于是,由此而得名.



(a) (b)

$H_{m,n}$**图**($H_{m,n}$- graph) 一种特殊图.它有 n 个顶点,是 m 连通的且恰有$[mn/2]$条边.由于这种图是惟一确定的,所以称它为 $H_{m,n}$图.其中,$[x]$表示 x 的上整数,即不小于 x 的最小整数.事实上,$H_{m,n}$是 n 阶 m 连通的含边数最小的图.在图例中,(a) 所示的为 $H_{4,8}$;(b)所示的为 $H_{5,8}$.

模H 连通(modulo H connected) 图论的一个基本概念.指一个图关于其子图 H 的一种连通性.设 H 是图 G 的子图,所有那些既与 G 中不属于 H 的边关联,又与 H 中的边关联的节点称为 G 关于 H 的触点.若从 G 中去掉 H 的所有边和 H 的所有不是触点的节点后,所得的图是连通的,则称 G 是模 H 连通.当 H 是 G 中的一个圈 C 时,也称为模 C 连通.所谓 G 的模 C 片是 G 的这样的极大子图:任何两边都存在这个子图中的一条除端点可能外,其他节点都不是触点的路连结它们.一个连通图,若不能用去掉少于 n 条边的办法将它分离为两个连通片,使得每个连通片都含有一个圈,则称它为 n 圈连通图.

圈连通(circuit connected) 见"模 H 连通".

k **临界图**(k-critical graph) 一类特殊的图.指关于连通度的节点临界图.若对于图 G 上任一节点 v,都有 $k(G-v)<k(G)$,则称 G 是关于连通度的节点 k 临界图,或者点 k 极小图.若对于图 G 上任一边 e,都有 $k-(G-e)<k(G)$,称 G 为 k 极小图,或者边 k 极小图.

哈密顿圈问题(Hamilton circuit problem) 图论中著名的难题之一.设有一个图,若其上存在一个圈,这个圈包含该图上的每一节点,则称该圈为哈密顿圈,这个图称为哈密顿图.哈密顿圈问题可叙述为:什么样的图为哈密顿图,或者说判断一个图是哈密顿图的行之有效的充分必要条件是什么.目前这一问题尚未解决.关于哈密顿圈的研究,最早是欧拉(Euler,L.)研究骑士(相当于中国象棋中的马)从棋盘上的某一位置出发,走遍所有可能的位置且每个位置只通过一次后,回到原来的位置.而哈密顿(Hamilton,W. R.)研究环游世界的游戏是在欧拉之后近一个世纪,然而却由此开始引起人们对于这个问题的注意.实际上,哈密顿的游戏就是,在一个正十二面体上,从一个顶点开始沿着棱走遍所有的十二个顶点回到原地,使得每一顶点只通过一次.就是在十二面体相应的图上求一个哈密顿圈.若一个图上存在一条路,这条路包含该图上的所有节点,则称该图为可迹图,称这样的路为哈密顿路.若对于一个图上的每一节点,存在一个以该节点为始点的哈密顿路,则称该图为齐次可迹图.一个图被称为哈密顿连通图,若对于这图上任何两节点,存在一条哈密顿路连结这两节点.称一个图为亚哈密顿图,若从这图上去掉无论哪一节点,所得的图都是哈密顿图.称一个图为亚可迹图,若从这图上去掉无论哪一节点,所得的图都是可迹图.

哈密顿圈(Hamiltonian circuit(cycle)) 见"哈密顿圈问题".

哈密顿图(Hamiltonian graph) 见"哈密顿圈问题".

亚哈密顿图(hypohamiltonian graph) 见"哈密顿圈问题".

泛圈图(pancyclic graph) 一个特殊的哈密顿图.具体地说,若在一个 n 阶图 G 上存在长度分别为 $3,4,\cdots,n$ 的圈,则称该图为泛圈图.若对于 G 上任何一节点 v,在 G 中都存在长度分别为 $3,4,\cdots,n$ 的圈通过 v,则称 G 为点泛圈图.若对于图 G 上任何一条边 e,在 G 上都存在长度分别为 $3,4,\cdots,n$ 的圈通过 e,则称 G 为边泛圈图.设 G 是一个二部图,因为在 G 中没有奇长圈,所以不会是泛圈的.若在 G 上存在长度为 $4,\cdots,n-2,n$(n 偶数)的圈,则称它是泛偶圈的.类似地,定义点泛偶图和边泛偶圈.

闭包(closure) 图论的一个基本概念.指由一个图所派生出的另一个图.具体地说,一个图 G 的闭包 H 是指符合下列条件包含边最少的图:G 是 H 的支撑子图;对于 H 上任何两不相邻节点 v 和 w,都有 $\rho_H(v)+\rho_H(w)<n$,这里 n 表示 H 的阶,$\rho_H(v)$ 和 $\rho_H(w)$分别表示图 H 上节点 v 和 w 的次.所谓闭包运算,就是如下从图 G 得到它的闭包的递归过程:连通图 G 上任何一对不相邻且满足$\rho_G(u)+\rho_G(v)\geqslant n$ 的节点 u 和 v 连一边,这里$\rho_G(u)$和 $\rho_G(v)$ 分别表示 u,v 在 G 上的次,而 n 表示 G 的阶;对所得的图仍进行这种运算,直到得到这样的图 H,对于任何一对不相邻节点 u 和 v 均有$\rho_H(u)+\rho_H(v)<n$ 成立.奥尔(Ore,O.)于 1961 年证明:若一个连通的简单图 G,对于任何两个不相邻的节点,它们的次之和不小于 G 的阶,则 G 必为哈密顿图.称节点次之和特别是两个节点次之和所满足的条件为奥尔型条件.所谓一个图 G 的 k 闭包,是指符合下列条件且包含边最少的图 H:G 是 H 的支撑子图;对于 H 上任何两不相邻节点 v 和 u,都有 $\rho_H(v)+\rho_H(u)<k$,$0<k\leqslant 2n-4$.于是,n 阶图的闭包就是 n 闭包.这种与闭包运算类似的求一个图的 k 闭包的过程称为 k 闭包运算.设 P 是 n 阶图上的某种性质.在一

个 n 阶图 G 上的两个不相邻的节点 u,v,它们次之和$\rho_G(u)+\rho_G(v)\geqslant k$. 若 $G+(u,v)$(即在 G 上加一条新边所得的图)具有性质 P 可以导出 G 本身也具有性质 P,则称 P 是 k 稳定的. 若 P 是 k 稳定,则从一个图的 k 闭包具有性质 P 可以导出它本身也有性质 P. 具有哈密顿圈的性质是 n 稳定的.

奥尔型条件(Ore type condition) 见"闭包".

闭包运算(closure operation) 见"闭包".

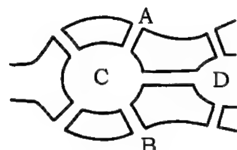
泛连通图(panconnected graph) 一个特殊的哈密顿连通图. 具体地说,若对于一个阶为 n 的图 G 上任意一对节点 u 和 v,G 上存在连结 u 和 v 的长度分别为 $d=d(u,v),d+1,\cdots,n-1$ 的路,这里 $d(u,v)$表示节点 u 和 v 的距离,则称 G 是泛连通图.

哈密顿路图(Hamiltonian path graph) 一类特殊的图. 指由一个哈密顿图派生出的一个图. 图 G 的哈密顿路图记为$H(G)$,它是这样一个图:它的节点集与 G 的节点集相同,两个节点相邻,当且仅当有一条哈密顿路连结它们. 进而,$H(G)$的哈密顿路图记为$H^2(G)$. $H^{k-1}(G)$的哈密顿路图记为$H^k(G)$, $k\geqslant 2$,称为 G 的 k 迭哈密顿路图. 若存在某个 $k,k\geqslant 1$,G 与$H^k(G)$同构,则称 G 为自哈密顿路图.

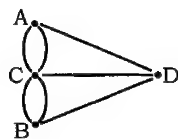
制约圈(dominating circuit) 亦称支配圈. 图上一种特殊的圈. 若图 G 的不在圈 C 上的每条边都与 C 上的某条边相邻,则称 C 为 G 的制约圈. 若一个制约圈 C 的长度为 λ,则称它为制约 λ 圈.

支配圈(dominating circuit) 即"制约圈".

哥尼斯堡七桥问题(Konigsberg bridge problem) 18 世纪提出的一个著名的图论问题. 实际上是寻找欧拉游(参见"欧拉图")的问题. 哥尼斯堡(即加里宁格勒)有一条带有两个岛的分叉河流,有七座桥连通河两岸与岛,以及岛与陆地. 在附图(a)中,阴影部分表示陆地、岛或桥. 问题是想要知道从一个区域出发,经过每座桥恰好一次,再回到原出发区域的旅行路线是否存在. 当时,人们多次试图找出这样的路线,但都没有成功. 这就是所谓的哥尼斯堡七桥问



(a)



(b)

题. 后来,欧拉(Euler,L.)首先证明了这样的路线不存在. 他所用的方法是将陆地和岛 A,B,C,D 各用一个点代替. 两个点用一条线连结,若这两个点所代表的两片陆地或岛间有一座桥,则得到如附图(b)所示的图,从而把原来的问题化为在这个抽象的图上求一个欧拉游的问题. 由此,欧拉通过证明一个一般的定理导出其上欧拉游的不存在,给原问题以一个否定的回答. 这一结果欧拉于 1735 年在科学院的会议上宣讲,于 1736 年正式发表. 这就是历史上图论的第一篇文章.

一笔画问题(unicursal problem) 一个重要的图论问题. 指确定一个图是否存在一条欧拉径(参见"欧拉图")的问题. 即判断一个图,其上是否存在一条径,这条径包含该图的每一条边恰好一次. 通俗地说,就是判断一个图,能否一笔画出一条径,通过该图的每一条边恰好一次. 若要求这个径的起点与终点一致,则它就成了判定一个图是否存在一个欧拉游的问题.

欧拉图(Eulerian graph) 一种特殊的连通图. 若图 G 的每一条边都在 G 的同一条径上,则称这条径为 G 的欧拉径. 若一个欧拉径的始点与终点相同,则称它为欧拉游. 有欧拉游的图称为欧拉图. 欧拉(Euler,L.)证明:一个连通图为欧拉图,当且仅当这图上每一节点的次均为偶数. 因为上述概念均为欧拉所首先发现,故均冠以他的名字. 所有节点的次均为偶数的图也称为偶图. 这样,连通的偶图是欧拉图.

欧拉游(Eulerian tour) 见"欧拉图".

欧拉径(Eulerian trail) 见"欧拉图".

偶图(even graph) 见"欧拉图".

欧拉有向图(Eulerian digraph) 一种特殊的强连通有向图. 若一个有向图 D 上存在一条有向闭径 C,使得 D 的每一条弧都在 C 上,则称 D 为欧拉有向图. 这种闭径被称为有向欧拉游.

BEST 定理(BEST-theorem) 一个重要的图论问题. 指有向图上的有向欧拉游的一个计数定理. 设 D 是一个有向图. 这个定理断言:在 D 上有向欧拉游的数目为

$$c\prod_{i=1}^{n}(\rho_i-1)!,$$

其中,ρ_i 表示 D 的第 i 个节点 v_i 的出次,n 表示 D 的阶,$c=\det M_{k,k}(D)$. $M_{k,k}(D)$是矩阵 $M(D)$去掉第 k 行和第 k 列后所得到的矩阵;$M(D)=(m_{i,j})$是这样一个 n 行 n 列矩阵:当 $i\neq j$ 时,$m_{i,j}=-a_{i,j}$,$a_{i,j}$表示 D 中从节点 v_i 指向 v_j 的弧的数目,当 $i=j$ 时,$m_{i,j}=\rho_i$. $M(D)$有下列性质:对于 $k_1\neq k_2$, $1\leqslant k_1<k_2\leqslant n$,有 $\det(M_{k_1,k_1}(D))=\det(M_{k_2,k_2}(D))$. 因此,可以用任何一个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$确定 c. BEST 中的字母 B,E,S,T 分别代表德布莱英(de Bruijn,N. G.)、爱伦法斯特(van. Aardenne-Ehrenfest,T.)、史密斯(Smith,C. A. B.)和塔特(Tutte,W. T.)四人. 前两人于 1951 年发表了这一定理的一般形式,后两人于 1941 年给出这一定理的当 D 的母图为 4 正则的特

殊情形.

制约集(dominating set)　图论的一个重要概念. 指一个图的特殊节点子集. 设 A 是图 G 的一个节点子集,若 G 的任何不在 A 中的节点都与 A 中的节点相邻,则称 A 为 G 的一个制约集. 图 G 的最小制约集的基数称为 G 的制约数,也称外固数.

制约数(domination number)　见"制约集".

外固数(external stability)　见"制约集".

制约划分(dominating partition)　图论的一个重要概念. 指图的节点集的一种划分. 具体地说,一个图 G 的制约划分,就是把 G 的节点集分为若干个互不相交的子集,每一个子集都是 G 的制约集. 在 G 的所有制约划分中,划分出的子集最多的那一个划分的子集的数目称为 G 的制约划分数.

制约划分数(domatic partition number)　见"制约划分".

独立制约集(independent dominating set)　图论的一个重要概念. 指图的一种节点子集. 具体地说,一个图的既是独立集又是制约集的节点子集,称为该图的独立制约集. 图的最小独立制约集的基数称为它的独立制约数. 若图 G 的节点集可以划分为若干个两两不交的独立制约集,则称 G 可独立制约划分.

独立制约数(independent dominating number)　见"独立制约集".

全制约集(total dominating set)　图的一种特殊的制约集. 具体地说,设有图 G 的一个节点子集 A,若对于 G 上任一节点 u,A 中存在与 u 相邻的节点,则称 A 为 G 的一个全制约集. 事实上,只有含孤立点的图上才不存在全制约集. 含节点数最少的全制约集称为最小全制约集. 不含孤立点的图的最小全制约集中的节点数称为全制约数. 设有不含孤立点的图的节点集的一个划分,若这一划分的每一个节点子集都是 G 的全制约集,则称该划分为一个全制约划分. 全制约划分数就是指在 G 的所有全制约划分中,划分所得的节点子集最多的那一个划分的子集数目.

最小全制约集(minimum total dominating set)　见"全制约集".

全制约数(total dominating number)见"全制约集".

全制约划分数(total dominating partition number)　见"全制约集".

连通制约集(connected dominating set)　图的一种特殊制约集. 具体地说,若 A 是图 G 的制约集,且 A 在 G 中的导出子图是连通的,则称 A 是 G 的连通制约集. G 的节点数最少的连通制约集的节点数称为 G 的连通制约数. 图 G 的节点集若可以划分为若干个两两不相交的连通制约集,则在 G 的所有这样的划分中,基数最大的划分的基数称为 G 的连通制约划分数.

连通制约数(connected dominating number)　见"连通制约集".

连通制约划分数(connected dominating number)　见"连通制约集".

无赘集(irredundant set)　图论的一个重要概念. 指图的节点集的一种子集. 设 S 是图 G 的一个节点子集,若对于任何 $w\in S$,都有

$$N[w]\not\subset\bigcup_{v\in S-\{w\}}N[v],$$

则称 S 为 G 的无赘集. 这里 $N[v]$ 表示节点 v 在 G 中的闭邻域. 不是别的无赘集的真子集的无赘集称为极大无赘集.

极大无赘集(maximal irredundant set)　见"无赘集".

覆盖(covering)　数学的一个重要概念. 这里指一类节点子集. 具体地说,图的一个节点子集使该图的每一条边都与这个子集中一个节点关联,称这样的节点子集为覆盖集,也称点覆盖集,简称覆盖. 图 G 的最小覆盖,也称最小点覆盖,是指在图的所有覆盖中,节点数最少的覆盖. G 的最小覆盖的节点数称为 G 的覆盖数,或点覆盖数,常记为 $\beta(G)$. 一个图称为覆盖临界图,或点覆盖临界图,若从这图上去掉任何一条边后,所得的图的覆盖数都小于原图的覆盖数. 设有一个最小覆盖 M,若对于它的任何一个子集 M',与 M' 中节点相邻的不在 M 中的节点的数目总不比 M' 的节点数少,则称 M 为一个外部最小覆盖或外最小点覆盖. 不是任何一图都有外最小覆盖. 事实上,一个图有外最小覆盖当且仅当它有一个点核,或边核.

覆盖集(covering set)　见"覆盖".

最小覆盖集(minimum covering)　见"覆盖".

覆盖数(covering number)　见"覆盖".

覆盖临界图(covering-critical graph)　见"覆盖".

边覆盖(edge covering)　一类覆盖. 指一类边子集. 具体地说,图的一个边子集,使该图上每一节点都与这个边子集中的一条边关联. 只有含孤立点的图没有边覆盖. 边覆盖也称为边覆盖集. 图 G 的最小边覆盖就是指边数最少的覆盖. 图 G 的最小边覆盖的边数称为 G 的边覆盖数,常记为 $\beta'(G)$.

最小边覆盖(minimun edge covering)　见"边覆盖".

边覆盖数(edge covering number)　见"边覆盖".

可约二部图(reducible bipartite graph)　一类

二部图. 设 $V_1\cup V_2$ 是二部图 G 的节点集, V_1,V_2 分别是 G 的独立集, 若 G 上只存在一个最小点覆盖 M, 且 $M\cap V_1=\varnothing$ 或 $M\cap V_2=\varnothing$, 则称 G 为半不可约二部图. 若 G 上存在恰好两个最小点覆盖 M_1 和 M_2, 且 $M_1\cap V_1=\varnothing$ 和 $M_2\cap V_2=\varnothing$, 则称 G 是不可约二部图. 既不是半不可约二部图, 也不是不可约二部图的二部图称为可约二部图.

独立集(independent set) 图论的一个重要概念. 由一个图的两两互不相邻的一些节点组成的集合称为该图的一个独立集. 一个图的独立集也称为稳固集. 图 G 的含节点最多的独立集称为最大独立集. G 的最大独立集的节点数称为 G 的独立数或内固数, 常记为 $\alpha(G)$. 图 G 被称为 α 临界图, 或独立临界图, 若从 G 上去掉任何一条边后所得的图的独立数都大于 $\alpha(G)$.

稳固集(stable set) 见“独立集”.

独立临界图(α-critical graph) 见“独立集”.

最大独立集(maximum independent set) 见“独立集”.

内固数(internal stability) 见“独立集”.

边独立集(edge independent set) 图论的一个重要概念. 由一个图的两两互不相邻且不是环的一些边组成的集合称为该图的一个边独立集. 图的最大边独立集, 就是指图的含边数最多的边独立集. 一个图 G 的边独立数, 就是指 G 的最大边独立集的边数, 常记为 $\alpha'(G)$.

最大边独立集(maximum edge independent set) 见“边独立集”.

边独立数(edge independent number) 见“边独立集”.

点核(vertex core) 图论的一个重要概念. 指图的一个子图. 由图 G 的基数与 G 的边覆盖数相等的所有独立集的并所产生的节点导出子图, 称为 G 的点核. 并非所有的图都存在点核. 由 G 的基数与 G 的点覆盖数相等的所有边独立集的并所产生的边导出子图, 称为 G 的边核. 同样, 并非所有的图都有边核. 但已证明: 一个图有点核当且仅当它有边核; 且它们都与存在外最小覆盖等价.

边核(edge core) 见“点核”.

临界边(critical edge) 图论的基本概念之一. 临界边是这样的边: 从一个图上去掉它之后, 能使所得图的点覆盖数减小. 设 e 是 G 上一条边, 若点覆盖数 $\beta(G-e)<\beta(G)$, 则称 e 是 G 的关于点覆盖的临界边, 简称临界边. 若 G 的每一条边都是关于点覆盖的临界边, 则称 G 为关于点覆盖的边临界图.

边临界图(edge critical graph) 见“临界边”.

临界点(critical vertex) 图论的基本概念之一. 与临界边相对应. 临界点是这样的节点: 从一个图上去掉它后, 能使所得的图的(点)覆盖数减小. 设 v 是 G 的一个节点, 若 $\beta(G-v)<\beta(G)$, 则称 v 为 G 的一个关于(点)覆盖的临界点. 若 G 的每一个节点都是它的关于(点)覆盖的临界点, 则称 G 为关于(点)覆盖的点临界图.

点临界图(vertex criticcal graph) 见“临界点”.

C 对集(C-matching) 图的一种子图. 对于一个有 n 个节点的图 G, 给定一个 n 维向量 $C=\{h_1, h_2,\cdots,h_n\}$(其分量都是非负整数)和 G 的无孤立节点的子图 H, 若使得 $\rho_H(v_i)\leqslant h_i, i=1,2\cdots,n$, 则称 H 为 G 的一个 C 对集, 这里 v_i 表示 G 上第 i 个节点, 而 $\rho_H(v_i)$ 表示 v_i 在 H 上的次. 对于任何非负整数 $a,b, 0\leqslant a<b$, 图的一个 (a,b) 对集就是它的这样一个边导出子图 H, 使得 $a\leqslant\rho_H(v_i)\leqslant b, i=1,2\cdots, n$. 若 $a>0$, 则 (a,b) 对集就是一个 (a,b) 因子.

(a,b) 因子((a,b)-factor) 图的一种支撑子图. 设 a,b 是非负整数, $0<a\leqslant b$. 设有 G 的支撑子图 H, 若对 G 上任一节点 v, 均有 $a\leqslant\rho_H(v)\leqslant b$, 则称 H 为 (a,b) 因子. 这里 $\rho_H(v)$ 表示节点 v 在 H 上的次. (k,k) 因子就是 k 因子. 所有的 k 因子($k=1,2,\cdots$)统称为正则因子. 每一个节点的次均为奇数的因子称为奇因子. 每个节点的次均为偶数的因子称为偶因子. 设 $F_1,\cdots,F_m$ 都是 G 的一些 (a,b) 因子, 若

$$E(G)=\bigcup_{i=1}^{m}E(F_i),$$

$$E(F_i)\cap E(F_j)=\varnothing\quad(i\neq j),$$

则称 $\{F_1,F_2,\cdots,F_m\}$ 为 G 的一个 (a,b) 因子分解. 这里 $E(X)$ 表示 $X(=G,F_i,i=1,2,\cdots,m)$ 的边集. 若 G 有一个 (a,b) 因子分解, 则称 G 可 (a,b) 因子分解.

正则因子(regular factor) 见“(a,b) 因子”.

奇因子(odd factor) 见“(a,b) 因子”.

偶因子(even factor) 见“(a,b) 因子”.

f 因子(f-factor) 图的一类特殊因子. 对于一个图 G, 定义 $f:V(G)\to\mathbf{Z}_+$, $\mathbf{Z}_+$ 表示非负整数集. 若 G 的一个支撑子图 F 满足: 对 G 的任一节点 v, $\rho_F(v)=f(v)$ 成立, 则称 F 为 G 的一个 f 因子. 若 G 的子图 F 满足: 对于 G 的任一节点 v, 均有 $\rho_F(v)\neq f(v)$, 则称 F 为 G 的一个 f 反因子. 称二部图 $K_{1,j}(j\geqslant 1)$ 为一个星. 若 G 的子图 F 是一个星 $K_{1,j}$, 且满足 $f(v)\geqslant j\geqslant 1$, 这里 v 是 F 的中心点, 即 $\rho_F(v)=j$, 则称 F 为一个 f 星形. G 的一个子图被称为 f 星因子, 若这个子图的每一连通片是一个 f 星形. 若 $f(v)=n$, 对 G 的任一节点成立, 则称 G 的 f 星因子为 $\{K_{1,1},K_{1,2},\cdots,K_{1,n}\}$ 因子. 统称所有 $\{K_{1,1}, K_{1,2},\cdots,K_{1,n}\}$ 因子为星因子.

f 反因子(f-antifactor) 见“f 因子”.

星因子(star factor) 见“f 因子”.

(g,f)奇偶因子((g,f)-parity factor)　图的一类特殊因子.设g,f是定义在图G的点集上的两个非负整数值函数,且$g(v)\leqslant f(v)$,$g(v)\equiv f(v) \pmod 2$对G上任一节点v成立.设有G的支撑子图F,若F满足:对于G上任一节点v,均有

$$\rho_F(v) \in \{g(v), g(v)+2, \cdots, f(v)\},$$

则称F为一个(g,f)奇偶因子.若$g(v)=1$对G上任一节点v成立,则称G的(g,f)奇偶因子为$(1,f)$奇因子.

$(I,\mathbf{Z})$因子($(I,\mathbf{Z})$-factor)　图的一类特殊的因子.设I是非负整数集$\mathbf{Z}_+$的一个子集,若G的一个支撑子图H满足条件:对G上任一节点v,都有$\rho_H(v)\in I$,则称H为G的$(I,\mathbf{Z})$因子,这里$\rho_H(v)$表示v在H上的次.若$I=\{1,3,\cdots,2n-1\}$,则称G的$(I,\mathbf{Z})$因子为$\{1,3,\cdots,2n-1\}$因子.

C_l因子(C_l-factor)　图的一类特殊因子.图G的一个支撑子图H,H的每个连通片都是长度为l的圈.若H的每一连通片都是长度为l的路,则称H为P_l因子.若H的每一连通片均与完全图K_l同构,则称H为G的K_l因子.更一般地,对于任给两个图H和L,若G的连通片不与H同构就与L同构,则称G为一个(H,L)因子.若H的连通片与一族树中的某个树同构,则称H为G的一个树-因子.若H的每个连通片与G的一个团同构,则称H为G的团-因子.

树-因子(tree-factor)　见“C_l因子”.

团-因子(clique-factor)　见“C_l因子”.

因子临界图(factor critical graph)　一类具有特殊性质的图.若从G中任意去掉一个节点和与这节点关联的边,在所得的图中总有一个1因子,则称G为因子临界图,或更确切地说,1因子临界图.凡因子临界图必只能有奇数个节点,从而不可能有1因子.若一个图G有一个1因子,但任意去掉两个相邻的节点及它们的关联边之后所的图仍有1因子,则称G为1临界图.若图G有1因子,而且任意去掉两个不同的节点之后所的图仍有1因子,则称G为2临界图.凡2临界图必为1临界图,但反之则不然.

荫度(arboricity)　图论中的一个不变量.设$H_1,H_2,\cdots,H_m$是G的支撑子图,且都是森.若

$$E(G)=\bigcup_{i=1}^{m}E(H_i),\quad E(H_i)\cap E(H_j)=\varnothing,$$

则称$\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$为G的一个森分解.在G的所有森分解中,含森最少的森分解中森的数目,称为G的荫度.若H_i是线性森,即其每一连通片是一条路,则在G的所有线性森分解中,含森最少的分解中的线性森的数目,称为G的线性荫度.图G的点-荫度定义为符合如下条件的最小整数k:G的节点可分成k个不交的子集,每一个节点子集的导出子图都是森.图G的线性点-荫度定义为符合下列条件的最小整数k:G的节点集可分成k个不交的子集,每一个节点子集的导出子图是一个线性森.

因子覆盖图(factor covered graph)　一类特殊的图.指每一条边都在同一种因子之中的图.若图中的每一条边都包含在某个1因子之中,则称G为1因子覆盖图.G的节点v称为完全覆盖点,若v的每条与之关联的边均有G的一个1因子包含它.

半正则1因子分解(semiregular 1-factorization)　图的一种因子分解.指完全图K_{2n}的一种1因子分解.设$\mathscr{F}=\{F_i \mid 1\leqslant i\leqslant 2n-1\}$是图$K_{2n}$的一个1因子分解,若对于$\mathscr{F}$中任意四个不同的1因子$F_i,F_j,F_k,F_m$,$F_k\cup F_m$和$F_i\cup F_j$中各种长度的圈的数目都对应相等,则称这个1因子分解是半正则的.K_{2n}的一个1因子分解$\mathscr{F}$称为是完满的,若对于$\mathscr{F}$中任意两个不同的1因子F_i和F_j,$F_i\cup F_j$都是K_{2n}的一个哈密顿圈.

完满1因子分解(perfect 1-factorization)　见“半正则1因子分解”.

同构因子分解(isomorphic factorization)　图的一种特殊的因子分解.图G的边集$E(G)$的一个划分$\{E_1,E_2,\cdots,E_m\}$称为G的一个同构因子分解,若对于任意i,j:$1\leqslant i<j\leqslant m$,$E_i$与$E_j$在$G$上的导出子图同构.图$G$可分解为$t$个同构因子的一个必要条件是$t$可整除$G$的边数.这个条件称为$G$关于$t$的可分性条件.称图$G$是有理图,若对任意整数$t$,$G$关于$t$的可分条件也是$G$可同构因子分解的充分条件.已经证明:完全图和完全等分多部图(即,将完全图的节点用基数相同的独立集代替使得任一节点与其他部的所有节点都相邻)等都是有理的.当然,不是任何图都是有理的.

有理图(rational graph)　见“同构因子分解”.

正常着色(proper coloring)　一种组合方法.指对一个集合中元素的一种着色方法.设有一个集合A,在A的元素间有一种二元关系R.若将A中的元素着以颜色使得A中任何两个满足R的元素均带不同的颜色,则这种着色方法为A对于R的正常着色.若A为一个图G的节点集,这二元关系R就是相邻,则称这种着色为G的点正常着色,通常简称正常着色或着色.若一种着色中所用颜色的数目为k,则称这种正常着色为k点正常着色.若取A为图G的边集,R为边之间的相邻,则这种正常着色称为G的边正常着色,常简称边着色.若图G的一种边正常着色共用k种不同的颜色,则称它为G的k边正常着色.对于一个图的某种点正常着色,着相同色的节点所组成的集合称为一个色组.对于一平面图或曲面上的地图的面集,面的相邻关系的正

常着色，通常简称面着色．若一个面正常着色中共用 k 种颜色，则称它为 k 面正常着色，也称为 k 面着色．所谓全正常着色，就是对于一个图的节点集和边集的并在相邻（当两元素同为节点或同为边时）或关联（当一个元素为节点另一个为边时）关系下的正常着色．全正常着色常简称全着色．

色组(color class)　见"正常着色"．

色数(chromatic number)　一类组合数．指图的所有同类型的正常着色，用的颜色的数目最少的那种正常着色所用颜色数目．一个图 G 的点正常着色的色数称为点色数或简称色数．常用 $\chi(G)$ 表示图 G 的色数．图 G 的边色数是指 G 的边正常着色的色数．G 的边色数常记为 $\chi'(G)$．平面图 G 的面色数就是 G 的面正常着色的色数，常记为 $\chi^{*}(G)$．图 G 的全色数就是 G 的正常全着色的色数．常记为 $\chi_T(G)$．全着色猜想就是：对任意简单图 G，$\chi_T(G)\leqslant\Delta(G)+2$，$\Delta(G)$ 表示 G 中节点的最大次．已经证明：对于任何 n 阶图 G，当 $\Delta(G)\leqslant4$ 或 $\Delta(G)\geqslant n-5$ 时，全着色猜想成立．图 G 的 n 色数指如下着色的最少色数：用若干种色，对图 G 的节点着色，使得 G 上每条长度为 n 的路上没有两个节点着同一色．G 的 n 色数常记为 $\chi''(G)$．类似地，定义 n 边色数和 n 全色数．一个图 G 完全着色是指 G 的这样一种点正常着色，使得对于这一种着色的任何两色，都存在 G 的一边，它的两个端点恰着此两色．图 G 的完全着色数，就是指在 G 的所有完全着色中，所用颜色数目最少的那一种完全着色的颜色数．若图 G 本身不是完全图，则将它的不相邻的两节点等同为一个节点；若所得到的图仍不是完全图，则继续做这种运算，直到所得的图为完全图．一个图，通过这种运算将它变为完全图所需要的最小运算次数称为 G 的消色数．换言之，G 的消色数就是将 G 变换到完全图所需要做的初等同态的最小次数．

全着色猜想(total coloring conjecture)　见"色数"．

k 可着色图(k-colorable graph)　一类特殊的图．存在 k 点正常着色的图，称为 k 正常可着色的图．类似地，存在 k 边正常着色的图，称为 k 边可着色图．

色临界图(color critical graph)　亦称点着色临界图．一类与色数有关的极图．图 G 为色临界图是指：若对于 G 上任一节点 v，有 $\chi(G-v)<\chi(G)$，其中，$\chi(X)$ 表示图 $X(X=G-v$ 或 $G)$ 的色数．称图 G 为边色临界图，若对 G 的任一边 x，图 $G-x$ 的边着色数

$$\chi'(G-x)<\chi'(G),$$

其中，$\chi'(X)$ 表示图 $X(=G$ 或 $G-x)$ 的边色数．

惟一 k 可着色图(uniquely k-colorable graph)　一种特殊的 k 可着色图．图 G 的一个 k 正常着色的所有色组构成 G 的节点集 V 的一个划分．若 G 的所有正常 k 着色（k 固定）都导致 V 的同样的划分，则称 G 是惟一 k 可着色图．设图 G 的边色数为 k，若 G 的任意两个 k 边正常着色，都导出其边集的相同划分，则称 G 为惟一 k 边着色图．

哈约斯猜想(Hajos' conjecture)　图论的一个猜想．指关于图的着色的一个著名猜想：若图 G 为 k 色图，则 G 包含 k 阶完全图 K_k 的一个剖分图．这是哈约斯(Hajos，G.)于 1961 年提出的．所谓一个图的基本剖分，就是从这图上去掉一条边（设以 u,v 为端点），添上一个新节点 w，并添上两条边 (w,u) 和 (w,v)（分别以 w,u 为端点和以 w,v 为端点的边）．G 的一系列基本剖分构成 G 的一个剖分．换句话说，哈约斯猜想：若图 G 的色数为 k，$k\geqslant1$，则 G 有一个子图与 K_k 同胚．这个猜想对 $k\leqslant4$ 成立；对 $k\geqslant7$ 卡弗林(Caflin，P. A.)1974 年已举出反例；目前仅剩下 $k=5,6$ 尚未解决．

维津定理(Vizing theorem)　关于图的边着色的一个定理．若 G 是简单图，则 $\Delta\leqslant\chi'(G)\leqslant\Delta+1$，其中，$\Delta$ 表示 G 上次最大的节点的次，$\chi'(G)$ 表示边色数．这个定理是维津(Vizing，V. G.)于 1964 年发表的．由此可以将简单图分为二类：对任意简单图 G，若 $\chi'(G)=\Delta$，则称 G 为第 1 类图；否则，称 G 为第 2 类图．

哈德威格猜想(Hadwiger's conjecture)　关于图的着色的一个著名猜想：若 G 是着色数为 k 的图，则 G 可收缩为 K_k，即有 k 个节点的完全图．由于这个猜想是哈德威格(Hadwiger，H.)于 1943 年首次提出的，从而得名．已经证明：当 $k=4$ 时，这个猜想成立；$k=5$ 时，它与四色猜想等价．因此，它比四色猜想更难．

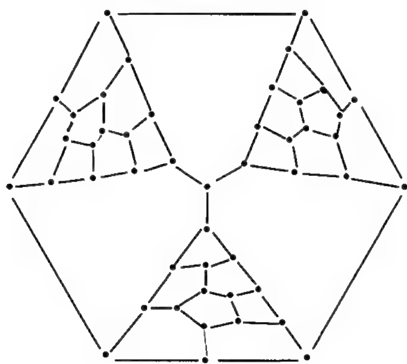
四色猜想(four-color-conjecture)　图论中的最著名猜想之一：任何平面图 G 的色数均不超过 4，即 $\chi(G)\leqslant4$．阿佩尔(Appell，L. P. (É.))和哈肯(Haken)于 1976 年宣称他们已借助于计算机证明了这个猜想．

四色问题最早是由格思里(Guthrie，F.)于 1852 年提出来的．凯莱(Cayley，A.)于 1879 年在英国皇家地理学会的会刊上刊出了这个问题．不久，肯普(Kempe，A. B.)发表了第一个"证明"．紧接着，泰特(Tait，P. G.)也提出了一个"证明"．前一个在 10 年后被希伍德(Heawood，P. J.)否定，同时，他用肯普的方法证明了五色定理：对于平面图 G，有 $\chi(G)\leqslant5$．后一个则是在一个世纪之后被塔特(Tutte，W. T.)否定．四色定理的研究对于图论的发展已经产生并将继续产生深刻的影响．

五色定理(five-color theorem)　见"四色

猜想”.

泰特猜想(Tait's conjecture)　关于图的着色的一个著名猜想. 3 正则图的 3 边正常着色称为泰特着色. 泰特猜想:每个简单 3 正则 3 连通平面图都有泰特着色. 它与四色猜想等价. 泰特(Tait,P. G.)曾根据“每个 3 正则 3 连通平面图都是哈密顿图”的错误假设,给出了四色猜想的一个“证明”. 塔特(Tutte,W. T.)于 1946 年构造了一个 3 正则 3 连通的平面图,在这图上不存在哈密顿图. 这个图称为塔特图. 由此推翻了泰特于 1880 年给出的四色猜想的“证明”. 塔特图在下面的附图中给出.



塔 特 图

塔特图(Tutte graph)　见“泰特猜想”.

完美图(perfect graph)　一种特殊的简单图. 若图 G 的任意一个节点导出图 H 的色数 $\chi(H)$ 等于 H 的团数,则称 G 是 χ 完美图. 若图 G 的任意一个节点导出子图 H 的独立数 $\alpha(H)$ 等于 H 的团划分数,则称 G 是 α 完美图. 弱完美图猜想:G 是 χ 完美图的充分必要条件是 G 为 α 完美图;或等价地,完美图的补图是完美图. 由于它已获证,并称为完美图定理,这就允许不必区别 χ 完美图和 α 完美图,而统称为完美图. 强完美图猜想:G 是完美图当且仅当 G 和 G 的补图 G^C 都不含长大于 3 的奇圈作为节点导出子图. 这个猜想至今尚未得到证明.

完美图猜想(perfect graph conjecture)　见“完美图”.

全三角图(triangulated graph)　一类特殊的图. 设有一个图,若它的任何一个长度大于 3 的圈都有一个弦在它的边集中,则称该图为全三角图. 所谓一个圈的弦,就是指连结这个圈上两个不相继的节点的边. 一个图中的任何一个节点导出子图,若它是一个长度大于 3 的圈,则称它为这个图的洞. 若一个节点导出子图对于同阶完全图的补是一个圈,则称它为这个图的一个反洞. 强完美图猜想也可以叙述为:一个图若不是完美图,则它必有一个奇洞或奇反洞.

洞(hole)　见“全三角图”.

反洞(antihole)　见“全三角图”.

团划分(clique partition)　图论的基本概念之一. 指分节点集为几部分. 严格说,即把图的节点集划分为若干个子集,使每一子集的导出子图都是团. 所谓图 G 的团划分数就是指在 G 的所有团划分中,含团最少的那个团划分中团的数目. 团划分数是图的一个不变量.

团划分数(clique partition number)　见“团划分”.

极图(extremal graph)　一类特殊的图. 指阶数一定在某种意义下最大的图. 给定一个图族 $\mathscr{L}$,在所有 n 阶图中含边最多,不以 $\mathscr{L}$ 中图为其子图的图. 这个给定的图族 $\mathscr{L}$ 称为禁用图类. 关于 $\mathscr{L}$ 的全部 n 阶极图的集记为 $\mathrm{Ex}(n,\mathscr{L})$,其中每个极图边数相等,记为 $\mathrm{ex}(n,\mathscr{L})$. 例如,$T_{m,n}$ 图,即有 n 个节点,各部节点数分别为 $[n/m]$(即 n/m 的整数部分)或 $[n/m]+1$ 的完全 m 部图,就是一个极图. 其中,$\mathscr{L}$ 是 $m+1$ 阶完全图. $T_{m,n}$ 常称为图兰图. 事实上,有图兰定理:在所有不含完全图 K_n 作为子图的 m 阶图中,边数最多的图只有一个,就是 $T_{m,n-1}$. 它第一次出现在图兰(Turán,P.)1941 年发表的文章中,由此而得名.

图兰图(Turán graph)　见“极图”.

次色数(subchromatic number)　图论的基本概念之一. 指给定的禁用图类 $\mathscr{L}$ 中所有图的色数最小值与 1 的差. 禁用图类 $\mathscr{L}$ 的次色数记为 $\psi(\mathscr{L})$. 禁用图类 $\mathscr{L}$ 的分解是指有如下性质的图 M 组成的集合:设 $\mathscr{L}$ 的次色数为 p,对于 $\mathscr{L}$ 中一个图 L,M 是 L 的一个导出子图,且从 L 中去掉所有 M 的节点和它们的关联边所得的图是 $(p-1)$ 可着色的. 所谓分解定理是指如下结论:设禁用图类 $\mathscr{L}$ 的次色数为 p,$\mathscr{L}$ 的分解为 μ,则每个 n 阶极图 $G_n\in\mathrm{Ex}(n,\mathscr{L})$ 可由适当的完全 p 部图 $K_{n_1,\cdots,n_p}$ 改变 $O(\mathrm{ex}(n,\mu))$ 即 $\mathrm{ex}(n,\mu)/n$ 的常数倍条边得到. 这里

$$n_i(n/p)+O(\mathrm{ex}(n,\mu)/n),$$

$$\delta(G_n)=(1-p^{-1})n+O(\mathrm{ex}(n,\mu)/n),$$

$\delta(G_n)$ 表示 G_n 中节点的最小次.

反极图问题(inverse extremal problem)　图论的一个重要问题. 指由极图序列反求常用图类的问题. 具体地说,对于一个给定的图序列 $\{S^m\}$,反求对应于 $\{S^m\}$ 的禁用图类,使 $\{S^m\}$ 是对于它的一个极图序列的问题. 对于充分大的 m,一个禁用图类 $\mathscr{L}$ 以图兰图 $T_{m,n}$ 为极图的充分必要条件是:存在 $L\in\mathscr{L}$,以及 L 上一条边 e,使得 $\chi(L-e)=\psi(\mathscr{L})=n$,其中,$\chi$ 和 ψ 分别表示色数与次色数. 进而,若对无穷多个 n 的值 $T_{m,n}$ 是 $\mathscr{L}$ 的极图,则对充分大的 m,它是对于 $\mathscr{L}$ 的惟一的极图. 以上结论,就是所谓的

$T_{m,n}$定理.

$T_{m,n}$定理($T_{m,n}$ theorem)　见“反极图问题”.

退化极图问题(degenerate extremal problem)　图论的一个重要问题. 指关于次色数为 1 的禁用图类的极图问题. 若禁用图类 $\mathscr{L}$ 的次色数大于 1,则称关于 $\mathscr{L}$ 的极图问题为非退化极图问题.

超饱和图(supersaturated graph)　一类特殊的图. 指边数超过极图边数的图. 若一个 n 阶图 G 的边数大于$\mathrm{ex}(n,\mathscr{L})$,则称 G 为对于禁用图类 $\mathscr{L}$ 的超饱和图. 其中,$\mathrm{ex}(n,\mathscr{L})$为对于 $\mathscr{L}$ 的 n 阶极图中的边数.

稳定性定理(stability theorems)　图论的重要定理之一. 描述极图偏离程度的定理. 一般指第一稳定性定理和第二稳定性定理. 第一稳定性定理如下:设 $\mathscr{L}$ 是一禁用图类,其次色数为 p,对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_\varepsilon>0$ 和正整数 $n_\varepsilon>0$,满足条件:若 n 阶图 G_n 不含任何 $L\in\mathscr{L}$,及 $n>n_\varepsilon$,且 G_n 的边数大于$\mathrm{ex}(n,\mathscr{L})-\delta_\varepsilon n^2$,则 G_n 可由 $T_{n,p}$改变最多 εn^2 条边得到. 第二稳定性定理如下:设 $\mathscr{L}$ 是禁用图类,次色数为 p,分解为 $\mu,k>0,G^n\in\mathrm{Ex}(n,\mathscr{L}),S_1,\cdots,S_p$ 为它的最优划分,$G_i=\langle S_i\rangle$,若

$$e(G^n)\geqslant\mathrm{ex}(n,\mathscr{L})-k\cdot\mathrm{ex}(n,\mu),$$

则有下面的结论:

1. G^n 可由 XG_i 删除 $O(\mathrm{ex}(n,\mu))$条边得到.

2. $e(G_i)=O(\mathrm{ex}(n,\mu))+O(n)$,

$$|V(G_i)|=(n/p)+O(\sqrt{\mathrm{ex}(n,\mu)}).$$

3. 对任意常数 $c>0,G_i$ 中满足 $a(v)\geqslant cn$ 的顶点数仅为 $O(1)$,满足 $b(v)\geqslant cn$ 的顶点数仅为

$$O(\mathrm{ex}(n,\mu)/n)+O(1).$$

4. 设 $L\in\mathscr{L},|L|=r$,若 A_i 为 S_i 中满足 $b(v)\leqslant[n/2pr]$的顶点 v 的集合,则图$\langle A_i\rangle$不含 L.

以上叙述中最优划分是指失去边最少的划分. $a(v)$和$b(v)$分别表示顶点 v 处失去和增加的边数. X 表示联图的运算符号. 第二稳定性定理以极图偏离 XG_i 的程度描述了极图的稳定性.

渐近构造定理(asymptotic structure theorem)　图论的重要定理之一. 利用图兰图 $T_{n,p}$来描述极图构造的定理. 设 $\mathscr{L}$ 是一个禁用图类,次色数为 p,如果一个 n 阶图 $G_n\in\mathrm{Ex}(n,\mathscr{L})$,则 G_n 能从 $T_{n,p}$删去或添上 $o(n^2)$(即量级小于 n^2)条边得到,其中,$\mathrm{Ex}(n,\mathscr{L})$表示对于 $\mathscr{L}$ 的 n 阶极图的集合. 进而,若 $\mathscr{L}$ 是一个有限图类,则

$$\delta(G_n)/n=1-p^{-1}+o(1),$$

这里$\delta(G_n)$为 G_n 中节点的最小次.

拉姆齐扰动(Ramsey perturbation)　见“渐近构造定理”.

色扰动定理(chromatic perturbation theorem)　见“渐近构造定理”.

拉姆齐数(Ramsey number)　图论的重要函数之一. 它是一个以两个正整数作为变量的函数. 设 m 和 n 为正整数. 所谓拉姆齐数,常用 $r(m,n)$表示,是指符合一定条件的 p(图的阶数)的最小值. 任何一个 p 阶的图 G,若不含完全图 K_m 作为一个子图,则必有一个含 n 个节点的独立集. 一个(m,n)拉姆齐图是指阶为 $r(m,n)-1$,既不含 m 个节点的完全图作为子图,也不含 n 个节点的独立集的图. 设 $k_1,k_2,\cdots,k_q$ 是 q 个正整数,所谓广义拉姆齐数 $r(k_1,k_2,\cdots,k_q)$,是指符合下列条件的 p 的最小值:对于 p 阶完全图 K_p,用 q 种色$(c_1,c_2,\cdots,c_q)$对 K_p 的边任意着色,则存在某一色 c_i,所有着这一种色的边的导出子图包含 K_{k_i}作为一子图. 对于正整数 m,n,所谓边拉姆齐数 $r_1(m,n)$,就是指符合如下条件的 p 的最小值:对于任何一个 p 阶的图,其上必有 m 条边两两互不相邻,或有 n 条边以同一节点为端点. 关于 $r(m,n)$的存在性,是由拉姆齐(Ramsey,F. P.)首先给出的.

拉姆齐图(Ramsey graph)　见“拉姆齐数”.

舒尔定理(Schur's theorem)　源于数论中的一个定理. 设 r_n 表示当 $k_1=\cdots=k_n=3$ 时的广义拉姆齐数 $r(3,\cdots,3)$. 将整数集$\{1,2,\cdots,r_n\}$任意划分为 n 个子集 $S_1,S_2,\cdots,S_n$,

$$\bigcup_{i=1}^{n}S_i=\{1,2,\cdots,r_n\},\quad S_i\cap S_j=\varnothing\ (i\neq j),$$

则必有某个 S_i 包含 x,y 和 z,并满足 $x+y=z$. 这里不要求 x,y 和 z 互不相同. 以上结论称为舒尔定理,因为是由舒尔(Schur,I.)于 1916 年发表的. 由这个定理可知,存在一个最小的整数 s_n,使得任意划分$\{1,2,\cdots,S_n\}$为 n 个子集 $S_1,S_2,\cdots,S_n$,都存在一个 S_i 包含 x,y,z,满足 $x+y=z$,这个最小数称为舒尔数.

舒尔数(Schur number)　见“舒尔定理”.

可平面图(planar graph)　一类特殊的图. 指同构于某一平面图的图. 库拉托夫斯基定理给出了可平面图的特征,其内容为:图 G 是可平面图当且仅当 G 没有同胚于完全图 K_5 和完全二部图 $K_{3,3}$的子图. 同胚于 K_5 和 $K_{3,3}$的图称为库拉托夫斯基图. 这一定理是由库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)于 1930 年证明的. 若可平面图 G 不是任何同阶其他可平面图的子图,则称 G 为极大可平面图. 极大可平面图所对应的平面图的每个面都必为三角形. 同构于外平面图的图称为外可平面图. 3 正则的可平面图称为 3 正则平面图. G 是外可平面的当且仅当 G 没有与完全图 K_4 同胚的子图.

库拉托夫斯基图(Kuratowski's graphs)　见“可平面图”.

库拉托夫斯基定理(Kuratowski' theorem) 见"可平面图".

平面对偶图(dual graph) 一类特殊的图. 指由一个平面图派生出的另一平面图. 在平面图 G 的每个面内选取一点作为顶点,对于 G 的任一条边 e,将与其相邻的两个面内的顶点用一条仅与 e 有一交点且不与图 G 的其他任何边相交的简单曲线连结,这样得到的平面图称为 G 的平面对偶图,记为 G^*. 亦称 G^* 为 G 的几何对偶. 平面对偶具有对称性,即,若 G^* 为 G 的平面对偶图,则 G 亦为 G^* 的平面对偶图. 附图中的实线和虚线分别代表互为对偶的两个平面图. 若图 G 和 G^* 的边集间可建立一个一一对应,使得任何一对对应边集 E_1 和 E_1^* 有以下关系:

$$r^*(G\backslash E_1)=r^*(G)-r(\langle E_1^*\rangle),$$

其中,$r^*(G)$ 和 r 分别为图的上秩和秩,$\langle E_1^*\rangle$ 为边集 E_1^* 在 G^* 上所导出的支撑子图,则 G^* 称为 G 的代数对偶. 代数对偶也具有对称性,即,若 G^* 为 G 的代数对偶,则 G 也为 G^* 的代数对偶. 若 G 有平面对偶,则 G 是可平面的. 反之,任何可平面的图也必有代数对偶. 这就是惠特尼定理,它是由美国数学家惠特尼(Whitney,H.)于 1933 年首先发现的. 这个定理使人们可以不必区别可平面图的几何对偶与代数对偶. 若 G 的平面对偶 G^* 与 G 本身同构,则称 G 为自对偶图.

几何对偶(geometric dual) 见"平面对偶图".

代数对偶(algebraic dual) 见"平面对偶图".

惠特尼定理(Whitney theorem) 见"平面对偶图".

欧拉公式(图论)(Euler formula in graph theory) 拓扑图论的重要公式. 它联系平面图的几个拓扑不变量. 该公式为

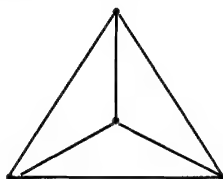
$$v-\varepsilon+\varphi=w+1,$$

其中,v 为顶点数,ε 为边数,φ 为面数,w 为连通片数. 当 $w=1$ 时,即得到连通平面图的欧拉公式

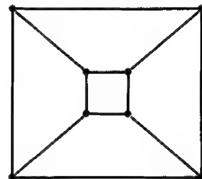
$$v-\varepsilon+\varphi=2.$$

由欧拉公式可推知一个可平面图虽然可能有不同的平面嵌入,但它的所有平面嵌入的面数都是一样的. 欧拉(Euler,L.)于 1750 年告诉哥德巴赫(Goldbach,C.),他发现了这个关系在 $w=1$ 时的情形,但未能证明. 而于 1758 年他给出了证明,但有缺陷. 勒让德(Legendre,A.-M.)于 1794 年给出了一个新的较简单的证明. 此后,柯西(Cauchy,A.-L.)将它推广到不连通的平面图的情形,即带有 w 的一般情形. 虽然如此,上述公式仍一直保持以开创者欧拉的名字命名. 对于其他曲面上的欧拉公式可参见"拓扑图".

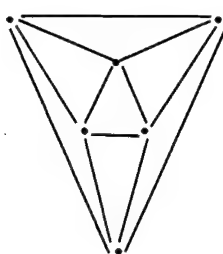
柏拉图图(Plato graphs) 一类重要的图. 正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体所相应的图的统称. 所有顶点的次都相同的平面图称为点正则平面图. 所有面的边界上含有相同的边数的平面图称为面正则平面图. 既是点正则又是面正则的平面图称为全正则平面图. 利用欧拉公式可以推出只有 5 个柏拉图图是全正则平面图. 四千年前在埃及的金字塔显示了那时人们已经开始了解多面体,两千余年前的古希腊人对数学上的这种正多面体存有特殊的兴趣. 那时的希腊人已经知道以上的 5 种正多面体. 因为柏拉图(Plato)为当时几何学的代表人物,由此而得名.



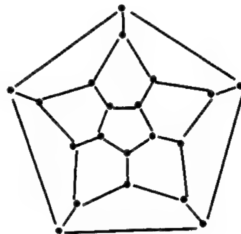
正四面体图



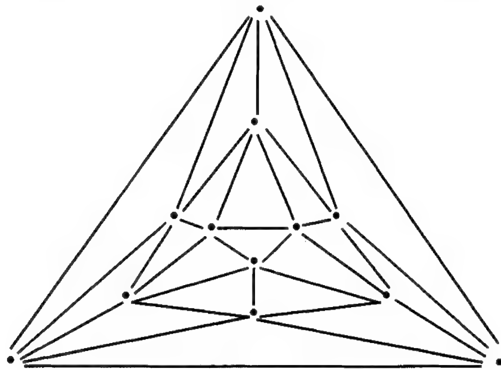
正六面体图



正八面体图



正十二面体图

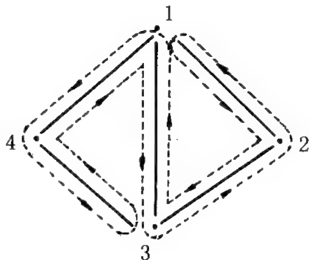


正二十面体图

正则平面图(regular planar graph) 见"柏拉图图".

平面图码(code of a plane graph) 一种组合构形. 指表示一个平面图的一个数字(或符号)串. 由

于用数字串表示一个平面图可以有各种不同方式，从而它的码也是多种多样的. 例如，将图的顶点用 $1,2,\cdots,n$ 表示. 任选定一边和它的一个端点. 以这个端点为起点沿着这个选定的边走到另一端，并将表示此两端点的数字依次记录下来. 然后，依如下两个规则走，直到返回到起点不能继续进行为止. 规则 1：若达到的顶点第一次被记录且不是悬挂点，则在它的所有没有走过的关联边中，选沿预先规定之循环次序从达到此顶点的边超第一次遇到有一方向未走过的那一条，并沿此边达到另一端点记录下来；规则 2：若达到的顶点已经记录了一次或更多，或者为悬挂点，则沿着过来的边返回(如可能)到另一端并记录下来，(否则)进行规则 1. 这样得到的数字串中恰含 $2\varepsilon+1$ 个数字(ε 为图的边数)，称它为长度. 这种码称为欧拉码，因为它相当于在将图的每边用 2 重边代替所得欧拉图上求得一个欧拉游. 附图中虚线所示的路线给出它的欧拉码：12 313 414 321. 引进平面图的码便于建立好的算法求出平面图的自同构群，以及检查两个平面图是否同构.



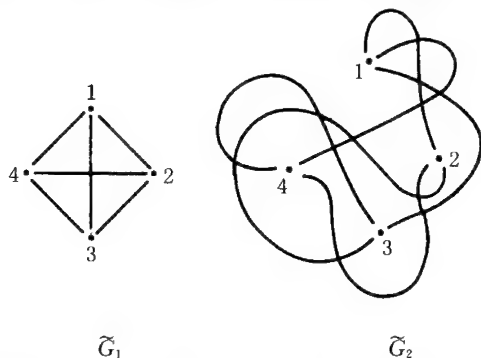
欧拉码(Eulerian code)　见“平面图码”.

平面等价(planar equivalence)　两个图间的一种等价关系. 与平面图的顶点 V 关联的所有边在 V 点沿顺时针方向构成的循环序列称为顶点 V 的旋. 两个平面图称为平面等价是指存在保持相应顶点旋的此两图之间的一个同构映射. 惠特尼(Whitney, H.)于 20 世纪 30 年代初发现了如下定理：3 连通可平面图在平面上的嵌入实质上是惟一的. 所谓实质上惟一是指它只可能有两个平面不等价的平面嵌入，而且，这两个嵌入恰互为平面镜反射的像. 这一定理也称为惟一性定理. 换言之，若将一个平面嵌入与它平面镜的像不加区别，则 3 连通可平面图的平面嵌入是惟一的.

旋(ratation)　见“平面等价”.

桥(bridge)　图论的一个重要概念. 指图在空间中嵌入的一类开子集. 若将图 G 视为在三维欧氏空间中的嵌入，则桥就是对于 G 的一个子图 H，$G-H$ 的连通片. 一般地，所谓桥是指 H 是一个圈 C 的情形. 若 B 为 G 的对于圈 C 的桥，则$[B]-B$ 称为 B 在 C 上的触点，其中，$[B]$为 B 的闭包. 在 C 上 B 的两个相继的触点之间的一段曲线称为 B 的桥际. 若两桥 B_1 和 B_2，其中之一所有触点全落在另一个的某一桥际中，则称 B_1 和 B_2 是相容的；否则称为相克的. 这两个概念对于 B_1 和 B_2 是对称的. 若 G 对于 C 的桥按照相容性至多可分为两类，则 G 是可平面的. 反之，对于任何可平面图 G，任取一个圈 C，G 的桥按相容性至多可分为两类. 另外，若 G 是可平面的，则 G_1 和 G_2 是 G 的两个平面嵌入. G_1 与 G_2 平面等价当且仅当在 G 中存在一个圈 C 使 G_1 和 G_2 对于 C 的内桥与内桥和外桥与外桥之间存在一一对应. 第一位引入桥的概念的学者是塔特(Tutte, W. T.). 不过，他当时用的是组合的语言，而不是用点集拓扑的语言. 当然，此两者实质上是等价的. 塔特基于对桥的结构分析建立了图的各种连通性的理论，使他首先发现任何 4 连通的可平面图有哈密顿圈，以及由此也可以直接地导出库拉托夫斯基定理等.

平面浸入(planar immersion)　图在平面上的一种表示. 将一个图画在平面上，用平面上的互不相同的点表示图的顶点. 两个相邻顶点间的边用连结表示这两个顶点的点之间的一条曲线表示. 但在每一个代表顶点的点的充分小的邻域中所有表示与此顶点关联的线除端点外再无别的公共点. 图的这种表示称为平面浸入. 一般而言，不能保证任何代表两条边的线无公共的内点. 附图为 K_4 的两个平面浸入 $\widetilde{G}_1$ 和 $\widetilde{G}_2$. 图的一个平面浸入若还满足如下的性质：存在图的一个生成树，使得代表树边的一条线不与任何代表其他边的曲线有公共内点，则称这个浸入为树浸入. 对于图 G 的任何一个生成树，存在与



其相应的树浸入. 若对于一个树浸入，可以选个节点，称为根，使得树上的边依从根出发沿树通过此边的方向，并且每条非树边都有一个定向使得它与树成的基本圈为有向圈，则称带有这种边的定向的树浸入为确向浸入. 任何一个连通图都有一个确向浸入. 若在每一个树的非悬挂点处任何两条相邻的边对，只要有一条边为发出的树边而另一条不是进入的树边，则引进一个模 2 变量. 对于任何两条不相邻的非树边 α 和 β 的两个基本圈，若它们有公共节点，则恰有两个同与它们关联的变量. 而且，一个变量相应的边对由两个树边组成，而另一个则由一条树边和一条非树边组成. 前者称为树变量，记为 $x(\alpha,\beta)$，后者称为上树变量，记为 $y(\alpha,\beta)$. 对于这个确向浸

入，任何两条不相邻的非树边 α 和 β，若它们没有奇数个公共点，则必有偶数个公共点(无公共点也视为偶数个)．用常数 $c(\alpha,\beta)=1$ 或 0 分别表示前者或后者．这样，对于所有可能的不相邻的非树边 α 和 β，可以建立一个方程组

$$x(\alpha,\beta)+y(\alpha,\beta)=c(\alpha,\beta)\ (\mathrm{mod}\,2). \quad (*)$$

进而，方程组($*$)的相容性与确向浸入的选取无关．进而，一个图是平面的当且仅当($*$)是相容的．这一结论称为吴-刘平面性判别准则或吴-刘定理．因为它是由刘彦佩于 1978 年给出的，而它的原始证明基于吴文俊于 1955 年所得到的结果，由此而得名．

吴-刘定理(Wu-Liu theorem)　见“平面浸入”．

树浸入(tree immersion)　见“平面浸入”．

确向浸入(orientation defined immersion)　见“平面浸入”．

确向术(orientation defined method)　求图上支撑树的一种方法．其主旨在于确定一个选边的先后的原则，使得依此原则每步之前所选出的边均形成一个树．例如，深探．其选边原则为：每到一节点优先选一条其另一端点不与已选出的边关联的边．具体过程如下：首先，选择一个顶点，标它为 0，作为根．在所有与 0 关联的边中任取一边并将它的另一端标为 1；每到一个顶点在下面的两个措施中选择一个：

1. 若这个顶点的所有未取的关联边中有一条边，它的另一个端点尚未标号，则取这条边并将它的另一端点标以在 $0,1,2,\cdots,n-1$(其中 n 为图的阶)中未用过数字的最小者．

2. 若这个顶点的关联边都用过了，或者说它的每一未取关联边的另一端均已标号，则沿着过来的边，回到它的另一端，直到不能进行为止．

这样得到的就是一棵支撑树，称为深探树、广探．其选边原则为：每到一个节点选将与此节点关联但另一端不与已选过的边关联的边，选完再回到此节点处第一次取的边的另一端点，按此原则继续这一过程．对于一个图的任何一个平面浸入，可以有左(右)探，即在每个节点处选择向左(右)旋第一次遇到的另一端不与任何已选的边关联的边．事实上，左探和右探早在 1882 年由法国的特莱谋(Tremaux)发表在吕卡(Lucas,F.-É.-A.)关于数学游戏的书的第一卷中．最简单也是最好的说法为塔里(Tarry,G.)于 1895 年提出的，即人们常称的迷宫法．

深探(depth-first search)　见“确向术”．

广探(breadth first search)　见“确向术”．

迷宫法(labyrinth method)　见“确向术”．

平面性辅助图(planarity auxiliary graph)　一类特殊的图．它是由判定一个图的平面性而引出的另一个图．根据这个图是否有某种性质的圈来判定原来的图是否是可平面的．首先，用确向术(深探、左探或右探)求图 G 上的一个支撑树 T，并给出 G 的一个对于 T 的树浸入．将 T 的边依端点出现的次序给以定向，以每一个节点(除树梢外)处的这样的边对作为新节点，在边对中必有一边为树边且方向为离开这个节点而另一边不为那条指向这个节点的树边．对于任何一对不相邻的上树边，若它们的基本圈至少有一个公共节点，则必有两个相应新节点的边对，其中两边分别落在两个基本圈上．从而，可以引进一条新边连此两新节点．并且，在新边上可以赋以一个权，即，当此新边相应的边对在这个树嵌入中相交奇数个点时为 1；否则，为 0．这样的一个由新节点和新边所得带权的新图，就称为平面性辅助图，记为 Aux(G)．它是刘彦佩于 1978 年首先引进的．由 Aux(G)是否有奇权的圈就可以判定 G 是否为可平面的．一般而言，Aux(G)的阶和度均不超过原图阶的一个二次函数．以后又引进了第一类和第二类的平面性辅助图以得到线性时间的算法，Aux(G)也称为第 0 类辅助图．在第一类平面性辅助图中节点只是第 0 类节点集的一个子集，它相应于那些含有一条树边和一条上树边的边对．这就保证了它的阶不超过原图阶的一个线性函数．然而边的集合则必须要重新构造．而第二类平面性辅助图的节点集与第一类的相同，但边的集合是第一类的一个子集，并且使得它的度也不超过原图阶的一个线性函数．这就从理论上导致判定图的平面性与求平面嵌入都可以用线性时间算法实现．平面性辅助图不仅在判定图的平面性以及进行平面嵌入时有用，而且，在确定图的不可分离连通块以及 3 连通块、列出所有不等价的平面嵌入、图的平面分解以及判定平面图的同构、图的曲面嵌入等方面均有应用．

平面性算法(planarity algorithm)　图论中的一种重要算法．判定一个给定图是否为可平面图，并且求出它的一个平面嵌入(若是可平面图)在计算机上可以实现的方法．第一个平面性算法是由奥斯兰德尔(Auslander,L.)和帕特尔(Parter,S.V.)于 20 世纪 60 年代初给出的．之后，出现了有数十种之多的算法．直到 1974 年，由候波科劳(Hopcroft,J.)和塔尔金(Tarjan,R.)建立了第一个线性时间的算法，即对很大的图这个算法所需的计算时间以图的顶点数的一个线性函数为上界．

平面嵌入(planar embedding)　图在平面上的一种表示．若图 G 同构于平面图 P，则称 P 是图 G 的一个平面嵌入．若 P 的每条边都是一条直线段，则称 P 是图 G 的直线嵌入．若 P 的每个有限面都是一个凸区域，则称 P 是图 G 的凸嵌入．若 P 的每条边都是由相继的水平线段和铅垂线段组成的折线，则称 P 是图 G 的纵横嵌入．一条边上水平线段与铅

垂线段的交点称为一个折. 若 P 的每条边都是水平或铅垂的直线段，则称 P 是图 G 的网格嵌入. 在图 G 的所有纵横嵌入中，折的总数最小的嵌入称为图 G 的最小折数嵌入. 在图 G 的所有纵横嵌入中，所有有限面的面积和最小的嵌入称为最小面积嵌入. 纵横嵌入的理论是在超大规模集成电路(VLSI)设计中引出的. 关于最小折数以及最小面积的确定，一般是很困难的. 或者说，属于 NP 完全的问题.

直线嵌入(straight line embedding)　见"平面嵌入".

凸嵌入(convex embedding)　见"平面嵌入".

纵横嵌入(rectilinear embedding)　见"平面嵌入".

网格嵌入(net embedding)　见"平面嵌入".

最小折数嵌入(minimum bend embedding)　见"平面嵌入".

最小面积嵌入(minimum area embedding)　见"平面嵌入".

厚度(thickness)　图的一个组合不变量. 一个图 G 总可以分拆为若干边不相交的可平面子图之并，分拆中子图的最少个数称为 G 的厚度. 一个非可平面图 G 变为可平面图需要删除的最少边数称为 G 的偏度. 一个图 G 总可以分拆为若干边不相交的存在纵横嵌入的子图之并，分拆中所含这种子图的最少数目称为 G 的纵横度. 一个非可平面图 G 总可以分拆为若干边不相交的非可平面子图之并，分拆中所含子图的最大个数称为 G 的糙度. 对于图的一个平面浸入，其中有公共内点的边对的数目称为它的交数. 一个图的交数就是它的所有平面浸入的交数中之最小者. 确定图的厚度、偏度、纵横度、糙度以及交数都是十分困难的问题，时至今日仍未找到有效算法来确定它们.

偏度(skewness)　见"厚度".

纵横度(rectilinear thickness)　见"厚度".

糙度(coarseness)　见"厚度".

拓扑图(topological graph)　图论的一个重要概念. 能够嵌入在某一拓扑空间 $\mathscr{T}$ 中的图 G 称为拓扑图. 即，图 G 的顶点为拓扑空间 $\mathscr{T}$ 中的点，边为连结其两端点的简单曲线，且任意两边除端点可能公共外无其他公共点. 若拓扑空间 $\mathscr{T}$ 为曲面 S 且 $S\backslash G$ 的每个连通片都是单连通区域，则称 G 为曲面 S 上的地图，记为 M. 用 $G(M)$ 表示由 M 的顶点和边所构成的图. 地图 M 的可定向性是由曲面 S 的可定向性确定的. 即，若 S 为可定向的，则称 M 为可定向地图；否则称 M 为不可定向的. 曲面 S 的亏格称为地图 M 的亏格. 若记 v,ε 和 φ 分别为 M 的顶点数、边数和面数，则

$$E(M)=v-\varepsilon+\varphi$$

$$=\begin{cases}2-2p & (p\text{ 为 } M\text{ 的可定向亏格});\\ 2-q & (q\text{ 为 } M\text{ 的不可定向亏格}).\end{cases}$$

事实上，这个公式是于 1812－1813 年间由吕里尔(Lhuilier, S. J.)给出的. 因为欧拉(Euler, L.)第一个注意到这类关系，这个公式仍称为欧拉公式. 其中 $E(M)$ 称为地图 M 的欧拉示性数.

对于地图 M，在其每一面的内部选取一点作为顶点；对于每条边 e，将与其关联的两面中选定的顶点用一条简单曲线 e' 连结，使得 e' 除与 e 有一个公共点外不与 M 的其他任何边有公共点. 这样得到的地图 M' 称为 M 的对偶地图. 这里的对偶性也是对称的. 即，若 M' 为 M 的对偶地图，则 M 也为 M' 的对偶地图. 若(不)可定向地图 M 对于任何亏格小于 M 的亏格的(不)可定向地图 M', $G(M)$ 与 $G(M')$ 是不同构的，则称 M 是(不)可定向的最大地图. 因为在所有那些与 $G(M)$ 同构的地图中，这个 M 的面数最多. 若 M 是曲面 S 上的地图，且 M 的每个面都是三角形，则称 M 是 S 的一个三角剖分. 凡三角剖分都是最大地图，但反之则不然. 另一方面，若(不)可定向地图 M，对于任何亏格大于 M 的(不)可定向地图 M', $G(M)$ 与 $G(M')$ 不同构，则称 M 为最小地图. 因为在所有与 $G(M)$ 同构的地图中以这个 M 的面数为最少. 若一个地图仅有一个面，则称它为单面地图. 凡单面地图均是最小地图，但反之则不然.

欧拉示性数(Eulerian characteristic)　见"拓扑图".

地图(map)　见"拓扑图".

对偶地图(dual map)　见"拓扑图".

三角剖分(triangulation)　见"拓扑图".

单面地图(uniface map)　见"拓扑图".

最大亏格(maximum genus)　图的一个组合不变量. 图 G 所能嵌入而形成地图的曲面中，具有最大亏格的(不)可定向曲面的亏格称为图 G 的(不)可定向的最大亏格. 图 G 所能嵌入而形成地图的曲面中，具有最小亏格的(不)可定向曲面的亏格称为图 G 的(不)可定向最小亏格. G 的最小亏格也称为 G 的亏格. 对图 G 的任何一个在某曲面 S 上的嵌入，若 S 为不可定向的，则其最大亏格不可能超过

$$\varepsilon-\nu+1;$$

若 S 为可定向的，则其最大亏格不超过

$$B_1=\left[\frac{\varepsilon-\nu+1}{2}\right],$$

方括号表示将其内的数取整. 当 S 是可定向的，其最小亏格不可能小于

$$B_0=\left\lceil\frac{3-3\nu+3}{6}\right\rceil,$$

这个方括号为将其内的数取上整，即不小于它的最小整数. 在上面式子中 ν,ε 分别为 G 的顶点数和边

数.那些使得亏格为 B_0 的嵌入称为下嵌入.那些亏格为 B_1 的嵌入称为上嵌入.不是任何一个图均有上嵌入或下嵌入.事实上,只有对于不可定向的情况,已经证明任何图均有上嵌入.图的上、下可嵌入性是人们正在研究中的问题.特别是下嵌入性的研究远未解决.

最小亏格(minimum genus) 见"最大亏格".

上嵌入(up-embedding) 见"最大亏格".

下嵌入(down-embedding) 见"最大亏格".

引线问题(thread problem) 图论的一个重要问题.由希尔伯特(Hilbert,D.)和科恩弗森(Cohn-Vossen,S.)于1932年提出.即确定完全图的最小亏格问题.在一个曲面上最多可选择多少个点作为顶点,并将所有这些顶点两两用简单曲线连结,使得这些曲线除端点可能公共外没有任何其他公共点(交点).当曲面的可定向性和亏格给定之后,这个最多的顶点数与亏格之间的关系怎样?若用 α_0 和 α_N 分别表示在可定向和不可定向情况下的这个最多顶点数;p,q 分别为曲面在可定向和不可定向下的亏格,希尔伯特和科恩弗森猜想:

$$p=\left[\frac{(\alpha_O-3)(\alpha_O-4)}{12}\right];$$

$$q=\left[\frac{(\alpha_N-3)(\alpha_N-4)}{6}\right].$$

这就是引线问题.这里,方括号表示取其内数的不小于它的最小整数.他们还指出,这个问题的解决将导致希伍德猜想的证明.事实上,引线问题就是确定完全图 K_n 的最小亏格(或亏格).由此,自然引出了研究一般图的最小亏格的问题.这是目前人们正在研究中的问题.至今,仅对于若干图类已经知道了它们的最小亏格.一般的情形距离解决尚远.就算法的复杂性而言,至今人们尚未发现有效的算法.

曲线交叉问题(crossing problem) 图论的一个重要问题.由高斯(Gauss,C.F.)于19世纪提出.设 C 是一个圆,f 是由 C 到平面上的一个连续映像,记 $f(C)=Z$.对于任何 Z 上的点 P,若存在且仅存在两个 C 上的点 P_1 和 P_2 使得

$$f(P_1)=f(P_2)=P,$$

则称 P 为 Z 的一个交叉点.这里,所考虑的是两点相交之情形而不考虑多于两个点之相交.而且,还规定在任何一个交叉点的小邻域中,若沿 Z 通过这个交点,则在两侧都会有 Z 的点.换言之,不考虑相切的情形.设 $a,b,c,\cdots$ 是 Z 的所有交叉点.若从 Z 上任一点 P 出发沿着由 C 所确定的方向经过 Z 的所有点回到 P,并将所有交叉点依次记下来就得由符号 $a,b,c,\cdots$ 组成的一个循环序列,则这个序列只与 f 有关而与 P 的选取无关.这个序列称为 Z 的交叉序列.若一个循环序列中的每个字母均恰出现两次,则称它为多面形的.任何曲线的交叉序列都是多面形的;但是,反之一般不成立.所谓曲线交叉问题就是要求刻画一个多面形序列是某闭曲线的交叉序列.它是由高斯于19世纪首先提出的.高斯为解决这个问题,对于任何一个多面形序列引进了一个图,称为它的交叉图.它的节点为序列中之字母,两个字母 a 和 b 相邻当且仅当在此序列的两个 a 的出现间的一段中,b 出现且仅出现一次.高斯猜想,刻画一个多面形序列为某曲线的交叉序列可仅由其交叉图的结构性质所决定.德恩(Dehn,M.W.)于1936年解决了曲线相交问题,但他不是沿着高斯猜想的思路,而是在一个多面形序列上引进一些运算将它化为另一个多面形序列.虽然,这个新的序列交叉图的阶比原序列交叉图的阶大一倍;但是,由这个新序列交叉图的结构性质得到问题的解答较容易.这个方法称为德恩方法.从算法复杂性而言,德恩方法比高斯猜想要好得多.在德恩之后30余年,高斯猜想才得到解决.

希伍德猜想(Heawood conjecture) 图论的一个重要猜想.由希伍德(Heawood,P.J.)于1890年提出.当时,希伍德为了解决四色问题建立了一个更为一般的命题.记 $\chi(S)$ 为曲面 S 上的所有地图色数之上界,希伍德猜想有下面的公式:

$$\chi(S)=\left[\frac{1}{2}(7+\sqrt{49-24E(S)}\right](E(S)\neq 2),$$

方括号表示取整.四色猜想恰为 $E(S)=2$ 的情形.这里,方括号表示取其内数之上整.因为,那时不知四色猜想是否成立,所以,在公式中排除了 $E(S)=2$ 的情形.研究这个猜想成立与否占用了近一个世纪的时间,于20世纪60年代末才算得到了完满的解决.结果是,除了克莱因瓶 N_2 这个仅有的例外,希伍德猜想成立.因此,将如下已被证明的公式

$$\chi(S)=\begin{cases}\left[\frac{1}{2}(7+\sqrt{49-24E(S)})\right] \\ \qquad (S\neq N_2, E(S)\neq 2), \\ 6 \qquad (S=N_2)\end{cases}$$

称为希伍德公式,或希伍德定理,或地图着色定理.

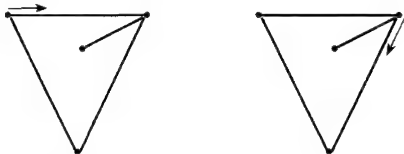
地图着色定理(map color theorem) 见"希伍德猜想".

地图着色(map coloring) 一种组合构形.它是对于地图面集的一种分划.分配地图的每一个面一种颜色,使得相邻的面(指有公共边界边)具有不同的颜色.称这样一种色的分配为这个地图的一个着色,或者说,将地图的面集分划为若干个子集,使得每个子集中的任何两面均不相邻.这样就可以将每个子集中的面用一种颜色着染使得不同子集用的颜色不同.在地图 M 的所有着色中,使用颜色最少的着色的颜色数目称为地图 M 的色数.地图的顶点

着色，或者说，对于与它同构的图的顶点做正常着色，就是其对偶地图的地图着色.

地图色数(chromatic number of map)　见"地图着色".

带根地图(rooted map)　带有标记的一类地图. 选定一个顶点并给以特殊标记的地图称为点根地图. 这个带特殊标记的节点称为根节点. 若在带根地图上再选定一个与根顶点关联的边并规定这条边一个方向，则得到一个边根地图. 这条规定了方向的边称为根边. 边根地图也是点根地图，但反之不然. 进而，若在一个边根地图中，取一个与根边关联的面并规定它的边界的走向与这个根边的方向一致，则所得之地图称为带根地图. 两个带根地图不同构就是指它们之间在保持根顶点、根边和根面相应的条件下不同构. 例如：附图给出的两个有根地图是不同构；然而，若不计根，则它们确是同构的.



简单地图(simple map)　一类特殊的图. 它是由简单图嵌入到曲面上所得到的地图. 由无环图嵌入到曲面上所得到的地图称为无环地图. 由一个树嵌入到一个曲面上所得到的地图称为树地图. 由只有一个圈的图嵌入到曲面上得到的地图称为单圈地图. 由欧拉图嵌入到曲面上得到的地图称为欧拉地图. 由二部图嵌入到曲面上得到的地图称为二部地图.

无环地图(loopless map)　见"简单地图".

树地图(tree map)　见"简单地图".

单圈地图(unicyclic map)　见"简单地图".

欧拉地图(Eulerian map)　见"简单地图".

二部地图(bipartite map)　见"简单地图".

三角地图(triangulation)　亦称三角剖分. 一类特殊的图. 它是所有面都是三角形(面边界是长度为3的圈)的地图. 若在一个三角地图所相应的图中没有重边，则称它为严格三角地图. 若一个严格三角地图不存在一个非面边界的长度为3的圈，则称它为简单三角地图. 对于一个图，是否存在一个曲面使得能够将它嵌入这个曲面上而得到一个三角地图，是目前人们正在研究并且还未解决的问题.

地图计数(enumeration of map)　求一类组合数. 具体地说，在给定可定向性和亏格之下，确定满足各种参数限制条件的不同构的地图的数目. 这就是地图计数问题，或简称地图计数. 通常，有如下三类问题：

1. 单参数问题，即在顶点数、边数或面数之一个给定的情况下，确定的不同构地图的数目.

2. 双参数问题，即在已知顶点数、边数或面数中之两个给定的情形下，确定不同构地图的数目.

3. 顶点剖分问题，即当顶点的度为 $i\geqslant 1$ 的顶点数目，对于 $i=1,2,\cdots$ 都给出了的情形下，确定不同构地图的数目.

一般地，这些问题都是相当困难的，而且难度随上述的次序递增. 即使在单参数的情况，对于凸多面体(相当于3连通的平面地图)至今仍未得到一个有效的计数公式. 对于有根地图的计数，目前主要集中在平面地图上. 对于一般的情形，也有所进展.

给定一类地图，记 $\mathscr{M}$ 为所有这类地图所组成的集合，$n_i(i\geqslant 1)$ 表示所考虑的参数. 函数

$$f_{\mathscr{M}}(x_1,x_2,\cdots)=\sum_{M\in\mathscr{M}}\prod_{i\geqslant 1}x_i^{n_i(M)}$$

称为 $\mathscr{M}$ 的地图计数函数. $f_{\mathscr{M}}(x_1,x_2,\cdots)$ 所满足的方程称为计数方程. 一般而言，要想求某类地图的计数，首先要求出它的计数方程，然后通过解这个方程来确定出计数函数. 最理想的结果是，所得的计数函数的系数为单项式，或称无和式. 然而这种表达式不一定存在或虽存在也不易求得. 次理想的结果是正和式，即将这种系数表示为正单项式和.

地图计数函数(enumerating function of map)　见"地图计数".

地图计数方程(enumerative equation of map)　见"地图计数".

色和(chromatic sum)　一类广义计数函数. 对于一个地图 M，记 $n_i(M)(i=1,2,\cdots)$ 为 M 的一些不变量(如顶点数、边数以及亏格等)，记 $P(M;\lambda)$ 为 M 所相应的色多项式. 函数

$$f_{\mathscr{M}}(x_1,x_2,\cdots;\lambda)=\sum_{M\in\mathscr{M}}P(\mathscr{M};\lambda)\prod_{i\geqslant 1}x_i^{n_i(M)}$$

称为地图集合 $\mathscr{M}$ 的色和函数. 若将色和函数 $f_{\mathscr{M}}(x_1,x_2,\cdots,\lambda)$ 展开为 $x_1,x_2,\cdots$ 的幂级数，则 $x_1^{n_1}$，$x_2^{n_2}$，…所在的系数记为 $F_{\mathscr{M}}(n_1,n_2,\cdots,\lambda)$，称为 $\mathscr{M}$ 的色和. 它是用 λ 色染 $\mathscr{M}$ 中所有满足

$$n_k(M)=n_i(i\geqslant 1)$$

的地图 M 所得着色方式的总和. 色和函数所满足的方程称为色和方程. 色和函数是塔特(Tutte, W. T.)于1973年首次引进的. 他确定出了带根平面三角地图的色和方程，并对这种方程做了一系列的研究. 确定一般色和方程以及解这种方程是很困难的.

色和函数(chromatic sum function)　见"色和".

色和方程(chromatic sum equation)　见"色和".

色平均(chromatic average)　一类组合数. 指在一定条件下地图着色的平均数. 在地图集合 $\mathscr{M}$

中，若参数为 $n_i(i\geqslant 1)$ 的地图数目为 $A_{\mathscr{M}}(n_1,n_2,\cdots)$，色和为 $F_{\mathscr{M}}(n_1,n_2,\cdots;\lambda)$，则称

$$\frac{F_{\mathscr{M}}(n_1,n_2,\cdots;\lambda)}{A_{\mathscr{M}}(n_1,n_2,\cdots)}$$

为地图集合 $\mathscr{M}$ 对于参数 $n_i(i\geqslant 1)$ 的色平均. 色平均问题是为了研究着色问题并受到数论中的方法的启发而提出来的. 关于确定色平均的值及确定色平均对于 λ 的渐近性质都是相当困难的问题，至今只对平面三角剖分的情形取得了一些结果.

范色和(dichromatic sum)　一类广义的计数函数. 对于一个地图 M，记 $n_i(M)(i=1,2,\cdots)$ 为 M 的一些不变量(如顶点数、边数以及亏格等)，记 $T(M;\mu,\nu)$ 为 M 所相应图的范色多项式(参见“秩多项式”)，则函数

$$f_{\mathscr{M}}(x_1,x_2,\cdots;\mu,\nu)=\sum_{M\in\mathscr{M}}T(M;\mu,\nu)\prod_{i\geqslant 1}x_i^{n_i(M)}$$

称为地图集合 $\mathscr{M}$ 的范色和函数. 若将范色和函数 $f_{\mathscr{M}}(x_1,x_2,\cdots;\mu,\nu)$ 展开为 $x_1,x_2,\cdots$ 的幂级数，则 $x_1^{n_1},x_2^{n_2},\cdots$ 所在项的系数记为 $F_{\mathscr{M}}(n_1,n_2,\cdots;\mu,\nu)$，称为 $\mathscr{M}$ 的范色和. 范色和函数所满足的方程称为范色和方程.

范色和函数(dichromatic sum function)　见“范色和”.

范色和方程(dichromatic sum equation)　见“范色和”.

点空间(vertex space)　一类组合构形. 指由图 $G=(V,E)$ 的顶点集 V 生成的域 F(通常取二元域)上的向量空间，记为 F^V. 由边集 E 生成的域 F 上的向量空间称为边空间，记为 F^E. F^V 中的向量称为 0 链，F^E 中的向量称为 1 链. 边缘算子是由 F^E 到 F^V 的一个线性变换，它将任一边映射为其两端点的和. 上边缘算子是由 F^V 到 F^E 的一个线性变换，它将任一顶点映射为与其关联的所有边的和. 边缘算子的像空间称为边缘空间，它的核空间称为循环空间. 上边缘算子的像空间称为上循环空间. 循环空间与上循环空间的交空间称为双循环空间. 若两个 0 链在上边缘算子作用下具有相同的像，则称它们上同调. 若两个 1 链在边缘算子作用下具有相同的像，则称它们同调.

边空间(edge space)　见“点空间”.

循环空间(cycle space)　见“点空间”.

上循环空间(cocycle space)　见“点空间”.

双循环空间(bicycle space)　见“点空间”.

同调(homology)　见“点空间”.

上同调(cohomology)　见“点空间”.

循环矩阵(circulant matrix)　满足一定规则的矩阵. 设有 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，若满足

$$a_{ij}=a_{1,j-i+1(\mathrm{mod}\, n)},$$

其中，$i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，则称其为(n 阶)循环矩阵. 若 W 为第一行是$(0,1,0,\cdots,0)$的 n 阶循环矩阵，A 是第一行为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的 n 阶循环矩阵，则

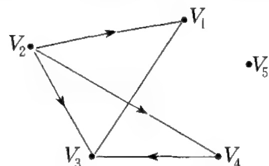
$$A=\sum_{i=1}^{n}a_iW^{i-1}.$$

邻接矩阵为循环矩阵的图称为循环图.

循环图(circulant graph)　见“循环矩阵”.

邻接矩阵(adjacency matrix)　表示图的一类矩阵. 由于图 $G=(V,E)$ 可由其节点集 V 中每两节点间邻接关系惟一决定，所以它可以用一个 $|V|\times|V|$ 的矩阵 $Z=(z_{ij})$ 表示，称 D 为 G 的邻接矩阵，其中，当 ν_i 和 ν_j 邻接时，$z_{ij}=1$；否则，$z_{ij}=0$. 图 G 的关联矩阵 $A=(a_{ij})$ 是一个 $|V|\times|E|$ 的矩阵，每个节点对应矩阵的一行，每条边对应矩阵的一列，其中，当边 e_j 与 v_i 关联时，$a_{ij}=1$；否则，$a_{ij}=0$. 从关联矩阵中去掉一行后得到的矩阵称为约化关联矩阵. 图 G 的约化关联矩阵包含 G 的全部信息.

图的圈矩阵 $B=(b_{ij})$ 是一个 $c\times|E|$ 的矩阵(c 为 G 的所有圈的数目)，每一圈对应于矩阵的一行，边对应于矩阵的列，其中，当边 e_j 在圈 C_i 内时，$b_{ij}=1$；否则，$b_{ij}=0$.



在图 G 的圈矩阵中只保留对应于一个圈基的行，所得的矩阵称为约化圈矩阵. 若此圈基恰为一个生成树的所有基本圈，则称所得的矩阵为基本圈矩阵. 图 G 的上圈矩阵 $Q=(q_{ij})$ 是一个 $k\times|E|$ 的矩阵(k 为 G 的所有上圈的数目)，每一上圈对应于矩阵的一行，边对应于矩阵的列，其中，当 e_j 在上圈 K_i 中时，$q_{ij}=1$；否则，$q_{ij}=0$.

在图 G 的上圈矩阵中只保留对应于某一上圈基的行，所得的矩阵称为约化上圈矩阵. 若此上圈基恰为一个生成树的所有基本上圈，则称所得的矩阵为基本上圈矩阵.

对于有向图 D 中任意两节点 V_i,V_j，若存在由 V_i 到 V_j 的有向路，则取 $r_{ij}=1$，d_{ij} 为由 V_i 到 V_j 的距离，d'_{ij} 为由 V_i 到 V_j 的最长路的长；若不存在由 V_i 到 V_j 的有向路，则取 $r_{ij}=0,d_{ij}=\infty,d'_{ij}=\infty$. 矩阵

$$R=(r_{ij}),\quad D=(d_{ij}),\quad D'=(d'_{ij})$$

分别称为有向图 D 的可达性矩阵、距离矩阵和迂回矩阵. 附图为一有向图及其可达性矩阵、距离矩阵及迂回矩阵. 至今还没有求迂回矩阵的有效算法.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&1&1&0\\1&0&1&0&0\\1&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

可达性矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

距离矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 2 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 1 & 0 & \infty \\ 2 & \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

迂回矩阵

关联矩阵(incident matrix)　见"邻接矩阵".

圈矩阵(circuit matrix)　见"邻接矩阵".

上圈矩阵(cocircuit matrix)　见"邻接矩阵".

距离矩阵(distance matrix)　见"邻接矩阵".

迂回矩阵(detour matrix)　见"邻接矩阵".

圈基(circuit basis)　图 G 的循环空间(参见"点空间")的一组基. 循环空间的维数称为圈秩或简称上秩,记为 $\tilde{r}(G)$.

$$\tilde{r}(G) = |E| - |V| + c(G),$$

其中 $c(G)$ 为 G 的连通片数. 上循环空间的一组基称为上圈基. 上循环空间的维数称为上圈秩或简称秩,记为 $r(G)$. $r(G)=|V|-c(G)$. 若 T 为图 G 的一个支撑树,$\bar{T}$ 为相应的上树,则任何一个上树边与树恰形成一个圈,称为树 T 的一个基本圈. 相仿地,每一个树边与上树恰形成一个上圈,称为树 T 的一个基本上圈. 支撑树 T 的所有基本圈构成图 G 的一个圈基,所有基本上圈构成图 G 的一个上圈基. 双循环空间的一组基称为双圈基. 双循环空间的维数称为双圈秩. 与某一双圈基中的每一个圈恰有一条公共边的边集,称为双树.

基本圈(fundamental circuit)　"见"圈基".

圈秩(cycle rank(cyclic number))　见"圈基".

上圈基(cocircuit basis)　见"圈基".

双圈基(bicycle basis)　见"圈基".

双树(dendroid)　见"圈基".

双圈秩(bicycle rank)　见"圈基".

哈达玛积(Hadamard product)　矩阵的一类运算. 若 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是两个同阶矩阵. 若 $c_{ij}=a_{ij}\times b_{ij}$,则称矩阵 $C=(c_{ij})$ 为 A 和 B 的哈达玛积,或称基本积.

基本积(Hadamard product)　见"哈达玛积".

宾纳-柯西定理(Binet-Cauchy theorem)　一个计算行列式的定理. 指按一定规则计算两矩阵之积的行列式. 若 P 和 Q 分别是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵,$m\leqslant n$,则乘积 PQ 的行列式是 P 和 Q 的所有对应的大行列式乘积之和. 这里所谓的 P 和 Q 对应的大行列式,分别是由 P 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 列和 Q 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 行组成. 即,若取 P 的大行列式为 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 列,则 Q 的对应的大行列式为 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 行. 例如,若

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$|PQ|=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-24.$$

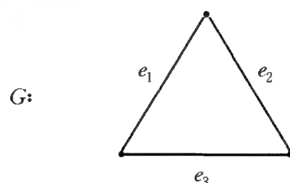
矩阵-树定理(matrix-tree theorem)　一个计数定理. 若连通图 G 的邻接矩阵为 A,将 $-A$ 的对角线 (i,i) 元素依次换为节点 V_i 的度 $d(V_i)$,所得矩阵记为 M,则 M 的每个代数余子式相等,且等于 G 的支撑树的数目. 这就是矩阵-树定理.

变元矩阵-树定理(variable matrix-tree theorem)　矩阵-树定理的推广. 若 $M=(m_{ij})$ 为对应于图 G 的形式矩阵,其元素定义为:对于 $i\neq j$,

$$m_{ij}=\begin{cases} -e_k & ((V_i,V_j)=e_k), \\ 0 & (V_i,V_j \text{ 不相邻}), \end{cases}$$

$$m_{ii}=-\sum_{n\neq i} m_{in},$$

则 M 的任何代数余子式的值是 G 的树多项式. 这称为变元矩阵-树定理. 附图为一示例. 其中,$P(T(G))$ 为圈 G 的树多项式.



$$M_x=\begin{pmatrix} -(e_1+e_2) & -e_1 & -e_2 \\ -e_1 & -(e_1+e_3) & -e_3 \\ -e_2 & -e_3 & -(e_2+e_3) \end{pmatrix},$$

$$M_{11}=(e_1+e_3)(e_2+e_3)-e_3e_3=e_1e_2+e_2e_3+e_1e_3=P(T(G)).$$

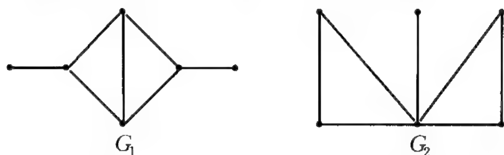
特征多项式(characteristic polynomial)　图 G 的邻接矩阵的特征多项式,记为

$$P(G;\lambda)=\lambda^n+C_1\lambda^{n-1}+C_2\lambda^{n-2}+\cdots+C_n,$$

其中 C_i 为邻接矩阵的 i 阶主子式之和. $C_1=0$,其余 C_i 分别有其图论含义,例如:$-C_2$ 为图 G 的边数;$-C_3$ 为图中三角形的个数的二倍等. 图 G 的特征多项式的根称为图 G 的特征值. 由于图的邻接矩阵是对称阵,所以图的特征值必为实数. 图 G 的诸特征值连同各自的重数构成图 G 的谱,记为

$$\mathrm{Spec}(G)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s\\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_s)\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_s$ 为 s 个特征值的严格减序列，$m_i(\lambda_i)(i=1,2,\cdots,s)$为相应的重数. 图的许多性质与它的谱有关. 谱相同的图称为同谱图. 同谱图不一定同构. 附图为两个同谱但不同构的图.



同谱图(cospectral graph)　见“特征多项式”.

邻接代数(adjacent algebra)　与图的邻接阵关联的一类代数. 以图 G 的邻接矩阵 A 的多项式(即 A 的幂的线性组合)为元素构成的代数，记为 $\mathscr{A}(G)$. 这个代数作为复向量空间，其维数是有限的，其维数的下界为图的直径 d 加 1.

秩多项式(rank polynomial)　图的一个组合不变量. 对于图 $G=(V,E)$，记

$$R(G;x,y)=\sum_{S\subseteq E}x^{r(S)}y^{s(S)},$$

其中，$r(S)$，$s(S)$分别为以 S 为边集的 G 的支撑子图的秩和上秩(参见“圈基”). 称 $R(G;x,y)$为图 G 的秩多项式. 图的秩多项式与色多项式有如下关系：

$$C(G;u)=u^{|V|}R(G;-u^{-1},-1).$$

对于图 $G=(V;E)$，记

$$T(G;x,y)=\sum_{S\subseteq E}(x-1)^{r_0-r(S)}(y-1)^{s(S)},$$

其中，$r_0=r(G)$为 G 的秩，$r(S)$，$s(S)$同上. 称 $T(G;x,y)$为塔特多项式或范色多项式. 塔特(Tutte,W. T.)于 20 世纪 60 年代发现这个多项式，并且揭示了它与图内在结构性质的关系. 琼斯(Jones,V. F. R.)于 20 世纪 80 年代发现扭结的新的拓扑不变量，人们称之为琼斯多项式. 近来，人们发现后者实质上可以从前者的思想同样导出它与扭结的内在结构性质的关系.

塔特多项式(Tutte polynomial)　见“秩多项式”.

范色多项式(dichromatic polynomial)　见“秩多项式”.

琼斯多项式(Jones polynomial)　见“秩多项式”.

稳定核子群(stabilizer subgroup)　图论中一类重要的群. 指图的自同构群的一个子群. 保持一个节点 V 不变的图 G 的所有自同构是 G 的自同构群 $\Gamma(G)$的子群. 这个子群就称为节点 V 的稳定核子群，记为 Γ_V. 若图 G 的每个节点的稳定核子群均为幺群，则称$\Gamma(G)$正规作用于 V. 对于一个有限群 Γ，若存在一个图 G，使得 Γ 同构于 $\Gamma(G)$，且 $\Gamma(G)$正规作用于 V，则称 G 为 Γ 的正规图表示.

正规图表示(normal graphic representation)　见“稳定核子群”.

色多项式(chromatic polynomial)　图的一个组合不变量. 色多项式是伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)为解决四色猜想于 1913 年提出的. 用它表示以不多于 λ 种颜色给图 G 的节点做正常着色的不同着法的数目，记为 $\pi_\lambda(G)$或 $C(G;\lambda)$或 $P_G(\lambda)$. n 个节点的无边图的色多项式为 λ^n，完全图 K_n 的色多项式为

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1).$$

一般图 G 的色多项式的理论展开式为

$$C(G;\lambda)=\sum_r m_r(G)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-r+1),$$

其中 $m_r(G)$表示用 r 种颜色做节点的色剖分的正常着色数. 但是，此理论展开式不便于实际应用. 对于阶不大的图，如下的递推公式常用来求一个给定图的色多项式：

$$\pi_\lambda(G)=\pi_\lambda(G-e)-\pi_\lambda(G\cdot e),$$

其中 $G-e$ 和$G\cdot e$分别为从 G 中去掉边 e 和收缩 e 为一个节点所得的图. 但是，这个递归算法并不是一个好算法. 目前还没有求色多项式的好算法. 对于色多项式还可提出一个反问题，即找出色多项式的一些特征，依此判定一个给定的多项式是否为某个图的色多项式. 目前还不知道一个多项式为色多项式的充分必要条件. 对必要条件也仅有一些猜想，例如，瑞得(Read,R. C.)于 1968 年猜想色多项式的系数绝对值先是严格增然后严格减. 这个猜想被称为关于色多项式系数的单峰猜想或瑞得猜想. 如下定义的函数称为图 G 的权函数：

$$W(G;t,u)=u^{-|V|}\sum_{\xi\in[u]^V}\prod_{e\in E}(\xi(e)-t),$$

其中$[u]$表示不大于 u 的自然数集合，$[u]^V$ 表示从 V 到$[u]$的映射的集合，$\xi(e)$定义为：

$$\xi(e)=\begin{cases}1, & \text{若存在 } e=(v_1,v_2)\text{使得 } \xi(v_1)\neq\xi(v_2),\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

这样，图 G 的色多项式还可用权函数表示为

$$C(G;u)=u^{|V|}W(G;0,u).$$

瑞德猜想(Read conjecture)　见“色多项式”.

权函数(weight function)　见“色多项式”.

友谊定理(friendship theorem)　图论的一个重要定理. 它是与图上节点次有关的一个命题. 若在一个集合中每两人恰有一个共同的朋友，则必有一人是每个人的朋友. 用图论的语言叙述：若图 G 的每对顶点恰有一个公共相邻节点，则必有一个节点与其他所有节点相邻.

相似点(similar vertices)　图论的一个重要概念. 指两个节点之间的关系. 对于图 G 的顶点 v_1，v_2，若存在 G 的自同构 α，使得$\alpha(v_1)=v_2$，则称 v_1 与 v_2

为一对相似点．对于图 G 的两条边 e_1, e_2，若存在自同构 α 使得 $\alpha(e_1)=e_2$，则称 e_1 与 e_2 为一对相似边．连结一对相似点的边称为对称边．

相似边(similar edges)　见“相似点”．

对称边(symmetric edge)　见“相似点”．

点对称图(vertex-symmetric graph)　一类特殊的图．它是一类对称图．若图 G 的任意一对节点都是相似点，则称 G 为点对称图，又称节点可迁图．节点数为素数的点对称图称为回转图．若图 G 的任意一对边都是相似边，则称 G 为边对称图，又称边可迁图．点对称图与边对称图之间并无必然的联系．若对图 G 的任意两个等距节点对 $\{u,v\}$ 和 $\{x,y\}$ 存在自同构 α，使得 $\alpha(u)=x, \alpha(v)=y$，则称 G 是距离可迁图；若对图 G 的任意两节点子集 V_1 和 V_2，只要 V_1 和 V_2 的导出子图同构，就必存在 G 的自同构 α，将 V_1 映射为 V_2，则称 G 为均匀图．均匀图必为距离可迁图，且其直径至多为 2，围长至多为 5．若对图 G 的任意两个长度为 t 且起点确定的路 P_1 与 P_2，存在一个自同构 α 将 P_1 映射到 P_2，则称 G 为 t 可迁图．一个连通、3 正则、t 可迁图 G，若对任意两条长为 t 的路 P_1 与 P_2，恰有一个自同构 α 将 P_1 映射为 P_2，则称 G 为 t 单可迁图．既是点对称又是边对称的图称为对称图．比点对称图及边对称图有更高对称性的图称为高度对称图．t 可迁图及 n 笼等都是高度对称图．

可迁图(transitive graph)　见“点对称图”．

回转图(rotative graph)　见“点对称图”．

均匀图(uniform graph)　见“点对称图”．

对称图(symmetric graph)　见“点对称图”．

高度对称图(highly symmetric graph)　见“点对称图”．

群的色图(color graph of group)　一类赋权图．设 Γ 是一有限群，对其每一非单位元的元素给定不同的标号．Γ 的色图 $D(\Gamma)$ 是一个弧标以色号的完全有向图，以 Γ 的元素为顶点，弧 (α_i, α_j) 标以元素 $\alpha_i^{-1}\alpha_j$ 的色号．若色图中弧 (α_i, α_j) 的色号为 k，则称如图 1 所示的子图为有色无向箭头．若将 Γ 的色图中每一条弧用相应的有色无向箭头代替，则所得的图称为 Γ 的群图．图 2 和图 3 分别是 3 阶循环群的色图和群图．

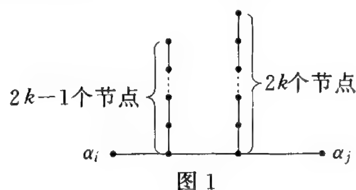


图 1

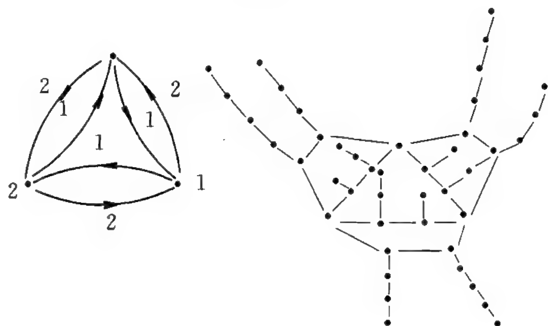
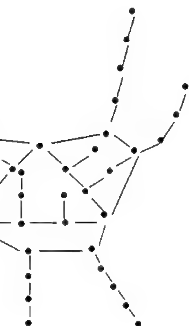


图 2


图 3

群图(graph of group)　见“群的色图”．

图的自同构群(automorphism group of a graph)　亦称节点群．图论中一类重要的群．它是图 G 的所有自同构形成的群．自同构群为平凡群的图称为幺图．柯尼希(König, D.)证明：任何一个有限抽象群同构于某个图的自同构群．图 G 的所有自同态形成一个半群，称为图 G 的自同态半群．任何一个有单位元的有限半群同构于某个图的自同态半群．作用在图 G 的边集 E 上的自同构群称为 G 的边群，又称线群．由各种图的运算得来的复合图的群用构成它的各个图的群的复合表示出来，称这种表示为复合图的群．以下为常用的结果：

1. 补图的群：$\Gamma(\overline{G})=\Gamma(G)$．
2. 同构不交并图的群：$\Gamma(nG) = S_n[\Gamma(G)]$．
3. 不同构不交并图的群：
$$\Gamma(G_1 \cup G_2) = \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2).$$
4. 不交并图的群：
$$\Gamma(G_1 + G_2) = \Gamma(G_1) + \Gamma(G_2)$$
的充分必要条件为 $\overline{G}_1$ 没有连通片同构于 $\overline{G}_2$ 的连通片．

节点群(vertex group)　见“自同构群”．

幺图(identity graph)　见“自同构群”．

图的自同态半群(endomorphism semigroup of a graph)　见“图的自同构群”．

边群(edge group)　见“图的自同构群”．

构形(configuration)　图论的一个重要概念．它是定义在域 D，取值在域 R 上的函数．值域 R 中的每个元素称为一个图形．所有构形组成的集合记为 R^D．决定 R^D 中任意两函数是否等价的一个置换群 G 称为构形群．对于 R^D 中的两个元素 f_1, f_2，若存在一个置换 $\alpha \in G$，使得 $f_1 = f_2 \circ \alpha$，则称 f_1 与 f_2 是等价的．按需要考虑的函数的特征，在 R 上定义一个向量权函数
$$w(r)=(w_1(r), \cdots, w_k(r)),$$
其中 $w_i(r)(i=1,2,\cdots,k; k$ 为需要考虑的 f 的特征个数$)$均为非负整数．对于每个 $f \in R^D$，其权 $w(f)$ 记为
$$w(f) = \prod_{d \in D} x_1^{w_1(f(d))} \cdots x_k^{w_k(f(d))},$$
其中 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 为形式参数．易见等价的函数有

相同的权 w. 权等于$(i_1,i_2,\cdots,i_k)$的构形的个数,记为$h_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$,于是 R 中的各种权的个数的描述式为

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_k)=\sum_{f\in R^D}w(f)$$
$$=\sum h_{i_1,i_2,\cdots,i_k}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_k^{i_k}.$$

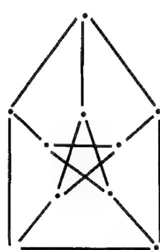
称为图形计数级数.

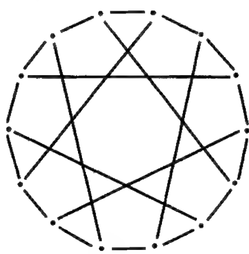
构形群(configuration group) 见"构形".

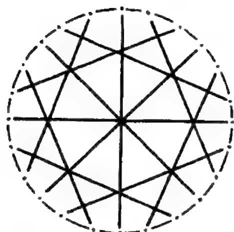
图形计数级数(enumeration series of figure)见"构形".

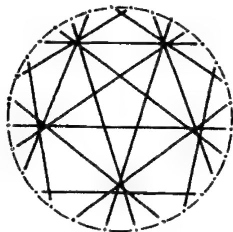
图的计数(enumeration of graph) 计算一类图中不同构图的个数. 这里蕴含两个要求:不重和不漏. 这是图论中的一个重要且复杂的问题. 在推导各类图的计数级数时,波利亚公式是最重要的工具之一. 它是通过确定这类图的构形群,求出它的循环指标,以确定出图形的计数级数,从而得到这类图的个数. 目前,已解决了不少类型的图的计数问题;但是,还有大量没有解决的问题.

***n* 笼**(n-cage) 一类重要的图. 它是围长等于 n 的边数最少的 3 正则图. 当 $n\geqslant 3$ 时,n 笼都是存在的. 当 $n=3,4,5,6,7,8$ 时,n 笼是惟一的. 3 笼为 K_4;4 笼为 $K_{3,3}$,5,6,7,8 笼分别如下图所示.


5 笼图

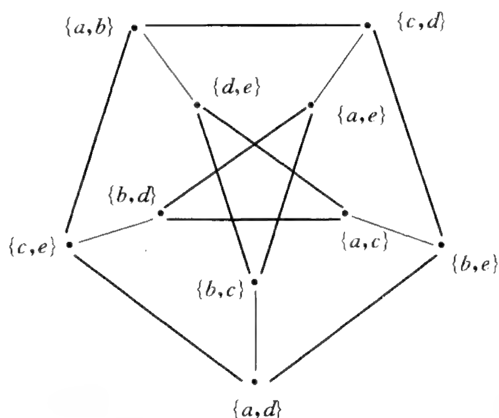

6 笼图


(3,7)笼 McGec 图

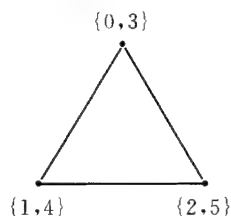

(3,8)笼 Tutte-Coxeter 图

乌拉姆猜想(Ulam's conjecture) 图论的一个重要问题. 它是判定两图是否同构的一个猜想. 设 G 和 H 是两个 $n(\geqslant 3)$阶图. 去掉 G 的每一节点及其所有的关联边得到一个删点子图,从而得到一个删点子图集$\{G_i|i=1,2,\cdots,n\}$;同样得到 H 的一个删点子图集$\{H_i|i=1,2,\cdots,n\}$. 若 G_i 与 $H_i(i=1,2,\cdots,n)$对应同构,则称 G 和 H 重构或亚同构. 乌拉姆猜想:若 G 与 H 重构,则 G 与 H 同构. 乌拉姆猜想被认为是图论中最困难的问题之一. 现在只是把图限制在某些特殊图类上证明了乌拉猜想成立. 例如,对于树和可平面图,乌拉姆猜想成立. 由于这个猜想是由乌拉姆(Ulam,S. M.)于 1929 年首先提出的,所以得名.

奇图(odd graph) 一类重要的图. 它是交不邻图. 设 S 为 $2k-1$ 个元素组成的集合,取 S 的所有 $k-1$ 元素的子集为节点,若这样的两子集不相交,相应的两顶点连以边,则这样构成的图称为奇图,记为 O_k. O_2 为 3 阶完全图 K_3;O_3 为皮特森图,如下图所示.



群-陪集图(group-coset graph) 一类重要的图. 它是从群派生的图. 若 H 是有限群 Γ 的子群,S 是 Γ 的子集且 $S^{-1}=S$,$S\cap H=\varnothing$,称以 Γ/H 为顶点集,以$\{(xH,yH)|x^{-1}y\in HSH\}$为边集的图为群-陪集图,记为$G(\Gamma/H,S)$. 例如,$\Gamma=\{0,1,2,3,4,5\}$,$H=\{0,3\}$,$S=\{1,5\}$,$\Gamma/H=\{0,3\}\cup\{1,4\}\cup\{2,5\}$. 上右图为$G(\Gamma/H,S)$.



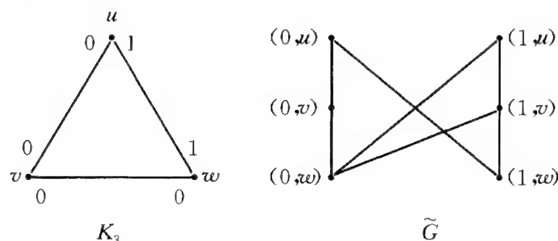
拟可分图(quasi-separable graph) 一类特殊的图. 它是具有某种可分离性的图. 若图 G 中存在一个顶点子集 K,K 的导出子图为一完全图,且去掉这个子集 K 后的图变为不连通的,则称图 G 为拟可分图. 当$|K|=0$ 或 1 时,分别为不连通图或可分图.

覆盖图(covering graph) 一类重要的图. 它是从一个图派生的图. 对图 G 的每一条边(u,v)给出两个侧$[u,v)$(即含 u 而不含 v)和$[v,u)$(即含 v 而不含 u). 记 $S(G)$为 G 的所有边的两侧组成的集合. 对于群 Γ,G 上的一个 Γ 链是从 $S(G)$到 Γ 的一个函数 φ,对 G 的所有侧$[u,v)$,满足

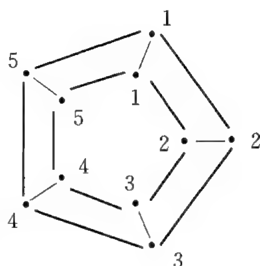
$$\varphi[u,v)=(\varphi[v,u))^{-1}.$$

对给定的图 G 的 Γ 链 φ,G 的覆盖图 $\widetilde{G}$:其顶点集为

$\Gamma\times V(G)$；两顶点(a,v)，(b,u)相邻当且仅当$[v,u]\in S(G)$且$b=a\varphi[v,u]$. 例如，$\Gamma=\{0,1\}$，$G=K_3$，即3阶的完全图. $\widetilde{G}$如下图所示. 在K_3中边旁之两数字给出φ的值.



α置换图(α-permutation graph)　一类重要的图. 它是对两图经运算所得的图. 若α是标定图G的节点的一个置换，则对$G_1=G$和$G_2=G$的不相交的并，再加上联结G_1的节点V_i和G_2的节点$\alpha(V_i)$的边所构成的图称为G的α置换图. 右图为C_5的一个1置换图.



网络(network)　一类特殊的图. 它是一种赋权图. 通常是有向图，且权一般为实函数. 在实际问题中，权往往是正实函数或非负实函数.

系统图(graph of system)　一类特殊的图. 它是代表一个系统的有向图. 它的每个弧代表一个元件或装置E_i，节点V_i代表n个元件的结合点，e_i的箭头方向为规定的正向. 弧上还附有两个变量，一个称为纵变量，另一个称为横变量. 它们分别相应电网络系统中的电流和电压. 这些变量还必须满足关联公设和回路公设. 系统图是研究系统的有力工具.

纵变量(travel variable)　见"系统图".

横变量(transversal variable)　见"系统图".

关联公设(incidence postulate)　图论的一个重要结论. 它是电网络中基尔霍夫电流定律的推广. 在系统图中，关联于任何节点的弧上的纵变量的代数和为0. 这个实事称为关联公设. 在电网络中又称基尔霍夫电流(第一)定律，因为它是德国的物理学家基尔霍夫(Kirchhoff, G. R.)首先发现的.

回路公设(circuit postulate)　图论的一个重要结论. 它是电网络中基尔霍夫电压定律的推广. 在系统图中，一个回路(即圈)上诸弧上的横变量的代数和为0. 这个事实称为回路公设. 在电网络中又称基尔霍夫电压(第二)定律. 因为它是德国物理学家基尔霍夫(Kirchhoff, G. R.)首先发现的.

状态变量法(state variable method)　用系统图解方程的一种方法. 能决定系统的将来行为的一个系统变量的极小集，称为系统的状态变量集. 由系统图的一个特征树可得到一个系统变量集及相应的微分方程组，这样求解系统的方法称为状态变量法.

状态变量集(state variable set)　见"状态变量法".

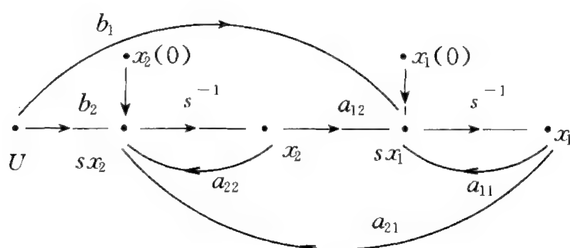
柯特斯图(Coates graph)　一种特殊的图. 它是弧带权的有向图. 如流图. 对于n阶方阵$A=(a_{ij})$，如下构造的n阶带权有向图$G(A)$称为与A关联的柯特斯图. 图$G(A)$的顶点分别标记为$1,2,\cdots,n$，若$a_{ij}\neq0$，则连一条从i到j权为a_{ij}的弧. 方阵与柯特斯图之间一一对应. 可以用柯特斯图$G(A)$解线性方程组$AX=B$.

状态转移图(state transition graph)　一种信号流图. 将状态方程做拉氏变换，并将sx_i作为独立节点作成的信号流图称为状态转移图. 下图为状态转移图的一个示例. 对应的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1u,\\ \dot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+b_2u,\end{cases}$$

拉氏变换后得

$$\begin{cases}x_1=a_{11}s^{-1}x_1+a_{12}s^{-1}x_2+b_1s^{-1}U+s^{-1}x_1(0),\\ x_2=a_{21}s^{-1}x_1+a_{22}s^{-1}x_2+b_2s^{-1}U+s^{-1}x_2(0).\end{cases}$$

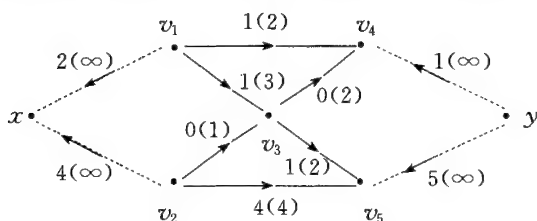


网络流(network flow)　图论的一类函数. 它是在一个边赋权的有向图上的特定的函数. 它是运输问题的一个数学模型. 一个运输网络(简称网络)N是一个赋权的有向图，弧上所赋的非负权$c(a)$表示弧a的容量，方向表示运输方向. 网络上的流是指定义在网络N的弧集上的一个实值函数f，它在任一弧a上的值满足条件$0\leqslant f(a)\leqslant c(a)$. 对于每一个顶点$v$，所有入弧的$f$值之和记为$f^-(v)$；所有出弧的$f$值之和记为$f^+(v)$. 若$f^+(v)-f^-(v)>0$，则称$v$点为发点；若$f^+(v)-f^-(v)<0$，则$v$点为收点；若$f^+(v)-f^-(v)=0$，则称$v$点为中间点. 若记节点集$V$的任意子集为$S$，其余集为$\overline{S}$，$(S,\overline{S})$表示由$S$指向$\overline{S}$的所有弧，则$f(S,\overline{S})$表示由集$S$流向$\overline{S}$的商品量，记为$f^+(S)$；$(\overline{S},S)$表示由$\overline{S}$指向$s$的所有弧，$f(\overline{S},S)$表示由$\overline{S}$流向$S$的商品量，记为$f^-(S)$. 若$X$表示所有的发点，$Y$表示所有的收点，则流函数$f$应满足条件

$$f^+(X)-f^-(X)=f^-(Y)-f^+(Y),$$

这个值称为流f的流量，记为$\mathrm{val}(f)$. 网络N上的任何流都可以用添加一个总发点x和一个总收点y

的办法化为只有一个收点和一个发点的新网络流. 只要把总发点到原各发点都连以弧,弧上容量为∞,流函数值定为使原发点变为中间点;原各收点到总收点也连以弧,容量为∞,流函数值定为使原收点变为中间点,新网络流在原网络上的部分正好是原来的网络流. 网络上所能容的最大流量的流称为最大流. 求最大流是网络流要研究的重要问题. 以上的处理将便于求最大流. 设在每个弧 a 上,给定一个费用函数 $d(a)$ 即单位流通过 a 时所需花的费用,并要求所得的最大流使总的花费最少,这就是最小费用问题. 下图为一个网络流的示例. 实线为网络 N 及其上的流;边上括号中的数值为容量;括号外为流函数值;虚线为增加总收点 y 和总发点 x 后增加的弧.



流量(value of flow) 见"网络流".

最大流(maximum flow) 见"网络流".

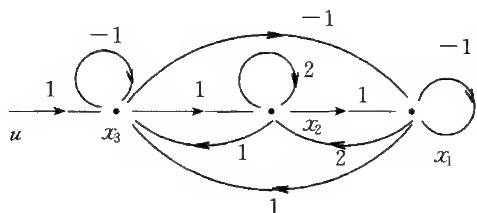
流图(flow graph) 一类特殊的图. 它是边赋权的有向图. 按照如下形式的系统方程作出的边赋权有向图称为流图. 方程为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i u = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

流图作法:$x_i(i=1,2,\cdots,n)$为节点. 任选第 i 个方程与 x_k 相应,若 $a_{ij}=0$ 则无 x_j 到 x_k 的弧;若 $a_{ij}\neq 0$,则有 x_j 到 x_k 的弧且赋权 a_{ij}. 若 $b_i=0$,则无 ux_k 弧;若 $b_i\neq 0$ 则有 ux_k 弧,且赋权 $-b_i$. 流图是信号流图的一般化. 因为选定哪 个方程与 x_k 对应的方式很多,所以流图不惟一. 下图为一个示例. 对应方程为

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + u = 0. \end{cases}$$

选定第 i 个方程与 x_i 对应,$i=1,2,3$.



一个流图 G 的入度和出度都为 1 的极大子图称为流图的一个连结. 计算一个流图 G 的增益(也用 G 表示)的公式称为柯特斯公式:

$$G = \frac{x_i}{u} = \frac{\sum_k G_k \Delta_{ck}}{\Delta_c}$$

求和遍取所有从节点 u 到节点 x_i 的向前路. G_k 是从 u 到 x_i 的第 k 条向前路的增益.

$$\Delta_c = \sum_j (-1)^{n_j} c_j,$$

c_j 是第 j 个连结的增益;n_j 是第 j 个连结中的圈的个数,求和遍取所有连结. Δ_{ck}是不与第 k 条向前路相交的子图的 Δ_c. 若第 k 条向前路不与任何子图相交,则定义 $\Delta_{ck}=1$.

柯特斯增益公式(Coates gain formula) 见"流图".

信号流图(signal flow gragh) 表示线性方程组的一种图. 如下形式的系统的线性方程组

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

可以通过画出的一个赋权有向图,称为信号流图(又称马森信号流图)求解:节点为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$,弧 x_jx_i 的权为 t_{ij},t_{ij}称为增益. 图 1 为方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ x_2 = 2x_1 + 3x_2 + x_3, \\ x_3 = x_1 + x_2 + x_4 \end{cases}$$

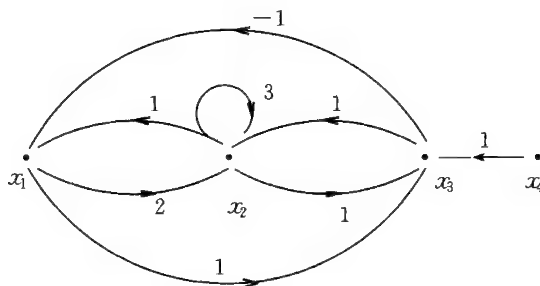


图 1

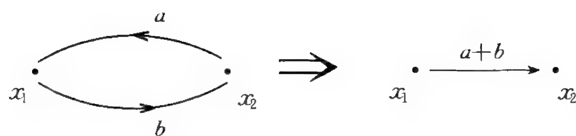
的信号流图. 信号流图中一个圈上弧的增益的积称为圈增益或回路增益. 正向有向路上弧增益的积称为向前路增益. 信号流图上弧增益的结合运算称为增益运算. 这种运算可以简化信号流图. 基本运算如图 2 的(a)至(e)所示. 运算方法都是由信号流图所代表的变量关系方程得来. 信号流图 G 的输出节点变量 x_0 和输入节点变量 x_i 之比称为 G 的图增益,也用 G 表示. 马森定理给出了图增益的计算公式:

$$G = \sum_m G_m \Delta_m / \Delta.$$

式中的求和指标遍取图中所有向前路,G_m 是第 m 条向前路的增益. Δ 是图行列式,其计算公式为

$$\Delta = 1 - \sum_i P_{i1} + \sum_j P_{j2} - \sum_k P_{k3} + \cdots,$$

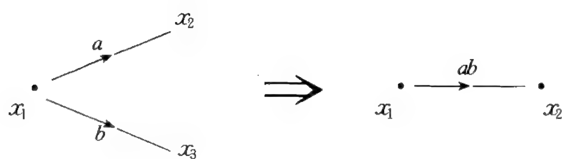
式中 P_{i1}是第 i 个圈的圈增益,求和指标遍取所有圈;P_{j2}是第 j 对互不接触的圈增益之积,求和指标遍取所有互不接触圈对;P_{k3}是第 k 组互不接触三圈



(a)



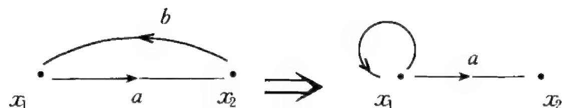
(b)



(c)



(d)



(e)

图 2

组的增益之积，求和指标遍取所有互不接触三圈组等. Δ_m 是删除第 m 条向前路的弧及此路上点关联的弧后所成子图的行列式.

圈增益(circuit gain)　见“信号流图”.

增益运算(operation of gain)　见“信号流图”.

图增益(graph gain)　见“信号流图”.

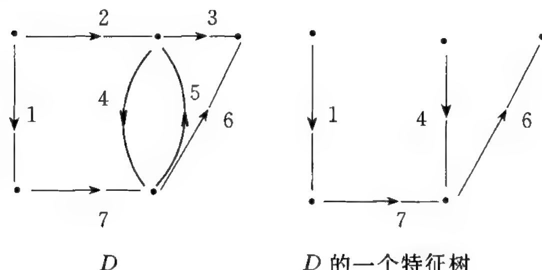
马森定理(Mason theorem)　见“信号流图”.

割(cut)　一种组合构形. 它是有向弧的集合. 在一个单发点和单收点的网络上，由含有发点的一个顶点集 S 到含有收点的顶点集 $\bar{S}$ 的有向弧集称为网络上的一个割. 割中弧的容量之和称为这个割的容量. 网络中具有最小容量的割称为网络的最小割.

最小割(minimum cut)　见“割”.

最大流最小割定理(max-flow min-cut theorem)　网络流理论的重要定理. 它是图论中的一个核心定理. 关于判定流的最大性的定理：任何网络中最大流的流量等于最小割的容量，简称为最大流最小割定理. 它描述了最大流的特征. 图论中的不少结果在适当选择网络以后，可以由这个定理推出. 例如，连通性理论中的门杰定理就是一例. 福特(Ford, L. R.)和弗克逊(Fulkerson, D. R.)于 1957 年由该定理的构造性证明而提出了求最大流的标号算法.

特征树(proper tree)　一类特殊的树. 它是电网络系统图的含有所有电容性元件和跨接驱动元件的一个支撑树. 由一个特征树可得一组状态变量，所以在状态变量法中很有用. 下图为一示例. D 的端点关系为：$x_1=e_1(t)$，$x_2=L_2y_2$，$x_3=R_3y_3$，$y_4=c_4x_4$，$y_5=e_5(t)$，$y_6=c_6x_6$，$y_7=1/R_7$. x_i 表示横变量，y_i 表示纵变量.



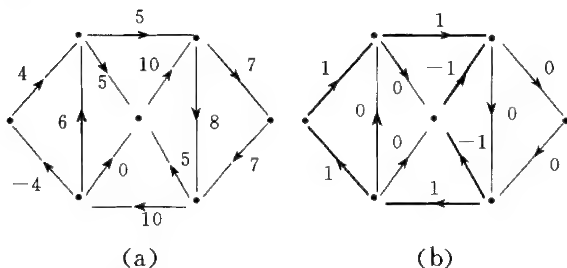
D　　　　D 的一个特征树

图上作业法(graphic method)　一类最小费用流问题. 它是 20 世纪 50 年代初，中国粮食调运部门的调度人员从经验中发现的一种解决运输问题的方法. 将铁道网看做一个网络. 其中，顶点就是车站. 有些顶点是发货点，简称发点；有些是收货点，简称收点. 在发点处有已知的发货量，简称发量；在收点处有已知的需求量，简称收量. 假定供求平衡，即发量总和等于收量的总和；也可假定每一段铁路都有一个容量限制. 一个可行方案就是：将所有发点上的货物通过铁道全部运往各收点，使得满足需要且使铁路上各段均不超载(即不超过容量限制)的一种安排方式. 其目的在于找到一个最优方案，使得总运输量为最小. 这里运输量以吨公里计算，即货物量乘以所通过的路程. 一个可行方案给定以后，网络上每一个圈上的每一段路，若有货物通过，则只能有两个方向. 而且，若在一段路上，两个方向都有货物通过，称为对流，则这个方案不可能是最优的. 经验表明，一个可行方案是最优的，当且仅当无对流而且在每个圈上两个方向货物所通过的路程不超过圈长之半. 20 世纪 50 年代末，中国数学工作者从理论上证明了这条经验的正确性.

可行流(feasible flow)　图论的一个重要概念. 它是满足一定条件的网络流. 对一个网络的某些点指定为发点，规定出提供能力；某些点指定为收点，规定出接收能力. 若一个流对每一发点满足总流出

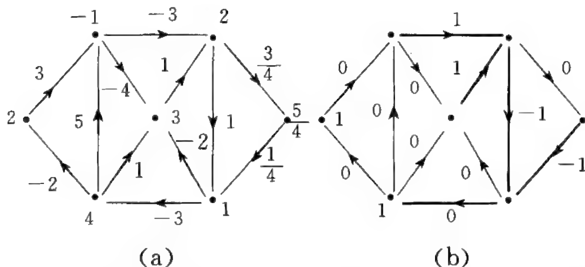
量与总流入量之差不大于提供能力，对每一收点满足总流入量与总流出量之差不小于接收能力，则称这个流为可行流. 可行流存在的充分必要条件是对所有顶点子集 S 都满足：由 S 到 $\bar{S}$ 的弧的总容量，不小于 $\bar{S}$ 中的收点总接收能力与 $\bar{S}$ 中的发点的总提供能力之差. 这个定理在图论中有许多应用.

环流(circulation)　图论中的一个函数. 它是以电网络为背景产生的一个有向图上的定义在其弧集上的实值函数. 它需要在每个顶点上满足守恒条件，即流入的和等于流出的和. 这正是电流的基尔霍夫定理. 图(a)为一个示例. 一种与有向图上的圈相对应的环流特别重要. 这里的圈是无向意义上的圈. 在指定一个圈 C 的同时规定出一个方向作为圈的正方向. 定义对应于这个圈 C 的环流 f 为：C 上与正方向一致的弧，定义 f 值为 1；C 上与正方向相反的弧，定义 f 值为 -1；不在 C 上的弧，定义 f 值为 0. 这样定义的 f 满足守恒条件，因此是个环流. 图(b)为一示例. 粗弧表示一个圈. D 上两环流的线性组合仍是 D 上的一个环流，因此所有环流构成一个线性空间.



(a)　　　　(b)

势差(potential difference)　图论中的一个函数. 它是以电网络为主要背景产生的一个有向图上的定义在其弧集上的一个实值函数. 它是由一个定义在顶点集上的一个实函数(称为势函数)产生的. 确切地说，若 D 的顶点集 V 上定义有势函数 p，弧 a 的尾和头两点的势分别为 $p(x)$ 和 $p(y)$，则势差函数 g 在弧 a 的定义为 $p(x)-p(y)$. 图(a)为一个势函数及相应的势差函数的示例.



(a)　　　　(b)

一种与有向图上的键相对应的势差特别重要. 设 $(X,\bar{X})$ 为一个键，定义相应的势函数 P 为：属于 X 的节点 P 值为 1；属于 $\bar{X}$ 的节点 P 值为 0. 由此势函数 P 可得势差 g. 图(b)是一个示例，其中粗弧为键. D 上两势差的线性组合仍是 D 上的一个势差，因此，D 上所有势差构成一个线性空间.

键(bond)　一种组合构形. 图中一种具有给定可分离性的边的子集. 对于图 G 的节点子集 X，若由 X 和 $\bar{X}$ 分别导出的子图都连通，则称连结 X 与 $\bar{X}$ 中节点的所有边组成的集合为图 G 的键，记为 $(X,\bar{X})$. 对于有向图，若键中的弧具有相同的方向，即起点都在 X 中或都在 $\bar{X}$ 中，则称这个键为有向键.

优美标号(graceful labeling)　图的一种标号. 指用非负整数标记图的顶点的一种方法. 用 $\{0,1,2,\cdots,q\}$ 中不同的整数标记一个图的顶点(q 为图的边数)，并以两端点标号差的绝对值标记相应的边，所得边的标号集若为 $\{1,2,\cdots,q\}$，则称这个标号为图的优美标号. 若存在 $\{0,1,2,\cdots,q\}$ 中的一个数 x，使图的任一条边的两个端点的标号一个比 x 大，一个不比 x 大，则称这个优美标号为交错标号. 若用 $\{0,1,\cdots,q+1-k\}$ 中的不同的整数标记图的顶点且所得边的标号集为 $\{k,k+1,\cdots,q+k-1\}$，则称这个标号为 k 优美标号. 1 优美标号就是如上定义的优美标号. 存在优美标号的图称为优美图. 存在 k 优美标号的图称为 k 优美图. 边-优美标号是用正整数标记图的边的一种方法. 用 $\{1,2,\cdots,q\}$ 中不同的整数标记图的边，并以所有关联边的标号的和模 p(p 为图的节点数)标记相应的顶点，若所得顶点标号集为 $\{0,1,\cdots,p-1\}$，则称这个标号为边-优美标号. 存在边-优美标号的图称为边-优美图. 集-优美标号是用集合标记图的节点的一种方法. 2^X 表示有限集 X 的所有子集组成的集合. 用 2^X 中的不同元标记图的顶点，并以两端点标号的对称差标记相应的边，若所得边的标号互不相同且边号集为 $2^X\backslash\{\varnothing\}$，则称这个标号为集-优美标号. 存在集-优美标号的图称为集-优美图. 优美标号的研究始于 20 世纪 60 年代. 研究的中心问题是哪些图是优美图. 至今尚无一般方法来判断一个图是否是优美图，仅知道很少一部分图是优美图.

优美图(graceful graph)　见“优美标号”.

调和标号(harmonious labeling)　图的一种标号. 指用有限加群中的元素标记图的节点的一种方法. 用模 q(q 为图的边数)整数加群中的不同元来标记图的节点，并用端点标号的和来标记相应的边，若所得边的标号都是模 q 互不相同的，则称这种标号为图的调和标号. 存在调和标号的图称为调和图.

调和图(harmonious graph)　见“调和标号”.

优雅标号(elegant labeling)　图的一种标号. 指标记图的节点的一种方法. 用模 $q+1$(q 为图的边数)整数加群 Z_{q+1} 中不同元来标记图的节点，并用两端点标号的和标记相应的边，若所得边的标号集为

$\mathsf{Z}_{q+1}-\{0\}$,则称这个标号为优雅标号.存在优雅标号的图称为优雅图.

优雅图(elegant graph)　见“优雅标号”.

幻标号(magic labeling)　图的一种标号.指标记图的边的一种方法.用 $1,2,\cdots,q$(q 为图的边数)标记图的边,使得不同的边具有不同的标号,并且,若用与节点邻接的所有边的标号的和标记节点,所有的节点具有相同的标号,则称这种标号为幻标号.存在幻标号的图称为幻图.

幻图(magic graph)　见“幻标号”.

最优线性排列(optimal linear arrangment)　图的一种标号.指标记图的节点的一种方法.图的一个线性排列 π 是指用不同的正整数标记图的节点的一种方法.用两端点标号差的绝对值来标记相应的边.用 $f_\pi(G)$表示图的所有边标号的和,用 $f(G)$表示图的所有线性排列 π 中 $f_\pi(G)$的最小值.满足 $f_\pi(G)=f(G)$的线性排列 π 称为最优线性排列.$f(G)$称为图的价格.求图的最优线性排列是一个 NP 完全问题.

图的价格(price of graph)　见“最优线性排列”.

带宽标号(bandwidth labeling)　图的一种标号.指决定图的带宽的一种标号方法.图 G 的一个标号 π 是指用不同的正整数标记图的顶点的一种方法.用两端点标号差的绝对值来标记相应的边,用 $b_\pi(G)$表示图 G 的边标号的最大值.对图 G 的所有标号 π,用$b(G)$表示$b_\pi(G)$的最小值.满足 $b_\pi(G)=b(G)$的标号 π 称为图 G 的带宽标号.$b(G)$称为图 G 的带宽.确定图的带宽是一个 NP 完全问题.

带宽(bandwidth)　见“带宽标号”.

折叠标号(folding labeling)　亦称最小割线性排列.图的一种标号.指决定图的折叠数的一种标号方法.图 $G=(V,E)$的一个标号 π 是指用不同的正整数标记图的节点的一种方法.用 $\pi(v)$表示节点 v 的标号.记 $\pi(V)=\{\pi(v)\,|\,V\in V\}$.定义

$$t_\pi(G)=\max_{i\in\pi(V)}|\{(u,v)\in E\,|\,\pi(u)\leqslant i\leqslant\pi(v)\}|.$$

用$t(G)$表示对于所有标号 π,$t_\pi(G)$的最小值.满足 $t_\pi(G)=t(G)$的标号称为图 G 的折叠标号.$t(G)$称为图 G 的折叠数.

折叠数(folding number)　见“折叠标号”.

模糊图(fuzzy graph)　一种赋权图.对于任意一条边 e,其 w 满足 $0\leqslant w(e)\leqslant 1$.权 $w(e)$称为边 e 的隶属度.

随机图(random graph)　一类重要的图.它是伴随有不确定性的图.按某种随机方式删去一个图 G 的某些节点或边而保留下来的图称为随机子图,又称随机图.G 称为随机图的原始图.随机图的性质与原始图及随机删除部分节点或边的方式有关.随机删除方式包括只删点、只删边和既删点又删边三种.研究较多的原始图有完全图和晶形图.若按某种删除方式得到的一类随机图看成是概率空间,则有关的图的不变量或参数就是该空间的随机变量.从任一节点出发,按不过重复节点的原则,可随机走遍所有节点的图称为随机哈密顿图.从任一节点出发,按不过重复边的原则,可随机走遍所有边而回到出发点的图称为随机可迹图.若原始图为完全图,且按随机删边方式得到的任一随机图边数固定,则称这样的随机图为定边数随机图.若原始图为完全图,每条边删除的概率相同且各边的删除相互独立,则这种随机图称为定边密度随机图.

原始图(initial graph)　见“随机图”.

随机可迹图(randomly traceable graph)　见“随机图”.

随机哈密顿图(randomly Hamiltonian graph)　见“随机图”.

增性质(increasing property)　图的一类性质.它是关于一类局部决定全局的性质.即图的这样的性质 π:从该图的任一生成子图具有性质 π 即可推知该图本身具有性质 π.

凸性质(convex property)　图的一类性质.指图的这样的性质 π:若 F 为 G 的子图,G 为 H 的子图,则由 F 和 H 都具有性质 π,可推断 G 也具有性质 π.

阀函数(threshold function)　图论中的一种特殊函数.它是对应于一定的概率度量和图的增性质的函数.对于自然数集上的整函数 $M=M(n)$,记 $\mathscr{G}_{n,M}$为所有具有 $M=M(n)$条边的 n 阶随机图 $G_{n,M}$ 构成的集合.对于图 G 的一个增性质 π,若 $M^*(n)$是满足如下条件的函数

$$P(G_{n,M}\text{有性质 }\pi)\xrightarrow[n\to\infty]{}\begin{cases}0 & (M(n)/M^*(n)\to 0),\\ 1 & (M(n)/M^*(n)\to\infty).\end{cases}$$

则称 $M^*(n)$为对于增性质 π 的阀函数.

阀分布函数(threshold distribution function)　一类依赖增性质的函数.满足如下条件的函数 F:

$$P(G_{n,M}\text{有性质 }\pi)\xrightarrow[n\to\infty]{}F(x),$$

$$\text{当 }M(n)/A(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}x,$$

其中,$A(n)$为对于增性质 π 的阀函数和 $M(n)$为自然数集上的函数.不是对 π 的任何阀函数均存在阀分布函数.

阀函数对(threshold pair)　一类依赖增性质的函数对.函数对$(A_1(n),A_2(n))$满足

$$P(G_{n,M}\text{有性质 }\pi)\xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\begin{cases}0 & ((M(n)-A_1(n))/A_2(n)\to -\infty),\\ 1 & ((M(n)-A_2(n))/A_2(n)\to \infty).\end{cases}$$

准确地说，$(A_1(n),A_2(n))$为增性质 π 的阀函数对.

可达阀分布函数(sharp-threshold distribution function)　图论中的一种特殊函数. 指关联阀函数对的函数. 若$(A_1(n),A_2(n))$为增性质 π 的阀函数对，且存在满足如下条件的函数 F：

$$P(G_{n,M}\text{ 有性质 }\pi)\xrightarrow[n\to\infty]{}F(x),$$

$$\text{当}(M(n)-A_1(n))/A_2(n)\to x,$$

称 $F(x)$为性质 π 的可达阀分布函数.

概率收敛性(convergence in probability)　随机图的性质. 指一种在概率意义下的收敛性. 随机图的一些性质可以看做随机变量. 对于随机变量 X_n，若对任意 $\varepsilon>0$，满足

$$P(|X_n-l|<\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

则称 X_n 依概率收敛于 l. 这种收敛性称为随机变量 X_n 的概率收敛性.

超图(hypergraph)　图的推广. 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是一个有限集，超图是 X 上的一个子集族 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$，也记 $H=(X,\mathscr{E})$，$\mathscr{E}=\{E_j\mid 1\leqslant j\leqslant m\}$，它满足条件：

1. $E_j\neq\varnothing$　$(j=1,2,\cdots,m)$.

2. $\bigcup\limits_{j=1}^{m}E_j=X$，

其中，X 中的元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为 H 的节点，其个数 n 称为 H 的阶，X 称为 H 的节点集. 集合 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 称为 H 的边，其个数 m 称为 H 的度，$\mathscr{E}=\{E_1,E_2,\cdots,E_m\}$称为 H 的边集. 若一个超图还满足条件：

3. $E_i\subset E_j\Rightarrow i=j$，

则称这个超图是简单超图或施佩纳族. 可以用一个关联矩阵 $A=(a_j^i)_{n\times m}$表示一个超图. 其中，A 的列相应于边 $E_1,E_2,\cdots,E_m$，行相应于节点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. A 的元素

$$a_j^i=\begin{cases}0 & (x_i\notin E_j),\\ 1 & (x_i\in E_j).\end{cases}$$

超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$的秩定义为

$$r(H)=\max_{1\leqslant j\leqslant m}|E_j|,$$

反秩定义为

$$s(H)=\min_{1\leqslant j\leqslant m}|E_j|.$$

若$r(H)=s(H)$，则称 H 是一个均匀超图. 对于 H 的任何一个节点子集 $S\subseteq X$，称

$$r(S)=\max_{1\leqslant j\leqslant m}|E_j\cap S|$$

为 H 的秩函数. 当 $S=X$ 时，秩函数的值就是 H 的秩. 设集合 $J\subset\{1,2,\cdots,m\}$，子集族 $H'=(E_j\mid j\in J)$称为由集合 J 生成的部分超图，其中，H'中节点的集合是 X 的一个非空子集. 设集合 $A\subset X$，子集族 $H_A=\{E_j\cap A\mid E_j\cap A\neq\varnothing,1\leqslant j\leqslant m\}$称为由集合 A 导出的子超图. $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$的对偶是集合 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$上的超图 $H^*=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，其中，E 中的节点 $e_1,e_2,\cdots,e_m$ 分别对应 H 中的边 $E_1,E_2,\cdots,E_m$，H^* 中的边 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 分别对应 X 中的节点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，且满足条件：$X_i=\{e_j\mid x_i\in E_j,1\leqslant j\leqslant m\}$　$(i=1,2,\cdots,n)$. $(H^*)^*=H$. 一个超图 H，若它的边集的交邻图是连通的，则称 H 是一个连通超图.

简单超图(simple hypergraph)　见"超图".

施佩纳族(Sperner family)　见"超图".

均匀超图(uniform hypergraph)　见"超图".

部分超图(partial hypergraph)　见"超图".

子超图(sub-hypergraph)　见"超图".

连通超图(connected hypergraph)　见"超图".

次(degree)　图上节点次的概念在超图上的推广. 对于 X 上的超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$，$x\in X$，H 的以 x 为中心的星为一个由所有包含 x 的边所生成的部分超图，记为 $H(x)$. $H(x)$中边的个数称为节点 x 的次. 若一个超图本身就是它的一个星，则称它为星超图，也常简称星. 一个超图，若所有节点的次都等于 k，则称它是 k 正则的. 这是 k 正则图的推广. 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$r(1\leqslant r\leqslant n)$为一个整数，由 X 的所有含 r 个元素的子集为边构成的超图，称为 r 完全超图. 由于它还是均匀的，所以也称为 r 均匀完全超图，记为 K_n^r. r 完全超图是完全图的一个推广. 还可以把完全二部图推广到超图上. 设 $X^1,X^2,\cdots,X^r$ 是两两无公共元的集合，$|X^i|=n_i(1\leqslant i\leqslant r)$，$X=X^1\cup X^2\cup\cdots\cup X^r$，构造 X 上的一个简单超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$，其中，$E_j=\{x^1,x^2,\cdots,x^r\}$，$x^1\in X^1,x^2\in X^2,\cdots,x^r\in X^r$，且 $E_j(1\leqslant j\leqslant m)$取遍所有具有上述形式的集合，即 $m=n_1n_2\cdots n_r$，称这样的超图 H 为一个 r 部完全超图，记为 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}^r$. 设超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$，若对一切 $i,j,i\neq j$，有 $|E_i\cap E_j|\leqslant 1$，则称 H 为线性超图. 一个超图称为可分离的，若对于每个节点 x，包含 x 的所有边的交都是单个元素集$\{x\}$，即 $\bigcap\limits_{E\in H(x)}E=\{x\}$.

星(star)　见"次".

完全超图(complete hypergraph)　见"次".

线性超图(linear hypergraph)　见"次".

交族(intersecting family)　边的集合. 给定一个超图 H，称它的边的一个集合为交族，其中任意两条边的交均非空. 若 H 本身就是一个交族，则超图 H 称为交超图. 爱尔特希-柯-拉多定理：若 H 是一个阶为 n 的简单超图，H 的秩 $r(H)=r\leqslant n/2$，H 的度记为 $m(H)$，则

1. $\sum_{E\in H}\binom{n-1}{|E|-1}^{-1}\leqslant 1$.

2. $m(H)\leqslant\binom{n-1}{r-1}$.

更进一步，当 H 是 $K_n^r(r<n/2)$ 的一个星时，结论 2 中的等式成立. 这一定理首次出现在爱尔特希(Erdös,P.)、柯召和拉多(Radó,R.)于 1961 年联名发表的一篇文章中.

交超图(intersecting hypergraph)　见“交族”.

爱尔特希-柯-拉多定理(Erdös-Ko-Radó theorem)　见“交族”.

边色数(chromatic index)　图上边染色在超图上的推广. 设超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$. 对 H 中的边染色，使得任意两条交非空的边的颜色不同，满足这一条件所需要的最少的颜色数目称为边色数，常记为 $q(H)$. 设 $\Delta(H)$ 表示超图上节点的最大次. 对于一个超图来说，总有 $q(H)\geqslant\Delta(H)$. 超图 H 满足边色性是指：$q(H)=\Delta(H)$.

遗传闭包(hereditary closure)　由一个超图派生出的另一个超图. 设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是集合 X 上一个简单超图，H 的遗传闭包就是指 X 上的一个这样的超图：H 的任何一条边的任何一个子集均是它的边. H 的遗传闭包常记为 $\hat{H}$. 若一个超图的遗传闭包就是它本身，则称该超图是遗传超图. 施瓦他猜想：每一个遗传超图 $\hat{H}$ 均有 $\Delta_0(\hat{H})=\Delta(\hat{H})$，其中，$\Delta_0(\hat{H})$ 和 $\Delta(H)$ 分别表示 $\hat{H}$ 中所有交族的基数的最大值和节点的最大次. 一个超图，若它具有边色性，则这个猜想自然成立. 到底什么样的超图具有边色性，目前人们还不完全知道.

遗传超图(hereditary hypergraph)　见“遗传闭包”.

施瓦他猜想(Chvatal's conjecture)　见“遗传闭包”.

色数(chromatic number)　超图的一种不变量. 超图 H 的色数 $\chi(H)$ 是指符合下列条件的 H 上节点着色所用颜色数的最小值：对 H 上每一节点着色，使得对于 H 的任一边 E_i，$|E_i|>1$，E_i 所含的全部节点不着同一颜色. 超图 H 的强色数，常记为 $\gamma(H)$，是指符合下列条件的 H 上节点着色所用颜色数的最小值：对 H 上每一节点着色，使得每两个含在同一条边中的节点着不同颜色. 一个超图 H 的强色数不可能小于它的色数，即 $\gamma(H)\geqslant\chi(H)$. 一个超图 H 称为是 γ 完美的，若 $\gamma(H_A)=r(A)$ 对于节点集 X 的任一子集 A 都成立，其中，H_A 表示由 A 导出的子超图，$r(A)$ 为 H 的秩函数.

强色数(strong chromatic number)　见“色数”.

完美超图(perfect hypergraph)　见“色数”.

团(clique)　一类组合构形. 指超图的一种特殊节点子集. 设超图 H 的秩为 h，$r\leqslant h$. H 的节点集 X 的子集 A 称为秩 r 团，若 $|A|<r$；或者 $|A|\geqslant r$ 并且 A 的每一个基数为 r 的子集都含在 H 的至少一条边中. 若 A 是秩 r 团，则它的任何子集也是秩 r 团. 若 H 是一个秩为 h 的均匀超图，则 H 的秩 h 团常称为团. 若 X 本身就是一个秩 r 团，则称 H 是 r 完全的.

截段(section)　一种特殊的超图. 指由一个超图所派生出的另一个超图. 对于给定的正整数 k，超图 $H=(X,\mathscr{E})$ 的 k 截段定义为 $H_{(k)}=(X,\mathscr{E}_{(k)})$，其中，$\mathscr{E}_{(k)}=\{F\mid F\subset X,1\leqslant|F|\leqslant k;F$ 是某个 $E\in\mathscr{E}$ 的子集$\}$. H 的所有 k 截段统称为截段. H 的 2 截段 $H_{(2)}$ 相应一个图，在这个图上每个节点都有一个环. 用 $(H)_2$ 表示 $H_{(2)}$ 上去掉所有环后所得的图. 设 $\mathscr{E}=\{E_1,E_2,\cdots,E_m\}$. H 称为保形超图，若图 $(H)_2$ 的每一个团都是 H 的边. 设 H 是一个 r 均匀超图，并且它的边数

$$m(H)=m=\binom{a_r}{r}+\binom{a_{r-1}}{r-1}+\cdots+\binom{a_s}{s}$$

$$(a_r>a_{r-1}>\cdots>a_s\geqslant s\geqslant 1),$$

则它的 $(r-1)$ 截段的边数

$$m(H_{(r-1)})\geqslant\binom{a_r}{r-1}+\binom{a_{r-1}}{r-2}+\cdots+\binom{a_s}{s-1}.$$

这就是克鲁斯卡尔-卡妥那定理. 它是分别由克鲁斯卡尔(Kruskal,J.B.)于 1963 和卡妥那(Katona,G.O.H.)于 1964 年发现的.

保形超图(conformal hypergraph)　见“截段”.

克鲁斯卡尔-卡妥那定理(Kruskal-Katona theorem)　见“截段”.

黑利性质(Helly property)　简单超图的一种特殊性质. 设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是一个简单超图. 若对于任何 $J\subset\{1,2,\cdots,m\}$，从条件对任何 $i,j\in J$，$E_i\cap E_j\neq\varnothing$ 可以导出条件

$$\bigcap_{i\in J}E_i\neq\varnothing,$$

则称 H 满足黑利性质. 若 H 的节点集由一条直线上所有点组成，它的边集为这条直线中的一些区间，则称 H 为一个区间超图. 黑利(Helly,E.)的一个定理指出这种超图具有上述性质，这也就是称之为黑利性质的缘由. 若取 H 的节点集 X 为自然数的集合，边为 X 上的算数级数，则 H 上的黑利性质就是著名的中国剩余定理，或称孙子定理. 一个简单超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$，若对于任何 $J\subset\{1,2,\cdots,m\}$ 满足性质：

1. 对任何 $I\subset J$，从 $|I|\leqslant k$ 可导出 $\bigcap_{i\in I}E_i\neq\varnothing$.

2. $\bigcap_{j\in J}E_j\neq\varnothing$，

则称它有 k 黑利性质. 黑利性质就是指 2 黑利性质.

区间超图(interval hypergraph)　见"黑利性质".

孙子性质(Sun Wu property)　见"黑利性质".

k 黑利性质(k-Helly property)　见"黑利性质".

横截集(transversal set)　一种组合构形. 指超图的一种特殊节点子集. 超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 的节点子集 $T\subset X$ 称为一个横截集,若 $T\cap E_i\neq\varnothing$ 对任一 $i(1\leqslant i\leqslant m)$ 都成立. H 的横截数,是指在 H 的所有横截集中,节点数目最少的横截集的节点数. H 的横截数常记为 $\tau(H)$. H 称为横截临界超图,若 $\tau(H-E_i)<\tau(H)$ 对一切 $i(1\leqslant i\leqslant m)$ 成立. 超图 H 的横截超图是指与 H 有相同节点集的由 H 的所有极小横截集作为边的超图.

横截数(transversal number)　见"横截集".

横截超图(transversal hypergraph)　见"横截集".

横截临界超图(transversal-critical hypergraph)　见"横截集".

链(chain)　一种组合构形. 指超图上的一种特殊的节点和边的序列. 超图 $H=(X,\mathscr{E})$ 的一个节点和边的序列 $(x_1,E_1,x_2,E_2,\cdots,x_q,E_q,x_{q+1})$ 称为一个链,若满足下列三个条件:

1. $x_1,x_2,\cdots,x_q$ 是 H 的互不相同的节点.
2. $E_1,E_2,\cdots,E_q$ 是 H 的互不相同的边.
3. 对于任意 $k,1\leqslant k\leqslant q$,边 E_k 包含节点 x_k 和 x_{k+1}. 其中,q 称为链的长度.

若 $q>1$ 且 $x_{q+1}=x_1$,则称这个链为一个圈. 一个超图 H 称为是平衡的,如果其上每一个奇圈 $(a_1,E_1,a_2,E_2,\cdots,a_{2p+1},E_{2p+1},a_1)$ 都有一个边 $E_i(1\leqslant i\leqslant 2p+1)$ 包含这个圈上至少 3 个节点. H 称为是全平衡的,若 H 的每一个长度不小于 3 的圈上都有一个包含这个圈上 3 个节点的边.

平衡超图(balanced hypergraph)　见"链".

全平衡超图(totally balanced hypergraph)　见"链".

均等 q 染色(equitable q-colouring)　一种组合构形. 指超图的节点集的一种特殊划分. 超图 $H=\{E_i|i\in I\}$ 的节点集 X 的一个 q 划分 $(S_1,S_2,\cdots,S_q)$ 称为 H 的均等 q 染色,若对于任意 $i\in I$ 和 $1\leqslant j,j'\leqslant q$,都有

$$-1\leqslant|E_i\cap S_j|-|E_i\cap S_{j'}|\leqslant 1.$$

超图 H 称为单模超图,若对于 X 的任一子集 S,子超图 H_S 有一个均等 2 染色.

单模超图(unimodular hypergraph)　见"均等 q 染色".

匹配(matching)　一种组合构形. 指超图的一种特殊边子集. 超图 $H=(X,\mathscr{E})$ 的边子集 $\mathscr{E}_0\subset\mathscr{E}$ 称为 H 的一个匹配,若 $\mathscr{E}_0$ 中的所有边两两互不相交. 超图 H 的最大匹配,是指在 H 的所有匹配中,含边数最多的匹配. 最大匹配中边的数目称为匹配数. 设 $\mathscr{E}_0$ 是超图 $H=(X,\mathscr{E})$ 的一个匹配,记 $\mathscr{F}=\mathscr{E}-\mathscr{E}_0$. 序列 $\sigma=(F_1,E_1,F_2,E_2,\cdots)$ 称为关于 $\mathscr{E}_0$ 的交错序列,若它具有如下三条性质:

1. F_1 是 $\mathscr{F}$ 中元素.
2. $E_i,i=1,2,\cdots$,是 $\mathscr{E}_0-\{E_1,\cdots,E_{i-1}\}$ 中元素,且 $E_i\cap(\bigcup_{j\leqslant i}F_j)\neq\varnothing$.
3. $F_{i+1}(i=1,2,\cdots)$,是 $\mathscr{F}-\{F_1,F_2,\cdots,F_i\}$ 中的元素,且 $F_{i+1}\cap(\bigcup_{j\leqslant i}F_j)=\varnothing$, $F_{i+1}\cap(\bigcup_{j\geqslant i}E_j)\neq\varnothing$.

超图 $H=(X,\mathscr{E})$ 的一个边子集 $\mathscr{E}_0$ 称为 H 的一个覆盖,若 H 的每一个节点都在 $\mathscr{E}_0$ 的某一边中(或者说,$\mathscr{E}_0$ 的边覆盖了 H 的所有节点). H 的最小覆盖是指在 H 的所有覆盖中,含边最少的覆盖. H 的覆盖数,是指 H 的最小覆盖中的边数,常记为 $\rho(H)$. 记 $\delta_x(H)$ 表示超图 H 上包含节点 x 的边的数目,

$$\delta(H)=\max_{x\in X}\delta_x(H).$$

超图 H 称为正规超图,若对于 H 的每一个部分超图 H',都有 $q(H')=\delta(H')$,其中,$q(H')$ 表示 H' 的边色数.

匹配数(matching number)　见"匹配".

覆盖(covering)　见"匹配".

正规超图(normal hypergraph)　见"匹配".

代表图(representative graph)　亦称线图. 一类特殊的超图. 指由一个超图派生出的一个图. 设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 为 X 上的一个超图. H 的代表图记为 $L(H)$,定义为如下的简单图:节点集为 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$,$e_i(i=1,2,\cdots,m)$ 代表超图的边 E_i,两个节点 e_i 和 e_j 相邻,当且仅当它们所对应的 H 的边 E_i 和 E_j 有公共节点,即 $E_i\cap E_j\neq\varnothing$. 事实上,一个超图的代表图就是它的对偶的 2 截段.

树形超图(arboreal hypergraph)　一种特殊超图. 超图 H 称为是树形超图,若满足下列两个条件:

1. H 具有黑利性质.
2. H 的每一个长度不小于 3 的圈上都存在 3 条边,使得它们的交非空.

上树形超图是指树形超图的对偶超图. 或者说,H 是上树形超图,若 H 满足下列两个条件:

1. H 是保形超图.
2. H 的每一个长度不小于 3 的圈上都有 3 个节点含于同一边中.

上树形超图(co-arboreal hypergraph)　见"树形超图".

s 匹配(s-matching)　匹配的推广. 设 $H=(E_1,$

$E_2,\cdots,E_m$)为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的一个超图,它的关联矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times m}$,n 和 m 分别为 H 的阶和度. 给定一个向量 $s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in \mathrm{N}^n$,即 $s_i(1\leqslant i\leqslant n)$均为非负整数. H 的一个 s 匹配就是指多面体 $Q(s)$上的一个所有分量均为整数的向量 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$,其中,$Q(s)=\{y\mid y\in \mathrm{R}^m, y\geqslant 0, Ay^T\leqslant s^T\}$,而 y^T 表示向量 y 的转置. 当 $s=1_n$ 时,即 $s_i=1$ $(1\leqslant i\leqslant n)$,$y$ 的分量只能取 0 或 1. 也就是说,任何一个节点至多包含在一条相应 y 的分量为 1 的边中. 所有相应 1_n 匹配 y 的分量为 1 的边的集合就是 H 的一个匹配. 对应超图的每一条边 E_j 给定一个整数 $d_j\geqslant 0$,称 d_j为边 E_j 的权. 记 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_m)$. H 上 s 匹配的最大权定义为

$$\max_{\mathrm{N}}\limits_{y\in Q(s)}\langle d,y\rangle$$
$$=\max\left\{\langle d,y\rangle=\sum_{j=1}^{m}d_jy_j\mid y\in Q(s)\cap \mathrm{N}^m\right\}.$$

对于向量 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_m)\in \mathrm{N}^m$,$H$ 的一个 d 横截是指多面体 $P(d)$上的一个分量为整数的向量 $t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$,其中,$P(d)=\{t\mid t\in \mathrm{R}^n, t\geqslant 0, A^*t^T\geqslant d^T\}$,而 A^* 是 H 的对偶超图的关联矩阵. 在 H 的每一个节点 x_i 处给定一个整数 $c_i\geqslant 0$,称 c_i 为节点 x_i 的费用. 设 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$. H 的 d 横截的最小费用定义为

$$\min_{\mathrm{N}}\limits_{t\in P(d)}\langle c,t\rangle$$
$$=\min\left\{\langle c,t\rangle=\sum_{i=1}^{n}c_it_i\mid t\in P(d)\cap \mathrm{N}^n\right\}.$$

特别地,

$$\max_{\mathrm{N}}\limits_{y\in Q(1_m)}\langle 1_m,y\rangle$$

是 H 的匹配数,

$$\min_{\mathrm{N}}\limits_{t\in P(1_n)}\langle 1_n,t\rangle$$

是 H 的横截数. 一个超图 H,若对任何 $c\in \mathrm{N}^n$ 均有

$$\max_{\mathrm{N}}\limits_{y\in Q(c)}\langle 1_m,y\rangle=\min_{t\in P(1_n)}\langle c,t\rangle,$$

则称 H 为门杰超图. 任何一个平衡超图都是门杰超图;但反之不然. 一个超图 H 称为整极超图,若满足如下三个等价条件之一:

1. 多面体 $P(1_n)$上的所有极点都是整向量,即所有分量皆为整数.

2. 对任何 $c\in \mathrm{N}^n$, $\min\limits_{t\in P(1_n)}\langle c,t\rangle$皆为整数.

3. 对任何 $c\in \mathrm{N}^n$,均有

$$\min_{\mathrm{N}}\limits_{t\in P(1_n)}\langle c,t\rangle=\min_{t\in P(1_n)}\langle c,t\rangle.$$

由于门杰超图总满足条件 3,所以它是整极的;但是,反之不然.

门杰超图(Mengerian hypergraph) 见"s 匹配".

整极超图(paranormal hypergraph) 见"s 匹配".

单纯分解(simplicial decomposition) 图的一种分解. 设 $G=(V,E)$是一个图,$\sigma>0$ 为一个序数,对于任何 $\lambda<\sigma$,记 B_λ 为 G 的导出子图. 一个图族 $\mathscr{F}=(B_\lambda)_{\lambda<\sigma}$若满足下列三个条件,则称为 G 的一个单纯分解:

1. $G=\bigcup\limits_{\lambda<\sigma}B_\lambda$.

2. 对任何 $\mu(0<\mu<\sigma)$,$S_\mu=(\bigcup\limits_{\lambda<\mu}B_\lambda)\cap B_\mu$ 是一个完全图,其中,两个图 $G_1=(V_1,E_1)$和 $G_2=(V_2,E_2)$的交 $G_1\cap G_2=(V_1\cap V_2,E_1\cap E_2)$(当 $G=(\varnothing,\varnothing)$时简记为$\varnothing$).

3. 对任何 $\mu(0\leqslant\lambda<\mu<\sigma)$,$S_\mu$ 既不包含 B_μ 又不包含 B_λ.

G 的一个由它的导出子图组成的图族 $\mathscr{F}=(B_\lambda)_{\lambda<\sigma}$,若它还满足下列条件,则称 $\mathscr{F}$ 是 G 的一个树-分解.

4. 对任何 $\mu(\mu<\sigma)$,S_μ 包含在某 $B_\lambda(\lambda<\mu)$中,和上面的条件 1(注意,不一定满足条件 2 或 3).

若 $\mathscr{F}=(B_\lambda)_{\lambda<\sigma}$是图 G 的一个单纯分解并且它还满足条件 4,则称之为 G 的单纯树分解. 或者说,G 的一个单纯树分解就是满足条件 2 和 3 的树-分解. 一个树分解$(B_\lambda)_{\lambda<\sigma}$的宽度就是$\sup\{|B_\lambda|-1\mid\lambda<\sigma\}$,其中,$|B_\lambda|$为 B_λ 的阶. 所谓 G 的树宽就是 G 的所有可能树分解的宽度的最小值;或者说,这样的最小整数 k 使得 G 有一个树分解,其中的每个导出子图至多是 $k+1$ 阶. G 的分解中的导出子图称为因子.

树-分解(tree-decomposition) 见"单纯分解".

树宽(tree-width) 见"单纯分解".

图的素分解(prime decomposition of a graph) 图的一种分解. 一个图称为对于一类分解的素图,若它没有包含至少两个子图的这样的分解. 图 G 的一个素子图,若它不是 G 的任何其他素子图的真子图,则称为极大素的,这里所说的子图全指导出子图. 若一个分解中所有的子图全是素的,则称它为素分解. 在一个分解中的素子图称为素因子. 在多数情形,所说素因子均指素分解中的因子.

素图(prime) 见"图的素分解".

极大素子图(maximally prime subgraph) 见"图的素分解".

图的素因子(prime factor of a graph) 见"图的素分解".

单形(simplex) 亦称完全图. 它是从拓扑学中借用的词. 图的一种分解. 在图 G 的一个分解 $\mathscr{F}=(B_\lambda)_{\lambda<\sigma}$($\sigma$ 是一个序数)中,若对于任何 μ,

$$0<\mu<\sigma,(\bigcup_{\lambda<\mu}B_\lambda)\cap B_\mu$$

均为单形,则称之为触单形. 对于一个分解 $\mathscr{B}$,可用如下的递推方式定义复形:每个 $B\in\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{B}$ 上的

复形;若 H_1 和 H_2 是 $\mathscr{B}$ 上的复形并且 $H_1 \cap H_2$ 是单形,则 $H_1 \cup H_2$ 是 $\mathscr{B}$ 上的复形.单纯分解就是一种特殊的复形.它也是从拓扑学中借用的.

门杰数(Mengerian number)　图的一个不变量.设 x,y 为图 G 的两个节点,若 G 的一个节点子集 $S,x,y \in S$,使得在图 $G\text{-}S$ 中不再有连 x 与 y 的路,则称 S 为 G 的一个 (x,y) 分离子.若 S 是 G 上的一个 (x,y) 分离子,但它的任何一个真子集均不是 G 上的 (x,y) 分离子,则称 S 为极小 (x,y) 分离子.含节点最少的 (x,y) 分离子称为最小 (x,y) 分离子.最小 (x,y) 分离子中的节点数称为 (x,y) 分离数.两条以 x,y 为端点的路,若除 x,y 以外不再有公共节点,则称之为独立的.连 x 与 y 的两两独立的路的最大数称为 (x,y) 门杰数.(x,y) 门杰数等于 (x,y) 分离数.

凸性(convexity)　图的一种内在的属性.若图 G 的一个导出子图是路,则称它为 G 的导出路.若 G 的一个子图 H 包含 G 的所有端点在 H 中的导出路,则称 H 在 G 中是凸的.若 $H \subset G$ 在 G 中是凸的,并且它不是两个凸的真子图的并,则称 H 是极小凸的.对于 G 的任何一个节点子集 S,G 中所有包含 S 的凸子图的交称为 S 的凸包.

极小凸的(minimally convex)　见"凸的".

凸包(convex hull)　见"凸的".

闭性(closedness)　亦称简单闭的.图的两个节点间的一种特殊关系.图 G 的两个节点,若在 G 中没有任何单形可以分离它们,则这两个节点称为闭的.对于 G 的一个节点子集 S,在 G 中所有那些与 S 中每一个节点是闭的节点的导出子图称为 S 的简单邻域.

简单邻域(simplicial neighborhood)　见"闭的".

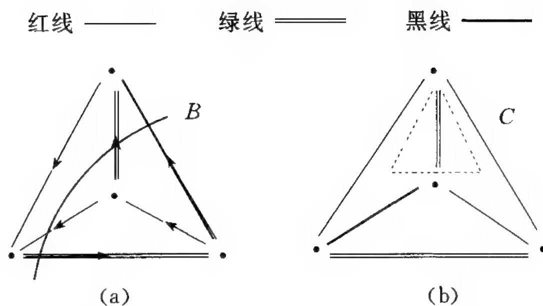
单调极限(monotone limit)　图论的一个重要概念.指图的一种良序族.一个图 H,它有如下性质:

1. $H = \bigcup\limits_{\lambda<\sigma} H_\lambda$.

2. 对任何 $\lambda,\mu,\lambda<\mu<\sigma$,均有 $H_\lambda \subset H_\mu$,

称 H 为图的这个良序族 $(H_\lambda)_{\lambda<\sigma}$ 的单调极限.

明蒂定理(Minty theorem)　反映图的内在基本组合结构的一个定理.若对于有向图 D 的弧以黑、绿、红三色着色,其中一弧 a 指定着黑色,其他弧任意着色,则至少以下两情况之一必发生:或者存在一个包含 a 弧的由黑、红两色弧组成的圈 C,且 C 上的黑色弧方向相同;或者存在一个包含 a 弧由黑、绿两色弧组成的上圈 B,且 B 上黑色弧方向相同.这就是明蒂定理.图(a)为一示例,图中存在上圈 B,其上黑色弧同方向.明蒂定理在最大流最小割理论中有用.若对于无向图的明蒂定理为:对于无向图 G 的边以黑、绿、红三色任意着色,其中只有一边指定着黑色,则至少以下两情况之一必然发生:或者有一个只有黑、红两色边组成的圈;或者有一个只有黑、绿两色边组成的上圈.图(b)为一示例,图中存在黑、红两色的圈.这个定理可推广到拟阵上.



单纯剖分(simplicial subdivision)　一种组合构形.它是对于平面上三角形所做的一种三角剖分.若在这个三角剖分中,任何两个三角形的公共部分不是点就是其中一个三角形的边,则称它为单纯剖分.它是将一个高维单形剖分为低维单形的并的一种特别情形.在一个单纯剖分上,若将原三角形的三个顶点分别标上 0,1 和 2,然后,将它内部的所有三角形的每个顶点标以 0,1 或 2,使得在原三角形边上的小三角形的每个顶点的标号均与此边两端之一的标号相同,则称这样的标号为正常标号.在这种标号中,三个顶点的标号互不相同的三角形称为显三角形.当然,原三角形本身就是一个显三角形.施佩纳(Sperner,E.)于 1928 年证明了一个引理.它的二维情形是说:在单纯剖分上的任何正常标号都有奇数个小显三角形.这就是施佩纳引理.它对于建立求一个连续映射的不动点的算法起了重要的作用.

施佩纳引理(Sperner's lemma)　见"单纯剖分".

难以捉摸的(elusive)　图论的一个重要概念.指描述图的性质的复杂度的一个参数.设 P 是图的某一给定的性质.二人博弈,一问一答.答者心目中有一个具有性质 P 的 n 阶图.问者只能问某对节点是否是这个图的边.假设二者都按最优的方式进行,即答者尽量使问者猜不到有性质 P 的这个图,问者尽量获得更多的新信息以便猜中.记 $C(P)$ 表示这个博弈结束时间的次数,称它为 P 的计算复杂度,或者称为 P 的复杂度.于是,若

$$C(P) = \binom{n}{2},$$

则答者赢.这时,称 P 是难以捉摸的.若对某

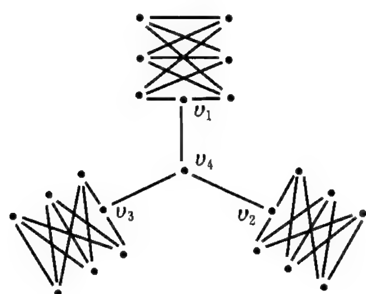
$$k < \binom{n}{2},$$

有 $C(P) \geqslant k$,则称 P 是 k 难以捉摸的.一个性质 P,

若无任何图有性质 P 或者所有图均有性质 P，则 P 是平凡的，因为这时总有 $C(P)=0$. 若 P 是不可捉摸的，则它必为 k 不可捉摸的；但是，反之则不然. 例如，不超过 t 条边的图 $(0\leqslant t\leqslant\binom{n}{2})$、支撑树、有 t 条边的森 $(0\leqslant t\leqslant\binom{n}{2})$、$n$ 圈、连通图、2 连通图、$n\geqslant5$ 的平面图等都是难以捉摸的.

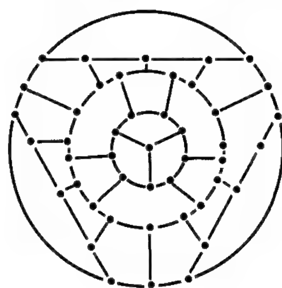
单调性质(monotone)　图的一种特殊的性质. 若由图 G 具有性质 P，即可使 G 的任何子图也具有性质 P，则称 P 是单调性质. 例如：边数不多于 k、简单图、无圈、连通度 $\kappa\leqslant k$、节点最大次 $\Delta\leqslant k$ 等都是最明显的单调性质.

格雷图(Gray graph)　一种特殊的图. 指一个有 54 个顶点(较福克曼图多)的 3 正则的边可迁但非顶点可迁的图. 它是这样构造的：三个 $K_{3,3}$图，每个的九条边一一对应，每一对应的三边组中加一个剖分点，如图中 v_1,v_2,v_3，然后另加一点 v_4 与此三点相连. 下面的图只画出其中一组.



格雷图的一部分

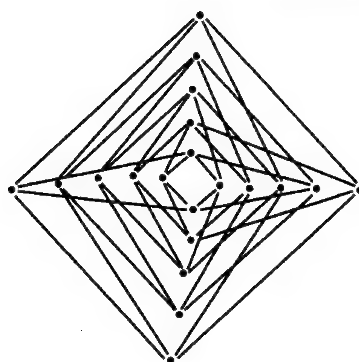
格林伯图(Grinberg graph)　一种特殊的图. 指一种 3 正则，3 连通，非哈密顿平面图(见图).



格林伯图

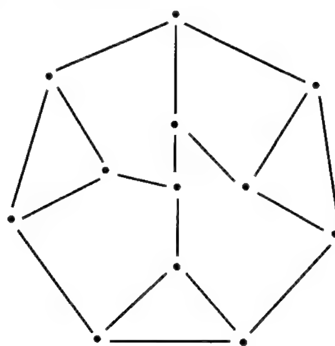
根据格林伯得到的平面图是哈密顿图的必要条件，格林伯图具有非哈密顿性. 在此以前，塔特图是非哈密顿 3 正则 3 连通平面图的惟一例子. 有了格林伯条件后，才发现了许多非哈密顿平面图.

福克曼图(Folkman graph)　一类极图. 具有最少顶点(20 个)的边可迁但非顶点可迁的正则图(见图).



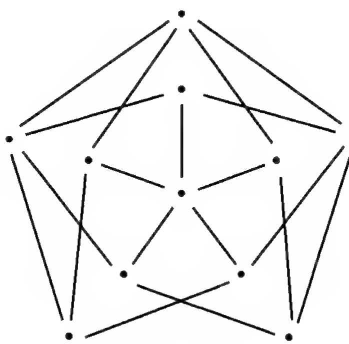
福克曼图

最小3正则幺图(minimum cubic identity graph)　一种特殊的图. 指一个 3 正则图. 它的自同构群为单位元素群(见图).



最小3正则幺图

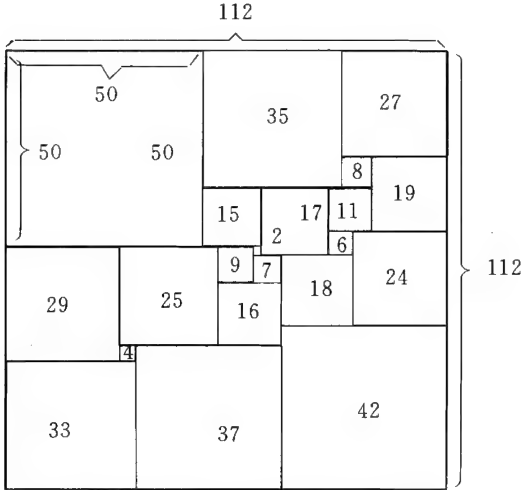
格罗莾茨图(Grötzsch graph)　一种特殊的图. 一个 4 色临界图的例子(见图).



格罗莾茨图

拼方(squaring the square)　一种组合构形. 指将若干个边长互不相等的正方形拼成一个正方形. 换句话说，将一个正方形剖分为若干个小正方形使得它们的边长互不相同. 这样的正方形称为完美正方形. 找完美正方形的过程称为拼方. 鲁金(Лузин, H. H.)曾猜想没有这样的正方形. 第一个完美正方形是德国的斯普拉格(Sprague, R.)于 1939 年发现的. 同时，英国剑桥大学的四名学生布鲁克斯(Brooks, R. L.)、史密斯(Smith, C. A. B.)、斯通

(Stone, A. H.)和塔特(Tutte, W. T.)于 1940 年发现了一种基于电网络的组合理论行之有效的拼方的



阶为21的简单完美正方形

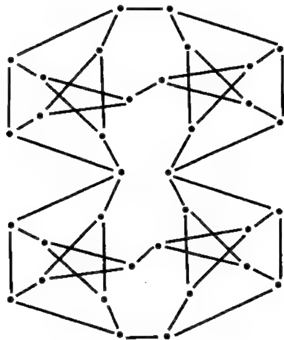
方法. 他们首先研究将长方形剖分为边长互不相等的正方形,这种长方形称为完美矩形. 进而,他们还研究了将等边三角形剖分为面积互不相等的等边三角形,称这种三角形为完美三角形. 他们的方法对图论中的连通度的理论、着色理论、网络流的理论、图的平面性与对偶性、图的曲面嵌入,以及图的对称性和定向等都产生了重要的影响. 一个完美正方形是简单的,是指它不能分割成至少两个完美矩形. 完美正方形的阶是指组成完美正方形的小正方形的数. 杜尤斯蒂因(Duijuestijn, A. J. W.)于 1978 年发现了惟一的一个阶为 21 的简单完美正方形,这是阶最小的简单完美正方形. 图给出了此完美正方形,其中的数字表示所在正方形的边长.

完美正方形(perfect square)　见"拼方".

完美矩阵(perfect rectangle)　见"拼方".

完美三角形(perfect triangle)　见"拼方".

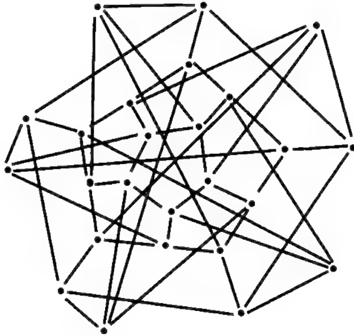
托马森图(Thomassen graph)　一个特殊的



托马森图

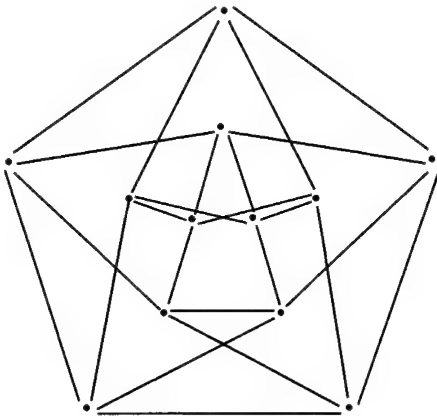
图. 它是庞加莱猜想的一个反例. 此猜想说:不存在亚可迹图;但托马森图(见图)为亚可迹图.

格让保图(Grúnbaum graph)　一类正则图. 格让保猜测:对于所有 $m>1$, $n>2$, 均存在围长不小于 n 的 m 正则的 m 色图. $n=3$ 时,猜测成立. $m=2$ 和 3 时,笼图符合猜测. 除此之外,至今仅知道两个图符合猜测:一个是施瓦他图;另一个就是格让保图(见图).



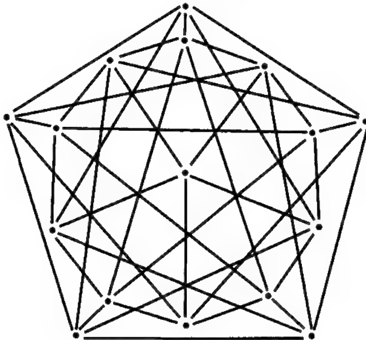
格让保图

施瓦他图(Chvatal graph)　一个特殊的图. 它是符合格让保猜测的一个图(见图).



施瓦他图

格林伍德-格利森图(Greenwood-Gleason graph)　一类特殊的图. 具体地说,在一类特殊着色

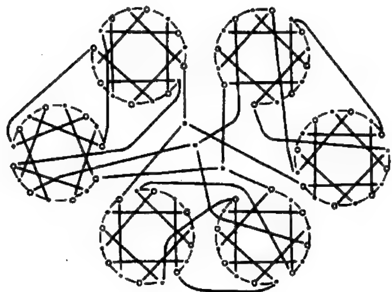


格林伍德-格利森图

中,同色边构成的子图. 由于广义拉姆齐数 $r(3,3,$

3)=17,所以K_{16}有不包含单色三角形的三边着色.在这种着色中,同色边子图都同构于格林伍德-格利森图(见图).

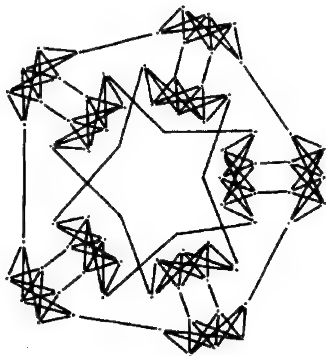
塔特猜想(Tutte's conjecture) 关于图的哈密顿性的一个猜想.自从泰特(Tait,P.G.)作出关于平面图的猜想以来,对于一个图是哈密顿图的条件一直在进行探索,有很多猜想存在反例.霍尔顿图(见图)是塔特猜想"每一个3正则3连通的偶图都是哈密顿图"的反例.



霍尔顿图

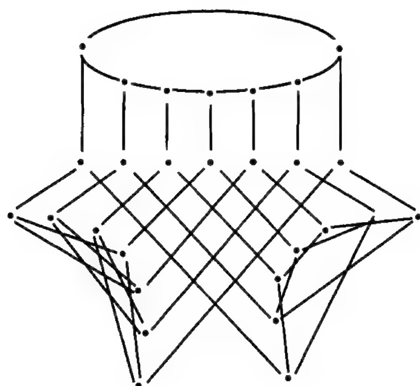
霍尔顿图(holton graph) 见"塔特猜想".

麦雷迪斯图(Meredith graph) 一特殊的图.它是猜想"每一个4正则4连通图是哈密顿图"的反例(见图).



麦雷迪斯图

考柯西特图(Coxeter graph) 一个特殊的图.



考柯西特图

它是具有高度对称性的非哈密顿图的例子,也是猜想"存在从任长为3的路到另外任一路的自同构"的反例(见图).

佩特森图(Petersen graph) 一个非哈密顿图.但是,对于V的每个非空真子集S,均有$C(G-S)\leqslant|S|$,其中,$C(G-S)$表示$G-S$的分支数.事实上,这是一个亚哈密顿图.

撰　稿　刘　莹　崔显峰　曾一平　董峰明

审　阅　王建方　田　丰　冯衍全　刘桂真　张忠辅　洪　渊

组合多面形与最优化

凸多面体(polytope) 一类组合构形.指有限点集的凸包.n维空间E^n中有限多个点$x^1,x^2,\cdots,x^k$形成的凸包,即由$x^1,x^2,\cdots,x^k$的凸组合

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x^i$$

组成的集合.其中,系数α_i满足条件$\alpha_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,k)$,和

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1.$$

E^n的子集A的凸包,为A的任意有限个点$x^1,x^2,\cdots,x^l$的凸组合为元素的集合,记为$\mathrm{conv}A$.当$A=\{x^1,x^2\}$时,$\mathrm{conv}A$为以x^1,x^2为端点的线段;当$A=\{x^1,x^2,x^3\}$时,$\mathrm{conv}A$为以x^1,x^2和x^3为顶点的三角形.

凸包(convex hull) 见"凸多面体".

凸组合(convex combination) 见"凸多面体".

凸多面锥(polyhedral cone) 一类组合构形.指有限多个齐次线性不等式确定的解集.由于每一个齐次不等式的解集为E^n中的半空间,所以从几何上看,凸多面锥为有限多个半空间的交集.

凸多面形(polyhedron) 一类组合构形.指有限多个线性不等式确定的解集.当此解集为有界时,凸多面形就是凸多面体;反之亦然.这就是外尔-闵科夫斯基定理.当凸多面形为满足线性不等式组

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geqslant b_i\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

的解集时,称为凸多面形的法式描述.当凸多面形为满足线性约束

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i$$
$$(i=1,2,\cdots,k,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0),$$

的解集时,称为凸多面形的典式描述.这是线性规划通常采用的描述形式.在这里,凸多面形为两部分的交集:其一为k个线性独立的超平面之交集;其二为n个半空间之交集.更一般地,当凸多面形为满足线性约束

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \ (i = 1,2,\cdots,k)$,
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i \ (i = k+1,\cdots,m)$
之解集时,称为凸多面形的刚性约束.对于凸多面形的典式描述,把决定线性方程组的系数矩阵 A 称为凸多面形的约束矩阵.以 A 的列为向量,其 m 个线性独立向量,称为凸多面形的基.由基所确定的多面形的点,被称为极点.若由基求得线性方程组的解满足第二部分约束:$x_i \geqslant 0 \ (i=1,2,\cdots,n)$,则称此基为凸多面形的可行基.这样的解称为基础可行解.可行基的讨论构成线性规划及其单纯形方法的基础.

外尔-闵科夫斯基定理(Weyl-Minkowski theorem) 见“凸多面形”.

凸多面形的法式描述(normal specification of polyhedron) 见“凸多面形”.

凸多面形的典式描述(canonical specification of polyhedron) 见“凸多面形”.

凸多面形的刚性约束(rigid constraint for polyhedron) 见“凸多面形”.

凸多面形的约束矩阵(constraint matrix of polyhedron) 见“凸多面形”.

凸多面形的基(basis of polyhedron) 见“凸多面形”.

凸多面形的可行基(feasible basis of polyhedron) 见“凸多面形”.

极点(extremal point) 见“凸多面形”.

凸多面形分解定理(polyhedral decomposition theorem) 亦称法尔卡斯-闵科夫斯基-外尔定理.反映线性不等式组解集结构的一个命题.由非齐次联立不等式组之解集构成的凸多面形可做如下分解:$P=M+K$(“+”的意义,参见“多面体之和”),其中 M 为凸多面体,K 为由齐次联立不等式组之解集构成的凸多面锥.此定理把凸多面形分解为相对简单的凸多面体和凸多面锥,从而给多面形的处理带来方便.例如,线性规划理论的基本定理是得益于此分解定理.

法尔卡斯-闵科夫斯基-外尔定理(Farkas-Minkowski-Weyl theorem) 见“凸多面形分解定理”.

凸多面体的支撑超平面(supporting hyperplane of polytope) 满足一定条件的点集.即满足如下条件的超平面 H:凸多面体 P 与 H 的交集非空,且 P 要么包含在由 H 决定的正半闭空间 H^+ 之中,要么包含在由 H 决定的负半闭空间 H^- 之中.

凸多面体的面(face of polytope) 一类组合构形.指凸多面体与其支撑超平面的交集.记为 F.若 F 的维数 $\dim F=d$,则称 F 为多面体的 d 维面.称多面体 P 的 0 维面为 P 的顶点;称 1 维面为 P 的棱.以棱连结的两个顶点,称为相邻顶点.

凸多面体的分离超平面(separation hyperplane of polytope) 满足一定条件的点集.即满足如下条件的超平面 H:对于给定的凸多面体 P 和点集 W,它们分别包含在 H^+ 与 H^- 中,其中,H^+ 为 H 决定的正闭半空间,H^- 为 H 决定的负闭半空间.

退化多面体(degenerate polytope) 一类特殊的多面体.即这样的多面体,有基础可行解且至少包含一个属于基的分量为零,或者说,由这个基础确定的极点有一个坐标值为 0.

仿射包(affine hull) 由一个点集导出的一类点集.对于 E^n 中的子集 A,A 的仿射包,记为 $\mathrm{Aff}A$,为 A 的任意有限多个元素 $x^1,x^2,\cdots,x^k$ 的仿射组合

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x^i$$

构成的集合.一个线性组合

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x^i$$

称为仿射组合,若系数 $\alpha_i \ (i=1,2,\cdots,k)$ 满足

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1.$$

当 $A=\{x^1,x^2\}$ 时,$\mathrm{Aff}A$ 为通过 x^1,x^2 的直线;当 $A=\{x^1,x^2,x^3\}$ 时,$\mathrm{Aff}A$ 为通过 x^1,x^2,x^3 的平面.

仿射组合(affine combination) 见“仿射包”.

多面体的 f 向量(f-vector of polytope) 一类组合不变量.将多面体 P 的所有面按维数分类,记所得的向量 $f(P)=(f_0,f_1,f_2,\cdots,f_{d-1})$,其中,$f_i$ 为 i 维面的个数,d 为 P 的维数.对于 3 维多面体,f 向量的分量之间有著名的欧拉公式

$$f_0-f_1+f_2=2.$$

一般地,对 d 维多面体 P,f 向量的分量满足关系:

$$\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i f_i = 1 + (-1)^{d-1},$$

则称为欧拉-庞加莱公式.对于多面体 P 和 P',若其 f 向量相等:

$$f(P)=(f_0,f_1,\cdots,f_{d-1}) = (f'_0,f'_1,\cdots,f'_{d-1}) = f(P'),$$

则称 P 和 P' 为 f 等价多面体.对 f 等价类的研究为探知多面体的一条途径.

f 等价多面体(f-equivalent polytope) 见“多面体的 f 向量”.

欧拉-庞加莱公式(Euler-Poincaré formula) 见“多面体的 f 向量”.

单纯多面体(simplicial polytope) 由一类多面体派生的另一类多面体.除多面体 P 自身及空集外,P 的所有面均为单纯形的多面体.

单纯形(simplex) 一类组合构形.指仿射独立点集的凸包.点集 $\{x^1,x^2,\cdots,x^k\}$ 称为仿射独立,若其中任何一点不能表示为其余点的仿射组合.$\{x^1,$

$x^2\}$，$\{x^1,x^2,x^3\}$和$\{x^1,x^2,x^3,x^4\}$构成的单纯形，分别是以x^1,x^2为端点的线段，以x^1,x^2,x^3为顶点的三角形，以x^1,x^2,x^3,x^4为顶点的四面体，其维数分别为一维、二维和三维.

仿射独立(affine independent)　见"单纯形".

r单纯多面体(r-simplicial polytope)　一类特殊的单纯多面体. 所有r维面为单纯形的多面体，这里$1\leqslant r\leqslant d-1$，$d$为多面体的维数.

简单多面体(simple polytope)　一类特殊的多面体. 指每个顶点均位于d个$(d-1)$维面上的d维多面体. 这类多面体与单纯多面体在一定意义上互为对偶关系.

s简单多面体(s-simple polytope)　一类简单多面体. 指每一个$(d-1-s)$维面均包含在$(s+1)$个$(d-1)$维面之中的d维多面体.

(r,s)型多面体((r,s)-type polytope)　一类多面体. 指同时为r单纯多面体，又为s简单多面体的多面体. 以此类型多面体为中介，在单纯多面体与简单多面体之间有如下对偶关系：一个d维单纯多面体是$(d-1,1)$型多面体；而一个d维简单多面体则是$(1,d-1)$型多面体.

循环多面体(cyclic polytope)　一类特殊单纯多面体. 位于曲线$x(\tau)=(x_1(\tau),x_2(\tau),\cdots,x_d(\tau))$上的$n$个不同点生成的凸包，记为$c(d,n)$，其中，$x_i(\tau)=\tau^i\ (i=1,2,\cdots,d)$.

k邻多面体(k-neighbour polytope)　一类多面体. 指其任意k个顶点均为某个面的顶点集的多面体. 例如，d维单纯形是d邻多面体；任何一个多面体均为1邻多面体. 在循环多面体和k邻多面体之间，有如下关系：循环多面体$c(d,n)$为$[d/2]$邻多面体.

对偶多面体(dual palytope)　由一个多面体派生的另一类多面体. 由原多面体P按双射φ对应的多面体P^0，而建立在P和P^0所有面之间的双射φ满足如下条件：$F_1\subset F_2$，当且仅当$\varphi(F_1)\supset\varphi(F_2)$. 例如：立方体$P$和正八面体$P^0$互为对偶(见下图)；两个三维多面体互为对偶. 在维数关系上，对于P的任一面F，有

$$\dim P=\dim P^0=\dim F+\dim\varphi(F)+1.$$

立方体　　　　正八面体

多面体的运算(operations of polytopes)　多面体间的变换. 即由两个多面体对应出一个新多面体的映射.

多面体之和(sum of polytopes)　一类多面体运算. 多面体P_1和P_2之和，记为

$$P_1+P_2=\{(x^1+x^2)\in E^n\,|\,x^1\in P_1,x^2\in P^2\}.$$

多面形的分解定理使用的正是此类运算.

多面体之积(product of polytopes)　一类多面体运算. 多面体P_1和P_2之积记为

$$P_1\otimes P_2=\{(x^1,x^2)\,|\,x^1\in P_1,x^2\in P_2\}.$$

多面体之极(polar of polytopes)　一类多面体运算. 多面体P的极记为$P^*=\{y\in E^n\,|\,xy\leqslant 1,x\in P\}$. 当$P$为单点元素$a$时，$P^*$为$E^n$中的半空间：$P^*=\{y\in E^n\,|ay\leqslant 1\}$；当$P$为单点元素$O$时，$P^*=E^n$；当$P$为半空间时，$P^*$为线段或射线.

多面体投影像(projective image of polytope)一类多面体运算. 从E^d到E^k的投影映射

$$\tau(x)=\frac{\alpha(x)}{a^T+\beta},\quad x\in E^d,$$

其中α为从E^d到E^k的仿射映像，a是一个d维向量，β是一个实数，T表示向量的转量. 对于一个集合$W\subset E^d$，若$W\cap H=\varnothing$，其中

$$H=\{x\in E^d\,|ax+\beta\neq 0\},$$

则称τ对W为可行的. 若τ是一个投影映射并且对于多面体$P\subset E^d$为可行的，则称$\tau(P)$为多面体P的投影像.

金字塔(pyramid)　一类组合构形. 指多面体Q的凸包，并称Q为金字塔的基. 金字塔中那些不属于Q的仿射包的点，称为金字塔的顶点.

单态序列(unimodal sequence)　满足一定性质的序列. 这样的序列$a_1,a_2,\cdots,a_m$，它不存在下标$1\leqslant i<j<k<l\leqslant m$使之有$a_i \lt a_j \gt a_k \lt a_l$. 对于多面体$P$而言，取$a_i$为$i$维面的个数. 曾有人猜想此序列是单态的，但后来有人证明它不是单态序列.

线性规划(linear programming)　一类带约束的极值问题. 在线性不等式组或线性方程组约束下，寻求线性目标函数达到极大值或极小值的最优化问题称为线性规划. 它的一般形式为

$$\max Z(x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n,$$

满足

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0.\end{cases}$$

对应的矩阵形式为

$$\max Z(x)=c^Tx,\text{满足 }Ax=b,x\geqslant 0,$$

其中，$A=(a_{ij})$为$m\times n$矩阵，$x^T=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$b^T=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$，$c^T=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$. 取A的m列

(不妨设为前 m 列)构成 m 阶方阵,记为 B,若其行列式 $|B|\neq 0$,则称 B 为线性规划的基. 利用分块矩阵,记 $A=(B,D)$,其中 D 为 $m\times(n-m)$ 矩阵. 此时,线性约束方程组改写为 $Bx_B+Dx_D=b$. 若 $x_D=0$,则有解 $x_B=B^{-1}b$. 若 $B^{-1}b\geqslant 0$,则称 $x_B=B^{-1}b,x_D=0$ 为线性规划的基础可行解. 这类解在求解线性规划中起着关键性的作用. 因为线性规划的基本定理指出:若线性规划有最优解,则最优解必可在基础可行解上实现. 在基础可行解上实现的线性规划最优解,称为基础最优解. 线性规划起源于 20 世纪 30 年代,第二次世界大战之后发展极为迅速. 求解线性规划的单纯形方法与计算机具有天合之美,二者的结合使线性规划的应用非常广泛. 对线性规划的理论,联系着三位科学先驱,他们是坎托罗维奇(Канторович, Л. В.)、冯・诺伊曼(von Neumann, J.)和丹齐克(Dantzig, G. B.). 自 20 世纪 60 年代之后,线性规划和组合优化、图论以及计算机科学的结合和相互渗透,构成了丰富多彩、激动人心的发展图景.

基础可行解(basic feasible solution) 见"线性规划".

基础最优解(basic optimum solution) 见"线性规划".

基本定理(basic theorem) 见"线性规划".

单纯形方法(simplex method) 求解线性规划的一种算法. 它的每次迭代从一个基础可行解到另一个基础可行解,并使目标值不断改进,最终达到基础最优解. 设线性规划问题的矩阵形式为

$$\max Z=c^Tx,\quad 满足\begin{cases}Ax\leqslant b,\\ x\geqslant 0.\end{cases}$$

单纯形方法的步骤如下:

1. 在线性不等式组中加入松弛变量 y,使得 $Ax+y=b$,这里 y 为 m 维列向量,同时列出初始表

x	y	1
A	I	b
$-c^T$	0	Z

此时,若 $b\geqslant 0$,则 $x=0,y=b$ 为线性规划问题的初始可行解. 相应的系数阵 $\tilde{A}=(A,I)$,$\tilde{c}^T=(-c^T,0)$,$\tilde{b}=b$.

2. (最优判定)看是否有 j 使得 $\tilde{c}_j<0$ 成立? 若有,则转至第 3 步,否则,停止迭代,当前解即为问题的最优解.

3. 由 $\tilde{c}_s=\min\{\tilde{c}_j\,|\,\tilde{c}_j<0\}$ 决定枢轴元素列 s.

4. 在 s 列中判定是否有 i 使得 $\tilde{a}_{is}>0$ 成立? 若有,则转至下一步,否则停止迭代,此时问题的可行解无界.

5. 由

$$\frac{\tilde{b}_r}{\tilde{a}_{rs}}=\min\left\{\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{is}}\,\middle|\,\tilde{a}_{is}>0\right\}$$

决定枢轴元素行 r 和枢轴元素 $\tilde{a}_{rs}$.

6. (换基迭代)以元素 $\tilde{a}_{rs}$ 为枢轴进行高斯消去法运算产生新表格,即:

1) 枢轴元素行 r

$$\widetilde{a_{rj}^*}=\frac{a_{rj}}{a_{rs}}(j=1,2,\cdots,n+m),\quad \widetilde{b_r^*}=\frac{\tilde{b}_r}{\tilde{a}_{rs}}.$$

2) 枢轴元素列 s

$$\widetilde{a_{is}^*}=\begin{cases}1 & (i=r),\\ 0 & (i\neq r),\end{cases}\qquad \widetilde{c_s^*}=0.$$

3) 其他行和列

$$\widetilde{a_{ij}^*}=\tilde{a}_{ij}-\frac{\tilde{a}_{is}\tilde{a}_{rj}}{\tilde{a}_{rs}},\quad \widetilde{c_j^*}=\tilde{c}_j-\frac{\tilde{c}_s\tilde{a}_{rj}}{\tilde{a}_{rs}},$$

$$\widetilde{b_i^*}=\tilde{b}_i-\frac{\tilde{b}_i\tilde{a}_{is}}{\tilde{a}_{rs}},\quad Z^*=Z-\frac{\tilde{b}_r\tilde{c}_s}{\tilde{a}_{rs}},$$

转至第 2 步.

单纯形方法的单纯形含义,源于历史上丹齐克(Dantzig, G. B.)在创立此方法时,所处理的问题为 $\max Z=c^Tx$,满足

$$\left\{Ax=b,\sum_{i=1}^{n}x_i=1,x\geqslant 0\right\}.$$

它关联了单纯形

$$\left\{x\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}x_i=1,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\right\}.$$

对偶规划(dual programming) 一类线性规划问题. 指由原线性规划问题按如下对称规律构成的新线性规划问题:若原问题(P)为 $\max Z=c^Tx$,满足 $\{Ax\leqslant b,x\geqslant 0\}$,则对称的新问题(D)为 $\min \pi=y^Tb$,满足 $\{y^TA\geqslant c,y\geqslant 0\}$,这里 y 为 m 维列向量. 新问题(D)称为原线性规划的对偶规划. 在原线性规划问题与对偶线性规划问题之间有着整齐的对称性,如 max 对应 min,目标系数对应约束右边常数项,"$\leqslant$"型线性约束对应"$\geqslant$"型线性约束. 而且问题(D)的对偶问题即为原问题(P). 在(P)的可行解 x 和(D)的可行解 y 之间的关系,由下述对偶定理表述:若 x,y 分别为(P)和(D)的可行解,则:

1. 各自对应的目标值有如下关系:$c^Tx\leqslant y^Tb$,即其中一个为另一个的界.

2. 对于任意 $1\leqslant i\leqslant m$ 和 $1\leqslant j\leqslant n$,有 $y_i.(A_i.x-b_i)=0$,$(c_j-yA._j)x_j=0$,其中,$A_i.$ 为矩阵 A 的第 i 行,$A._j$ 为矩阵 A 的第 j 列.

定理 2 中表述的关系称为 x 和 y 满足的松弛互补性条件. 对偶定理的重要性在于它给出了决定线性规划问题的最优解的一个优越条件. 对于(P)和

(D)的可行解 x 和 y 而言，若满足 $c^Tx=y^Tb$，则 x 和 y 同时分别为原问题(P)与对偶问题(D)的最优解. 对于一般最优化问题而言，往往不具备如此优越的判定条件.

对偶定理(duality theorem)　见“对偶规划”.

松弛互补性条件(complementary slackness condition)　见“对偶规划”.

对偶单纯形方法(dual simplex method)　原单纯形方法的一种对称变形. 对于原单纯形方法而言，在迭代过程中始终保持相应的解对原问题是可行的，并不断改善对偶问题解(即判别系数)的可行性，直至可行. 而对偶单纯形方法则是始终保持对偶问题的解的可行性，并不断改善原问题解的可行性，直至满足原问题. 若原问题(P)为 $\min Z=c^Tx$，满足 $Ax=b, x\geqslant 0$，其对偶问题(D)为 $\max\pi=y^Tb$，满足 $y^TA\leqslant c^T$. 则对偶单纯形方法为：

1. 从矩阵 A 适当地选取一个基矩阵 B，使 $y^T=c_B^TB^{-1}$ 满足问题(D)，即

$$c_B^TB^{-1}A\leqslant c^T,$$

由此 B 构造相应的单纯形方法的单纯形表，表中系数矩阵 $\widetilde{A}=B^{-1}A$，常数项 $\widetilde{b}=B^{-1}b$，判别系数

$$\widetilde{\lambda}^T=c_B^TB^{-1}A-c^T\leqslant 0.$$

2.(最优判定)　$\widetilde{b}$ 中是否存在小于零的分量? 若存在，转至第 3 步，否则停止迭代，当前解 $x_B=\widetilde{b}$，其余分量 $x_j=0$ 为问题(P)的最优解.

3. 由 $\widetilde{b}_r=\min\{\widetilde{b}_i\,|\,\widetilde{b}_i<0\}$ 决定枢轴元素行 r.

4. 在第 r 行中判定是否存在 $\widetilde{a_{rj}}<0$? 若存在，则转至第 5 步，否则停止迭代，此时问题的可行解无界.

5. 由

$$\frac{\widetilde{\lambda}_s}{\widetilde{a}_{rs}}=\min\left\{\frac{\widetilde{\lambda}_j}{\widetilde{a_{rj}}}\,\middle|\,\widetilde{a}_{rj}<0\right\}$$

决定枢轴元素列 s 以及枢轴元素 $\widetilde{a_{rs}}$.

6.(换基迭代)　以 $\widetilde{a}_{rs}$ 为枢轴元素做与单纯形方法相同的换基迭代，获得新单纯形表，转至第 2 步.

原始-对偶方法(primal-dual method)　求解线性规划的一种算法. 指求解线性规划的一类特殊对偶型方法. 其特殊性在于，它是以松弛互补性条件为基础去构造一个由原问题产生的限定问题，并通过求解此限定问题去改善解对原问题的可行性. 这一过程含有单纯形方法与对偶单纯形方法的思想，所以有此名. 设原问题(P)为 $\min Z=c^Tx$，满足 $\{Ax=b, x\geqslant 0\}$；其对偶问题(D)为 $\max\pi=y^Tb$，满足 $\{y^TA\leqslant c^T\}$. 已知 y 是(D)的一个可行解，即对于 $1\leqslant j\leqslant n$，均有 $y^TA_j\leqslant c_j$，A_j 为 A 的第 j 列. 其方法为：

1. 由已知 y，记 $Q=\{j\,|\,y^TA._j=c_j\}$，求解限定问题(RP)：

$$\min Z_R=\sum_{i=1}^m x_i^a,$$

满足

$$\sum_{j\in Q}a_{ij}x_j+x_i^a=b_i$$

$(i=1,2,\cdots,m)$ 及 $x_j\geqslant 0\ (j\in Q)$，$x_j=0\ (j\notin Q)$，$x_i^a\geqslant 0$($x_i^a, i=1,2,\cdots,m$ 为人造变量).

2.(最优判定)　是否 $\min Z_R=0$? 若是，停止迭代，则当前解为最优解，否则，记 π 为限定问题(RP)的对偶问题的最优解.

3. 检验是否存在 $\pi^TA._j>0$? 若不存在，则停止迭代，原问题不可行.

4.(调整指标集 Q 及对偶解 y)取

$$\theta=\frac{-(y^TA._k-c_k)}{\pi^TA._k}=\min\left\{\frac{-(y^TA._j-c_j)}{\pi^TA._j}\,\middle|\,\pi A._j>0\right\}$$

并以 $\widetilde{y}=y+\theta\pi$ 作为新的对偶解，转至第 1 步.

对于某些组合优化问题，如最短路问题等，相应的限定问题(RP)具有特定的简捷和直观的形式，给求解(RP)带来方便. 因此，原始-对偶方法常常加以应用.

卡马卡方法(Karmarkar method)　求解线性规划的一种算法. 哈奇扬方法之后又一个线性规划的多项式算法. 它的特点是使迭代过程的各点严格远离约束多面体的各个界面，为此，每次迭代都须借助于投影变换，把问题归结为一类典型问题，有利于目标值改善. 此方法由美籍印度学者卡马卡(Karmarkar, N.)于 1984 年给出，所以得此名. 此方法考虑如下标准形式的线性规划问题

$$\min Z=c^Tx=\sum_{i=1}^n c_ix_i,$$

满足 $Ax=0$ 及 $e^Tx=1$ 或者

$$\sum_{i=1}^n x_i=1.$$

这里 e 为分量全为 1 的 n 维列向量，并且已知：

1. 在上述约束条件下 $\min Z=0$.

2. $Ae=0$.

3. 对于给定精度 2^{-q}，当可行解 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足条件

$$\sum_{i=1}^n c_ix_i\leqslant 2^{-q}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n c_i$$

时，即可停止迭代，并认为 x 即为所求的解.

卡马卡算法步骤如下：

1.(初始)　设 $k=0$，

$$x^0=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)^T$$

是分量均为 $1/n$ 的 n 维列向量.

2.(判定) 若

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^k \leqslant \frac{1}{n} 2^{-q} \sum_{i=1}^{n} c_i,$$

则停止迭代,最优解为 $x^k=(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k)^T$.

3.以 x^k 的分量为对角元素,做对角阵

$$D=\mathrm{diag}\{x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k\},$$

设

$$B=\begin{pmatrix} A & D \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & D \\ & e^T \end{pmatrix},$$

这里 e 为分量全为 1 的 $2n$ 维列向量.

4.(投影变换) 对 $j=1,2,\cdots,n$,设 $\tilde{c}_j=x_j^k c_j$,记 $\tilde{c}=(\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n)$,有 $\tilde{c}=Dc$,

$$c_p=[I-B^T(BB^T)^{-1}B]\tilde{c}.$$

5.设 $\tilde{c}=\dfrac{1}{\|c_P\|}c_P$.

6.设 $b=\dfrac{1}{n}e-\dfrac{\alpha}{\sqrt{n(n-1)}}\tilde{c}$,

其中 α 为满足

$$0<\alpha<\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

的常数,通常取 $\dfrac{1}{5}\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{1}{3}$.

7.令 $x^{k+1}=\dfrac{Db}{e^T Db}$,转至第 2 步.

哈奇扬方法(Khachyian method) 亦称椭球法.求解线性规划的一种算法.指一种迭代路径迥然异于单纯形方法的求解线性规划的多项式算法.它具有如下的特点:

1.它是通过包含线性规划约束条件构成的多面体的椭球搜索最优解,不同于单纯形方法是从该多面体的一个顶点迭代到相邻的一个顶点.

2.迭代过程始终保持一个椭球,每迭代一次都得到一个具有相同性质的更小的椭球,因此,人们常把这个方法称为求解线性规划的椭球方法.

3.从算法复杂性的观点看,它是多项式算法,而单纯形方法并不是多项式算法.

此方法由苏联学者哈奇扬(Хачиян,Л.Г.)于 1979 年给出,所以得此名.此方法为考虑如下特征的问题:求 x 使之满足 $Ax<b$,其中 A 为 $m\times n$ 矩阵.其方法步骤为:

1.(初始准备) $j=0$ 记录迭代次数,t_j 为第 j 次迭代的解,初始解 $t_0=0$ 为分量全为 0 的 n 维列向量,取 $B_0=n^2 2^{2L}\cdot I$ 为 n 阶对角矩阵,其中 I 为 n 阶单位阵,$L=mn+[\log_2|P|]$为问题的规模,P 为矩阵 A 及向量 b 中所有非零分量的乘积,在上述数据中,可逆方阵 B 是构造椭球的关键成分,初始椭球

$$E_0=\{x\,|\,(x-t_0)^T B_0^{-1}(x-t_0)\leqslant 1\}.$$

2.(检验) 若 t_j 满足 $At_j<b$,则停止迭代,当前解即为所求.若 $j>K=16n(n+1)L$,则停止迭代,说明问题无解.

3.(迭代) 任选一个不满足 $At_j<b$ 的不等式,例如 $A_i.t_j\geqslant b_i$,并记 $A_i.=a$,设

$$t_{j+1}=t_j-\frac{1}{n+1}\frac{B_j a}{\sqrt{a^T B_j a}};$$

$$B_{j+1}=\frac{n^2}{n^2-1}\left[B_j-\frac{2}{n+1}\frac{(B_j a)(B_j a)^T}{a^T B_j a}\right],$$

转至第 2 步.

$B_j a$ 为 n 维列向量,$(B_j a)\times(B_j a)^T$ 为 $n\times n$ 矩阵.虽然,哈奇扬方法是求解线性规划的多项式算法,但是其实际迭代上并不产生真实的优越性.这个方法在理论上的影响对线性规划是突破性的.其后产生了一个新方向,即考虑以约束区域的内点为途径,去搜索问题的解.这个方向把线性规划与非线性规划以及组合规划能够更紧密地结合起来.

椭球法(ellipsoid method) 即"哈奇扬方法".

整数线性规划(integer linear programming) 变量取整数值的线性规划.它的一般形式为 $\min Z=c^T x$,满足 $Ax=b,x\geqslant 0$,且取整数值.在一般线性规划的约束条件之上,增加要求变量为整数值之后,使问题发生了深刻的变化,对理论和应用均产生影响,从而,形成了整数线性规划特有分支.在 n 维欧氏空间 E^n 中的点 x,若其所有坐标均为整数,则称此点为整点.而 E^n 中所有的整点记为 Z^n,是一个格,称此格为整格.于是,整数线性规划就是在整格上的线性规划.

整点(integral point) 见"整数线性规划".

整格(integral lattice) 见"整数线性规划".

割平面方法(cutting plane method) 求解整数线性规划的一种方法.它的特点是:

1.首先不考虑问题的整值要求,并用有利的方法,如单纯形方法求解此线性规划问题.

2.当求得的该线性规划的最优解不满足整值要求时,按一定的程序生成一个新的线性不等式,称之为割平面.

3.把此割平面添加到该线性规划的约束条件之中,它能确保不会影响该整数线性规划的最优解.

割平面方法的每一次迭代就是生成一个割平面,并解一个新的线性规划问题.设问题为 $\max Z=c^T x$,满足 $Ax=b,x\geqslant 0$ 且为整数.其方法步骤如下:

1.用单纯形方法求解线性规划问题 $\max Z=c^T x$,满足 $Ax=b,x\geqslant 0$,设其最优基为 B,对应的单纯形表为 $T(B)$,最优解为 x^*,若 x^* 为整点,停止迭代,x^* 为整数线性规划的最优解,否则转入下一步.

2.选取非整数的基变量 x_i^*,按如下方法生成割

平面：从单纯形表 $T(B)$ 上，x_i^* 所在的行有关系

$$x_i^* = \tilde{b}_i - \sum_{k\in K} \tilde{b}_{ik} x_k,$$

这里 $K=\{k \mid x_k$ 为非基变量$\}$，记 f_i 为$\tilde{b}b_i$的分数部分，f_{ik}为$\tilde{b}_{ik}$的分数部分，s_i 为新引入的松弛变量，对应有割平面

$$-\sum_{k\in K} f_{ik} x_k + s_i = -f_i.$$

3. 把割平面添加入单纯形表 $T(B)$最后一行，同时对应 s_i 增加了一个单位列，转至第1步.

割平面方法由柯莫瑞(Gomory,R.)于1958年提出. 近年来用于求解难度大的组合优化问题，如旅行售货员问题等，取得成功.

多面形的整点凸包(convex hull of integral points of polyhedron)　一种组合构形. 指多面形 P 内包含的所有整点$Z(P)$生成的凸包

$$\operatorname{conv}[Z(P)] = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i Z_i \mid \alpha_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \\ Z_i \in Z(P), 1 \leqslant i \leqslant k, k \geqslant 1. \end{array} \right\}$$

$\operatorname{conv}[Z(P)]$的顶点均为整点，称此凸包为整多面形. 整多面形的优越性在于其对应的线性规划问题的最优解就可以满足整数值的要求. 因此，在考虑组合优化问题关联的线性规划问题时，鉴别其约束条件构成的多面形是否是整多面形就十分重要.

整多面形(integral polyhedron)　见"多面形的整点凸包".

分支定界法(branch-and-bound method)　求解组合问题的一种方法. 指求解组合问题的一种精巧的隐遍数策略. 这种方法的策略性体现在：

1. 把问题的全部可行解划分为若干部分，这种划分是分层次进行的，而且划分的实施办法依问题而变化，这正是所谓的分支的含义，这种分层次的划分，构成倒置树状结构，每一分叉点由一节点表示，而处于顶部只一个节点，即问题的全部可行解.

2. 定界的含义，是在某一节点上设计的一种算法，以便可以计算出在此节点中的任一可行解的上界或下界，对于求极小值的优化问题就是求下界，否则求上界.

3. 探明的含义，在当前所处理的节点上要判断它是否探过，若已探过，则对该节点就不必再做分支处理，否则把当前处理的节点转至该节点作分支后的一个派生节点，探明过程采用深探原则，探明的类型有定界探明，把该节点上界或下界与已有的一个当前最好可行解对应目标值比较来作出探明判断，这是分支定界方法采用的主要探明方法，此外还有不存在可行解这样类型的探明，及有可行解达到该节点对应的定界时的探明.

4. 分支定界方法的成效表现为节点的探明速度，因为每探明一个节点，就免除处理它的派生节点，而探明的速度又依赖于给出定界的算法的设计，因此，定界策略的把握乃是此方法的关键，分支策略则是它的基础.

5. 当前最好的可行解随着实施过程而不断更新，即以出现的更好的解去替代当前最好可行解，取代之后，同时更换当前最好可行解对应的目标函数值，当所有节点均已探明时，停止迭代，当前最好可行解为问题的最优解.

全单位模性(total unital modularity)　组合优化问题的一种性质. 指优化问题的约束 $Ax=b, x\geqslant 0$ 具有如下性质：A 为整数矩阵且其任何一个非奇异子取值为1或-1. 对于有全单位模性的优化问题，当 b 也为整数值向量时，就能确保其基础最优解为整数解. 例如，最大流问题、带权的二部图的匹配问题等组合优化问题，均具有全单位模性.

全对偶整数性(total dual integrality)　组合优化问题的一种性质. 指线性规划$\max Z=c^T x$，满足 $Ax=b, x\geqslant 0$ 具有如下性质：矩阵 A 及向量 b 均取整数值，而且对于任意的整数向量 c，此问题的对偶问题均具有整值最优解. 由此性质可知，约束条件 $Ax=b, x\geqslant 0$ 决定的多面形的所有顶点均为整点. 因此，对组合优化问题而言，全对偶整数性是一个重要的性质，同时它的要求是相当强的. 例如，问题是在二部图上建立匹配，此二部图上每条边都带整数权，目标是求匹配上对应的权和达到极大. 这个问题具有全对偶整数性.

交锁多面形(blocking polyhedra)　一类特殊多面形. 它满足 $Ax\geqslant b$，其中 b 的所有分量均严格大于0，矩阵 A 的元素均非负，x 的分量均非负. 因此，它可等价地表示为 $B=\{x\in E_+^n \mid Ax\geqslant e\}$，其中 e 为分量均为1的向量. 从而 B 中任一向量 B_j 与 A 的任一行向量 A_i 均满足关系 $A_i B_j \geqslant 1$. 这关系刻画了 A_i 和 B_j 的非正交关系.

反交锁多面形(anti-blocking polyhedra)　一类特殊的多面形. 类似于线性规划的对偶约束，设 $B^{\Delta}=\{y\in E_+^n \mid y^T A\leqslant e\}$. 此多面形称为反交锁多面形. 在交锁多面形与反交锁多面形之间具有良好的对偶性质，而且具有全对偶整数性. 若干组合优化问题，如匹配问题、网络上最大流问题等，可归结为建立在交锁多面形上的优化问题.

多面体的图(graph of polytope)　一类重要的图. 它是由多面体派生的一类图. 此图的节点集为该多面体的顶点集，图的边集为该多面体的棱集. 一个图称为 d 多面形图，当且仅当此图与某个多面体的图同构. 从而把多面体的研究归结为图的研究，并对应地把多面体的性质表述为图的性质，如连通性、平面性等，构成了图论中一个重要分支. 对于一个 d

多面形的图，将其节点的度构成的序列，称为多面形序列. 往往需考虑具有一特定多面形序列的与 d 多面体存在性关联的充分必要条件. 对于 d 维欧氏空间 E^d 中的 d 多面体 M，k 为满足 $0\leqslant k\leqslant d$ 的整数. 由 M 的所有其维数不超过 k 的面构成的集合为一复形，将此复形称为多面体的 k 构架. 多面体的 1 构架是多面体的图. 多面体的 $(d-1)$ 构架称为多面体的面复形. 对于两个多面体 M_1 和 M_2，若它们的面复形 $F(M_1)$ 和 $F(M_2)$ 同构，则称 M_1 和 M_2 为组合等价. 借助于这个等价关系可以把多面体做组合分类. 进而，把有限集 V 的满足如下条件的子集族 ψ，称为抽象多面体或抽象复形：

1. V 中所有单元素构成的子集均在 ψ 中，并称为抽象多面体的顶点.

2. 若 F_1 和 F_2 均在 ψ 之中，则其交集 $F_1\cap F_2$ 亦在 ψ 中.

若将多面体 M 的每一个极大面都标以数字，例如，$1,2,\cdots,f_d(M)$，其中 $f_d(M)$ 为 M 中极大面的数目，则称为标记多面体.

d 多面形图(d-polyhedral graph)　见“多面体的图”.

多面形序列(polyhedral sequence)　见“多面体的图”.

多面体的 k 构架(k-skeleton of polytope)　见“多面体的图”.

多面体的面复形(face complex of polytope)　见“多面体的图”.

组合等价多面体(combinatorially equivalent polytopes)　见“多面体的图”.

标记多面体(marked polytope)　见“多面体的图”.

抽象多面体(abstract polytope)　见“多面体的图”.

多面体的直径(diameter of polytope)　多面体的一个重要指标. 指多面体的图的直径. 即多面体的图上具有如下性质的整数 k：

1. 图上任意两节点 v_1,v_2 之间的距离(连结 v_1，v_2 的最短通路上的边数)均不超过 k.

2. 存在节点 u_1,u_2，其间距离超过 $(k-1)$.

巴林斯基定理(Balinski theorem)　关于多面体的图的连通性的一个基本定理. 该定理断言：一个 d 多面体的图必定是 d 连通的. 该定理一个重要推论是：把多面体的图的一个面上的所有顶点移去之后产生的图依然是连通的.

施泰尼茨定理(Steinitz theorem)　判定一个图是不是 3 多面体的图的基本定理. 该定理断言：一个图是 3 多面体的图，当且仅当此图是平面图，而且是 3 连通的. 定理的意义在于把 3 多面体的图的研究归结为 3 连通平面图的研究，后者容易处理和判定.

多面体半拟阵(semi-matroid of polytope)　与多面体关联的一类组合构形. 一个简单多面体 M 关联的半拟阵 $(\mathscr{F},V)$，$\mathscr{F}$ 为 M 的所有极大面构成的集族，V 为 M 的顶点集. M 为简单多面体是指 M 的每一个顶点均正好关联 d 个极大面，d 为 M 的维数. 二元组 $(\mathscr{F},V)$ 满足下述半拟阵条件：

1. V 的每个顶点 v 正好关联 d 个极大面 F_1，$F_2,\cdots,F_d$，或者说，v 正好包含在 d 个极大面 F_1，$F_2,\cdots,F_d$ 之中.

2. 已知任一个由 $(d-1)$ 个极大面构成的子集，或者存在两个顶点，使得这 $(d-1)$ 极大面都与这两个顶点关联，或者不存在这样的顶点.

当两个简单多面体的半拟阵同构时，它们对应的多面体是组合等价的；而且，反之亦然.

多面体的谱(spectrum of polytopes)　一类组合量. 多面体类 $\mathscr{M}(A)$ 中两个多面体 $M(b_1)$ 和 $M(b_2)$ 之间关系的一组数值描述. 设 A 为 $m\times n$ 的矩阵，其秩为 m，$\mathscr{M}(A)$ 由固定 A 确定的形如

$$M(b)=\{x\in E^n\mid Ax=b,x\geqslant 0\}$$

的多面形组成. $M(b_1)$ 和 $M(b_2)$ 的谱记为 $S(b_1,b_2)$，定义为满足如下条件的所有数值 λ 组成的集合：

1. $0<\lambda<1$.

2. $b_\lambda=\lambda b_1+(1-\lambda)b_2$.

3. $M(b_\lambda)$ 是退化的，即 b_λ 落入仅由 A 的 k 列向量张成的锥中，这里 $k\leqslant m-1$.

借助于多面体的谱，可以建立 $\mathscr{M}(A)$ 中两个多面体等价的条件：$M(b_1)$ 和 $M(b_2)$ 等价，当且仅当它们的谱 $S(b_1,b_2)=\varnothing$.

多面形半群(polyhedral semigroup)　伴随多面体的一种代数结构. 由多面形锥 $K=\{x\in E^n\mid Ax\geqslant 0\}$ 中的整点相对于加法而构成的半群 K_Z. 对由整向量组成的半群 B，若其中的每个元素均可表示为已知 $t(\geqslant 1)$ 个整向量 $q^1,q^2,\cdots,q^t$ 的正整数组合，即

$$B=\left\{x\,\middle|\,x=\sum_{j=1}^{t}Z_jq^j,Z_j\text{ 为正整数},1\leqslant j\leqslant t\right\}.$$

此时称 B 为有限生成的整向量半群. 它的优越性在于可以同时具有约束方程组形式表示以及有限生成的组合形式表示. 因此，对于多面形半群一个重要的问题是研究在什么样的条件下，它是有限生成的. 当矩阵 A 的元素为有理数时，多面形半群 K_Z 是有限生成的.

有限生成的整向量半群(finitely generated semigroup of integral vectors)　见“多面形半群”.

组合(最)优化(combinatorial optimization)　一类离散状态下的极值问题. 已知有限元素集 E，对于 E 的每个元素 e 关联着一个目标系数 $c(e)$，可视为价格、价值、权值、距离等. E 的某类特定子集组成

集族 $\mathscr{F}$，称为问题的可行解集. 问题是在 $\mathscr{F}$ 中寻求某个元素 F，使在 F 上实现目标值的极大或极小. 它可表示为

$$\min \text{或} (\max) \left\{ \sum_{e \in F} c(e) \mid F \in \mathscr{F} \right\}.$$

简记为三元组 $(E, \mathscr{F}, c)$. 因为 E 为有限集，组合优化的最优解总是存在的. 但是，对于许多组合优化的具体问题来说，$\mathscr{F}$ 中元素的数目非常巨大以至于人们不可以采用穷举比较的办法来求出最优解. 因此，组合优化的主要任务是：或者设计出特有的算法，以有效地求出该问题的最优解；或者是证明根本就不存在比穷举更好的算法. 组合优化早期研究的问题来自运筹学、工业管理、逻辑学、工程学、计算机科学以及军事应用等领域. 之后它又广泛地联系着其他众多领域，并获得成功的应用，例如生物学、化学、经济学、地质学、语言学、物理学、社会学等. 它表现出两个突出的特点：一个是它的广泛应用性；另一个是现实世界里的组合优化问题大部分都很难求解. 由于这两个特点的刺激，使得组合优化的研究和成果、发展与变化非常迅速. 典型的组合优化问题有独立系统问题、拟阵问题、支撑树问题、匹配问题、二拟阵交问题、二部图匹配或指派问题、b 匹配问题、最短路问题、网络流问题、中国邮路问题、旅行售货员问题、一般路径问题、时间表问题、选址问题、集合覆盖、集合划分、集合装箱问题、节点覆盖、节点划分、节点装箱问题、染色问题、背包问题、图的嵌入问题、布局问题等.

算法复杂性(complexity of algorithm)　对算法有效性的度量. 而算法则是由有限个规则组成的有序排列，每个规则对应于一个或多个明确的不带歧义的操作. 按要求输入有关数据之后，从输出获得所求的结果. 单纯形方法就是算法的典型例子. 算法复杂的度量，包括计算复杂性、时间复杂性、空间复杂性等. 计算复杂性描述算法从输入到输出结果，这个过程包含主要计算操作的次数所表现的数量级度量. 时间复杂性是描述算法的有效性的一个主要度量. 从输入到输出结果，时间的长短与要解决问题的规模直接有关. 此外，还由算法在实施过程中所涉及的初等操作(如加法、乘法和比较等)的总数来度量. 通常记为时间复杂性函数 f，它为问题的规模或初始输入数据量 n(一个大的自然数)的函数 $f(n)$. 空间复杂性是算法从输入到输出所涉入存储规模. 问题的复杂性是指一类组合优化问题的复杂程度的度量. 因此，它不能由此类的一个特别具体问题来度量，必须由此类问题中有效性最差的问题去度量. 其次，问题的复杂性由算法刻画：

1. 是不是存在求解此类问题的算法？

2. 若可以设计出求解此类问题的算法，这个算法的复杂性又如何？

算法(algorithm)　见“算法复杂性”.

计算复杂性(computational complexity)　见“算法复杂性”.

时间复杂性(time complexity)　见“算法复杂性”.

空间复杂性(space complexity)　见“算法复杂性”.

问题复杂性(complexity of problem)　见“算法复杂性”.

多项式算法(polynomial algorithm)　亦称有效算法或好算法. 一类计算时间不超过始数据量的一个多项式的算法. 算法满足以下的条件：存在多项式 P，使算法的时间复杂性函数 $f(n)=O(P(n))$，这里 n 为问题的输入规模. 换言之，有常量 C 及多项式 P，使 $|f(n)| \leqslant C|P(n)|$. 对算法的这种度量，具有如下特点：

1. 刻画了算法的内在性质，换言之，若算法是多项式算法，当用来求解该类问题时，对问题 P_1, P_2，虽说相应的输入规模 n_1, n_2 不同，相应的多项式 $P'(n_1), P''(n_2)$ 不同，但是 P' 和 P'' 均都是多项式，因此，不会因为面对的具体问题不同，而影响对算法这种性质的刻画.

2. 渐近性特点，也就是说，当输入规模 n 增大时，多项式算法的计算时间要比时间复杂性函数为指数函数情形少得多.

3. 在实际上，多项式算法并不肯定奏效，如 $P(n)=n^{1000}$，当 $1<n<t$ 时，$n^{1000}>2^n$，其中，$t=1000\log n$，其中 log 为以 2 为底的对数.

有效算法(efficient algorithm)　即“多项式算法”.

好算法(good algorithm)　即“多项式算法”.

判定问题(decision problem)　最简单的择取问题. 它只要求回答“是”或者“不是”. 每一个组合优化问题均可转变为判定问题. 设组合优化问题为

$$(E, \mathscr{F}, C): \max_{F \in \mathscr{F}} \sum_{e \in F} C(e),$$

并设定数值 B 为一个下界，相应的判定问题为：是否存在可行解，其目标值至少为 B? 于是，把考虑的问题均归结为简单的判定问题. 按判定问题的复杂性度量可将问题归类.

P 问题(P-problem)　具有多项式算法的判定问题. 这里 P 表示 Polynomial 一词的第一个字母. 这类问题的吸引力在于：

1. 由于多项式的加法和乘法仍为一多项式，在做替换时，仍保持问题的多项式性.

2. 相对容易地计算算法的总步数.

3. 对于此类问题，回答“是”与“不是”均具有多

项式这一性质刻画，换言之，对此类问题而言，回答“是”与“不是”是对称的.

支撑树问题、匹配问题、拟阵问题、二拟阵交问题、网络流问题、中国邮路问题、最短路问题等均属 P 问题.

NP **问题**(NP-problem)　具有非决定性多项式算法的判定问题. 这里 NP 表示 Nondetermistic Polynomial 两个词的第一个字母. 这类问题只对正面回答“是”时，算法具有多项式性质，而对反面回答“不是”时，未做任何论断. 更严格地说：

1. 若对判定问题的回答为“是”，则存在一个目标 S，它满足：

1) 求出 S 的时间为 $O(P'(n))$，n 为问题的输入规模，P' 为多项式.

2) 检验 S，并得到回答“是”的时间为 $O(P''(n+n'))$，n' 为 S 的输入规模，P'' 为多项式.

2. 若对判定问题的回答为“不是”，则不存在目标 S，也就谈不上给出它，检验它.

P 问题为 NP 问题的一个子类，但前者在后者中占据多少分量一直是人们极感兴趣的问题，甚至考虑二者是否重合，至今还是个悬而未决的大问题. 迄今所考虑的组合优化问题均属于 NP 问题.

NP **完全问题**(NP-complete problem)　NP 问题中一个子类. 属于此类的问题满足条件：此问题为 NP 问题，而且此类中每一个其他问题均可经多项式转换变为这个问题. 判定问题的多项式转换是指把问题 P′变为问题 P″的多项式算法，而且满足对问题 P′的回答为“是”，当且仅当对问题 P″的回答为“是”. 这类问题的特点是：

1. 由于 NP 问题中的每个问题均可经由多项式转换为一个 NP 完全问题，所以，只要 NP 完全问题中的某个问题一旦具有多项式算法，则 NP 问题中的所有问题亦随之具有多项式算法.

2. 对于 P 问题等于 NP 问题的猜想，依赖于 NP 完全问题存在多项式算法，NP 完全问题是 NP 问题中很艰难求解的一个子类.

3. 对于 P 问题不等于 NP 问题的猜想，则在 NP 问题中必然有一个问题，它既不是 P 问题，又不是 NP 完全问题.

NP 完全问题是由库克(Cook，S. A.)于 1971 年给出，至今已知数以数千计的问题属于 NP 完全问题. 典型的有：3 满足问题、整线性规划问题、独立集问题、节点覆盖问题、多处理机调度的时间表问题、哈密顿回路问题、哈密顿路径问题、团问题、3 维匹配问题、0－1 背包问题、划分问题、最大割问题、多种货物流问题、图染色问题等. 对于判定问题 P_1 和 P_2，若 P_1 经由多项式阶的计算量转变为 P_2，而且反之亦然，则称 P_1 和 P_2 为多项式等价. 因此，NP 完全问题可看做一种多项式等价类.

多项式等价(polynomial equivalence)　见“NP 完全问题”.

贪婪算法(greedy algorithm)　解优化问题的一种方法. 求一个组合优化问题的解用多步进行，使每一步均按局部最优的方式的算法. 当然，一般而言，用贪婪算法不能保证得到一个最优解. 不过，确有这样的组合优化问题，用贪婪算法所得的就是它的一个最优解. 例如，在一个边上带有权的图上，求一个使树上边的权的总和为最小的支撑树的问题，用贪婪算法所得到的就是最优解. 那些用贪婪方法可以得到最优解的组合优化问题到底是什么样的，现在已经弄清楚. 为此，需要利用序阵给以刻画.

近似算法(approximate algorithm)　解优化问题的一种算法. 它是一种控制在给定误差之内的，其结果虽然达不到问题的最优解，但却可以使相对误差确保在一固定水平之上的算法. 更严格地，对于组合优化问题 $P=(E,\mathscr{F},C)$，算法 H 可以给出 P 的一个可行解 F_H，设 F^* 为问题的最优解，$\varepsilon>0$ 为一给定常数；若对此类问题的任一具体问题，均有关系

$$\frac{|C(F_H)-C(F^*)|}{C(F^*)}\leqslant\varepsilon,$$

则称 H 为 ε 近似算法，这里 $C(F_H)$，$C(F^*)>0$，分别为算法 H 达到的目标值和最优目标值. 因此，若组合优化问题是求极大值，H 为其 ε 近似算法，则有 $C(F_G)/C(F^*)\geqslant 1-\varepsilon$，此时称 $(1-\varepsilon)$ 为算法的病态情形下界. 对称于求极小值情形，

$$\frac{C(F_H)}{C(F^*)}\leqslant 1+\varepsilon,$$

称 $(1+\varepsilon)$ 为算法病态情形上界. 近似算法的设计旨在获得更好的这类界. 例如对于独立集问题，贪婪算法是近似算法. 而对于对称旅行售货员问题，及任意 $\varepsilon>0$，存在多项式 ε 近似算法的充分必要条件是 P 问题等于 NP 问题. 这表明当前根本不可能给出求解对称旅行售货员问题的 ε 近似算法.

概率算法(probabilistic algorithm)　解优化问题的一种算法. 它是按概率意义在多大程度上能够给出达到一定标准的可行解的算法. 这里说的一定标准可行解，可以是问题的最优解，但大多数是指达到病态情形上(下)界的可行解. 设 $(E,\mathscr{F},C)$ 为一类组合优化问题，$\varepsilon>0$ 为给定常数，算法 H 不是 ε 近似算法，这表明，在此类问题中，存在这样的问题，H 给出的可行解 F_H，对应的目标值 $C(F_H)$ 不满足不等式关系：

$$\frac{|C(F_H)-C(F^*)|}{C(F^*)}\leqslant\varepsilon.$$

但是对整类问题而言，能够按已知的概率 q 确保上述不等式成立. 因此概率算法是 ε 算法的自然延伸，

是从另一角度深入探讨算法的行为. 以对称的旅行售货员问题为例,问题的规模$|E|=n$为城市的数目,对于每个n均假定有一个与之关联的概率分布,例如把n个城市视为平面上一个正方形中的n个点,并按均匀分布,一个一个点独立地给出;城市间的距离视为两点间的欧氏距离. 对每个具体问题I,建立事件$X(I)$,它可以发生或不发生. $X(I)$发生的定义为:当把算法H应用到I,并得到目标值$C_H(I)$,它满足关系

$$C_H(I)\leqslant(1+\varepsilon)C^*(I),$$

其中$C^*(I)$为I的最优目标值(连结n个城市的最短哈密顿回路的长度),ε为给定正常数. 否则称事件$X(I)$不发生,并以q_n记$X(I)$不发生的概率. 若

$$\sum_{n=1}^{\infty}q_n<\infty,$$

则称$X(I)$几乎处处发生. 这例子表明,概率算法刻画的是算法的渐近行为.

启发式算法(heuristic algorithm) 解优化问题的一种算法. 它是借助于对问题的具体分析或计算经验等方面信息的启示,能够较快地给出问题满意解的算法. 这里说的满意解,一般不是问题的最优解,而是较好的可行解. 由于众多的组合优化问题不存在用来求解的多项式算法,启发式算法的研究具有很现实的意义. 此外对于有些问题,虽然有多项式算法,但求最优解的代价过大,往往也需要求满意解. 组合优化问题中的贪婪算法是典型的启发式算法. ε近似算法、概率算法等均是深入探究启发式算法内在行为的自然延拓.

满足问题(satisfiable problem) 一个组合优化问题. 关于布尔公式的决策问题:已知$c_1,c_2,\cdots,c_m$为布尔变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的加法运算、求补运算及乘法运算组成的公式,每个变量$x_j(1\leqslant j\leqslant n)$均有取值0或1的两种选择,问$x_1,x_2,\cdots,x_n$是否存在一组选择使$c_1,c_2,\cdots,c_m$的值均为1? 这是一个NP完全问题,而且是最早引入的NP完全问题,其他许多NP完全问题由它做多项式转换产生出来.

独立系统问题(independence system problem) 一类组合优化问题. 指建立在独立系统上的优化问题. 设E为有限集,$\mathscr{I}$为E的某些子集组成的集族,若$\mathscr{I}$满足下述条件,则称$\mathscr{I}$为独立系统:

1. $\varnothing\in\mathscr{I}$.

2. $I\subseteq J\in\mathscr{I}$,则$I\in\mathscr{I}$.

此时,独立系统问题为$\max\{C(I)\mid I\in\mathscr{I}\}$,其中

$$C(I)=\sum_{e\in I}c(e).$$

上述条件2是"独立"性质的表征,例如,线性空间中的线性独立向量组,图上的森林以及图上的互不相邻的节点集等,均具有这个特征,因此称$\mathscr{I}$中的元素为独立集. 这类问题为NP完全问题,当将图上的节点均视为带权1,将$\mathscr{I}$视为图上互不相邻的节点集形成的族,则在$\mathscr{I}$中求一个集合使得所含的元素(即节点)数最多的问题被称为最大独立集问题. 当然,还可以将它推广到在节点上的权不一定为1而是任意非负数的情形. 这时,称最大权独立集问题.

最大独立集(maximum independent set) 见"独立系统问题".

最大权独立集(maximum weight independent set) 见"独立系统问题".

拟阵问题(matroid problem) 一类组合优化问题. 它是建立在拟阵上的优化问题. 令E为有限集,$\mathscr{I}$为E的某些子集构成的集族. 称$(E,\mathscr{I})$为拟阵. 若二元组$(E,\mathscr{I})$满足:

1. $(E,\mathscr{I})$为独立系统.

2. 对于E的任意子集F,I_1和I_2均为含在F中的极大独立集,I_1和I_2包含的元素数相等,在其上的问题为$\max\{C(I)\mid I\in\mathscr{I}\}$,其中

$$C(I)=\sum_{e\in I}C(e).$$

拟阵问题是典型的组合优化问题. 例如,在图$G=(V,E)$上,若森林为独立集,则$(E,\mathscr{I})$为拟阵. 利用贪婪算法可求出拟阵问题的最优解. 因此,拟阵问题为P问题.

2拟阵交问题(2-matroid intersection problem) 一类组合优化问题. 它是建立在两个拟阵交集系统上的优化问题. 设$M_1=(E,\mathscr{I}_1)$,$M_2=(E,\mathscr{I}_2)$均为由共同的有限集E产生的拟阵,

$$\mathscr{I}_1\cap\mathscr{I}_2=\{I_1\cap I_2\mid I_1\in\mathscr{I}_1,I_2\in\mathscr{I}_2\}=\mathscr{I}$$

为其交集系统,问题是$\max\{C(I)\mid I\in\mathscr{I}\}$,其中

$$C(I)=\sum_{e\in I}C(e).$$

这是P问题,已有多种的多项式算法. 然而3拟阵交问题就不再是P问题.

分支问题(branching problem) 2拟阵交问题的特殊情形. 有向图$G=(V,A)$,B为A的子集,若满足:

1. 不含(无向)圈;

2. G的每个节点均是B中最多一条弧的终点;

则称B为分支.

分支问题为$\max\{C(B)\mid B$为支撑分支$\}$,其中

$$C(B)=\sum_{e\in B}C(e).$$

此类问题的重要性在于它与若干NP完全问题有密切的关系.

最大团问题(maximum clique problem) 一类组合优化问题. 设$G=(V,E)$为一个图. 在G上的任何一个极大完全子图被称为团. 求G的阶数最大的

团的问题就称为最大团问题. 它是一类 NP 完全问题.

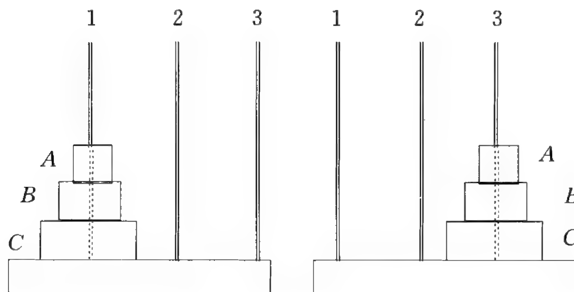
旅行售货员问题(travelling salesman problem) 一类组合优化问题. 它是在图上求最短哈密顿圈的问题. 设有图 $G=(V,E)$, 从某一节点出发, 依次穿过其他所有节点, 最后回到出发点, 使其总路程最短. 对称的含义是, 对于边 (i,j), 从 i 到 j 的距离与从 j 到 i 的距离相等. 这是 NP 完全问题. 由于它具有广泛的应用背景, 并与图内在性质又有紧密联系, 使它成为重要组合优化问题之一. 当从节点 i 到此边的另一节点 j 的距离不等于从节点 j 到节点 i 的距离时, 类似的问题被称为不对称的旅行售货员问题.

指派问题(assignment problem) 一类组合优化问题. 它可表示为二部图匹配的一类问题. 设有二部图 $G=(V_1,V_2;E)$, $M\subseteq E$ 满足条件: M 中任何两条边都不含有公共端点, 称 M 为 G 的一个匹配. 问题为 $\max\{C(M)\mid M$ 为匹配$\}$, 其中

$$C(M)=\sum_{e\in M}c(e).$$

指派问题是 P 问题. 求解指派问题的多项式算法有匈牙利算法. 它是组合优化问题最早的多项式算法之一.

梵塔问题(Hanoi tower problem) 一类组合优化问题. 有三个桩 1, 2, 3 和三个方 A,B,C, 如下图左所示, 三个方的尺寸不一. 这里, A 小于 B, B 小于 C. 它们已经放在桩 1 上, 且大的在下小的在上. 问题是要将这三个方逐一地移到桩 3 上, 使得还是大的在下小的在上, 即得到下图右所示的状态. 当然, 若没有桩 2, 这个问题就不可能有解. 在用桩 2 时, 如有两个或多于两个方也必须保持大的在下, 小的在上. 试问, 最少的步数为多少. 这就是梵塔问题. 还可将它推广到更多个桩和更多个方的情形.



最短路问题(shortest path problem) 一类组合优化问题. 图 $G=(V,E)$ 上, 在两节点 v,u 之间, 求一条路径 P, 使

$$C(P)=\min\{C(R)\mid R\text{ 为连结 }v,u\text{ 的路}\},$$

这里

$$C(R)=\sum_{e\in R}c(e).$$

这类问题为 P 问题.

最优树问题(optimal spanning tree problem) 一类组合优化问题. 设 $G=(V,E)$ 是一个图, V 为节点集, E 为边集. 对任何 $e\in E$, 它的权 $w(e)$ 为已知. 在 G 上, 求一个支撑树 T 使得

$$W(T)=\sum_{e\in T}w(e)$$

为最优(即最大或最小). 这就是最优树问题. 或具体地, 最大树问题或最小树问题. 求 G 上的最小支撑树有克鲁斯卡尔算法, 其要旨是: 首先, 选取权最小的一条边; 然后, 对于所有未被选取的边, 在那些与已选取的边不产生圈的边中取一个权最小的; 如此下去, 一直到不能进行为止. 从而, 这样选出来的所有边构成 G 的一个支撑树, 并且其上边的权之总和为最小. 它是一种典型的贪婪算法. 若将最优树问题中的支撑树改为 G 的连通的支撑子图, 则这时被称为最优连结问题. 最小连结问题与最小树问题是等价的.

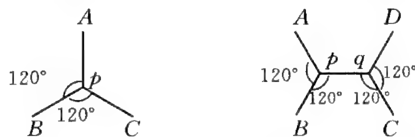
最优连结问题(optimal connector problem) 见"最优树问题".

克鲁斯卡尔算法(Kruskal algorithm) 见"最优树问题".

摆渡问题(ferry problem) 一类组合优化问题. 在一条河的一边岸上有一只狼、一只羊和一棵白菜. 已知狼吃羊和羊吃白菜. 在河中只有一条小舟且每次只能载它们三者之一. 问如何用最少的次数将它们安全摆渡到对岸? 这就是所谓摆渡问题. 也可将它推广到一般的情形.

最小树形图问题(shortest arborescence problem) 一类组合优化问题. 它是最小树问题的推广. 若在最小树问题中, 将这个树限定为树形图就变成了最小树形图问题.

施泰纳最小树问题(Steiner shortest tree problem) 一类组合优化问题. 在平面上有 n 个点, 问在平面上需增添多少个点, 使可以连这 n 个点和增加的点而得到长度最短的树. 这就是施泰纳最小



树问题. 除了只有一、两个点的不足道的情形外, 最简单的情形为三、四个点. 若三个点不在一条线上, 则要增添一个点 P. 如下左图中实线所示, 给出了施泰纳最小树. 若四个点中没有三个点在一条直线上, 则要增添两个点 p,q 而得到施泰纳最小树, 如下右图实线所示. 一般情形也可以用物理上的表面张力

原理做实验而得到.但时至今日在数学上仍没有得到解答.

网络流问题(network flow problem) 一类重要的组合优化问题.设 $G=(V,A)$为有向图,节点 s 称为源,节点 t 称为汇;对于每条弧 $a(i,j)\in A$,均有数值 c_{ij}称为该弧上的容量,i 为弧的起点,j 为终点.以 x_{ij}为分量的向量 x,$(i,j)\in A$,若满足条件:

1. 对任意$(i,j)\in A$,有 $0\leqslant x_{ij}\leqslant c_{ij}$.

2. $$\sum_{i\in\Gamma^-(j)} x_{ij}-\sum_{i\in\Gamma^+(j)} x_{ji}=\begin{cases}-v & (j=s),\\ 0 & (j\neq s,t),\\ v & (j=t),\end{cases}$$

其中 $\Gamma^-(j)$是以 j 为终点的弧的所有起点,$\Gamma^+(j)$为以 j 为起点的弧的所有终点,则称 x 为 s-t 可行流.网络流问题是求 s-t 可行流,使其值 v 尽可能地大.这类问题是 P 问题.使 v 达到最大的 s-t 流称为最大流.

最大流问题(maximum flow problem) 见"网络流问题".

***b* 匹配问题**(*b*-matching problem) 匹配问题的推广.在图 $G=(V,E)$上,对于每个节点 v,设定正整数 b_v,作为 E 的子集 M,若满足:对每个节点 v,关联于 v 的 M 中的边数不超过 b_v,则称 M 为 b 匹配.问题是 $\max\{c(M)\mid M$ 为 b 匹配$\}$,这里

$$c(M)=\sum_{e\in M}c(e),$$

c 为边集 E 上的一个权函数.当对任何一个节点 v,均有 $b_v=1$ 时,它就是匹配问题.若 b_v 为任意的正数,则这种匹配问题被称为最优匹配问题.从算法复杂性的角度而言,b 匹配问题是一类 P 问题.

最优匹配问题(optimal matching problems) 见"*b* 匹配问题".

中国邮路问题(Chinese postman problem) 中国学者于 20 世纪 50 年代提出的一种典型的组合优化问题,后在国际上被称为中国邮路问题.已知图 $G=(V,E)$,对于每条边 $e\in E$,有距离 $d(e)$,从 G 的某节点出发,走过 G 的所有边(允许重复穿过),回到原出发点,使其总行程最短.这个问题是 P 问题.

背包问题(knapsack problem) 一类组合优化问题.设 U 为有限个物品的集合,每件物品 $u\in U$ 有一个尺寸 $s(u)$,自然 $s(u)$为正整数,而且 u 有一个价值 $v(u)$.若背包的尺寸为 B,问将 U 中的哪些物品装到背包中以求得到最大的价值?事实上,就是求 U 的一个子集 L,即求 $L\subseteq U$,且满足条件

$$\sum_{u\in L}s(u)\leqslant B,\ \text{使}\sum_{u\in L}v(u)$$

达到最大值.虽然这个问题的形式十分简单,但是,它仍为一个 NP 完全问题.因此,它的求解是十分困难的.

排序问题(sequencing problem) 亦称工件加工日程表问题.一类典型的组合优化问题.设用 m 台机器加工 n 个工件.给定了加工每个工件所用机器的次序,以及每台机器加工每个工件所需要的时间、问题是确定工件在每台机器上的加工次序以使预先选定的目标函数达到最小.这个目标函数通常是完成时间、平均完成时间、机器的空间时间等的一个非降函数.排序问题有两个类型:

1. 流水作业,这时,要求每个工作在机器上的加工次序都一样.

2. 工件作业,这时,每个工件在机器上的加工次序不必一致.

流水作业可以看做是工件作业的一种特殊情形.三台或以上机器的排序问题多为 NP 完全问题.因此是很困难的.

工件作业(jobshop) 见"排序问题".

流水作业(workshop) 见"排序问题".

日程表问题(scheduling problem) 亦称调度问题.一类组合优化问题.对于一个给定的活动计划确定各项活动的进行的时间段,使得预先选定的目标函数取最小值.这个目标函数常取为最终完成时间的一个非降函数.若要有资源的限制,还可以在保证完成时间之下使得资源的总花费为最小.日程表问题的一个典型实例就是排序问题.另外,还有项目日程表问题和装配线平衡问题.项目日程表问题,也称统筹方法.

调度问题(scheduling problem) 见"日程表问题".

项目日程表(project scheduling) 见"日程表问题".

装配线平衡(assemble-line balance) 见"日程表问题".

装填问题(packing problem) 一类典型的组合优化问题.设 $I=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$是一个有限集,$E=\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$为 I 的子集所形成的一个集簇.若 E 的一个子族 $E'=\{E_{j_1},\cdots,E_{j_s}\}$使得 I 中的每个元素包含在 E'的至多一个元素之中,则称 E'为 I 的一个装填.求 I 的一个装填 E'使得所含的元素数为最多就是所谓装填问题.一般地,赋 E 中每个元素以一个权,而将 E 中的元素最多改为其中元素的权和为最大.当每个元素的权均为 1 时,即这里所说的装填问题.若将 E'中的每个元素视为一个车厢,这时的装填问题也被称为装箱问题.若 E'使得 I 中的每个元素包含在 E'的至少一个元素之中,则称 E'为 I 的一个覆盖.求 I 的一个覆盖 E'使得 E'含 E 中的元素最小就是所谓覆盖问题.也可以将它推广到带权的情形.若 E'使得 I 中的每个元素包含在 E'的恰好一个元素之中,则称 E'为 I 的一个划分.求 I 的一个划分 E'使得 E'中含的元素数为最少就是划分

问题. 同样可以有带权情形下之推广. 这里所述的装填问题、覆盖问题，以及划分问题均是 NP 完全问题. 因此，要想用好的算法解这些问题是不现实的.

装箱问题(bin-packing problem)　见“装填问题”.

覆盖问题(covering problem)　见“装填问题”.

划分问题(partitioning problem)　见“装填问题”.

选址问题(location problem)　一类组合优化问题. 设用料单位的位置已经确定. 要建多少个仓库和设在哪里使得供给这些用料单位所花费的运输量为最小，其中哪些地方可以设立仓库已经给出. 这就是所谓选址问题. 若用料单位用产麦地代替，仓库用打麦场所代替，这时的选址问题就变为麦场设置问题. 在产麦地之间的道路没有圈时，且要求麦场设置在某产地，这时有简单的方法解这个问题. 一般情况，从算法的复杂性的角度而言，求选址问题的解是很困难的.

麦场设置问题(allocation problem for threshing ground)　见“选址问题”.

称量问题(scale problem)　一类组合优化问题. 设有 n 个球，若已知其中有一个是坏的，且已知这个坏球比其他球轻，当然，所有好球重量都相同. 问用一个天平称最少称多少次才可以将这个坏球选出来. 若不知道坏球之轻重，最少称多少次. 若不止一个坏球如何等. 这些被称为称量问题.

布局问题(layout problem)　一类组合优化问题. 通常是就印刷电路板或集成电路，甚至超大规模集成电路而言. 仅以印刷电路板为例. 所谓布局问题主要由两个部分组成. 首先是如何将电子元器件，包括电阻、电容、半导体元集、输入输出端口，甚至它本身就是一个集成块安置在一个板面上使得满足一定的要求. 然后就是如何在这块板上印制金属导线使得满足技术上的要求. 前者被称为定位问题，后者被称为布线问题. 这两者要达到的总目标或为使占用面积最小，或是使所画导线的长度最短. 若要求导线必要按水平和垂直走向，这时称为纵横布局，则又常要使导线上的总折数最小，或者使用折数最多的导线上的折数最小等.

定位问题(placement problem)　见“布局问题”.

布线问题(routing problem)　见“布局问题”.

纵横布局(rectilinear layout)　见“布局问题”.

装填多面体(packing polytope)　一类组合构形. 指由装填问题的可行解集的凸包所形成的多面体. 对于有限集 $I=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$，E 为 I 的所有子集所形成的簇. 并且，记 $E=\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$. E 的任何一个子簇 E' 均可用向量 $x_{E'}=(x_1(E'),x_2(E'),\cdots,x_n(E'))^T$ 表示，其中 $x_j(E')=1$，当 $E_j\in E'$ 时；否则 $x_j(E')=0$ $(j=1,2,\cdots,n)$. $x_{E'}$ 的向量表示中的 T 为转置，或者说 $x_{E'}$ 为一个 n 维列向量. 由于 $x_{E'}$ 的每个分量只有两个可能值，可知共有 2^n 个这种向量. 类似的理由，可知 $n=2^m$. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为一个 $m\times n$ 的矩阵，使得 $a_{ij}=1$，当 $v_i\in E_j$；否则，$a_{ij}=0$ $(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$. 即，$A$ 为 I 与 E 的关联阵. 这时，I 的装填就与不等式组

$$Ax\leqslant e\ (0\leqslant x\leqslant e) \qquad (*)$$

的整数解一一对应. 其中，$e=(1,\cdots,1)^T$，即所有分量均为 1 的那个 n 维列向量. 由此，装填多面体就是不等式组(*)的整数解集的凸包. 相应地，覆盖多面体就是不等式组 $Ax\geqslant e$ $(0\leqslant x\leqslant e)$ 的整数解集的凸包，划分多面体就是不等式组 $Ax=e$ $(0\leqslant x\leqslant e)$ 的整数解集的凸包.

覆盖多面体(covering polytope)　见“装填多面体”.

划分多面体(partitioning polytope)　见“装填多面体”.

匹配多面体(matching polytope)　一类组合构形. 它是由一个图的所有对集相应的向量所形成的凸包. 设图 $G=(V,E)$，V 和 E 分别为 G 的节点集和边集. 且记 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 和 $E=\{e_1,e_2,e_m\}$. 对于 E 的任何一个子集 E'，它的相应向量 $x_{E'}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中 $x_j=1$，当 $e_j\in E'$；否则，$x_j=0$ $(1\leqslant j\leqslant n)$. 若 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$ 为 G 的节点与边之间的关联阵，即 $a_{ij}=1$，当 v_i 为 e_j 的一个端点；否则，$a_{ij}=0$ $(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$，则匹配多面体由下面的不等式组的解集所确定：

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant 1 & (1\leqslant i\leqslant m),\\ x_j\geqslant 0 & (1\leqslant j\leqslant n),\\ \sum\limits_{e_j\in E(S)}x_j\leqslant\dfrac{|S|-1}{2},\end{cases}$$

其中，S 为 V 的子集且含有奇数个节点，$E(S)$ 为由 S 在 G 上的导出子图的边集.

整多面体(integral polytope)　一类多面体. 它的所有顶点均为整点，即其每个坐标全是整数.

多面体拟阵(polymatroid)　一类整多面体. 设 E_n^+ 为 n 维欧氏空间的那个非负象限. 在 E_n^+ 上定义一个偏序：对于 $x,y\in E_n^+$，$x\leqslant y$ 表示 $x_i\leqslant y_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 设 $D\subseteq E_n^+$，若 $x_0\in D$ 具有这样的性质：不存在 $x\in D$，$x\neq x_0$，使得 $x\leqslant x_0$，则称 x_0 为偏序 D 上的一个极小元. 若不存在 $x\in D$，$x\neq x_0$，使得 $x\geqslant x_0$，则 x_0 为 D 上的一个极大元. 在 E_n^+ 上的一个有界多面体拟阵就是这样的一个多面体 M，它具有性质：

1. 若 $0\leqslant y\leqslant x$，$x\in M$，则 $y\in M$.

2. 对任何 $a\in E_n^+$，集合 $M_a=\{x\in M\mid x\leqslant a\}$ 的所有极大元的分量和均相同，并且，这个和称为 a 的秩.

在 E_n^+ 上所定义的秩确定一个多面体拟阵的秩函数. 在 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有子集形成的簇 2^N 上定义的函数 ρ，若对任何 $U,W\in 2^N$ 均有

$$\rho(U)+\rho(W)\geqslant\rho(U\cup W)+\rho(U\cap W),$$

则称 ρ 为次模的. 若上面的不等式是反向的，则称 ρ 为上模的. 一个多面体 $M\subset E_n^+$ 是有界多面体拟阵，当且仅当在 2^N 上存在一个非降的次模函数 $\rho(W)$，$\rho(\varnothing)=0$，使得

$$M=\left\{x\in E_n^+\;\middle|\;\sum_{i\in W}x_i\leqslant\rho(W),\text{对任何 }W\subseteq N\right\}.$$

在 E_n^+ 上的一个无界多面体拟阵就是这样的一个多面形 Q，使它具有性质：若 $y\geqslant x$，和 $x\in Q$，则 $y\in Q$；对任何 $a\in E_n^+$，在 $Q_a=\{x\in Q\mid x\geqslant a\}$ 中的每个极小元的分量和都相同. 一个多面形 $Q\subseteq E_n^+$ 是一个无界多面体拟阵，当且仅当存在 2^N 上的一个上模函数 $\rho(W)$，$\rho(\varnothing)=0$，使得

$$Q=\left\{x\in E_n^+\;\middle|\;\sum_{i\in W}x_i\geqslant\rho(W),\text{对任何 }W\subseteq N\right\}.$$

拟阵多面体(matroid polytope)　一类多面体. 它是拟阵上的优化问题所确定的多面体. 设 $U=(J,\mathscr{F})$ 为一个拟阵，其中 J 为一个有限集，$\mathscr{F}$ 为独立集族. 对于任何 $W\subseteq J$，所有那些在包含意义下的 W 的极大独立子集均有相同的基数，即所含元素的数目相同，并且称这个数为 W 的秩，记为 $r(W)$. 拟阵的秩函数 r 是次模的，即对任何 $X,Y\subseteq J$，均有

$$r(X\cup Y)+r(X\cap Y)\leqslant r(X)+r(Y).$$

多面体

$$M(r)=\left\{x\in E_n^+\;\middle|\;\sum_{i\in w}x_i\leqslant r(w),\text{对任何 }w\subseteq N\right\},$$

其中 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，$n=|J|$，就称为拟阵多面体.

局整多面体(locally integral polytope)　一种特殊的多面体. 它的所有整点的凸包保持原来的整点之间的相邻性不变. 设 M 为一个多面体，$G(M)$ 表示由 M 的顶点作为节点和由 M 的棱作为边所得的图. 记 $\mathrm{conv}(M_Z)$ 为 M 的所有整点的凸包. 若 $G(M)\supseteq G(\mathrm{conv}(M_Z))$，则称 M 为拟整多面体. 由方程和不等式组 $Ax=e,x\geqslant 0$ 的解集所确定的多面体被称为松划分多面体. 若将 x 的每个分量限制取值 0,1，则由这个解集确定的就是划分多面体. 凡松划分多面体均是拟整多面体. 由如下的方程和不等式组：

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\ \ (1\leqslant i\leqslant m),$$

$0\leqslant x_{ij}\leqslant y_i,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n;y_i\in\{0,1\},1\leqslant i\leqslant m$ 的解集的凸包所确定的多面体称为最简选址多面体，因为求这个多面体的一个顶点使得最小化函数

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}x_{ij}+c_iy_i)$$

的问题被称为最简选址问题. 其中，c_{ij}和 c_i 均为已知的常数. 最简选址多面体也是拟整多面体. 一个多面体 M，若它的所有整顶点导出的 $G(M)$ 的子图是 $G(\mathrm{conv}(M_Z))$ 的一个支撑子图，则称 M 为连通整多面体. 对于给定二正整数 n 和 $k(k<n)$，由下面的方程和不等式组的解集所确定的多面体被称为中位多面体：

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 & (1\leqslant i\leqslant n),\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_{ii}=k,\\ x_{ji}-x_{ii}\leqslant 0 & (1\leqslant i,j\leqslant n),\\ x_{ij}\geqslant 0 & (1\leqslant i,j\leqslant n).\end{cases}$$

对任何 k $(1\leqslant k\leqslant n)$，中位多面体均为连通整多面体.

拟整多面体(quasi-integral polytope)　见“局整多面体”.

松划分多面体(relaxed partition polytope)　见“局整多面体”.

最简选址多面体(simplest location polytope)　见“局整多面体”.

最简选址问题(simplest location problem)　见“局整多面体”.

连通整多面体(connected integral polytope)　见“局整多面体”.

中位多面体(median polytope)　见“局整多面体”.

置换多面体(permutation polytope)　一个与置换有关的多面体. 设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是一个给定的向量，且规定 $a_1>a_2>\cdots>a_n\geqslant 0$. 设 S_n 为 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的所有置换的集合. 对于每个置换 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)\in S_n$，将它与点 $a_\pi=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(x_i=a_{\pi_i},i=1,2,\cdots,n)$ 联系. 点集

$$\{a_\pi=(a_{\pi_1},a_{\pi_2},\cdots,a_{\pi_n})\mid\pi\in S_n\}$$

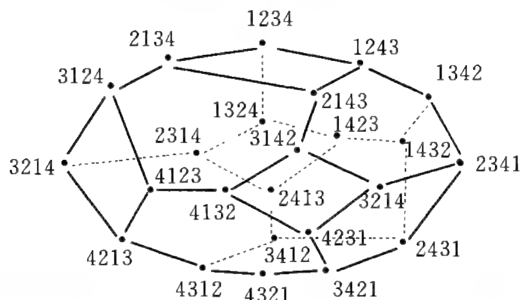
在 n 维欧氏空间 E_n 中的凸包称为置换多面体，并记它为 $M_n(a)$. 例如 $M_4(a)(a=(4,3,2,1))$ 如图所示. 若两个向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 满足关系：

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

和存在两个置换 $\tau,\pi\in S_n$ 使得

$$\sum_{i=1}^{\gamma}x_{\tau_i}\leqslant\sum_{i=1}^{\gamma}y_{\pi_i}$$

对于 $\gamma:1\leqslant\gamma\leqslant n-1$，则称 x 由 y 所管制. 并记为 $x\prec y$. 拉多定理指出：$x\in M_n(a)$，当且仅当 $x\prec a$. 由



此，置换多面体由如下的方程和不等式组的解集所确定：对任何 $w\subset N$，

$$\sum_{i\in w}x_i\leqslant\sum_{1\leqslant i\leqslant |w|}a_i,$$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}x_i=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}a_i.$$

S_n 可以划分为奇置换的集合 S^- 与偶置换的集合 S^+，即 $S_n=S^++S^-$. 集合 $\{a_\pi|\pi\in S^+\}$ 的凸包称为偶置换多面体，并用 $M_n^+(a)$ 表示. $x\in M_n^+(a)$，当且仅当 $x\in M_n(a)$，而且对于任何 $\pi\in S^-$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n}c_{\pi_i}x_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}c_ia_{n-i+1}+\frac{(a_{n-1}-a_n)}{(a_1-a_2)},$$

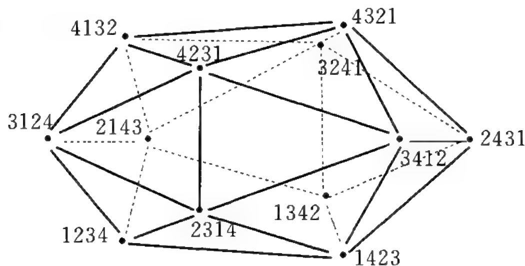
其中

$$c_1=a_1,\quad c_2=a_2,$$

$$c_i=c_{i-1}-\frac{(a_{n-1}-a_n)(a_1-a_2)}{a_{n-i+1}-a_{n-i+2}}$$

$$(i=3,4,\cdots,n).$$

例如，图给出 $M_4^+(a)$，这里 $a=(4,3,2,1)$.



偶置换多面体(even permutation polytope) 见“置换多面体”.

分配多面体(distribution polytope) 由指派问题的解集所确定的多面体. 即由如下方程和不等式组的解集所确定的多面体：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 & (1\leqslant i\leqslant n),\\ \sum_{i=1}^{n}a_ix_{ij}=a_j & (1\leqslant j\leqslant n),\\ x_{ij}\geqslant 0 & (1\leqslant i,j\leqslant n).\end{cases}$$

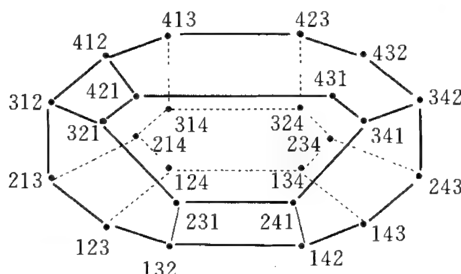
其中，$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 n 维非负实向量. 若 $a_1=a_2=\cdots=a_n>0$，则这时的分配多面体就是指派多面体. 事实上，指派多面体由指派问题的可行解的集合所确定.

指派多面体(assignment polytope) 见“分配多面体”.

安排多面体(arrangement polytope) 一类组合构形. 它是置换多面体在低维空间的投影. 设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，且 $a_1>a_2>\cdots>a_n>0$. 一个 m 安排，$m\leqslant n$，就是从 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 中有序地选择 m 个不同的元素，记为 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m)$，并将它联系一个向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，使得 $x_i=a_{\pi_i}$，$i=1,2,\cdots m$. N 的所有 m 安排 $\pi=(a_{\pi_1},a_{\pi_2},\cdots,a_{\pi_m})$ 在 m 维欧氏空间中的凸包称为安排多面体，用 $M_n^m(a)$ 表示. 下图给出了

$$M_4^3(a)\ (a=(4,3,2,1)).$$

$x\in M_n^m(a)$，当且仅当向量 x 由 a 所管制.



运输多面体(transportation polytope) 一种与运输问题关联的多面体. 它由如下方程和不等式组的解集所确定：对于给定两个非负向量 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 和 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & (1\leqslant j\leqslant n),\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & (1\leqslant i\leqslant m),\\ x_{ij}\geqslant 0 & (1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n).\end{cases}$$

用 $M(a,b)$ 表示这个运输多面体，它的阶为 $m\times n$. 若 $M(a,b)$ 的一个顶点，即 mn 维空间中的一个向量恰有 $m+n-1$ 个非 0 分量，则称它为非退化的. 若一个运输多面体，它的所有顶点全是非退化，则它本身是非退化的；否则，就是退化的. 若 $a=(n,\cdots,n)\in E_m$ 和 $b=(m,\cdots,m)\in E_n$，则这时 $M(a,b)$ 被称为中心运输多面体. 设 $x=(x_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$ 为 $M(a,b)$ 的一个顶点，记

$$K(a,b,x)=\{(i,j)|x_{ij}>0,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}.$$

两个运输多面体 $M(a^0,b^0)$ 和 $M(a^1,b^1)$，$a^0,a^1\in E_m$，$b^0,b^1\in E_n$，若对于顶点 $x^0\in M(a^0,b^0)$ 和顶点 $x^1\in M(a^1,b^1)$，有

$$K(a^0,b^0,x^0)=K(a^1,b^1,x^1),$$

则此两顶点是等价的. 若对每个 $M(a^0,b^0)$ 的顶点都有 $M(a^1,b^1)$ 的一个顶点与它等价，并且对 $M(a^1,b^1)$

的一个顶点也有 $M(a^0,b^0)$ 的一个顶点与它等价，则 $M(a^0,b^0)$ 和 $M(a^1,b^1)$ 为等价运输多面体. 若 $a=b$，则这时的 $M(a,b)$ 称为对称运输多面体. 对于运输多面体 $M(a,b)$，若

$$\begin{cases}\mu_{I,J}(a,b)=\sum\limits_{i\in I}a_i-\sum\limits_{j\in J}b_j,\ I\subseteq M,J\subseteq N;\\ \mathscr{A}(a,b)=\{(I,J)\mid(I,J)\in\mathscr{A}_{m\times n},\mu_{I,J}(a,b)=0\}\end{cases}$$

其中 $M=\{1,2,\cdots,m\}$，$N=\{1,2,\cdots,n\}$，

$$\mathscr{A}_{m\times n}=\{(I,J)\mid 1\in I\subset M,\varnothing\neq J\subset N\},$$

则两个运输多面体 $M(a^0,b^0)$ 和 $M(a^1,b^1)$ 是等价多面体当且仅当对任何 $(I,J)\in\mathscr{A}_{m\times n}$，均有

$$\mathrm{sign}\mu(a^0,b^0)=\mathrm{sign}\mu(a^1,b^1),$$

其中，$\mathrm{sign}\mu$ 表示取值 μ 的符号. 对于一个运输多面体 $M(a,b)$，若 $|\mathscr{A}(a,b)|=k$，则称它为 k 退化运输多面体. 一个 1 退化运输多面体使得 $\mu_{L,P}(a,b)=0$，则称它为 (L,P) 退化的.

非退化运输多面体（non-degenerate transportation polytope） 见“运输多面体”.

退化运输多面体（degenerate transportation polytope） 见“运输多面体”.

中心运输多面体（central transportation polytope） 见“运输多面体”.

等价运输多面体（equivalent transportation polytope） 见“运输多面体”.

对称运输多面体（symmetrical transportation polytope） 见“运输多面体”.

k 退化运输多面体（k-degenerate transportation polytope） 见“运输多面体”.

(L,P) 退化运输多面体（(L,P)-degenerate transportation polytope） 见“运输多面体”.

运输多面体 (L,P) 正则偶（(L,P)-regular pair of transportation polytopes） 一对特殊的运输多面体. 设 $M(a^0,b^0)$ 和 $M(a^1,b^1)$ 是两个运输多面体. 它们的阶都是 $m\times n$. 记

$$a^\lambda=\lambda a^1+(1-\lambda)a^0,\quad b^\lambda=\lambda b^1+(1-\lambda)b^0,$$

其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$. 若存在一个 λ^* $(0<\lambda^*<1)$ 使得 $M(a^{\lambda^*},b^{\lambda^*})$ 是 (L,P) 退化的，同时，对任何 $\lambda(0<\lambda<1$ 且 $\lambda\neq\lambda^*)$，$M(a^\lambda,b^\lambda)$ 全是非退化的，则称 $M(a^0,b^0)$ 和 $M(a^1,b^1)$ 为一个 (L,P) 正则偶. 运输多面体 $M(a^{\lambda^*},b^{\lambda^*})$ 称为这个 (L,P) 正则偶的中心.

转向运输多面体（axial transportation polytope） 一种特殊的运输多面体. 对给定的 p 个向量

$$a^1=(a_1^1,a_2^1,\cdots,a_{n_1}^1),$$
$$a^2=(a_1^2,a_2^2,\cdots,a_{n_2}^2),$$
$$\cdots\cdots$$
$$a^p=(a_1^p,a_2^p,\cdots,a_{n_p}^p),$$

如下的方程和不等式组的解集所确定的多面体称为转向运输多面体：

$$\sum_{\substack{i_1\in N_1,\cdots,i_{s-1}\in N_{s-1}\\ i_{s+1}\in N_{s+1},\cdots,i_p\in N_p}}x_{i_1,i_2\cdots i_p}=a_{i_s}^s,$$
$$1\leqslant i_s\leqslant N_s,s=1,2,\cdots,p,x_{i_1i_2\cdots i_p}\geqslant0,$$
$$i_1\in N_1,i_2\in N_2,\cdots,i_p\in N_p,$$

其中 $N_1=\{1,2,\cdots,n_1\}$，$N_2=\{1,2,\cdots,n_2\}$，$\cdots$，$N_p=\{1,2,\cdots,n_p\}$. 于是，p 指标运输多面体为 $n_1n_2\cdots n_p$ 维空间中的一个多面体. 当 $p=2$ 时，这就是通常的运输多面体.

限额运输多面体（truncated transportation poly-tope） 一类特殊的运输多面体. 它是用超平面割掉一个运输多面体中超过界限制部分而得到的多面体. 从数学表示上，一个限额运输多面体（用 $M(a,b,D)$ 表示）为如下方程和不等式组的解集所确定的多面体：

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^n x_{ij}=a_i & (1\leqslant i\leqslant m),\\ \sum\limits_{i=1}^m x_{ij}=b_j & (1\leqslant j\leqslant n),\\ 0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij} & (1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n),\end{cases}$$

其中 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 和 $D=(d_{ij})_{m\times n}$. 当 $d_{ij}\geqslant\min\{a_i,b_j\}$ 时，这个限额运输多面体就是运输多面体. 若一个 $m\times n$ 的限额运输多面体 $(m,n\geqslant2)$ 是 $(m-1)(n-1)$ 维的，则称它为正则的. 一般情形，限额运输多面体的维数可以小于 $(m-1)\cdot(n-1)$. 此数是通常运输多面体的维数. 若 $M_{k,t}(a,b)=\{(x_{ij})_{m\times n}\in M(a,b)\mid x_{ij}=0$，当 $n-t-1<j-i<k-m+1\}$，其中 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 和 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 为正实向量，且 k,t 满足 $0\leqslant k,t\leqslant\min\{m,n\}-1$，则它是一多面体，并称为 (k,t) 限额运输多面体. 当 $k=t=0$ 时，它就成了运输多面体. 若一个 $m\times n$ 的 (k,t) 限额运输多面体 $M_{k,t}(a,b)$ 具有维数 $d(M_{k,t})=(m-1)(n-1)-(k(k+1)+t(t+1))/2$，则称它为正则的，其中 $m+n-k-t\geqslant3$. 若一个限额运输多面体 $M(a,b,D)$ 使得 $D=(d_{ij})_{m\times n}$，对于 $\varnothing\neq\alpha\subseteq M\times N$，满足

$$d_{ij}\begin{cases}=0 & ((i,j)\in\alpha),\\ \geqslant\min\{a_i,b_i\} & (\text{否则}),\end{cases}$$

其中 $M=\{1,2,\cdots,m\}$，$N=\{1,2,\cdots,n\}$，则称为 α 限额运输多面体.

运输多面体的谱（spectrium of transportation polytope） 带有特定性质的参数的集合. 设 $M(a^0,b^0)$ 和 $M(a^1,b^1)$ 是两个运输多面体. 且它们的阶均为 $m\times n$. 记 $a^\lambda=\lambda a^1+(1-\lambda)a^0$ 和 $b^\lambda=\lambda b^1+(1-\lambda)b^0$，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$. 所有使得 $M(a^\lambda,b^\lambda)$ 为退化运输多面体的 $\lambda(0<\lambda<1)$ 的集合称为 $M(a^0,b^0)$ 和 $M(a^1,b^1)$ 的

谱，用 $S(a^0,b^0,a^1,b^1)$ 表示．若 $S(a^0,b^0,a^1,b^1)$ 只含有限个元素，则称它为有限的；否则，称为无限的．谱 $S(a^0,b^0,a^1,b^1)$ 是无限的，当且仅当 $\mathscr{A}(a^0,b^0)\cap\mathscr{A}(a^1,b^1)\neq\varnothing$．谱可以用来判定两个运输多面体是否等价．两个运输多面体是等价的当且仅当它们的谱是一个空集．若谱 $S(a^0,b^0,a^1,b^1)$ 是有限的而且非空，又对每个 $\lambda\in S(a^0,b^0a^1,b^1)$，$M(a^\lambda,b^\lambda)$ 都是 (I_λ,J_λ) 退化的，则称它为简单谱．

正则限额运输多面体(regularly truncated transportation polytope)　见"限额运输多面体"．

(k-t)限额运输多面体((k-t)-truncated transportation polytope)　见"限额运输多面体"．

α 限额运输多面体(α-truncated transportation polytope)　见"限额运输多面体"．

广义运输多面体(generalized transportation polytope)　运输多面体的一种推广．令 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\geqslant 0$．同时，还给定两个正实阵 $\alpha=(\alpha_{ij})_{m\times n}$，$\beta=(\beta_{ij})_{m\times n}$．由如下方程和不等式组的解集所确定的多面体就是广义运输多面体：

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}x_{ij}=b_j & (1\leqslant j\leqslant n),\\ \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}x_{ij}=a_i & (1\leqslant i\leqslant m),\\ x_{ij}\geqslant 0 & (1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n).\end{cases}$$

当 $\beta_{ij}=\alpha_{ij}=1$ $(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$ 时，广义运输多面体就变成了运输多面体．由广义运输多面体作为可行解集使得某线性函数取最大或最小的线性规划被称为广义运输问题．

广义运输问题(generalized transportation polytope)　见"广义运输多面体"．

双随机多面体(bistochastic polytope)　一种特殊的多面体．若将一个 $n\times n$ 方阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 视为 n^2 维向量

$$a=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n},\cdots,a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn}),$$

则由所有 $n\times n$ 双随机阵在 n^2 维空间中形成的点集称为双随机多面体．所谓双随机阵是指这样的方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，使得对任何 $1\leqslant i,j\leqslant n$，

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1.$$

若在一个双随机阵中，限制所有元素只取 0 或 1，则它就变成了一个置换阵．若 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)$ 是 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的一个置换，则相应它的置换阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & (j=\pi_i),\\ 0 & (\text{否则}),\end{cases}\quad (1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n).$$

所有 $n\times n$ 对称置换阵的凸包称为对称置换多面体．由伯克霍夫定理，所有双随机阵在 n^2 维欧氏空间中形成一个多面体，而且它的顶点就是置换阵．双随机多面体就是由所有置换阵在 n^2 维空间中的凸包．同时，对称置换多面体由如下的方程和不等式组的解集所确定：对任何

$$S\in\mathscr{F}=\{S\subseteq N\mid |S|\geqslant 3,\quad |S|=1(\mathrm{mod}\,2)\},$$

$$\begin{cases}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S-\{i\}}x_{ij}\leqslant |S|-1,\\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 & (j\in N),\\ x_{ij}=x_{ji} & (j\in N),\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i,j\in N).\end{cases}$$

对称置换多面体(symmetric permutation polytope)　见"双随机多面体"．

伯克霍夫定理(Birkhof's theorem)　见"双随机多面体"．

哈密顿圈多面体(Hamiltonian circuit polytope, Hamiltonian cycle polytope)　一种特殊的多面体．它是由哈密顿圈导出的多面体．它的顶点相应一个图上的哈密顿圈的邻接矩阵．因为任何一个图 G 的哈密顿多面体均为与 G 同阶的完全图 K_n（n 为 G 的阶）的哈密顿多面体的一个面，所以通常所说的哈密顿多面体均指完全图的哈密顿多面体．这时，K_n 的哈密顿圈的集合与如下的方程和不等式组解集确定的多面体整顶点的集合之间有一个一一对应关系：

$$\begin{cases}Wx^t=2e^t & (0\leqslant x\leqslant e),\\ \sum_{i,j\in S}x_{ij}\leqslant |S|-1 & (\text{对任何 } s\subset N),\end{cases}$$

其中，W 为 K_n 关联矩阵，$e=(1,1,\cdots,1)$ 为一个 n 维向量，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_\varepsilon)$，$\varepsilon=n(n-1)/2$，为 ε 维向量，t 表示向量的转置．由此，哈密顿多面体就是上面方程和不等式组整数解集的凸包．任何一个哈密顿圈均相应旅行售货员问题（参见"旅行售货员问题"）的一个可行解．也可以说，哈密顿多面体为旅行售货员问题所有可行解的凸包．若将 K_n 用 K_n^* 代替，即将 K_n 的每一边用两个有向边代替，在 K_n^* 上考查有向哈密顿圈，则在 K_n^* 上的所有有向哈密顿圈的邻接矩阵的凸包称为有向哈密顿多面体．若在旅行售货员问题中，将可行解限制在有向哈密顿圈上，则这时被称为有向旅行售货员问题，或非对称旅行售货员问题．相应地，原旅行售货员问题也称为对称旅行售货员问题．由此，有向哈密顿多面体也可以说是非对称旅行售货员问题所有可行解的凸包．

有向哈密顿多面体(Hamiltonian directed polytopes)　见"哈密顿圈多面体"．

撰　稿　徐寅峰　陶懋颀　颜基义
审　阅　马仲蕃　刘振宏

线性与多重线性代数

线 性 代 数

线性代数(linear algebra)　代数学的一个以处理线性关系为主的分支.它的历史久远,始于解线性方程组,中国古算书《九章算术》中就讨论过方程组的解法.对线性方程组的深入研究,行列式和矩阵的产生及物理、数学分析与几何上的需要,有力地推动了线性代数的发展与形成,其中西尔维斯特(Sylvester,J.J.)、凯莱(Cayley,A.)等人在线性代数方面的工作是奠基性的.由于与几何中向量的类比,在线性代数中形成了线性空间(向量空间)的概念,线性代数中讨论的问题都可以用线性空间的观点加以讨论.因此,线性空间、线性变换以及与之有关的型与矩阵等构成了线性代数的中心内容.

线性代数的含义随着数学的发展而不断拓广.线性代数的理论与方法已渗透到数学的许多分支.线性代数对多元函数的微积分是基础性的,同时对理论物理、理论化学、计量经济与生物科学等也是不可缺少的数学工具.在工程技术等实际问题中有许多数学问题往往归结为数量间的线性关系(即用一次形式表达的关系),这些线性关系都可以用空间的观点来讨论.因此,线性代数在工程技术与国民经济的许多领域中都有着广泛的应用.

在本分支中,主要介绍一般域上线性代数的基本内容.未涉及的部分可参见第一卷《高等代数》部分.

n 元向量(n-tuple vector)　亦称 n 维向量.通常向量(矢量)的推广.设 P 为域,n 是正整数.P 中 n 个元素构成的有序组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为 P 上的 n 元向量,$a_i(i=1,2,\cdots,n)$称为这个向量的第 i 个分量或坐标.P 上全体 n 元向量构成的集合记为 P^n.P^n 中两个 n 元向量相等是指它们的相应分量完全相同.根据讨论的需要,一个 n 元向量$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$也可以竖起来表示为

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

像通常向量一样,可以对 n 元向量引入加法及 P 中元素与 n 元向量的乘法.n 元向量的加法如下

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$
$$=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n),$$

若 $c\in P$,则它与 n 元向量的乘法如下

$$c(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(ca_1,ca_2,\cdots,ca_n).$$

n 维向量(n-tuple vector)　即"n 元向量".

线性空间(linear space)　亦称向量空间.它是线性代数的中心内容和基本概念之一.设 V 是一个非空集合,P 是一个域.若:

1.在 V 中定义了一种运算,称为加法,即对 V 中任意两个元素 α 与 β 都按某一法则对应于 V 内惟一确定的一个元素 $\alpha+\beta$,称为 α 与 β 的和.

2.在 P 与 V 的元素间定义了一种运算,称为纯量乘法(亦称数量乘法),即对 V 中任意元素 α 和 P 中任意元素 k,都按某一法则对应 V 内惟一确定的一个元素 $k\alpha$,称为 k 与 α 的积.

3.加法与纯量乘法满足以下条件:

1)$\alpha+\beta=\beta+\alpha$,对任意 $\alpha,\beta\in V$.

2)$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$,对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V$.

3)存在一个元素 $0\in V$,对一切 $\alpha\in V$ 有 $\alpha+0=\alpha$,元素 0 称为 V 的零元.

4)对任一 $\alpha\in V$,都存在 $\beta\in V$ 使 $\alpha+\beta=0$,β 称为 α 的负元素,记为 $-\alpha$.

5)对 P 中单位元 1,有 $1\alpha=\alpha(\alpha\in V)$.

6)对任意 $k,l\in P,\alpha\in V$ 有$(kl)\alpha=k(l\alpha)$.

7)对任意 $k,l\in P,\alpha\in V$ 有$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

8)对任意 $k\in P,\alpha,\beta\in V$ 有 $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$,

则称 V 为域 P 上的一个线性空间,或向量空间.V 中元素称为向量,V 的零元称为零向量,P 称为线性空间的基域.当 P 是实数域时,V 称为实线性空间.当 P 是复数域时,V 称为复线性空间.例如,若 V 为三维几何空间中全体向量(有向线段)构成的集合,P 为实数域 $\mathbb{R}$,则 V 关于向量加法(即平行四边形法则)和数与向量的乘法构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.又如,若 V 为数域 P 上全体 $m\times n$ 矩阵组成的集合 $M_{mn}(P)$,V 的加法与纯量乘法分别为矩阵的加法和数与矩阵的乘法,则 $M_{mn}(P)$是数域 P 上的线性空间.V 中向量就是 $m\times n$ 矩阵.再如,域 P 上所有 n 元向量$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$构成的集合 P^n 对于加法:$(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$与纯量乘法:$\lambda(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)$构成域 P 上的线性空间,称为域 P 上 n 元向量空间.

向量空间(vector space)　即"线性空间".

向量(vector)　见"线性空间".

零向量(zero vector)　见"线性空间".

基域(basic field)　见"线性空间".

实线性空间(real linear space)　见"线性空间"

复线性空间(complex linear space)　见"线性空间"

纯量乘法(scalar multiplication)　见"线性空间".

数量乘法(scalar multiplication)　见"线性空间".

***n* 元向量空间**(vector space of n-tuple vector)　见"线性空间".

线性组合(linear combination)　线性代数的基本概念之一. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 1)$是域 P 上线性空间 V 中的有限个向量. 若 V 中向量 α 可以表示为

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$
$$(k_i \in P, i = 1,2,\cdots,s),$$

则称 α 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个线性组合,亦称 α 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示或线性表出. 例如,在三维线性空间 P^3中,向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$可由向量组 $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(0,1,0),\alpha_3=(0,0,1)$线性表出:$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3$. 又设$\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是域 P 上线性空间 V 中无限多个向量组成的向量组,若 V 中的向量 α 可以表示为

$$\alpha = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\alpha_\lambda \ (a_\lambda \in P, \Lambda \text{ 为下标集}),$$

但除有限个 λ 外,$a_\lambda=0$,则称 α 为向量组$\{\alpha_\lambda\}$的线性组合,或者称 α 可由向量组$\{\alpha_\lambda\}$线性表示(出).

线性表示(linear expression)　见"线性组合".

线性表出(linear expression)　见"线性组合".

等价向量组(equivalent vector system)　线性代数的基本概念之一. 可互相线性表出的向量组. 若线性空间 V 的向量组 Ⅰ 中的每个向量都可由 V 中向量组 Ⅱ 线性表出,并且向量组 Ⅱ 中的每个向量也可由向量组 Ⅰ 线性表出,则称向量组 Ⅰ 与向量组 Ⅱ 等价. 等价向量组有下列性质:

1. 自反性:每一向量组都与自身等价.

2. 对称性:若向量组 Ⅰ 与向量组 Ⅱ 等价,则向量组 Ⅱ 也与 Ⅰ 等价.

3. 传递性:若向量组 Ⅰ 与向量组 Ⅱ 等价,并且向量组 Ⅱ 与向量组 Ⅲ 等价,则向量组 Ⅰ 与向量组 Ⅲ 等价.

线性相关(linear dependence)　向量间的一种基本关系. 设 V 是域 P 上的线性空间,$\alpha_i\in V$ $(i=1,2,\cdots,s)$. 若存在 P 中 s 个不全为零的元素 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使等式 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 成立,则称向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关;否则,称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. 换言之,若仅在 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 全为零时,才有

$$\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i = 0,$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. 单独一个零向量是线性相关的;单独一个非零向量是线性无关的. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是其中有一向量 α_j 可由其余 $s-1$ 个向量线性表示. 对 V 中无限多个向量组成的向量组$\{\alpha_\lambda\},\lambda\in\Lambda$,若$\{\alpha_i\}$中存在一些向量是线性相关,则称此向量组线性相关;若向量组$\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$中任意有限个向量的向量组线性无关,则称此向量组$\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$线性无关.

线性无关(linear independence)　见"线性相关".

替换定理(substitution theorem)　线性代数的基本定理. 在线性空间 V 中给出两个有限向量组:

1. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$;

2. $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$.

若向量组 1 线性无关,并且向量组 1 中的每个向量 α_i 都可由向量组 2 线性表示,则 $r\leqslant s$,而且可以对向量组 2 中的向量重新排列,使得用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 替换重新排列之后的前 r 个向量后,所得的向量组与向量组 2 等价. 此即替换定理.

线性空间的维数(dimension of a linear space)　对线性空间的重要刻画. 即线性空间中线性无关向量的最大个数. 若域 P 上的线性空间 V 中存在 n 个线性无关的向量,而任意 $n+1$ 个向量都是线性相关的,则称 V 是 n 维线性空间,数 n 称为它的维数,记为 $\dim V=n$. 例如,由域 P 上全体 m 阶(方)矩阵组成的集合$M_{m\times m}(P)$是域 P 上 m^2 维线性空间,也记为 $P^{m\times m}$. 只含零向量的零空间的维数规定为零. 零维与 n 维线性空间统称为有限维线性空间. 若在 V 中可以找到任意多个线性无关的向量,则称 V 为无限维的. 例如,P 上全体一元多项式集合 $V=P[x]$ 是 P 上的无限维线性空间.

***n* 维线性空间**(n-dimensional linear space)　见"线性空间的维数".

零维线性空间(zero-dimensional linear space)　见"线性空间的维数".

有限维线性空间(finite-dimensional linear space)　见"线性空间的维数".

无限维线性空间(infinite-dimensional linear space)　见"线性空间的维数".

线性空间的基(basis of a linear space)　对线性空间的重要刻画. 即生成线性空间的线性无关的向量组. 域 P 上线性空间 V 中的向量组$\{\alpha_i\}_{i\in I}$称为线性空间 V 的一个基或基底. 若它满足条件:

1. $\{\alpha_i\}_{i\in I}$中任意有限个向量都线性无关.

2. V 中任一向量 α 都是$\{\alpha_i\}$中有限个向量的线性组合.

基底中所含向量个数即线性空间的维数. 向量 α 由基底线性表出的式子

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i$$

中的 a_i 称为 α 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的第 i 个坐标或第 i 个分量. 全体分量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为 α 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的坐标. V 中向量 α 的坐标由 α 自身与基底惟一确定. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的基底的充分必要条件是 V 中每一向量可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 惟一地线性表出. 对无限维线性空间 V,若 V 中每一向量皆可由 $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 惟一地线性表出,则称 $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 V 的基.

向量的坐标(coordinates of a vector) 见"线性空间的基".

基底(basis) 见"线性空间的基".

坐标变换公式(coordinate transformation formula) 解析几何中(不变原点的)坐标变换公式的推广. 设 V 是域 P 上 n 维线性空间,且 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 皆是 V 的基. 于是有

$$\varepsilon'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\varepsilon_j \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

以 ε'_i 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的坐标 $(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})$ 为第 i 列构成的 n 阶矩阵 (a_{ij}) 称为由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 的过渡矩阵. 若 $\alpha\in V$ 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 的坐标分别为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$,则其两坐标间的关系,可由过渡矩阵 (a_{ij}) 表示为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_{ij}) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

上式称为坐标变换公式.

过渡矩阵(transition matrix) 见"坐标变换公式".

极大线性无关组(maximal linearly independent system) 线性空间的基对向量集的推广. 设 V 是域 P 上的线性空间,S 是 V 的子集. 若 S 的一部分向量线性无关,但在这部分向量中,加上 S 的任一向量后都线性相关,则称这部分向量是 S 的一个极大线性无关组. V 中子集的极大线性无关组不是惟一的,例如,V 的基都是 V 的极大线性无关组. 它们所含的向量个数(基数)相同. V 的子集 S 的极大线性无关组所含向量的个数(基数),称为 S 的秩. 只含零向量的子集的秩是零. V 的任一子集都与它的极大线性无关组等价. 特别地,当 S 等于 V 且 V 是有限维线性空间时,S 的秩就是 V 的维数.

向量子集的秩(rank of a vector subset) 见"极大线性无关组".

线性子空间(linear subspace) 线性空间中部分向量组成的线性空间. 设 W 是域 P 上的线性空间 V 的一个非空子集合,若对于 V 中的加法及域 P 与 V 的纯量乘法构成域 P 上的一个线性空间,则称 W 为 V 的线性子空间,或简称子空间. V 的非空子集 W 是子空间的充分必要条件是:

1. 子集合 W 的任意两个向量 α 与 β 之和 $\alpha+\beta$ 仍是 W 的向量.

2. 域 P 的任一数 k 与子集合 W 的任意一个向量 α 的积仍是 W 的向量.

线性空间 V 自身与单独一个零向量都是 V 的线性子空间. 这两个特殊的子空间称为 V 的平凡子空间;除平凡子空间外的线性子空间称为 V 的真子空间.

平凡子空间(trivial subspace) 见"线性子空间".

真子空间(proper subspace) 见"线性子空间".

生成子空间(generated subspace) 一种特殊的子空间. 域 P 上线性空间 V 的任一子集 M 中向量的所有线性组合构成 V 的子空间,称为由 M 生成的子空间,记为 $L(M)$,称 M 为 $L(M)$ 的生成集(系). 任一含 M 的子空间必含 $L(M)$,即 $L(M)$ 是含 M 的最小子空间.

生成集(generating set) 见"生成子空间".

生成系(generating system) 见"生成子空间".

子空间的和(sum of subspaces) 子空间的一种运算. 设 V 是域 P 上的线性空间,$V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是 V 的子空间,若

$$S=\{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s \mid \alpha_i\in V_i, i=1,2,\cdots,s\},$$

则 S 是 V 的子空间,称为子空间 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 的和,记为 $V_1+V_2+\cdots+V_s$;子空间 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 的集合交 $V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_s$ 也是 V 的子空间,称为 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 的交. 设 $\dim V=n$,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的基,若 V_1 是 V 的子空间,则 $\dim V_1\leqslant n$. 当 $\dim V_1<n$,及 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_m$ 为 V_1 的基时,必存在 $\varepsilon'_{m+1},\cdots,\varepsilon'_n$ 使 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 为 V 的基. 由 $\varepsilon'_{m+1},\cdots,\varepsilon'_n$ 生成的子空间 V_2 称为 V_1 的余子空间(或补子空间). V_1 与它的余子空间 V_2 的和 $V_1+V_2=V$,它们的交 $V_1\cap V_2=\{0\}$,此时,又称 V 为 V_1 与 V_2 的直和.

子空间的交(intersection of subspaces) 见"子空间的和".

补子空间(complementary subspace) 见"子空间的和".

余子空间(complementary subspace) 见"子空间的和".

独立于一组基的子空间(subspace independing on a basis) 一种特殊的子空间. 设 V 是域 P 上的

$n(>0)$维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基，简记为 $B(\varepsilon)$. 若 W 是 V 的 r 维子空间，$0<r<n$，且 $\varepsilon_i \notin W$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则称 W 是 V 的独立于基$B(\varepsilon)$的子空间，简称 W 是具性质 Q 的子空间. 取 $a\in P$，$a\neq 0$，若记 $W(a)=L(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_{r-1}+\varepsilon_r,\varepsilon_r+a\varepsilon_{r+1})$，则 $W(a)$就是 V 的一个独立于基 $B(\varepsilon)$的子空间. 若 $a,b\in P$，$a\neq b$，则 $W(a)\neq W(b)$. 从而，有定理：若 P 是无限域，M_Q 是独立于基 $B(\varepsilon)$的所有 r 维子空间组成的集合，则 $|M_Q|=|P|$. 即集合 M_Q 与 P 的基数相等. 当性质 Q 是其他内容时，定理的结论仍然成立. 例如，Q 为下列两项：

1. $0<r<n$，W 是 V 的 r 维子空间.

2. $0<k<n$，U 是 V 的 k 维子空间，W 是 U 在 V 中的余子空间.

Q 是某种规定性，W 是 V 的具有性质 Q 的子空间，对于一般的性质 Q，猜想：$|M_Q|=|P|$，其中 P 是无限域，M_Q 是所有具有性质 Q 的子空间 W 所组成的集合.

具有性质Q 的子空间(subspace with a property Q) 见“独立于一组基的子空间”.

子空间的直和(direct sum of subspaces) 亦称子空间的直接和. 子空间的一种特殊运算. 设 V_1，V_2 是线性空间 V 的两个子空间，若和空间 V_1+V_2 中每个向量 α 都能惟一地分解为形式：

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2 \quad (\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2),$$

则称和 V_1+V_2 为直和，记为 $V_1\oplus V_2$. 对于线性空间 V 的两个子空间 V_1,V_2，下列命题是等价的：

1. V_1+V_2 是直和.

2. 零向量的表示法惟一，即 $\alpha_1+\alpha_2=0(\alpha_1\in V_1$，$\alpha_2\in V_2)$，当且仅当 α_1,α_2 为零向量时成立，即零向量的表示法惟一.

3. V_1 与 V_2 的交 $V_1\cap V_2=\{0\}$.

4. $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$.

多个子空间的直和，可以类似地定义，并且对多个子空间的直和也有相应于上述 1—4 的等价命题，但对多个子空间，上述命题 3 需改写为

$$V_i\cap \sum_{j\neq i}V_j=0 \quad (i=1,2,\cdots,s).$$

子空间的直接和(direct sum of subspaces) 即“子空间的直和”.

维数公式(dimension formula) 两子空间的维数之间的关系式. 设 V_1,V_2 是 n 维线性空间 V 的两个线性子空间，则 V_1 与 V_2 的维数满足下面的公式：子空间 V_1 与 V_2 的维数之和等于和空间 V_1+V_2 的维数与交空间 $V_1\cap V_2$ 的维数和. 即

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).$$

特别地，当 V_1+V_2 是直和时，此公式变为

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2).$$

商空间(quotient space) 一个线性空间模一个子空间所得的线性空间. 设 V 是域 P 上的线性空间，W 是 V 的子空间，对 V 中每一元 α，定义 $\alpha+W=\{\alpha+\beta\mid\beta\in W\}$，设 $\overline{V}=\{\alpha+W\mid\alpha\in V\}$，利用 V 的加法及 P 与 V 的纯量乘法，可以在$\overline{V}$ 内引入如下的加法及 P 与 $\overline{V}$ 的纯量乘法：

$$(\alpha+W)+(\beta+W)=(\alpha+\beta)+W,$$
$$k(\alpha+W)=k\alpha+W \quad (k\in P).$$

这样的定义是完全确定的，而且 $\overline{V}$ 关于这样定义的运算构成域 P 上的一个线性空间，称为 V 对子空间 W 的商空间，记为 V/W. 例如，若 V 是 P 上 5 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 是基，W 是由 α_1,α_2 生成的子空间，则 V/W 是由三个元素 $\alpha_3+W,\alpha_4+W,\alpha_5+W$ 生成的商空间，而且这三个元素正好是 V/W 的基. 一般地，若 $\dim V/W$ 有限，则称其为 W 关于 V 的余维数，记为 $\operatorname{Codim} W$.

余维数(codimension) 见“商空间”.

卡氏积空间(Cartesian product space) 由一些线性空间按 n 维向量的办法构作的线性空间. 若 V_i 是域 P 上的线性空间，$i=1,2,\cdots,m$，则集合

$$X=\{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\mid\alpha_i\in V_i,i=1,2,\cdots,m\}$$

对加法：$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)+(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_m+\beta_m)$与纯量乘法：$\lambda(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\cdots,\lambda\alpha_m)$，$\lambda\in P$ 构成 P 上的线性空间，称为线性空间 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 的卡氏积空间，记为 $V_1\times V_2\times\cdots\times V_m$，简记为 $\overset{m}{\underset{1}{\times}}V_i$.

线性映射(linear mapping) 亦称同态或线性同态. 线性代数的中心内容和基本概念之一. 是同一域上两个线性空间 V 与 W 之间具有线性性质的映射，即 V 到 W 的映射 φ，若对任意 $\alpha,\beta\in V$，$k\in P$，满足条件：

1. $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$；

2. $\varphi(k\alpha)=k\varphi(\alpha)$；

则称 φ 为 V 到 W 的线性映射，或称为线性算子. 把 V 中每一元素映射成 W 中零元素的映射是线性映射，称为零映射. 若 φ 是双射，则称 φ 为 V 与 W 的线性同构，同时称 φ 为线性空间的同构映射. 建立了线性同构的两个线性空间，称为同构的线性空间. 当 $W=P$ 时，V 到 P 的线性映射也称为线性函数.

域 P 上线性空间 V 到 W 的全体线性映射的集合，记为 $\operatorname{Hom}_P(V,W)$. 在 $\operatorname{Hom}_P(V,W)$中可以引入加法与纯量乘法，若对任意的 $\varphi,\psi\in\operatorname{Hom}_P(V,W)$，任意 $\alpha\in V$，$k\in P$，规定：

$$\varphi+\psi:\ (\varphi+\psi)(\alpha)=\varphi(\alpha)+\psi(\alpha),$$
$$k\varphi:\ (k\varphi)(\alpha)=k\varphi(\alpha),$$

则 $\operatorname{Hom}_P(V,W)$构成域 P 上的线性空间.

线性同态(linear mapping) 即“线性映射”.

线性算子(linear operator) 见“线性映射”.

零映射(zero mapping) 见“线性映射”.

线性空间的同构映射(isomorphism mapping of linear spaces) 见“线性映射”.

同构的线性空间(isomorphic linear spaces) 见“线性映射”.

线性函数(linear function) 见“线性映射”.

线性映射的值域(range domain of a linear mapping) 线性映射的像. 设 σ 是域 P 上线性空间 V 到 W 的一个线性映射, V 中所有元素在 σ 下的像所成的集合 $\sigma(V)$(也记为 $\mathrm{Im}\sigma$)构成 W 的线性子空间,称为 σ 的像空间,或 σ 的值域. 在线性映射 σ 下 V 中以零向量为像的全体向量组成的集合 $\sigma^{-1}(0)$(也记为 $\ker\sigma$)构成 V 的线性子空间,称为 σ 的核. 当 V 是 n 维线性空间时,值域为基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的像 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$生成的子空间,其维数称为线性映射 σ 的秩;核的维数称为 σ 的零度. σ 的秩与零度的和等于 V 的维数. $\sigma(V)$与商空间 $V/\sigma^{-1}(0)$是同构的.

像空间(image space) 见“线性映射的值域”.

线性映射的核(kernel of a linear mapping) 见“线性映射的值域”.

线性映射的秩(rank of a linear mapping) 见“线性映射的值域”.

线性映射的零度(nullity of a linear mapping) 见“线性映射的值域”.

对偶空间(dual space) 一种特殊的线性空间. 即线性空间的线性函数空间. 设 V 是域 P 上的线性空间, V 的所有线性函数构成的域 P 上的线性空间,称为 V 的对偶空间,记为 V^*(即$\mathrm{Hom}_P(V,P)$). 当 $\dim V=n$,并且 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的基时,由等式 $\varepsilon_i^*(\varepsilon_j)=\delta_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$所确定的 n 个线性函数 $\varepsilon_1^*,\varepsilon_2^*,\cdots,\varepsilon_n^*$ 是 V^* 的基,称为基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基. 由上知,当 $\dim V=n$ 有限时, $\dim V^*=\dim V=n$;但当 $\dim V$ 无限时,二者不再相等,即它们的基元素不再是一一对应的.

对偶基(dual basis) 见“对偶空间”.

对偶原理(principle of duality) 关于对偶空间的结论. 指有限维线性空间的二次对偶空间可对等于原空间的原理. 设 V 是域 P 上的 n 维线性空间, V^* 是 V 的对偶空间, V^{**} 是 V^* 的对偶空间. 对 V 中每一向量 α,设 $\alpha\to\alpha^{**}\in V^{**}$,其中 $\alpha^{**}(\beta^*)=\beta^*(\alpha)$, β^* 是 V^* 中任意向量,这一映射是 V 与 V^{**} 的同构映射,并且 V^{**} 中的每一元素 α^{**} 由且仅由 V 中某一元素 $\alpha\in V$ 给出,因此, V^{**} 可以看成与 V 是一样的,这就是对偶原理.

对偶映射(dual mapping) 亦称转置映射. 一种特殊的线性映射. 设 φ 是域 P 上线性空间 V_1 到 V_2 的线性映射,对每个 $\alpha^*\in V_2^*$(V_2 的对偶空间)由等式 $\varphi^*(\alpha^*)=\alpha^*\varphi$确定的 φ^* 是 V_2^* 到 V_1^* 的线性映射,称为 φ 的对偶映射. 若 φ 是满射,则 φ^* 是单射;若 φ 是单射,则 φ^* 是满射. 当 φ 的秩有限时, φ^* 的秩与 φ 的秩相等;当 φ 是同构映射时, $(\varphi^*)^{-1}$称为 V_1^* 与 V_2^* 的逆步映射.

转置映射(transposed mapping) 即“对偶映射”.

逆步映射(contragradient mapping) 见“对偶映射”.

线性变换(linear transformation) 一种特殊的线性映射. 设 V 是域 P 上的线性空间, $\mathrm{Hom}_P(V,V)$中的元素,即 V 到 V 的线性映射,称为 V 的线性变换. 使 V 中每一元素的像仍为自身的变换,是 V 的一种线性变换,称为恒等线性变换,或单位线性变换; $\mathrm{Hom}_P(V,V)$ 中的零元,称为零变换; $\mathrm{Hom}_P(V,V)$中有逆变换的线性变换,称为可逆的. 若 σ 是可逆线性变换,则其逆变换亦为线性变换,称为 σ 的逆变换,记为 σ^{-1}. 取定 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 后, $\mathrm{Hom}_P(V,V)$的运算与结构可用矩阵作为工具来刻画.

恒等变换(identity transformation) 见“线性变换”.

单位变换(unit transformation) 见“线性变换”.

零变换(zero transformation) 见“线性变换”.

可逆变换(invertible transformation) 见“线性变换”.

逆变换(inverse transformation) 见“线性变换”.

全线性变换代数(algebra of total transformations) 线性空间上全体线性变换所成的代数. 设 V 是域 P 上的线性空间,若以映射的合成作为 $\mathrm{Hom}_P(V,V)$的乘法,则 P 上线性空间 $\mathrm{Hom}_P(V,V)$ 是 P 上的代数,称为 V 上的全线性变换代数. 设 $\sigma\in\mathrm{Hom}_P(V,V)$,若 $\sigma^2=\sigma$,则称 σ 为幂等变换,或射影变换;若 $\sigma^m=0$,则称 σ 为幂零变换;若 $\sigma^m=E$,则称 σ 为幂单变换,或幂幺变换. 特别地,当 $m=2$ 时,幂单变换 σ 亦称对合变换. 当 V 是域 P 上 n 维线性空间时,全线性变换代数 $\mathrm{Hom}_P(V,V)$与全阵代数 $M_n(P)$同构.

幂幺变换(unipotent transformation) 见“全线性变换代数”.

幂等变换(idempotent transformation) 见“全线性变换代数”.

幂零变换(nilpotent transformation) 见“全线

性变换代数”.

幂单变换(unipotent transformation) 见“全线性变换代数”.

对合变换(involution transformation) 见“全线性变换代数”.

射影变换(projective transformation) 见“全线性变换代数”.

非奇异线性变换(nonsingular linear transformation) 一类重要的线性变换. 即可逆的线性变换. 设 V 是域 P 上的线性空间,$\sigma\in \mathrm{Hom}_P(V,V)$,若存在 $\lambda\in \mathrm{Hom}_P(V,V)$,使 $\lambda\sigma=E$(单位线性变换),则称 σ 为非奇异线性变换;否则,称为奇异的. 当 $\dim V=n$ 时,非奇异线性变换亦称为非退化线性变换,或满秩线性变换,或正则线性变换. 在 $\dim V=n$ 的条件下,σ 是可逆的充分必要条件为 σ 是非奇异的,因此,在有限维的条件下也可以说非奇异线性变换就是可逆线性变换.

非退化线性变换(nondegenerate linear transformation) 见“非奇异线性变换”.

奇异线性变换(singular linear transformation) 见“非奇异线性变换”.

满秩线性变换(full rank linear transformation) 见“非奇异线性变换”.

正则线性变换(regular linear transformation) 见“非奇异线性变换”.

域上的矩阵(matrix over a field) 实矩阵与复矩阵概念的推广. 若 P 为一个域,$a_{ij}\in P$ $(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$,则称

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}$$

为 P 上的 m 行、n 列的矩阵,也称为 P 上的 $m\times n$ 矩阵,记为 $A\in P^{m\times n}$ 或 $A\in M_{m\times n}(P)$. 当 $m=n$ 时又称 A 为 P 上的 n 阶方阵. 若 $a_{ij}=0$ $(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$,则称 A 为 P 上的 $m\times n$ 零矩阵;若 $m=n$ 且 $a_{ii}=1$ $(i=1,2,\cdots,n,a_{ij}=0,\forall\ i\neq j)$,则称 A 为 n 阶单位方阵,常记为 I_n 或 E_n. 在矩阵 A 中,称 $(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ 为 A 的第 i 个行向量,而称 $(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^T$($T$ 表示转置)为 A 的第 j 个列向量;若 $B=(b_{ij})_{n\times m}\in P^{n\times m}$ 满足 $b_{ij}=a_{ji}$ $(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$,则 B 称为 A 的转置矩阵,常记为 $B=A^T$ 或 $B=A'$. 若 $A=A^T$(此时一定有 $m=n$,即 A 为 n 阶方阵),则称 A 为 P 上的 n 阶对称矩阵. 在 P 的特征数 $\mathrm{ch}P\neq 2$ 时,若 $A=-A^T$(此时仍有 $m=n$),则称 A 为 P 上的 n 阶反对称矩阵,这里 $-X$ 在一般的情况下表示矩阵 $X=(x_{ij})_{m\times n}$ 的负矩阵,即 $-X=(-x_{ij})_{m\times n}$. 域 P 上的矩阵在 P 上的线性方程组理论与 P 上线性空间的线性变换理论中起着与实(复)数域上相应理论中同样的作用. 上述定义与结果都可推广到交换环上.

n 阶方阵(matrix of order n) 见“域上的矩阵”.

n 阶单位方阵(identity matrix of order n) 见“域上的矩阵”.

零矩阵(zero matrix) 见“域上的矩阵”.

转置矩阵(transposed matrix) 见“域上的矩阵”.

对称矩阵(symmetric matrix) 见“域上的矩阵”.

反对称矩阵(skew symmetric matrix) 见“域上的矩阵”.

域上矩阵的秩(rank of a matrix over fields) 数域上矩阵的秩的推广. 若 A 为域 P 上的 $m\times n$ 矩阵,m 个行向量中线性无关向量的最大数为 r_1,n 个列向量中线性无关向量的最大数为 r_2,则 $r_1=r_2$. 这个公共值称为 A 的秩,记为 $\mathrm{rank}\,A$. 由此定义知,$\mathrm{rank}\,A\leqslant\min(m,n)$;$\mathrm{rank}\,A=0$ 的充分必要条件是 $A=0$. 当 $m=n$ 时,若 $\mathrm{rank}\,A=n$,则称 A 为满秩矩阵或非异矩阵.

满秩矩阵(full rank matrix) 见“域上矩阵的秩”.

非异矩阵(nonsingular matrix) 见“域上矩阵的秩”.

域上矩阵的运算(operations of matrices over field) 数域上矩阵运算的推广. 域 P 上矩阵的运算与实(复)矩阵运算的定义相同. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{m\times n}\in P^{m\times n}$,规定 $A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$(即对应元素相加(减)). 对任意的 $\lambda\in P$,规定 $\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}=A\lambda$(即以 λ 乘 A 的一切元素). 设 $C=(c_{ij})_{p\times q}\in P^{p\times q}$,仅当 $n=p$ 时定义

$$AC=\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_{ik}c_{kj}\Big)_{m\times q}$$

(即以 A 的第 i 行元素分别对应地乘 C 的第 j 列元素,求和后作为 AC 的 (i,j) 元素). 值得注意的是:$A\neq 0,C\neq 0$ 时仍可能有 $AC=0$. 且一般地,当 $C\in P^{n\times m}$ 时 $AC=CA$ 未必成立. 但当相应的运算有定义时,矩阵的运算有下述规律:

$$A+B=B+A;$$
$$A+(B+C)=(A+B)+C;$$
$$A(\lambda B_1+\mu B_2)=\lambda AB_1+\mu AB_2;$$
$$(\lambda A_1+\mu A_2)B=\lambda A_1B+\mu A_2B,$$

其中 $\lambda,\mu\in P$;$A(BC)=(AB)C$;$(AB)^T=B^TA^T$;$(A+B)^T=A^T+B^T$;$(\lambda A)^T=\lambda A^T$. $P^{n\times n}$ 对上述运算成一环(事实上还是 P 代数),称为 P 上的 n 阶

全阵环.

n 阶全阵环($n\times n$ full matrix ring)　见"域上矩阵的运算".

域上矩阵的逆矩阵(inverse matrix of a matrix over field)　数域上逆矩阵的推广. 若 $A\in P^{n\times n}$,则 $\operatorname{rank} A=n$ 的充分必要条件是有 $X\in P^{n\times n}$ 使 $AX=XA=I_n$,此时称 X 为 A 的逆矩阵,A 又称为可逆矩阵,并记 $X=A^{-1}$,并且必有 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$. 当 $B\in P^{n\times n}$ 也有逆矩阵时,$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. 特别地,若 $0\neq a\in P$,则 $(aA)^{-1}=a^{-1}A^{-1}$. $P^{n\times n}$ 中全体可逆矩阵对乘法成一群(非交换群),称为 P 上的 n 阶一般线性群,记为 $\mathrm{GL}_n(P)$. 上述定义与结果都可推广到交换环上.

可逆矩阵(invertible matrix)　见"域上矩阵的逆矩阵".

域上矩阵的行列式(determinant of a matrix over a field)　实(复)矩阵的行列式定义的推广. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in P^{n\times n}$,定义

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)},$$

其中 S_n 表 n 元置换全体,

$$\varepsilon_\sigma=\begin{cases}1 & (\sigma \text{ 为偶置换}),\\ -1 & (\sigma \text{ 为奇置换}),\end{cases}$$

称 $\det A$ 为矩阵 A 的行列式,有时也记为 $|A|$. $\det A\neq 0$ 等价于 A 为可逆矩阵. 行列式有下述基本性质:

1. 将 A 的一行(列)加上另一行(列)的 a 倍,$a\in P$,新旧矩阵行列式值相等.
2. 交换 A 的两行(列)后,新旧矩阵的行列式之值差一个 (-1) 因子.
3. $\det A=\det A^T$.
4. 若 $B\in P^{n\times n}$,则 $\det(AB)=\det A\det B$.
5. 若 A 可逆,则 $\det(A^{-1})=(\det A)^{-1}$.
6. 若

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & A_3\\ 0 & A_2\end{pmatrix},$$

A_1 为方阵,则 $\det A=\det A_1\det A_2$.

域上的线性方程组(system of linear equations over a field)　数域上线性方程组的推广. 对未知量 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 与域 P,形如

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\qquad(1)$$

(其中,$a_{ij},b_j\in P,i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$)的方程组称为域 P 上关于 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程组. $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 称为此方程组的常数项. $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时,又称方程组(1)为齐次线性方程组. $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为此方程组的系数矩阵;$m\times(n+1)$ 矩阵

$$(A\ b)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}$$

称为此方程组的增广矩阵. 若记 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$,则线性方程组(1)可用矩阵乘法表为

$$AX=b\qquad(1)'$$

的形式. 当 $b=\theta=(0,0,\cdots,0)^T$ 时,又称(1)为"齐次线性方程组",或称为(1)对应的齐次线性方程组. 当且仅当 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(A\ b)$ 时方程组(1)有解. 通常可对增广矩阵 $(A\ b)$ 做初等行变换(即将它的某一行元素乘以 P 中元素后加到另一行上,或将它的某一行元素都乘以 P 中的一个非零元,或由上两种变换复合而成的两行互换)以确定方程组(1)有解或无解,在(1)有解时,也可以由此求出(1)的一切解来. 当 $m=n$ 且 $\det A\neq 0$ 时,也可用如下的克莱姆法则表出(1)的惟一解:

$$x_j=\frac{\det\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{m,j-1} & b_n & a_{m,j+1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}}{\det A}$$

$$(j=1,2,\cdots,n).$$

齐次线性方程组(homogeneous system of linear equations)　见"域上的线性方程组".

系数矩阵(coefficient matrix)　见"域上的线性方程组".

增广矩阵(augmented matrix)　见"域上的线性方程组".

克莱姆法则(Cramer's rule)　见"域上的线性方程组".

基础解系(system of fundamental solutions)　齐次线性方程组的一种基本解. 域 P 上的齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

$(a_{ij}\in P)$ 的解都是 P 上的 n 元向量,它们对向量运算构成 P 上的一个线性空间,称为这个齐次线性方程组的解空间. 这个线性空间的任一组基底都称为

这个齐次线性方程组的基础解系. 求齐次线性方程组的解可归结为求它的基础解系，通常可对其系数矩阵用初等行变换求出.

解空间(solution space)　见“基础解系”.

域上矩阵的特征多项式(characteristic polynomial of a matrix over fields)　实(复)矩阵特征多项式概念的推广. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in P^{n\times n}$，称

$$\varphi(\lambda)=\varphi_A(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)$$

为 A 的特征多项式，$\varphi(\lambda)=0$ 又称为 A 的特征方程，它的根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(在域 P 的代数闭包内，未必在 P 中)称为 A 的特征根(值). 线性方程组 $(\lambda_j I_n-A)X=0$(即 $AX=\lambda_j X$)的非零解向量称为 A 对应于特征根 λ_j 的特征向量. $\varphi(\lambda)$的展开式必可表为 $\varphi(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$，$a_j\in P$. 其中 $a_1=-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})=-\operatorname{tr}A$($\operatorname{tr}A$ 称为 A 的迹)；$a_n=(-1)^n\det A$. 若 $f(x)=f_0x^m+f_1x^{m-1}+\cdots+f_n\in P[x]$，则 $f(A)\equiv f_0A^m+f_1A^{m-1}+\cdots+f_nI_n$ 的特征根为 $f(\lambda_j)$ $(j=1,2,\cdots,n)$. 特别地，A^k 的特征根为 λ_j^k $(j=1,2,\cdots,n)$. 当 A^{-1}存在时，A^{-1}的特征根必为 λ_j^{-1} $(j=1,2,\cdots,n)$. 将 A 代入其特征多项式$\varphi_A(\lambda)$(换 λ 为 A，常数项 a_n 改为 a_nI_n)必得零矩阵，即 $\varphi_A(A)=0$. 此即哈密顿-凯莱定理.

域上矩阵的特征方程(characteristic equation of a matrix over a field)　见“域上矩阵的特征多项式”.

域上矩阵的特征根(eigenvalues of a matrix over a field)　见“域上矩阵的特征多项式”.

域上矩阵的特征向量(eigenvectors of a matrix over a field)　见“域上矩阵的特征多项式”.

哈密顿-凯莱定理(Hamilton-Cayley theorem)　见“域上矩阵的特征多项式”.

线性变换的矩阵(matrix of a linear transformation)　线性变换在一组基下对应的矩阵. 设 V 是域 P 上的 n 维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基，σ 是 V 的线性变换，若

$$\sigma(\varepsilon_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\varepsilon_j\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

则以 $\sigma(\varepsilon_i)$的坐标为第 i 列构成的 n 阶矩阵(a_{ij})，称为 σ 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的矩阵，常简记为

$$\sigma\xrightarrow{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}A,$$

并简称 A 为线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵，其秩与 σ 的秩相同. 同一线性变换关于不同基的矩阵相似. 若

$$\sigma_i\xrightarrow{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}A_i\quad(i=1,2),$$

则有如下对应：

1. $\sigma_1+\sigma_2\xrightarrow{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}A_1+A_2$.

2. $\sigma_1\sigma_2\xrightarrow{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}A_1A_2$.

3. $\lambda\sigma_1\xrightarrow{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}\lambda A_1$.

4. σ_1 可逆的充分必要条件是 A_1 可逆，且

$$\sigma_1^{-1}\xrightarrow{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}A^{-1}.$$

5. 对$\forall\ \alpha\in V$，若 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$，则

$$\sigma_1(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i,$$

其中

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=A_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

对两个线性空间之间的线性映射，也可用类似的方法(两个线性空间各取定一组基)找出它对应的矩阵. 当这两个线性空间的维数不相等时这个矩阵不再是方阵，即行数列数不再相同. 对加法与数乘的上述对应 1 和 3 这里仍是成立的，上述对应 5 也是成立的.

半线性映射(semilinear mapping)　线性映射概念的推广. 设 V 与 V'分别是域 P 与 P'上的线性空间，ρ 为 P 与 P'的同构，若 V 与 V'的映射 φ 满足条件：

1. 对任意 $\alpha,\beta\in V$ 有 $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$；

2. 对任意 $\alpha\in V,a\in P$ 有 $\varphi(a\alpha)=a^{\rho}\varphi(\alpha)$；

则称 φ 为关于 ρ 的半线性映射，其中 a^{ρ} 表示 $\rho(a)$. 当 $V=V'$，$P=P'$时，φ 称为半线性变换. 当 $P=P'$且 ρ 是恒等同构时，φ 就是线性映射.

半线性变换(semilinear transformation)　见“半线性映射”.

不变子空间(invariant subspace)　亦称稳定子空间. 一类重要的子空间. 设 σ 是域 P 上线性空间 V 的一个线性变换，W 是 V 的子空间，若 W 在 σ 下的像空间 $\sigma(W)$是 W 的子集合，即对于 W 中的任一向量 ξ 在 σ 下的像$\sigma(\xi)$仍是 W 的向量，则称 W 是 σ 的不变子空间，简称 σ 子空间. V 的平凡子空间，σ 的值域与核以及 σ 的特征子空间，都是 σ 的不变子空间. 若只考虑 σ 在其不变子空间 W 上的作用，则得出 W 的一个线性变换，称为 σ 在 W 上的导出线性变换(或 σ 在 W 上的限制)，记为 $\sigma|_W$. 若 V 中元素 $\xi\in W$，则 $\sigma|_W(\xi)$无意义. 上述 σ 的不变子空间 W 必为 V 的直和项，即有 P 上的线性空间 U 使

$$V=W\oplus U.$$

稳定子空间(stable subspace)　即“不变子空间”.

导出线性变换(induced linear transformation)　见“不变子空间”.

矩阵的标准型(canonical form of a matrix) 矩阵的一种表达形式. 指域 P 上的 $n\times n$ 矩阵 A 在相似变换(即将 A 变成 $B=TAT^{-1}$ 的变换,其中 T 为 P 上的 $n\times n$ 可逆矩阵)下的最简形式. 设 A 是 P 上 n 维线性空间 V 上在一组取定的基底下某个线性变换 σ 的矩阵,做 V 关于 σ 的不变子空间的直和分解. 考虑 σ 在这些不变子空间上的限制,继续做这种分解,经有限步可做到不能再分解,最后可得出 V 的一个新基底使在此新基底之下,σ 对应的矩阵 B 取最简单的形式(不可再分解的分块对角形,即准对角形). B 即为 A 的标准型. 当 P 为代数闭域时,由此得出的标准型称为 A 的若尔当标准型. 当 P 为非代数闭域时,由此所得的标准型称为 A 的广义标准型. 求 A 的标准型也可以通过 A 的特征多项式做因式分解求出(参见第一卷《高等代数》相应部分).

若尔当标准型(Jordan canonical form) 见"矩阵的标准型".

广义标准型(generalized canonical form) 见"矩阵的标准型".

循环子空间(cyclic subspace) 一类特殊的子空间. 指由一个向量与一个线性变换确定的子空间. 设 V 是域 P 上的 n 维线性空间,σ 是 V 上的线性变换. 若 $0\neq\xi\in V$,则存在 k 使 $\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{k-1}(\xi)$ 线性无关,但 $\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{k}(\xi)$ 线性相关. 由 $\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{k-1}(\xi)$ 生成的子空间 L,称为 σ 循环子空间. $\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{k-1}(\xi)$ 称为 L 的 σ 循环基. 特别地,当 $L=V$ 时,V 称为循环空间(关于 σ 的),记为 $V=L(\xi)_\sigma$. 而 σ 称为循环变换. V 的线性变换 σ 是循环的充分必要条件是它的最低多项式(也称最小多项式)的次数为 $n=\dim V$. 若 $V=L(\xi)_\sigma$,ξ 的最低多项式为

$$f(\lambda)=\lambda^n-a_{n-1}\lambda^{n-1}-\cdots-a_0,$$

则循环变换 σ 关于基 $\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{k-1}(\xi)$ 的矩阵,恰是 $f(\lambda)$ 的相伴矩阵.

循环基(cyclic basis) 见"循环子空间".

循环空间(cyclic space) 见"循环子空间".

循环变换(cyclic transformation) 见"循环子空间".

特征子空间(characteristic subspace) 一类重要的子空间. 即对应于线性变换的一特征值的子空间. 设 V 是域 P 上的线性空间,σ 是 V 的一个线性变换,σ 的对应于特征值 λ_0 的全体特征向量与零向量所成的集合,对于 V 的加法及数量乘法构成 V 的子空间,称为 σ 的对应于特征值 λ_0 的特征子空间,记为 V_{λ_0}. 若 $L_{\lambda_0}=\{\xi\in V\mid$ 对某 $s>0,(\sigma-\lambda_0E)^s\xi=0$, E 为恒等变换$\}$,则 L_{λ_0} 是 V 的子空间,称为 σ 对应于 λ_0 的广义特征子空间(或根子空间). 当 V 为 n 维线性空间,且 σ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 的全部不同的根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 皆属于 P 时,则 V 是对应于 λ_i $(i=1,2,\cdots,r)$ 的广义特征子空间的直和.

广义特征子空间(generalized characteristic subspace) 见"特征子空间".

根子空间(radical subspace) 见"特征子空间".

不可约线性变换(irreducible linear transformation) 亦称不可分解线性变换. 一种特殊的线性变换. 设 V 是域 P 上的 n 维线性空间,$\sigma\in\mathrm{Hom}_P(V,V)$,若除 $0,V$ 外,不存在 σ 的不变子空间,则称 σ 为不可约线性变换,而称 V 为 σ 不可约空间. σ 为不可约的充分必要条件为 σ 是循环的,并且它的最低多项式为不可约多项式的幂. 若 V 为若干个($\geqslant 2$)σ 不可约子空间的直和,则称 σ 为完全可约的. σ 是完全可约的充分必要条件是它的最低多项式是不同的不可约多项式的积.

不可分解线性变换(indecomposable linear transformation) 即"不可约线性变换".

σ 不可约空间(σ-irreducible space) 见"不可约线性变换".

完全可约线性变换(completely reducible linear transformation) 见"不可约线性变换".

可分解线性变换(decomposable linear transformation) 一种特殊的线性变换. 即可用来对线性空间做直和分解的线性变换. 设 V 是域 P 上的 n 维线性空间,σ 是 V 的线性变换,$V_i\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,s,s\geqslant 2)$ 是 σ 不变子空间. 若 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$,则称 σ 是可分解变换,而称 V 为 σ 可分解空间. σ 为不可分解的充分必要条件为它是循环的,并且它的最低多项式是不可约多项式的幂.

σ 可分解空间(σ-decomposable space) 见"可分解线性变换".

准素分支空间(primary component space) 线性空间的一类直和项. 设 V 是域 P 上的线性空间,$\sigma\in\mathrm{Hom}_P(V,V)$,且 $f(\lambda)$ 是 σ 的最低多项式,其标准分解式为 $f(\lambda)=p_1(\lambda)^{r_1}p_2(\lambda)^{r_2}\cdots p_s(\lambda)^{r_s}$,若记

$$R_i=\{\xi\in V\mid p_i(\lambda)^{r_i}(\xi)=0\},$$

则
$$V=\bigoplus_{i=1}^{s}R_i\quad(i=1,2,\cdots,s).$$

R_i 称为 σ 的准素分支空间. 它们关于 σ 是不变的. σ 在 R_i 上的导出变换的最低多项式正是 $p_i(\lambda)^{r_i}$. 由分解

$$V=\bigoplus_{i=1}^{s}R_i$$

所决定的射影变换 E_i,称为 σ 的主幂等元素.

主幂等元素(principal idempotent element) 见"准素分支空间".

双线性映射(bilinear mapping) 线性映射的

推广. 设 V_1, V_2 与 W 都是域 P 上的线性空间, φ 是 $V_1 \times V_2$ 到 W 的映射. 若对任意固定的 $\beta \in V_2$, φ 是 V_1 到 W 的线性映射, 而且对任意固定的 $\alpha \in V_1$, φ 是 V_2 到 W 的线性映射, 则称 φ 为双线性映射. 一般地, 当给定线性空间 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 与 W 时, 若 $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_s$ 到 W 的映射 φ 对每一变量是线性的, 则称 φ 为多重线性映射. $V \times V$ 到 W 的双线性映射 φ 若满足条件: 对 $\forall\ \alpha, \beta \in V$, 有 $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\beta, \alpha)$, 则称 φ 为对称双线性映射; 若 φ 满足条件: 对 $\forall\ \alpha, \beta \in V$, 有 $\varphi(\alpha, \beta) = -\varphi(\beta, \alpha)$, 则称 φ 为反对称双线性映射.

对称双线性映射(symmetric bilinear mapping) 见"双线性映射".

反对称双线性映射(anti-symmetric bilinear mapping) 见"双线性映射".

双线性函数(bilinear function) 线性函数的推广. 设 V_1, V_2 是域 P 上的线性空间, $V_1 \times V_2$ 到 P 的双线性映射 φ 称为 $V_1 \times V_2$ 上的双线性函数. 特别地, 当 $V_1 = V_2 = V$ 时, φ 称为 V 上的双线性函数. 若 V 是有限维的, φ 是 V 上的双线性函数, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的基, 则对 $\forall\ \alpha, \beta \in V$, 有

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i, \quad \beta = \sum_{j=1}^{n} y_j \alpha_j$$

及

$$\varphi(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(\alpha_i, \alpha_j) x_i y_j.$$

即若以 α, β 表示定义域为 V 的变量, 则域 P 上 n 维线性空间 V 上的双线性函数 $\varphi(\alpha, \beta)$ 可以表示为域 P 上变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的双线性型. 以 $\varphi(\alpha_i, \alpha_j)$ 作为 (i, j) 元素的 n 阶矩阵 $(\varphi(\alpha_i, \alpha_j))_{ij}$ 称为双线性函数 φ 关于给定基的矩阵. V 上的双线性函数 φ 关于不同基的矩阵 A, B 相互合同: $A = XBX^T$, 其中 X 是原基底到新基底的过渡矩阵. φ 关于基的矩阵 (a_{ij}) 的秩亦称为 φ 的秩. 当 (a_{ij}) 非退化时, φ 亦称为非退化的或满秩的. 当 (a_{ij}) 为对称(反对称)矩阵时, φ 亦称为对称(反对称)双线性函数.

双线性函数的矩阵(matrix of a bilinear function) 见"双线性函数".

双线性函数的秩(rank of a bilinear function) 见"双线性函数".

满秩双线性函数(full rank bilinear function) 见"双线性函数".

非退化双线性函数(nondegenerate bilinear function) 见"双线性函数".

对称双线性函数(symmetric bilinear function) 一类特殊的映射. 设 V 是域 P 上的线性空间, φ 是 V 上的双线性函数, 即 $V \times V$ 到 P 的双线性映射, 若对任意 $\alpha, \beta \in V$, 恒有 $\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\beta, \alpha)$, 则称 φ 为对称双线性函数. 若对任意 $\alpha, \beta \in V$, 恒有 $\varphi(\alpha, \beta) = -\varphi(\beta, \alpha)$, 则称 φ 为反对称双线性函数. n 维线性空间 V 上的对称(反对称)双线性函数的矩阵是 n 阶对称(反对称)矩阵.

反对称双线性函数(anti-symmetric bilinear function) 见"对称双线性函数".

线性空间上的二次函数(quadratic function over a linear space) 亦称线性空间上的二次型. 一类特殊的映射. 设 V 是域 P 上的线性空间, Q 是 V 到 P 的映射, 称 Q 为 V 上的二次函数, 若 Q 满足条件:

1. 对 $\forall\ \alpha \in V, k \in P$, 有 $Q(k\alpha) = k^2 Q(\alpha)$.
2. 对 $\forall\ \alpha, \beta \in V$, 由

$$Q(\alpha + \beta) - Q(\alpha) - Q(\beta) = \varphi(\alpha, \beta)$$

所确定的 $V \times V$ 到 P 的映射 φ 是 V 上的对称双线性函数. 而称 φ 为与 Q 相伴的双线性函数. 当域 P 的特征 $\neq 2$ 时, 每个二次函数都能而且只能从与它相伴的双线性函数得出.

线性空间上的二次型(quadratic form over a linear space) 即"线性空间上的二次函数".

二次函数相伴的双线性函数(bilinear function associated with quadratic function) 见"线性空间上的二次函数".

半双线性函数(sesquilinear function) 双线性函数的推广. 设 P 为域, J 是 P 的自同构, 域中元素 k 在 J 下的像记为 k^J, 而 V_1, V_2 是域 P 上的线性空间, $V_1 \times V_2$ 到 P 上的映射 φ, 若满足:

1. 对任意 $k_1, k_2 \in P, \alpha_1, \alpha_2 \in V_1, \beta \in V_2$, 有
$\varphi(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta) = k_1\varphi(\alpha_1, \beta) + k_2\varphi(\alpha_2, \beta)$;
2. 对任意 $k_1, k_2 \in P, \alpha \in V_1, \beta_1, \beta_2 \in V_2$, 有
$\varphi(\alpha, k_1\beta_1 + k_2\beta_2) = k_1^J\varphi(\alpha, \beta_1) + k_2^J\varphi(\alpha, \beta_2)$;

则称 φ 为 $V_1 \times V_2$ 上关于 J 的半双线性函数. 当 J 为恒等自同构时, 半双线性函数即双线性函数. $V \times V$ 上关于 J 的半双线性函数 φ 称为 V 上的半双线性函数. V 中向量 α, β 在 V 上半双线性函数 φ 下的像 $\varphi(\alpha, \beta)$ 称为 α 与 β 的内积或纯量积. 常简记为 (α, β). 当 $(\alpha, \beta) = 0$ 时, 称 α 与 β 左正交, 也称 β 与 α 右正交.

内积(inner product) 见"半双线性函数".

纯量积(scalar product) 见"半双线性函数".

左正交(left orthogonal) 见"半双线性函数".

右正交(right orthogonal) 见"半双线性函数".

半双线性函数的秩(rank of a sesquilinear function) 对半双线性函数的一种刻画. 指半双线性函数在一组基下矩阵的秩. 设 V 是域 P 上的线性空间, φ 是 V 上关于 J 的半双线性函数, 这里 J 是 P 的自同构, 当 $\dim V = n$ 且 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 V 的基底时, 若记 $\varphi(e_i, e_j) = a_{ij}$, 则矩阵 (a_{ij}) 称为 φ 关于基底

$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的矩阵；若 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 V 的另一基底，此二基底的过渡矩阵为 $T=(t_{ij})$，则 φ 关于基底 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的矩阵为 $(t_{ij})(a_{ij})(t_{ij}^J)'$. 半双线性函数 φ 关于基底的矩阵的秩亦称为 φ 的秩. 当 φ 的秩等于 V 的维数时，φ 称为非退化的或满秩的.

半双线性函数的矩阵(matrix of a sesquilinear function)　见“半双线性函数的秩”.

非退化半双线性函数(non-degenerate sesquilinear function)　见“半双线性函数的秩”.

满秩半双线性函数(full rank sesquilinear function)　见“半双线性函数的秩”.

埃尔米特函数(Hermitian function)　特殊的半双线性函数. 设 V 是域 P 上的线性空间，J 是 P 的自同构，φ 是 V 上的半双线性函数，若 $J=J^{-1}$ 且对每对 $\alpha_1,\alpha_2\in V,\varphi(\alpha_1,\alpha_2)=\varphi(\alpha_2,\alpha_1)^J$，则称 φ 为 V 上的埃尔米特函数；当 $J=J^{-1}$ 且 $\varphi(\alpha_1,\alpha_2)=-\varphi(\alpha_2,\alpha_1)^J$ 时，称 φ 为反埃尔米特函数. 特别地，当 J 为恒等自同构时，埃尔米特(反埃尔米特)函数就是对称(反对称)双线性函数. n 维线性空间 V 上的埃尔米特(反埃尔米特)函数对取定基的矩阵是埃尔米特(反埃尔米特)矩阵.

反埃尔米特函数(anti-Hermitian function)　见“埃尔米特函数”.

埃尔米特度量空间(Hermitian metric space)　一类线性空间. 指带非退化埃尔米特函数的线性空间. 设 V 是域 P 上的有限维线性空间，J 是 P 的对合自同构(即 $J=J^{-1}$)，φ 是 V 上关于 J 的埃尔米特(反埃尔米特)函数，若 φ 是非退化的，则称 V 为埃尔米特(反埃尔米特)度量空间，简称埃尔米特空间. 特别地，当 J 为恒等自同构时，称 V 为非退化对称(反对称)或满秩对称(反对称)双线性度量空间. 以上各种度量空间，简称度量空间. 在度量空间内 $\varphi(\alpha,\beta)$ 常用内积 (α,β) 表示. 对 V 中任意 m 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，由内积 (α_i,α_j) 为 (i,j) 元素组成的 m 阶矩阵 $((\alpha_i,\alpha_j)_{ij})$，称为关于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的格拉姆矩阵. 关于基底的格拉姆矩阵亦称度量矩阵. 若关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 度量矩阵为单位矩阵，则基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 称为标准正交基.

反埃尔米特度量空间(anti-Hermitian metric space)　见“埃尔米特度量空间”.

非退化对称双线性度量空间(non-degenerate symmetric bilinear metric space)　见“埃尔米特度量空间”.

非退化反对称双线性度量空间(non-degenerate antisymmetric bilinear metric space)　见“埃尔米特度量空间”.

满秩对称双线性度量空间(full rank symmetric bilinear metric space)　见“埃尔米特度量空间”.

满秩反对称双线性度量空间(full rank antisymmetric bilinear metric space)　见“埃尔米特度量空间”.

格拉姆矩阵(Gram's matrix)　见“埃尔米特度量空间”.

度量矩阵(metric matrix)　见“埃尔米特度量空间”.

标准正交基(canonical orthogonal basis)　见“埃尔米特度量空间”.

埃尔米特空间(Hermitian space)　即“埃尔米特度量空间”.

正交补(空间)(orthogonal complement)　一种子空间. 给定子空间按埃尔米特函数的正交子空间. 设 φ 是域 P 上的线性空间 V 的埃尔米特函数. 对埃尔米特函数而言，左、右正交是一致的. 因此，若 V 中向量 α,β 的内积 $(\alpha,\beta)=0$，则称 α 与 β 正交. 设 M 是 V 的子空间，若 $M^{\perp}=\{\alpha\in V\mid\forall\ \beta\in M,\varphi(\alpha,\beta)=0\}$，则 $M^{\perp}$ 是 V 的子空间，称为 M 的正交补(空间). 若 $M\cap M^{\perp}\neq 0$，则称子空间 M 是迷向的；此时有非零向量 $\alpha\in M$ 使 $(\alpha,\alpha)=0$，α 称为非零迷向向量. 若 $M\subseteq M^{\perp}$，则称 M 为全迷向子空间. 若 V 为有限维线性空间，φ 为非退化埃尔米特函数，则 $V=M\oplus M^{\perp}$，这时 M 与 $M^{\perp}$ 的维数有关系

$$\dim M^{\perp}=\dim V-\dim M,$$
$$\dim(M^{\perp})^{\perp}=\dim M.$$

迷向子空间(isotropic subspace)　见“正交补(空间)”.

迷向向量(isotropic vector)　见“正交补(空间)”.

全迷向子空间(totally isotropic subspace)　见“正交补(空间)”.

共轭变换(conjugate transformation)　亦称转置变换. 一种重要的线性变换. 设 V 是域 P 上的线性空间，J 是 P 的对合自同构(即 $J=J^{-1}$)，φ 是 V 上的非退化埃尔米特(反埃尔米特)函数，σ 是 V 的线性变换. 若存在 V 的线性变换 σ^*，使对 V 中任二向量 α,β 满足条件 $\varphi(\sigma(\alpha),\beta)=\varphi(\alpha,\sigma^*(\beta))$，则称 σ^* 为 σ 的共轭变换；若 $\sigma\sigma^*=\sigma^*\sigma$，则称 σ 为正规变换；若 $\sigma=\sigma^*(-\sigma^*)$，则称 σ 为自共轭(反自共轭)变换，或埃尔米特(反埃尔米特)变换；若 J 是 P 的自同构，则 φ 为 V 上的非退化对称(反对称)双线性型. 此时 V 的自共轭(反自共轭)变换，亦称为对称(反对称)变换.

转置变换(transposed transformation)　即“共轭变换”.

正规变换(normal transformation)　见“共轭变换”.

自共轭变换(self-conjugate transformation) 见“共轭变换”.

反自共轭变换(anti-selfconjugate transformation) 见“共轭变换”.

埃尔米特变换(Hermite's transformation) 见“共轭变换”.

反埃尔米特变换(anti-Hermite's transformation) 见“共轭变换”.

对称变换(symmetric transformation) 见“共轭变换”.

反对称变换(anti-symmetric transformation) 见“共轭变换”.

酉空间(unitary linear space) 一种特殊的复线性空间.指以一类埃尔米特函数作内积的复线性空间.设 V 是复数域 C 上的线性空间,J 是 C 的(共轭)自同构:$(a+bi)^J=a-bi$.若在 V 上定义了一个关于 J 的埃尔米特函数,并且对$\forall\ \alpha\in V$,内积$(\alpha,\alpha)\geqslant 0$ 及$(\alpha,\alpha)=0$ 当且仅当 $\alpha=0$,则称 V 为酉空间.n 维酉空间 U 中总存在标准正交基.对 U 的任一线性变换 σ,都存在它的共轭变换 σ^*.若以 A,B 分别表示 σ 与 σ^* 关于给定基的矩阵,则 $A=G'^{-1}\overline{B}'G'$,这里 G 是关于给定基的格拉姆矩阵,$\overline{B}'$ 是 B 的转置共轭矩阵.对 U 的任一正规(埃尔米特)变换 σ,都存在标准正交基,使 σ 关于此基的矩阵为对角形(实对角形)矩阵.

复欧几里得空间(complex Euclidean space) 一种特殊的复线性空间.指带非退化对称双线性函数的复线性空间.设 V 是复数域 C 上的线性空间,若在 V 上定义了一个非退化对称双线性函数,则称 V 为复欧几里得空间,简称复欧氏空间.对 n 维复欧氏空间 V 的每一线性变换 σ,都存在它的共轭变换 σ^*.在 n 维复欧氏空间 V 内总存在标准正交基.若以 A,B 分别表示它们在给定基下的矩阵,则 $B=G^{-1}A'G$,这里 G 是关于给定基的格拉姆矩阵.n 维复欧氏空间的线性变换 σ 是对称(反对称)的充分必要条件是 σ 关于标准正交基的矩阵是对称(反对称)矩阵.

辛空间(symplectic linear space) 一种特殊的复线性空间.指带非退化反对称双线性函数的有限维复线性空间.设 V 是复数域 C 上的 n 维线性空间,若在 V 上定义了一个非退化反对称双线性函数,则称 V 为辛空间.在 $2n$ 维辛空间内存在这样的基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{2n}$,关于它的格拉姆矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$2n$ 维辛空间的每一线性变换 σ,都存在它的共轭变换 σ^*.若以 A,B 分别表示 σ 与 σ^* 关于给定基的矩阵,则 $B=G^{-1}A'G$,其中 G 是关于给定基的格拉姆矩阵,A' 是 A 的转置矩阵.$2n$ 维辛空间的线性变换 σ 是对称(反对称)的充分必要条件是 σ 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的矩阵 A 与 A 的转置矩阵 A' 有关系 $A'G=GA$,其中 G 是关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的格拉姆矩阵.

欧几里得空间(Euclidean space) 简称欧氏空间.一类常用的实线性空间.设 V 是实数域上的线性空间,φ 是 V 上的对称双线性函数.若对$\forall\ \alpha\in V$,内积(α,α)(即$\varphi(\alpha,\alpha)$)$\geqslant 0$ 及$(\alpha,\alpha)=0$ 当且仅当 $\alpha=0$,则称 V 为欧几里得空间.在欧氏空间内存在基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 使关于此基底的格拉姆矩阵为单位矩阵,即欧氏空间内必存在标准正交基.

欧氏空间(Euclidean space) 即“欧几里得空间”.

正定变换(positive definite transformation) 一类特殊的线性变换.设 V 是酉空间(欧氏空间),σ 是 V 的埃尔米特(对称)线性变换,若对 V 中任意的非零向量 α,$(\sigma(\alpha),\alpha)>0(\geqslant 0)$,则称 σ 为正定(半正定或非负)埃尔米特(对称)变换.正定(半正定或非负)埃尔米特变换与正定(半正定或非负)对称变换统称为正定(半正定或非负)变换.对任一半正定变换 σ,必有一半正定变换 μ,使 $\mu^2=\sigma$,μ 称为 σ 的半正定平方根.埃尔米特(对称)变换 σ 是正定(半正定)的充分必要条件是 σ 的特征根全是正数(非负数).

正定埃尔米特变换(positive definite Hermitian transformation) 见“正定变换”.

非负埃尔米特变换(non-negative Hermitian transformation) 见“正定变换”.

半正定对称变换(semi-positive definite symmetric transformation) 见“正定变换”.

非负对称变换(non-negative symmetric transformation) 见“正定变换”.

正定对称变换(positive definite symmetric transformation) 见“正定变换”.

半正定变换(semi-positive definite transformation) 见“正定变换”.

非负变换(non-negative transformation) 见“正定变换”.

半正定平方根(semi-positive definite square root) 见“正定变换”.

极分解(polar decomposition) 线性变换的一种分解.设 V 是酉空间,若 $\sigma\in \mathrm{Hom}_p(V,V)$,则必存在 V 的半正定变换 μ 与酉变换 δ,使 $\sigma=\mu\delta$.若 V 是欧氏空间,则 $\sigma=\mu\delta$,其中 δ 为正交变换.此分解称为极分解,其中的 μ 是惟一的.若 σ 是非退化的,则 δ 亦是惟一的.

等度量变换(isometric transformation)　不变度量的线性变换. 设 V 是度量空间, σ 是 V 的线性变换, 若对 $\forall\ \alpha,\beta\in V$, 内积 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$, 则称 σ 为等度量变换. 线性变换 σ 是等度量变换的充分必要条件是 $\sigma\sigma^*=\sigma^*\sigma=E$.

酉变换(unitary transformation)　酉空间 V 的等度量变换. 对 $\forall\ \alpha,\beta\in V$, 满足条件 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$ 的线性变换 σ 称为酉变换. 对 n 维酉空间 V 的每一酉变换 σ, 都存在 V 的标准正交基, 使 σ 关于此基的矩阵为对角形, 且对角线上元素的模为 1. 以下陈述都是线性变换 σ 为酉变换的充分必要条件:

1. 对酉空间的每一向量 α, $|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$.

2. σ 关于某一组标准正交基的矩阵是酉矩阵.

3. 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是标准正交基, 则 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 也是标准正交基.

正交变换(orthogonal transformation)　欧氏空间的等度量变换. 设 V 为欧氏空间, 对 $\forall\ \alpha,\beta\in V$, 满足条件 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$ 的线性变换 σ 称为正交变换. 对于 n 维欧氏空间, 正交变换 σ 关于基的矩阵 A 的行列式 $|A|=\pm1$. 当 $|A|=1$ 时, σ 称为正常正交变换, 亦称旋转. 对 n 维欧氏空间的每一正交变换 σ, 都存在标准正交基, 使 σ 关于此基的矩阵有形式

$$\begin{pmatrix}1 &&&&&&&&&\\ &\ddots&&&&&&&&\\ &&1&&&&&&&\\ &&&-1&&&&&&\\ &&&&\ddots&&&&&\\ &&&&&-1&&&&\\ &&&&&&\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 &&\\ &&&&&&\sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 &&\\ &&&&&&&&\ddots&\\ &&&&&&&&&\cos\varphi_s & -\sin\varphi_s\\ &&&&&&&&&\sin\varphi_s & -\cos\varphi_s\end{pmatrix}.$$

以下陈述都是线性变换 σ 为正交变换的充分必要条件:

1. 对欧氏空间 V 的每一向量 α, 有
$$|\sigma(\alpha)|=|\alpha|.$$

2. 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是标准正交基, 则 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 也是标准正交基.

3. σ 关于某一标准正交基的矩阵是正交矩阵.

正常正交变换(proper orthogonal transformation)　见"正交变换".

旋转(rotation)　见"正交变换".

辛变换(symplectic transformation)　辛空间的等度量变换. 设 V 为辛空间, 对 $\forall\ \alpha,\beta\in V$, 满足条件 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$ 的线性变换 σ 称为辛变换. 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的基, G 为关于此基的格拉姆矩阵, A 为线性变换 σ 关于此基的矩阵, 则 σ 为辛变换的充分必要条件是 $A'GA=G$.

向量的射影(projection of a vector)　一种特殊向量. 指向量关于线性空间直和分解的对应部分. 设 V 是域 P 上的线性空间, $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$, 于是 V 中任一向量 α 有惟一的分解式 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$, 这里 $\alpha_i\in V_i$, 向量 α_i 称为向量 α 在子空间 V_i 上的射影. 当 V 是 n 维欧氏空间时, 若 $\alpha\overline{\in}V_1$, 则存在 $\beta\in V_1$ 使 $(\alpha-\beta)\perp V_1$. 这是通常几何空间向量射影性质的推广, 称为射影定理.

射影定理(projection theorem)　见"向量的射影".

半单变换(semi-simple transformation)　一类特殊的线性变换. 设 V 是域 P 上的 n 维线性空间, $\sigma\in \mathrm{Hom}_P(V,V)$, 若 σ 恰有 n 个线性无关的特征向量, 则称 σ 为半单变换. 半单变换关于基的矩阵是半单矩阵. 线性变换 σ 为半单的充分必要条件是其最小多项式无重根.

镜像变换(mirror transformation)　镜面反射的推广. 设 V 是欧氏空间, 对 $\forall\ \alpha\in V$, 若 $\sigma(\alpha)=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta$ (η 是一给定的单位向量), 则 σ 是 V 的线性变换, 称为镜像变换. 当 V 是 n 维欧氏空间时, 镜像变换是正交变换且其行列式为 -1. 在三维欧氏空间中镜像变换有很直观的几何意义, 事实上它就是镜面反射.

凯莱变换(Cayley transformation)　一类特殊的线性变换. 所谓凯莱变换是指 n 维酉空间的酉变换与埃尔米特变换间的如下的一个一一对应: 若 σ 为酉空间的埃尔米特变换, 则变换 $\sigma\pm \mathrm{i}E$ 有逆变换存在 (E 为单位变换), 而变换 $\mu=(\sigma-\mathrm{i}E)(\sigma+\mathrm{i}E)$ 是没有特征值 1 的酉变换, 并且 $\sigma=-\mathrm{i}(\mu+E)(\mu-E)^{-1}$. 反过来, 若 μ 是一个酉变换且没有等于 1 的特征值, 则 $\mu-E$ 有逆变换存在, 而
$$\sigma=-\mathrm{i}(\mu+E)(\mu-E)^{-1}$$
是埃尔米特变换, 且 μ 有形式
$$\mu=(\sigma-\mathrm{i}E)(\sigma+\mathrm{i}E)^{-1}.$$

位似变换(homothetic transformation)　相似变换的推广. 是指欧氏空间中这样的线性变换 $\sigma=k\tau$, 这里 k 是实数, τ 是正交变换, 当 τ 是单位变换时, 就是通常的位(相)似变换. 因此, 位似变换是几何学中相似变换的推广.

仿射空间(affine space)　通常三维向量空间的推广. 是这样的点集合 $A=\{P,Q,\cdots\}$, A 中的点与一个 n 维线性空间 V 中的向量满足以下的关系:

1. 对 A 中任意有序点对 P,Q, 存在 V 中一个向量(称为 P,Q 的差向量), 记为 $\overrightarrow{PQ}$.

2. 对 A 中任意三个点 P,Q,R 有
$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}.$$

3. 对每个 $P\in A$ 和每个 $\alpha\in V$, 存在 $Q\in A$ 使

$$\overrightarrow{PQ} = \alpha,$$

这时也称 A 为关于 V 的 n 维仿射空间，而称 V 为差空间. 特别地，若取 $A=V$，定义 $\overrightarrow{PQ}=Q-P$，则上述三条件都是满足的. 因此，V 按此定义就是一个 n 维仿射空间.

差空间(difference space) 见“仿射空间”.

仿射变换(affine transformation) 解析几何中仿射变换的推广. 是指仿射空间 A 到 A 的满足以下条件的变换 $P\to P'$，$\forall P\in A$：

1. 由 $\overrightarrow{P_1Q_1}=\overrightarrow{P_2Q_2}$ 必有 $\overrightarrow{P'_1Q'_1}=\overrightarrow{P'_2Q'_2}$.

2. 由 $\sigma(\overrightarrow{PQ})=\overrightarrow{P'Q'}$ 所确定的 V 的变换 σ 是线性变换，这里 V 是关于 A 的差空间.

仿射坐标系(affine coordinate system) 解析几何中仿射坐标系的推广. 设 V 是实 n 维线性空间，A 是关于 V 的仿射空间，A 中一个固定点 O 与 V 的一个基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的全体 $(O,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 称为 A 的一个仿射坐标系. O 称为坐标系的原点. 于是对于 A 中每一点 P 必有

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} a_i\varepsilon_i,$$

诸 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为 P 点关于给定坐标系的仿射坐标.

坐标系的原点(origin of a coordinate system) 见“仿射坐标系”.

仿射坐标(affine coordinate) 见“仿射坐标系”.

仿射坐标变换公式(transformation formula for affine coordinates) 仿射坐标系改变时坐标的变换公式. 设 V 是实 n 维线性空间，A 是关于 V 的仿射空间，$(O,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 与 $(O',\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n)$ 是 A 的两个仿射坐标系，而 (a_{ij}) 是由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 的过渡矩阵. 若点 P 关于坐标系 $(O,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ 的坐标为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，关于坐标系 $(O',\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n)$ 的坐标为 $(a'_1,a'_2,\cdots,a'_n)$，而

$$OO' = \sum_{i=1}^{n} b_i\varepsilon_i,$$

则

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a'_j=a_i-b_i.$$

向量的长度(length of a vector) 解析几何中向量长度的推广. 欧氏空间 V 及酉空间 U 中向量 α 的长度定义为非负实数 (α,α) 的算术根 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$，记为 $|\alpha|$，即 $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$. 在欧氏空间或酉空间中，任一非零向量的长度是一确定的正数. 零向量的长度是零. 长度为 1 的向量，称为单位向量. 由任一非零向量 α，可得出单位向量 $\alpha/|\alpha|$，称为向量 α 的单位化. 两向量 α,β 的差 $\alpha-\beta$ 的长度 $|\alpha-\beta|$ 称为向量 α 与向量 β 间的距离.

单位向量(unit vector) 见“向量的长度”.

向量间的距离(distance between two vectors) 见“向量的长度”.

向量的范数(norm of a vector) 长度概念的推广. 设 V 为实线性空间，若对 V 的每一元素 α，有一实数 $\|\alpha\|$ 与之对应且满足以下条件：

1. $\|\alpha\|\geqslant 0$，并且 $\|\alpha\|=0$ 当且仅当 $\alpha=0$；
2. $\|k\alpha\|=|k|\,\|\alpha\|$，$k$ 为实数；
3. $\|\alpha+\beta\|\leqslant\|\alpha\|+\|\beta\|$；

则称 V 为赋范空间，并称 $\|\alpha\|$ 为向量 α 的范数.

赋范空间(normed space) 见“向量的范数”.

柯西-布雅科夫斯基不等式(Cauchy-Bunjakovski inequality) 亦称施瓦兹不等式. 两向量内积的绝对值与两向量长度之间的不等式. 欧氏空间或酉空间 V 中任意两向量 α 与 β 满足

$$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha|\,|\beta|,$$

并且等号成立的充分必要条件是 α,β 线性相关. 此即柯西-布雅科夫斯基不等式. 例如，若在实 n 元向量空间 $\mathbf{R}^n$ 内定义的内积为 $(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$，这里 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则柯西-布雅科夫斯基不等式变为

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}.$$

由柯西-布雅科夫斯基不等式可以定义欧氏空间中两个非零向量 α,β 的夹角为

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\cos^{-1}\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha|\,|\beta|}.$$

施瓦兹不等式(Schwarz inequality) 即“柯西-布雅科夫斯基不等式”.

向量的夹角(angle between two vectors) 见“柯西-布雅科夫斯基不等式”.

三角不等式(triangle inequality) 三角形边长关系的推广. 设 V 为酉空间或欧氏空间，对 V 中任两个向量 α,β，由柯西-布雅科夫斯基不等式可导出不等式：$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$，称为三角不等式. 三角不等式亦可表示为 $|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|$. 推广此不等式可得出托勒密不等式：

$$|\alpha-\beta|\,|\gamma|\leqslant|\beta-\gamma|\,|\alpha|+|\gamma-\alpha|\,|\beta|.$$

托勒密不等式(Ptolemy-inequality) 见“三角不等式”.

贝塞尔不等式(Bessel inequality) 向量长度与其在直角坐标系下坐标的关系之推广. 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 是 n 维酉空间(或欧氏空间)U 的任一标准正交向量组，α 为 U 的任一向量，当 $(\alpha,\varepsilon_k)=a_k$，$k=1,2,\cdots,m$ 时，不等式

$$(\alpha,\alpha)\geqslant|a_1|^2+|a_2|^2+\cdots+|a_m|^2$$

称为贝塞尔不等式.

施密特正交化(Schmildt orthogonalization) 由一组基得出标准正交基的方法. 从欧氏空间 V(或酉空间 U)的任意一组线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 出发,得出一个正交向量组$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$,并使由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k(k=1,2,\cdots,m)$生成的子空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$分别等于由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k(k=1,2,\cdots,m)$生成的子空间 $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)$的方法,称为施密特正交化. 具体作法如下:设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是一个线性无关的向量组. 先取 $\beta_1=\alpha_1$;再取

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1;$$

然后取

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2;\ \cdots;$$

一般地,取

$$\beta_j=\alpha_j-\frac{(\alpha_j,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_j,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_j,\beta_{j-1})}{(\beta_{j-1},\beta_{j-1})}\beta_{j-1}\quad(j=1,2,\cdots,k).$$

这样就得到一组正交向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_i$ 且满足

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k).$$

洛仑茨变换(Lorentz transformation) 四元实线性空间中的一种变换. 设 R 为实数域,R^4 内如下定义内积

$$((a_1,a_2,a_3,a_4),(b_1,b_2,b_3,b_4))=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3-a_4b_4,$$

则 R^4 是欧氏空间. 此欧氏空间的正交变换称为广义洛仑茨变换. 若广义洛仑茨变换 σ 关于基

$$\varepsilon_1=(1,0,0,0),\quad \varepsilon_2=(0,1,0,0),$$
$$\varepsilon_3=(0,0,1,0),\quad \varepsilon_4=(0,0,0,1)$$

的矩阵(a_{ij})中元素 $a_{44}\geqslant1$,则称其为洛仑茨变换.

广义洛仑茨变换(generalized Lorentz transformation) 见"洛仑茨变换".

双线性型(bilinear form) 数域上双线性型的推广. 设 P 为域,$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{n_1};\cdots;y_1,y_2,\cdots,y_{n_s})$是定义域为 P 的多组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_{n_1};\cdots;y_1,y_2,\cdots,y_{n_s}$的齐次多项式,若对每一组变量 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{n_1};\cdots;y_1,y_2,\cdots,y_{n_s})$都是线性的,则称 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{n_1};\cdots;y_1,y_2,\cdots,y_{n_s})$为多重线性型. 特别地,当 $s=2$ 时,称为双线性型. 两组个数相等的变量的双线性型 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n)$有形式

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j,$$

其系数构成 n 阶矩阵(a_{ij}),称为双线性型 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n)$的矩阵,其秩称为该双线性型的秩. 当双线性型的矩阵是非退化矩阵时,则称此双线性型为非退化双线性型或满秩双线性型.

多重线性型(multilinear form) 见"双线性型".

双线性型的秩(rank of a bilinear form) 见"双线性型".

非退化双线性型(nondegenerate bilinear form) 见"双线性型".

满秩双线性型(full rank bilinear form) 见"双线性型".

等价双线性型(equivalent bilinear forms) 经非退化线性变数代换可互相得到的双线性型. 若对域 P 上的双线性型

$$\varphi_1=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

施以非退化线性变数代换

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}x_k'\quad(|(c_{ik})|\neq0)$$

与

$$y_i=\sum_{s=1}^{n}d_{js}y_s'\quad(|(d_{js})|\neq0)$$
$$(i,j=1,2,\cdots,n)$$

后,得出的双线性型为

$$\varphi_2=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}x_i'y_j',$$

则称 φ_1 与 φ_2 等价. 它们的矩阵关系为

$$(b_{ij})=(c_{ij})'(a_{ij})(d_{ij}).$$

特别地,当$(c_{ij})=(d_{ij})$时,即非退化线性变数代换的矩阵相等时,φ_1 与 φ_2 称为相合. 它们的矩阵关系为

$$(b_{ij})=(c_{ij})'(a_{ij})(c_{ij}).$$

非退化线性代换(nondegenerate linear substitution) 见"等价双线性型".

相合双线性型(congruent bilinear forms) 见"等价双线性型".

对称双线性型(symmetric bilinear form) 系数矩阵对称的双线性型. 设

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

是域 P 上的双线性型,(a_{ij})是其矩阵,若(a_{ij})是对称(反对称)的,则称双线性型$\sum a_{ij}x_iy_j$ 是对称(反对称)双线性型.

反对称双线性型(anti-symmetric bilinear form) 见"对称双线性型".

埃尔米特双线性型(Hermitian bilinear form) 复数域上埃尔米特双线性型的推广. 若 P 为域,J 是 P 的对合自同构,域 P 上的双线性型

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j^J$$

的矩阵(a_{ij})若是埃尔米特矩阵,则称

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j^J$$

为埃尔米特双线性型．特别地，复数域上的埃尔米特双线性型是指形如$\sum a_{ij}x_i\overline{y}_j$的双线性型，其中$a_{ij}=\overline{a}_{ji}$（$a_{ji}$的共轭复数）．

二次型(quadratic form)　数域上二次型的推广．域P上形如

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j$$

的二次齐式，称为域P上的二次型．当域P的特征$\neq 2$时，域P上每个二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j$$

都可表示为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

其中$a_{ij}=a_{ji}=(b_{ij}+b_{ji})/2\,(i<j)$，$a_{ii}=b_{ii}$．由二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

所确定的n阶对称矩阵(a_{ij})称为这个二次型的矩阵．其秩称为二次型的秩．由二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

的矩阵(a_{ij})所确定的对称双线性型

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$$

称为这个二次型的极型或相伴的双线性型．使极型中的第二组变数$y_1,y_2,\cdots,y_n$与第一组变数$x_1,x_2,\cdots,x_n$相同，就得出原来的二次型．二次型的理论起源于解析几何中关于有心二次曲线与二次曲面方程化为标准形方程的研究，它在数学的许多分支，以及物理、力学等方面都有广泛的应用．注意，线性空间上的二次型在取定基后，按坐标即得这里的二次型，反之亦然．因此，这两种形式定义的二次型实际上是一致的．

二次型的矩阵(matrix of a quadratic form)　见“二次型”．

二次型的秩(rank of a quadratic form)　见“二次型”．

极型(polar form)　见“二次型”．

二次型相伴的双线性型(associated bilinear form of a quadratic form)　见“二次型”．

二次型的标准形(standard form of a quadratic form)　数域上二次型的标准形之推广．若对域P上的二次型

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

施以n个变量的线性变数代换

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}y_k \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

则得出二次型

$$Q'(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}y_i y_j \quad (b_{ij}=b_{ji}),$$

并且$(b_{ij})=P'(a_{ij})P$．若线性变量代换

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}k y_k$$

为非退化的（即以p_{ik}为(i,k)元素的矩阵(p_{ik})是非退化的），则称Q与Q'等价．等价的二次型的矩阵是合同的，其秩相等．形如

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ii}x_i^2 \quad (c_{ii}\in P;1\leqslant m\leqslant n)$$

的二次型，称为标准形．特别地，当诸c_{ii}皆为1或-1时，称为规范形．每个二次型必与一标准形等价．

等价的二次型(equivalent quadratic form)　见“二次型的标准形”．

二次型的规范形(canonical form of a quadratic form)　见“二次型的标准形”．

实二次型(real quadratic form)　一类特殊的二次型．实数域$\mathbb{R}$上的二次型，称为实二次型．任一实二次型Q必与一实规范形的二次型$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$等价，其中$r$是实二次型$Q$的秩．正平方项个数$p$与负平方项个数$r-p$由$Q$惟一确定，这一性质称为西尔维斯特惯性律．规范形中的p称为二次型的正惯性指数，$r-p$称为二次型的负惯性指数，它们的差$p-(r-p)=2p-r$称为二次型的符号差．两个实二次型当且仅当它的秩与符号差分别相同时等价．

惯性律(inertial law)　见“实二次型”．

正惯性指数(positive index of inertia)　见“实二次型”．

负惯性指数(negative index of inertia)　见“实二次型”．

符号差(signature)　见“实二次型”．

约化二次型(reduced quadratic form)　一类特殊的实二次型．若实二次型Q_1与Q_2在整数环上等价，则称Q_1与Q_2同类．设实二次型

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'(a_{ij})X,\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

是正定的．若对满足$1\leqslant k\leqslant n$的任意自然数k和整数$g_1,g_2,\cdots,g_n$，$(g_k,g_{k+1},\cdots,g_n)=1$，总有$Q(g_1,g_2,\cdots,g_n)\geqslant a_{kk}$，并且$a_{l,l+1}\geqslant 0\,(1\leqslant l\leqslant n-1)$，则称$Q$为约化二次型．任意正定型的类中，至少有一个约化型．

同类实二次型(real quadratic form of same

class） 见“约化二次型”.

复二次型(complex quadratic form) 一类特殊的二次型.复数域 C 上的二次型,称为复二次型.任一复二次型 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$必与一复规范形的二次型 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2$ 等价.这里 r 是此二次型的秩.两个复二次型当且仅当它们的秩相同时等价.

定型(definite form) 一种重要的实二次型.它有广泛的应用.若实二次型 Q 的正、负惯性指数分别为 n 与 0,则称 Q 为正定二次型.若正、负惯性指数分别为 0 与 n,则称 Q 为负定二次型.正定与负定二次型合称为定型.若实二次型 Q 的正、负惯性指数分别为 $r(\leqslant n)$与 0(或分别为 0 与 $r(\leqslant n)$),则称 Q 为半正定(半负定)二次型.半正定、半负定二次型合称半定型.不是半定型的二次型称为不定型.下面两个条件都是实二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为正定的充分必要条件:

1. 它的矩阵是正定的.

2. 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零,则 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$.

正定二次型(positive definite quadratic form) 见“定型”.

负定二次型(negative definite quadratic form) 见“定型”.

半正定二次型(semi-positive definite quadratic form) 见“定型”.

半负定二次型(semi-negative definite quadratic form) 见“定型”.

不定型(indefinite form) 见“定型”.

有限域上的二次型(quadratic forms over a finite field) 实二次型的推广.设 P 是有限域,P 上的两个非退化 n 元二次型 Q 与 Q′等价的充分必要条件是 Q 与 Q′的秩相等,并且它们的矩阵的行列式 Δ 与 Δ'满足条件 $\Delta(\Delta')^{-1}\in(P^*)^2$,这里 P^* 指域 P 的全体非零元构成的乘群.

p 进域上两个非退化二次型 Q 与 Q′等价的充分必要条件是由其系数矩阵的行列式 Δ 与 Δ'得出的乘积 $\Delta(\Delta')^{-1}\in(P^*)^2$,秩相等,并且其闵科夫斯基-哈塞特征标相同.$p$ 进域上 n 元非退化二次型 Q 的特征标 $x(Q)$的定义为:设 $C(Q)$为 Q 的克里福德代数,当 n 是偶数时,记 $C^*(Q)=C(Q)$;当 n 是奇数时,记 $C^*(Q)=C^+(Q)$,且当 $C^*(Q)\cong M_s(P)$(P 上 S 阶全阵代数)时,规定$x(Q)=1$;当 $C^*\cong M_s(P)\otimes D(P)$(张量积)时,规定$x(Q)=-1$,这里 $D(P)$是 P 上惟一的四元数体.

p 进域上的二次型(quadratic forms over p-adic fields) 见“有限域上的二次型”.

闵科夫斯基-哈塞特征标(Minkowski-Hasse character) 见“有限域上的二次型”.

二次型的直和(direct sum of quadratic forms) 一种特殊的二次型.无公共变元的二次型的和.设

$$Q_1=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\quad Q_2=\sum_{i,j=n+1}^{n+m}a_{ij}x_ix_j$$

是域 P 上的二次型,利用 Q_1 与 Q_2 构造的二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n+m}a_{ij}x_ix_j,$$

其中 $a_{n+r,\,n-s}=a_{n-s\,,n+r}=0\ (r=1,2,\cdots m,s=1,2,\cdots,n-1)$,称为 Q_1 与 Q_2 的直和,记为 $Q_1\oplus Q_2$.其矩阵是由 Q_1 的矩阵 A_1 与 Q_2 的矩阵 A_2 构成的分块矩阵

$$\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}.$$

此时,若 Q_1 与 Q_1' 等价,且 $Q_1\oplus Q_2$ 与 $Q_1'\oplus Q_2'$ 等价,则 Q_2 与 Q_2' 等价,此即是维特定理.

维特定理(Witt theorem) 见“二次型的直和”.

二次型的指数(index of a quadratic form) 二次型在等价意义下的一种指标.域 P 上形如 $x_1x_2+x_3x_4+\cdots+x_{2r-1}x_{2r}$的二次型称为核型,记为 K_r.任意非退化二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $K_r\oplus Q_0(x_{2r+1},\cdots,x_n)$等价,其中 Q_0 满足条件:若 $Q_0\neq0$,且仅当 $x_{2r+1}=\cdots=x_n=0$ 时,有 $Q_0(x_{2r+1},\cdots,x_n)=0$,这时 K_r 与 Q_0 不计等价是惟一确定的.$K_r\oplus Q_0$称为 Q 的维特分解,r 称为 Q 的指数.若二次型 Q 与 Q′的维特分解分别为 $Q=K_r\oplus Q_0$,$Q'=K_s\oplus Q_0'$,则当 Q_0 与 Q_0' 等价时,称 Q 与 Q′同型.非退化二次型 Q 为核型的充分必要条件是在 P 为复数域的情形,Q 的秩 $n\equiv0(\mathrm{mod}\,2)$;在 P 为实数域的情形,$n\equiv0(\mathrm{mod}\,2)$,且 Q 的行列式$\in(P^*)^2$;在 P 为 p 进域的情形,$n\equiv0(\mathrm{mod}\,2)$,Q 的行列式$\in(P^*)^2$,且其闵科夫斯基-哈塞特征标为 1.

核型(kernal form) 见“二次型的指数”.

维特分解(Witt decomposition) 见“二次型的指数”.

同型二次型(quadratic forms of same type) 见“二次型的指数”.

埃尔米特二次型(Hermitian quadratic form) 复数域上的二次型.形如

$$\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\bar{x}_ix_k,\ a_{ik}=\bar{a}_{ki}$$

的复二次型称为埃尔米特二次型,其矩阵为埃尔米特矩阵.做变量的非退化线性代换

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}y_k$$

后,所得的二次型的矩阵(b_{ij})与原矩阵(a_{ij})的关系是:$(b_{ij})=(\bar{p}_{ij})'(a_{ij})(p_{ij})$.对埃尔米特二次型也可以和二次型一样地定义秩、等价和相伴的双线性型.

任一埃尔米特二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与形如

$$\sum_{i=1}^{p}\overline{x}_i x_i - \sum_{j=1}^{q}\overline{x_{p+j}}x_{p+j}$$

的二次型等价，其中 p 与 q 的差称为 Q 的符号差. 可以和实二次型一样地定义正定、负定、半定、不定等埃尔米特二次型. 下述条件的每一条都是埃尔米特二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定的充分必要条件：

1. 当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为不全为零的复数时，

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0.$$

2. Q 的顺序主子式都 >0.

正定埃尔米特二次型(positive definite Hermitian form) 见"埃尔米特二次型".

负定埃尔米特二次型(negative definite Hermitian form) 见"埃尔米特二次型".

化二次型为标准形的方法(to reduce quadratic form to the standard form) 化二次型为对角形的方法. 设域 P 上的 n 元二次型为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=XAX',$$

其中 $A=(a_{ij})$，$A=A'$，且 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 化 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为标准形的方法有：

1. 配方法：

1) $a_{11}\neq 0$ 时，对 x_1 配方：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2+\sum_{i,j=2}^{n}b_{ij}x_ix_j,$$

其中 b_{ij} 是由前面与 x_1 有关的配方后出现的 $x_ix_j(i,j\geqslant 2)$ 项的系数和后面原有的 x_ix_j 项系数合并而成. 若做非退化的 n 元线性变换

$$\begin{cases}x_1=y_1-\sum\limits_{j=2}^{n}\dfrac{a_{1j}}{a_{11}}y_j,\\ x_2=y_2,\\ \cdots\cdots\cdots\\ x_n=y_n,\end{cases}$$

则二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化为

$$f_1(y_1,y_2,\cdots,y_n)=a_{11}y_1^2+\sum_{i,j=2}^{n}b_{ij}y_iy_j,$$

其中 $b_{ij}=b_{ji}$，且

$$\sum_{i,j=2}^{n}b_{ij}y_iy_j$$

是 $n-1$ 元二次型(若 $a_{11}=0$，而某个 $a_{ii}\neq 0$，则对 x_i 配方)，在某 y_2^2 的系数不为零的情况下，可依此做下去，便可将 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化成标准形.

2) 若在进行 k 步后得出

$$\sum_{i=1}^{l}d_iw_i^2+\sum_{i,j=l+1}^{n}f_{ij}w_iw_j,$$

其中 $f_{ii}=0\ (i=l+1,\cdots,n)$，$f_{rs}\neq 0(r\neq s)$，则做线性变换 $w_r=u_r+u_s$，$w_s=u_r-u_s$，$w_t=u_t(t\neq r,s)$后，便出现系数不为零的平方项，于是，可继续进行 1)中所进行的步骤直至将 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化为标准形.

2. 初等变换法：对二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵 A 同时对行与列做同类的初等变换(相合变换)，使所得矩阵 B 为对角形，即使

$$E'_m(E'_{m-1}\cdots(E'_2(E'_1AE_1)E_2)\cdots E_{m-1})E_m=B$$

为对角形，而 E_i 是初等矩阵 $(i=1,2,\cdots,m)$，以 B 为矩阵的二次型便是二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的标准形.

主轴问题(principal axes problem) 实二次型的一个重要问题. 用 n 元正交线性代换(即其矩阵为正交矩阵)把 n 元实二次型化成标准形的问题，称为把二次型化到主轴上去的问题. 简称二次型的主轴问题. 任一 n 元实二次型，通过正交线性代换，可以化为标准形

$$\sum_{i=1}^{n}d_ix_i^2,$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是其矩阵的特征值. 具体作法是：先求出此实二次型矩阵的特征值与特征向量(必有 n 个线性无关的)，再用施密特正交化法将 n 个线性无关的特征向量法正交化，即可求出欲求的正交矩阵.

甘凯连夫型(Ганкелев form) 一类特殊且有用的二次型. 用数列 $s_0,s_1,\cdots,s_{2n-2}$ 给出的 n 元二次型：

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,k=0}^{n-1}s_{i+k}x_ix_k$$

称为甘凯连夫型. 它的矩阵

$$S=\begin{pmatrix}s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1}\\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2}\end{pmatrix}$$

称为甘凯连夫矩阵.

甘凯连夫矩阵(Ганкелев matrix) 见"甘凯连夫型".

盖尔什果林圆盘定理(Gersgorin disk theorem) 矩阵理论中关于特征值分布的经典定理. 它在涉及到矩阵特征值计算的各个领域里有着广泛的应用价值和重要的理论意义. 经典的圆盘定理主要是指下述两个定理：

1. 设 $A=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$，则 A 的任一特征值 λ 都属于复平面上 n 个圆盘

$$G_i:|z-a_{ii}|\leqslant \Lambda_i=\sum_{k\neq i}|a_{ik}|\quad(1\leqslant i\leqslant n)$$

的并集中，即

$$\lambda\in\bigcup_{i=1}^{n}G_i.$$

2. 若 $A=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$，$D_r$ 是

$$G=\bigcup_{i=1}^{n}G_i$$

中 r 个圆盘组成的区域，且有 $D_r\cap(G\setminus D_r)=\varnothing$，则在 D_r 中恰含 A 的 r 个特征值（对角元有相同时重复计算，特征值相同时也重复计算）.

圆盘定理是由盖尔什果林（ГершгоринС. А.）于1931 年给出的，经过半个世纪的发展，这一理论无论从形式上，还是从内容上都有了很大的推进，其结果被迅速应用到数值计算、稳定理论等许多领域里.下述三个结论是常用的圆盘定理之推广：

1. 卡西尼卵形域包含定理：若 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则 A 的任一特征值 λ 都落在 $\binom{n}{2}$ 个卡西尼卵形域

$$O_{ij}:|z-a_{ii}||z-a_{jj}|\leqslant\Lambda_i\Lambda_j$$
$$(1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j)$$

的并集中，式中

$$\Lambda_i=\sum_{k\neq i}|a_{ik}|\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

2. 奥斯乔夫斯基包含定理：若 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$0\leqslant\alpha\leqslant1,p\geqslant1,q\geqslant1,p^{-1}+q^{-1}=1$，则 A 的任一特征值 λ 位于下述 n 个圆盘

$$\widetilde{G}_i:|z-a_{ii}|\leqslant R_{i,\alpha p}^{\alpha}(A)C_{i,(1-\alpha)q}^{1-\alpha}(A)\quad(1\leqslant i\leqslant n)$$

的并集中，式中

$$R_{i,\alpha p}(A)=\Big(\sum_{k\neq i}|a_{ik}|^{\alpha p}\Big)^{1/\alpha p},$$
$$C_{i,(1-\alpha)q}(A)=\Big(\sum_{k\neq i}|a_{ki}|^{(1-\alpha)q}\Big)^{1/(1-\alpha)q}$$
$$(1\leqslant i\leqslant n).$$

3. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$B=(b_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 满足：$b_{ij}\geqslant|a_{ij}|$，$1\leqslant i,j\leqslant n$，则 A 的任一特征值 λ 位于下述 n 个圆盘

$$\hat{G}_i:|z-a_{ii}|\leqslant\rho(B)-b_{ii}\quad(1\leqslant i\leqslant n)$$

的并集中，式中 $\rho(B)$ 表 B 之谱半径，即 B 之特征值的最大模.

卡西尼卵形域包含定理（Cassini oval inclusion theorem） 见“盖尔什果林圆盘定理”.

奥斯乔夫斯基包含定理（Ostrowski inclusion theorem） 见“盖尔什果林圆盘定理”.

对角占优矩阵（diagonally dominant matrix） 亦称优对角阵.是一种重要的矩阵.设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$.若

$$|a_{ii}|\geqslant\Lambda_i=\sum_{k\neq i}|a_{ik}|\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

则称 A 为对角占优矩阵，记为 $A\in D_0$；若 $A\in D_0$ 且上式中至少有一个严格不等号成立，A 还是不可约的，则称 A 为不可约对角占优矩阵，记为 $A\in I$；若上式中 n 个式子全是严格不等式，则称 A 为严格对角占优矩阵，记为 $A\in D$.利用矩阵之对角占优性质来估计其特征值的分布范围是一个极为实用而又具有重要理论意义的方法.这一方法可追溯到阿达马定理，即严格对角占优矩阵是非奇异的.时至今日，对这一方法的深入研究与探讨仍是矩阵理论的重要课题之一.利用矩阵对角占优性质研究其特征值分布有下列更好的结果.

若 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 满足 $A\in I\cup D$，则：

1. 若 $a_{ii}(1\leqslant i\leqslant n)$ 中有 p 个正数，$n-p$ 个负数，则 A 恰有 p 个特征值之实部为正，$n-p$ 个特征值之实部为负.

2. 若 $a_{ii}(1\leqslant i\leqslant n)$ 中有 p 个实部为正，$n-p$ 个实部为负，且或者 $|\mathrm{Re}a_{ii}|>\Lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$，或者 A 不可约同时 $|\mathrm{Re}a_{ii}|\geqslant\Lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$，

$$\sum_{i=1}^{n}|\mathrm{Re}a_{ii}|>\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i,$$

则上述 1 之结论仍成立（这里的 $\mathrm{Re}a_{ii}$ 表示复数 a_{ii} 的实部）.

优对角阵（diagonally dominant matrix） 即“对角占优矩阵”.

不可约对角占优矩阵（irreducible diagonally dominant matrix） 见“对角占优矩阵”.

严格对角占优矩阵（strongly diagonally dominant matrix） 见“对角占优矩阵”.

有非零元素链对角占优矩阵（diagonally dominant matrix with nonzeroelement chains） 不可约对角占优矩阵的推广，有更广泛的应用价值.该矩阵类于 1974 年由什瓦库麦（Shivakumar，P. N.）等首先引进.若 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 满足 $A\in D_0$，且

$$J=\{i\in N\,|\,|a_{ii}|>\Lambda_i\}\neq\varnothing,\ N=\{1,2,\cdots,n\},$$

对每一个 $i\overline{\in}J$，A 都有一个非零元素链 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_rj}\neq0$，使 $j\in J$，则称 A 为具有非零元素链对角占优矩阵.由定义，不可约对角占优矩阵是特殊的具有非零元素链的对角占优阵.纽曼（Neumann，M.）于 1979 年证明：在对角占优前提下，矩阵为广义严格对角占优的充分必要条件是矩阵为具有非零元素链对角占优阵.

下半严格对角占优矩阵（lower semistrictly diagonally dominant matrix） 对角占优矩阵的一个重要子类.设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}\cap D_0$，若满足

$$|a_{ii}|>\sum_{k=1}^{i-1}|a_{ik}|\quad(2\leqslant i\leqslant n),$$

则称 A 为下半严格对角占优矩阵.该矩阵由纽曼（Neumann，M.）于 1979 年首先引入.纽曼证明：矩阵 A 在对角占优假设下，为广义严格对角占优阵的充分必要条件是存在一 n 阶置换阵 P，使 PAP^T 为下半严格对角占优阵.进而，A 为具有非零元素链对角占优的充分必要条件是，存在一 n 阶置换阵 P，使 PAP^T 为下半严格对角占优阵.A 为不可约对角占优的充分必要条件是 A 不可约，且对某一 n 阶置换

阵 P,使 PAP^T 为下半严格对角占优阵.

广义严格对角占优矩阵(generalized strongly diagonally dominant matrix) 见“下半严格对角占优矩阵”.

共轭对角占优矩阵(conjugate diagonally dominant matrix) 对角占优矩阵类的推广.这一矩阵类的引进为利用对角占优来估计矩阵特征值分布提供了新的途径.设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,记

$$T=\frac{A+A^*}{2}=(t_{ij})_{n\times n}.$$

若 T 为对角占优阵,则称 A 为共轭对角占优阵;若 T 为严格对角占优阵,则称 A 为共轭严格对角占优阵.A 的特征值之实部介于埃尔米特矩阵 T 的最大与最小特征值之间.这样就可以利用 T 的对角占优性来估计 A 的特征值实部的界.类似地,可利用 $S=(A-A^*)/2\mathrm{i}$ 的特征值及对角占优性来估计 A 的特征值虚部的界.

共轭严格对角占优矩阵(conjugate strongly diagonally dominant matrix) 见“共轭对角占优矩阵”.

弱不可约对角占优矩阵(weak irreducible diagonally dominant matrix) 矩阵对角占优性的新的推广.设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,若 A 的方向图 $G(A)$之每一顶点 v_i 都属于 $G(A)$的某一环路

$$\gamma:\ v_i\to v_{v_{i_1}}\to\cdots\to v_{i_s}\to v_{i_{s+1}}=v_i\quad(s\geqslant 1),$$

则称 A 为弱不可约矩阵.下述两点等价于 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为弱不可约矩阵:

1. 存在 n 阶置换阵 P 使 $PAP^T=(A_{ij})_{m\times m}$,$A_{ij}\in\mathbf{C}^{n_i\times n_j}$ $(1\leqslant i,j\leqslant m)$,且 A_{ii}是 n_i 阶不可约阵,$1\leqslant i\leqslant m$,且$\sum\limits_{i=1}^{m}n_i=n$.

2. $B=(I+|A|)^{n-1}=(b_{ij})_{n\times n}$,对每一 $1\leqslant i\leqslant n$ 皆存在 $1\leqslant j_i\leqslant n$ 使 $b_{ij_i}b_{j_ii}\neq 0$,即 $G(B)$的每一顶点都在长为 2 的环路中.

弱不可约阵为不可约的充分必要条件是在等价表征上述 1 中矩阵$(A_{ij})_{m\times m}$为不可约阵.又设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$为弱不可约,若 A 满足

$$\prod_{i\in y}|a_{ii}|\geqslant\prod_{i\in y}\Lambda_i\quad(\gamma\in S(A)),$$

其中 $S(A)$表 $G(A)$中全部环路集合,则称 A 为弱不可约弱对角占优阵,记为 $A\in WD_0$;若在上式中的不等式皆是严格的,则称 A 为弱不可约严格对角占优阵,记为 $A\in WD$;若 $A\in WD_0$ 为不可约,且上式中至少对一个环路成立严格不等式,则称 A 为弱不可约对角占优阵,记为 $A\in WI$.弱不可约对角占优矩阵由布饶尔迪(Brualdi,R. A.)于 1982 年首先引入.利用这类矩阵给出的新的谱包含域,推进了经典的布饶尔(Brauer,A.)、奥斯乔夫斯基(Ostrowski,A. M.)等人的著名结果,成为一个重要的阶段性成果,具有十分重要的意义与广泛的应用价值.布饶尔迪证明:若 $A\in WD\cap WI$,则 A 非奇异.进而对弱不可约矩阵 A,其谱的包含域是下述区域的并集

$$D_\gamma=\Big\{z\,\Big|\prod_{i\in\gamma}|z-a_{ii}|\leqslant\prod_{i\in\gamma}\Lambda_i\Big\}\ (\gamma\in S(A)).$$

对任意 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,其谱的包含域是

$$\Big(\bigcup_{i\in N'}|z-a_{ii}|\leqslant\Lambda_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{\gamma\in S(A)}\prod_{i\in\gamma}|z-a_{ii}|\leqslant\prod_{i\in\gamma}\Lambda_i\Big),$$

式中 N'表 $G(A)$中不在任何环路之顶点的足码集.

弱不可约严格对角占优矩阵(weakly irreducible strongly diagonally dominant matrix) 见“弱不可约对角占优矩阵”.

块对角占优矩阵(block diagonally dominant matrix) 对角占优矩阵对高阶分块矩阵的推广.设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$分块为

$$A=(A_{ij})_{m\times m}\ \Big(A_{ij}\in\mathbf{C}^{n_i\times n_j},1\leqslant i,j\leqslant m,\sum_{i=1}^{m}n_i=n\Big).$$

若每一 A_{ii}皆非奇异且满足

$$(\|A_{ii}^{-1}\|)^{-1}\geqslant\sum_{k\neq i}\|A_{ik}\|\quad(1\leqslant i\leqslant m),$$

则称 A 为块对角占优阵,记为 $A\in BD_0$;若上式中每个不等式都是严格的,则称 A 为块严格对角占优阵,记为 $A\in BD$;若 $A\in BD_0$ 且 $A=(A_{ij})_{m\times m}$为块不可约阵,上式中至少有一个不等式是严格的,则称 A 为块不可约对角占优阵,记为 $A\in BI$.又,若

$$A=(A_{ij})_{m\times m}\in\mathbf{C}^{n\times n}$$

$$\Big(A_{ij}\in\mathbf{C}^{n_i\times n_j},(1\leqslant i,j\leqslant m),\sum_{i=1}^{m}n_i=n\Big),$$

则:

1. 若 $A\in BD\cup BI$,则 $\det A\neq 0$.

2. 若 $\sigma(A)$表 A 的谱(即特征值集合),

$$\widetilde{G}_i=\Big\{z\,\Big|\inf_{\|x\|=1}\|(A_{ii}-zI_{ni})x\|\leqslant\sum_{k\neq i}\|A_{ik}\|\Big\}\quad(1\leqslant i\leqslant m),$$

则 $\sigma(A)\subseteq\widetilde{G}=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\widetilde{G}_i$.

3. 若 $H=\bigcup\limits_{j=1}^{s}\widetilde{G}_{p_j}$,$1\leqslant p_j\leqslant m$,$1\leqslant j\leqslant s$,且 H 满足 $H\cap(\widetilde{G}\setminus H)=\varnothing$,则 H 恰含 A 的 $\sum\limits_{j=1}^{s}n_{p_j}$个特征值.

4. $\sigma(A)\subseteq\bigcup\limits_{i\neq j}\widetilde{G}_{ij}$,

$$\widetilde{G}_{ij}=\Big\{z\,\Big|\big(\inf_{\|x\|=1}\|(A_{ii}-zI_{ni})x\|\big)\cdot\big(\inf_{\|x\|=1}\|(A_{jj}-zI_{nj})x\|\big)\leqslant\Big(\sum_{k\neq i}\|A_{ik}\|\Big)\Big(\sum_{k\neq j}\|A_{jk}\|\Big)\Big\}$$

$$(1\leqslant i,j\leqslant m,i\neq j).$$

块对角占优矩阵是由费恩歌尔德(Feingold,D. G.)

及瓦尔加(Varga,R. S.)于 1962 年首先引入的,他们由此给出了相应的矩阵谱包含域及若干谱分布定理,推广了经典的圆盘定理,成为重要的阶段性成果,具有重要的理论意义与广泛的应用价值.

块严格对角占优矩阵(block strongly diagonally dominant matrix) 见“块对角占优矩阵”.

块不可约对角占优矩阵(block irreducible diagonally dominant matrix) 见“块对角占优矩阵”.

广义对角占优矩阵(generalized diagonally dominant matrix) 包含对角占优矩阵类在内的一个更广的矩阵类. 设 $A=(a_{ij})\in \mathrm{C}^{n\times n}$,若存在一个正对角矩阵 G 使 $B=AG$ 为对角占优矩阵,则称 A 为广义对角占优矩阵,记为 $A\in GD_0$;若 B 为严格对角占优矩阵,则称 A 为广义严格对角占优矩阵,记为 $A\in GD$. 由定义,$A\in GD_0(GD)$ 当且仅当 A 正对角相似于对角占优矩阵. 因此,该矩阵类保持着对角占优矩阵类的谱性质.

广义对角占优矩阵大部分是与对角占优相关的矩阵,例如非零元素链对角占优矩阵,弱不可约对角占优矩阵等,几乎都是广义(严格)对角占优矩阵. 由于该矩阵类保持着对角占优矩阵类的重要谱性质,同时这一概念又与 M 矩阵有密切关系,因此,它的研究具有重要的理论意义及实际应用价值,近年来出现许多优秀成果. 费德勒(Fiedler,M.)与浦达克(Ptak,V.)于 1962 年给出了 M 矩阵的一个重要等价表征:一个 Z 矩阵(非对角元均非负的实矩阵)A 为 M 矩阵的充分必要条件是 A 为广义严格对角占优阵. 这一重要的结论使得广义严格对角占优矩阵的等价表征就成为其比较阵为 M 矩阵的等价表征问题.

稳定矩阵(stable matrix) 亦称李亚普诺夫稳定矩阵. 在诸多方面有重要应用价值的一类矩阵. 设 $A\in \mathrm{C}^{n\times n}$,若 A 的特征值实部皆负,则称 A 为稳定矩阵. 相应地,特征值实部皆正的复方阵称为正稳定矩阵. 关于稳定矩阵的研究近一个世纪以来十分活跃,成果也非常广泛,其中等价表征的讨论又是其主要课题. 若 $A\in \mathrm{C}^{n\times n}$,且 $B=(I-A)^{-1}(I+A)$,则下述各点等价于 A 为稳定矩阵:

1. B 存在,B 为稳定矩阵,且 $\rho(B)<1$.

2. B 存在,且对任意正定阵 V,矩阵方程

$$H-BHB^*=V$$

总有正定解 H.

3. B 存在,且对任意正定阵 V,级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} B^k V(B^*)^k$$

收敛.

4. 存在正定阵 H,使得 $AH+HA^*$ 为负定阵.

5. 对任意正定阵 W,矩阵方程

$$AH+HA^*=-W$$

有正定解 H.

6. 存在正定阵 W,使得 $WAW^{-1}+W^{-1}A^*W$ 为负定阵.

7. 存在非奇异矩阵 T,使得 TAT^{-1} 的实部为负定阵.

8. 存在正定阵 P,Q 及反埃尔米特矩阵 S(即 S 满足 $S^*=-S$),使得 $A=P(S-Q)$.

李亚普诺夫(Ляпунов,A. M.)于 1892 年的博士论文中,开创性地提出求解非线性常微分方程的李亚普诺夫函数法,亦称直接法,建立了矩阵稳定性的概念及等价表征. 这一方法在自动控制、系统问题、微分方程、力学、经济学等科学技术的许多领域中得到广泛的应用和发展,也奠定了常微分方程稳定性理论的基础.

李亚普诺夫稳定矩阵(Liapunov stable matrix) 即“稳定矩阵”.

正稳定矩阵(positive stable matrix) 见“稳定矩阵”.

李亚普诺夫正对角稳定矩阵(Liapunov psitive diagonally stable matrix) 亦称 VL 稳定阵. 简称对角稳定阵. 一类特殊的正稳定矩阵. 设 $A\in \mathrm{R}^{n\times n}$,若存在一个正对角阵 D,使得 $DA+A^TD$ 为正定阵,则称 A 为对角稳定的. 下述各点等价于实方阵 A 为对角稳定阵:

1. 存在一正对角阵 D,使得对任意 $0\neq x\in \mathrm{R}^n$ 总有 $x^TADx>0$.

2. 存在一正对角阵 D,使 $D^{-1}AD$ 为正定阵.

3. A^{-1} 为对角稳定阵.

4. 对每个正对角阵 E,AE 与 EA 皆对角稳定.

5. 对每个非零半正定阵 B,BA 有一个正对角元. 在数理经济学、生态学、动力系统以及数值分析中有着重要的应用.

VL **稳定阵**(VL stable matrix) 见“李亚普诺夫正对角稳定矩阵”.

对角稳定阵(diagonally stable matrix) 即“李亚普诺夫正对角稳定矩阵”.

强稳定矩阵(strongly stable matrix) 一种特殊的正稳定矩阵类. 它包含着对角稳定矩阵类. 若 $A\in \mathrm{R}^{n\times n}$,对任意非负对角矩阵 D,总有 $A+D$ 为正定矩阵,则称 A 为强稳定矩阵. 若 A 为强稳定矩阵,则 A 的任意主子阵均为强稳定矩阵. 若 A 为强稳定矩阵,则 A 的各阶主子式皆正,即 A 为 P 矩阵.

D **稳定矩阵**(D-stable matrix) 一种特殊的正稳定矩阵类,且包含着对角稳定矩阵类. 若 $A\in \mathrm{R}^{n\times n}$,对所有正对角矩阵 D,AD 总为正稳定阵,则称 A 为 D 稳定矩阵. 若 $A\in \mathrm{R}^{n\times n}$为 D 稳定阵,则:

1. 对每一 $0\neq x\in \mathrm{R}^n$,存在一个正对角阵 D_x,使

得 $x^T D_x A x \geqslant 0$.

2. A 的任一主子阵均为 D 稳定阵.

3. A 的任一主子式非负，即 A 为 P_0 矩阵.

矩阵张量积的圆盘定理(disk theorems of tensor product of matrices) 复方阵圆盘理论在矩阵张量积上的推广及应用. 因为是由张量积的低阶矩阵的相关量来表示张量积的特征值分布，所以较之直接对张量积应用圆盘定理更方便. 佟文廷于 1980 年给出了矩阵张量积圆盘定理之主要结果：设

$$A = (a_{ij}) \in \mathrm{C}^{n\times n}, \quad R_i(A) = \sum_k |a_{ik}|,$$

$$R(A) = \max_i R_i(A), \quad \Lambda_i(A) = \sum_{k\neq i} |a_{ik}|,$$

$$D_i(A) = \{z \mid |z - a_{ii}| \leqslant \Lambda_i(A)\} \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

1. 若 $A \in \mathrm{C}^{n\times n}, B \in \mathrm{C}^{n\times n}$，则

$$\sigma(A \otimes B) \subseteq D(A \otimes B) = \{z \mid |z| \leqslant R(A)R(B)\}.$$

2. $\Lambda_{ij}(A \otimes B) = |a_{ii}| \Lambda_j(B) + |b_{jj}| \Lambda_i(A) + \Lambda_i(A)\Lambda_j(B)$，若 $D_{ij} = \{z \mid |z - a_{ii}b_{jj}| \leqslant \Lambda_{ij}(A \otimes B)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$，则 $\sigma(A \otimes B) \subseteq \bigcup_{i,j} D_{ij}$.

3. 若 $O_{ij} = \{z \mid |z - a_{ii}| |z - b_{jj}| \leqslant \Lambda_i(A)\Lambda_j(B)\}$ $(1 \leqslant i \leqslant n 1 \leqslant j \leqslant m)$，则 $\sigma(A \otimes B) \subseteq \bigcup_{i,j} O_{ij}$.

矩阵张量积的不可约性(irreducibility of tensor product of matrices) 矩阵张量积谱分布理论的基本概念. 通过做成张量积的低阶矩阵之不可约性表征张量积的不可约性是矩阵张量积不可约性的主要内容. 设 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{C}^{n\times n}, B = (b_{ij}) \in \mathrm{C}^{m\times m}$，下述各条均等价于 $A \otimes B$ 不可约：

1. A, B 皆不可约，且满足存在 A 的一个长为 r_1 的非零元素闭链 $a_{fe_1} a_{e_1 e_2} \cdots a_{e_{r_1-1} f}$，$B$ 的一个长为 r_2 的非零元素闭链 $b_{ts_1} a_{s_1 s_2} \cdots b_{s_{r_2-1} t}$，使 $(r_1, r_2) = 1$.

2. A, B 皆不可约，有互素的正整数 r_1, r_2 使 $|A|^{r_1}$ 及 $|B|^{r_2}$ 之对角元不全为零，

$$|A| = (|a_{ij}|)_{n\times n}, \quad |B| = (|b_{ij}|)_{m\times m}.$$

上述结果是逄明贤、孙玉祥于 1987 年得到的.

矩阵张量积的特征值分布(eigenvalue distribution of tensor product of matrices) 估计矩阵张量积特征值分布的基本方法之一. 指利用做成张量积的矩阵的对角占优性讨论张量积的特征值分布. 下述两个结果是基本的：

1. 若 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{C}^{n\times n}, b = (b_{ij}) \in \mathrm{C}^{m\times m}$ 满足：

$$|a_{ii}| = \alpha_i \Lambda_i(A), \ \alpha_i > 1, 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$|b_{jj}| = \beta_j \Lambda_j(B), \ \beta_j > 1, 1 \leqslant j \leqslant m,$$

且 $\alpha = \min_i \alpha_i, \beta = \min_j \beta_j$ 使得 $\alpha\beta > \alpha + \beta + 1$，并在 a_{ii} 中有 r_1 个正数，$n - r_1$ 个负数，在 b_{jj} 中有 r_2 个正数，$m - r_2$ 个负数，则 $A \otimes B$ 之特征值中恰有 $r_1 r_2 + (n - r_1)(m - r_2)$ 个实部为正；$r_1(m - r_2) + r_2(n - r_1)$ 个实部为负.

2. 若以 $\mathrm{Re}\, a_{ii}$ 代替上述 1 中的 a_{ii}，以 $\mathrm{Re}\, b_{jj}$ 代替上述 1 中的 b_{jj}，而满足上述 1 的全部假设条件，则上述 1 的结论仍然成立.

非齐次特征值(inhomogeneous eigenvalue) 通常特征值问题在实方阵集合里的推广. 实方阵之非齐次特征值问题在约束特征值问题、微分方程稳定性问题的研究中有着广泛的应用. 设 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{R}^{n\times n}, b \in \mathrm{R}^n, s > 0$ 为给定的实数，称同时满足 $Ax = \lambda x + b$ 及 $x^T x = s$ 的实数 λ 及 $x \in \mathrm{R}^n$ 为 A 的非齐次特征值及相应的非齐次特征向量. 于是，实数 λ 同时是 A 的非齐次特征值及特征值的充分必要条件是 b 正交于 A 的任意对应于 λ 的左特征向量. 关于实方阵的非齐次特征值问题有以下几个基本结论：

1. 若 A 至少有一个实特征值 λ，且 b 不正交于 A 对应于 λ 的左特征向量，则 A 至少有两个非齐次特征值.

2. 非对称实方阵 A，若有 k 个(包括重数)非齐次特征值，则：

1) k 为偶数，$0 \leqslant k \leqslant n$.

2) 若 $\sigma(A) \subset \mathrm{R}$，且 $k = 2n$，则 A 的非齐次特征值以 A 的最大及最小特征值为其上界与下界.

3) 若 A 的特征值全为虚数，则 k 可能为 0.

3. 若有 $1 \leqslant i_0 \leqslant n$，使

$$b_{i_0}^2 > s^2 \sum_{j=1}^n a_{ij}^2,$$

则 A 至少有两个非齐次特征值，式中 $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \in \mathrm{R}^n$ 以及 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{R}^{n\times n}$.

块复合矩阵的块特征值(block eigenvalues of block compound matrices) 通常特征值问题的重要推广，具有十分重要的理论意义及广泛的应用价值. 设 $P_n(C)$ 表示所有两两可换的 n 阶复方阵集合，$M_{p,q}(P_n)$ 表示所有分为 $p \times q$ 块，且每一子块都属于 $P_n(C)$ 的块复合矩阵集合，特别地，当 $p = q = m$ 时，简记为 $M_m(P_n)$. 若对 $A \in M_m(P_n)$，存在 $\Lambda \in P_n(C)$ 及(列)满秩矩阵 $X \in M_{m,1}(P_n)$，使得 $AX = X\Lambda$，则称 Λ 为 A 的块特征值，X 为相应于 Λ 的块特征向量. 于是，当 $n = 1$ 时，块特征值问题即是通常的特征值问题，因此，研究块特征值问题具有十分重要的意义. 下述关于 $A = (A_{ij}) \in M_m(P_n)$ $(A_{ij} \in P_n(C), 1 \leqslant i, j \leqslant m)$ 的块特征值问题的结论是基本的：

1. 若 $\hat{\sigma}(A)$ 为 A 的块特征值集合，$\mathrm{Det}\, A$ 表以 A_{ij} 为元素的形式行列式，则有

$$\bigcup_{\Lambda \in \hat{\sigma}(A)} \sigma(\Lambda) \subseteq \sigma(A), \quad \mathrm{Det}\, A \in P_n(C)$$

且 $\det A = \det(\mathrm{Det}\, A)$.

2. 若 A 非奇异，$\Lambda \in \hat{\sigma}(A)$，$X$ 为相应块特征向

量，则 $\Lambda^{-1}\in P_n(C)$ 是 $A^{-1}\in M_m(P_n)$ 之相应于块特征向量 X 的块特征值.

3. A 的任一块特征值 Λ 位于下述区域

$$\hat{G}_i:\left\{Z\in P_n(C)\mid \sum_{k\neq i}\|(Z-A_{ii})^{-1}A_{ik}\|\geqslant 1\right\}\quad(1\leqslant i\leqslant m)$$

的并集中.

4. 若每一 A_{jj} 非奇异 $(1\leqslant j\leqslant m)$，则对 A 的任一块特征值 $\Lambda\in P_n(C)$ 有

$$\|\Lambda\|\geqslant\min_j\left\{\frac{1-\sum_{k\neq j}\|A_{jj}^{-1}A_{jk}\|}{\|A_{jj}^{-1}\|}\right\}.$$

矩阵的数值域(numerical range of a matrix) 矩阵理论的重要概念. 对于矩阵特征值之估计有着尤为突出的应用价值. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，称 $W(A)=\{x^*Ax\mid x\in\mathbb{C}^n,x^*x=1\}$ 为 A 的数值域. 由于 $\sigma(A)\subseteq W(A)$，所以，寻找矩阵数值域的包含域，特别是最小包含域，就具有十分重要的意义. 特普利茨(Toeplitz, O.)、马库斯(Marcus, M.)、约翰逊(Johnson, C. R.)等给出了有关矩阵数值域的下述基本结论：

1. $W(A)$ 是复平面内的凸集，且 $W(A)$ 为 $\sigma(A)$ 之闭凸包的充分必要条件是 A 为正规阵或 A 酉等价于 $A_1\oplus A_2$，$W(A_2)\subseteq W(A_1)$.

2. $W(A)\subset\mathbb{R}$ 的充分必要条件是 A 为埃尔米特阵.

3. $W(A)\subseteq[a,b]\times[c,d]$，式中

$$a=\min_i\lambda_i,\ b=\max_i\lambda_i,$$
$$c=\min_i\mu_i,\ d=\max_i\mu_i,$$
$$\sigma\left(\frac{(A+A^*)}{2}\right)=\{\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\}.$$
$$\sigma\left(\frac{(A-A^*)}{2\mathrm{i}}\right)=\{\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n\}.$$

4. 若 $A=A_1+\mathrm{i}A_2$，$A_1,A_2\in\mathbb{R}^{n\times n}$，则上述结论 3 中的矩形包含域又可由

$$a=\min_i\tilde{\lambda}_i,\ b=\max_i\tilde{\lambda}_i,$$
$$c=\min_i\tilde{\mu}_i,\ d=\max_i\tilde{\mu}_i,$$
$$\sigma((H(A))=\{\tilde{\lambda}_1\geqslant\tilde{\lambda}_2\geqslant\cdots\geqslant\tilde{\lambda}_n\},$$
$$\sigma(K(A))=\{\tilde{\mu}_1\geqslant\tilde{\mu}_2\geqslant\cdots\geqslant\tilde{\mu}_n\}$$

给出；式中

$$H(A)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}A_1+A_1^T & A_2^T-A_2\\ A_2-A_2^T & A_1+A_1^T\end{bmatrix},$$

$$K(A)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}A_2+A_2^T & A_1^T-A_1\\ A_1^TA_1 & A_2+A_2^T\end{bmatrix}.$$

5. $W(A)=\bigcap_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\{z\mid\mathrm{Re}\,z\leqslant\lambda_1(H\theta)\}$，式中

$$\sigma(H_\theta)=\{\lambda_1(H_\theta)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(H_\theta)\},$$

$$H_\theta=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}A+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}A)^*)/2.$$

6. 若 $A_{xy}=\begin{bmatrix}(Ax,x) & (Ay,x)\\ (Ax,y) & (Ay,y)\end{bmatrix}$，$x\in\mathbb{R}^n$，$y\in\mathbb{R}^n$ 满足 $(x,x)=(y,y)=1$，$(x,y)=0$，则

$$W(A)=\bigcup_{\substack{\|x\|=\|y\|=1\\(x,y)=0}}W(A_{xy}).$$

7. 若 $\sigma((A_1+A_1^T)/2)=\{\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\cdots\geqslant\alpha_n\}$，$\sigma((A_2+A_2^T)/2)=\{\beta_1\geqslant\beta_2\geqslant\cdots\geqslant\beta_n\}$，则

$$W(A)\subseteq[a_1,b_1]\times[c_1,d_1].$$

式中

$$a_1=2\alpha_n-\alpha_1-\rho((A_2-A_2^T)/2),$$
$$b_1=2\alpha_1-\alpha_n+\rho((A_2-A_2^T)/2),$$
$$c_1=2\beta_n-\beta_1-\rho((A_1-A_1^T)/2),$$
$$d_1=2\beta_1-\beta_n+\rho((A_1-A_1^T)/2).$$

矩阵的数值半径(numerical radius of a matrix) 与矩阵数值域紧密相关的重要概念. 它对于估计矩阵特征值分布有十分重要的意义. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，称

$$r(A)=\max_{z\in W(A)}|z|$$

为 A 的数值半径，式中 $W(A)$ 表 A 的数值域. 约翰逊(Johnson, C. R.)、马库斯(Marcus, M.)等给出了下述基本结论：

1. $$\frac{1}{2}\|A\|\leqslant r(A)\leqslant\frac{1}{2}\max_i\left\{\sum_j|a_{ij}|+\sum_j|a_{ji}|\right\}.$$

2. $r(A_k)\leqslant r(A)\leqslant r(|A|)=\rho(\mathrm{Re}|A|)$，式中 A_k 表任一 k 阶主子阵，$\mathrm{Re}|A|=(|A|+|A|^T)/2$.

3. 当 A 为正规阵时，$r(A)=P(A)=\|A\|$.

4. 若 $A=(A_{ij})_{m\times m}$，$A_{ij}\in\mathbb{C}^{n_i\times n_j}$ $(1\leqslant i,j\leqslant m)$，且

$$\sum_{i=1}^m n_i=n,$$

则 $r(A)\leqslant r(\|(A_{ij})_{m\times m}\|)$.

***k* 数值域**(k-numerical range) 一般数值域的推广. 包含经典数值域在内，因此具有更广泛的应用价值. 若 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\Lambda_k$ 表 $\mathbb{C}^n$ 中 k 个规格化正交的向量组集合，则称

$$W_k(A)=\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k x_j^*Ax_j\mid(x_1,\cdots,x_k)\in\Lambda_k\right\}$$

为 A 的 k 数值域. 由定义，$W_1(A)=W(A)$. 相应地，k 数值半径定义为

$$r_k(A)=\max_{Z\in W_k(A)}|Z|.$$

矩阵的 k 数值域及 k 数值半径同经典的数值域与数值半径有下述基本关系(记 $\mathrm{tr}A$ 表示 A 的迹)：

$$\left\{\frac{1}{n}\mathrm{tr}A\right\}=W_n(A)\subset\cdots\subset W_2(A)\subset W_1(A)=W(A),$$

$$\frac{1}{n}|\mathrm{tr}A|=r_n(A)\leqslant\cdots\leqslant r_2(A)\leqslant r_1(A)$$
$$=r(A).$$

谱矩阵(spectral matrix) 同矩阵的数值半径相关的重要矩阵类. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,若 A 满足 $r(A)=\rho(A)$,则称 A 为谱矩阵,记为 $A\in S_p$. 研究谱矩阵的等价表征是具有重要意义的工作. 哥尔德贝格(Geldberg,M.)及佟文廷等给出了谱矩阵的一些重要等价表征. 下述各点等价于 $A\in S_p$:

1. 若 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 之最小多项式的次数为 p,则对某一正整数 $m\geqslant p$ 有 $r(A^m)=[r(A)]^m$.

2. 若 p 为 A 之最小多项式的次数,则对任意具有非负系数的次数 $m\geqslant p$ 之多项式

$$P_m(x)=\sum_{j=0}^{m}\alpha_j x^j,$$

总有 $P_m(r(A))=r(P_m(A))$.

径向矩阵(radial matrix) 一类特殊矩阵. 它是起源于带初始值的有界差分稳定性问题的研究中. 设 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$,若 A 满足 $\rho(A)=\|A\|$,则称 A 为径向矩阵. 哥尔德贝格(Geldberg,M.)、佟文廷以及浦达克(Ptak,V.)对径向矩阵给出了一系列重要结果. 下述各点等价于 A 为径向矩阵:

1. $\|A^n\|=\|A\|^n$.

2. $\rho^2(A)I-A^*A$ 为正半定矩阵.

3. $\rho(A^*A)=\rho^2(A)$.

4. $\|A^m\|=\|A\|^m,m\geqslant p,p$ 为最小多项式次数.

5. 有酉阵 U 使

$$UAU^*=\begin{bmatrix}\Lambda & 0\\ 0 & B\end{bmatrix},$$

$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s)$,$|\lambda_1|=|\lambda_2|=\cdots=|\lambda_5|=\rho(A)$,

$$B=\begin{bmatrix}\lambda_{s+1} & & 0\\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

$\rho(A)>|\lambda_{s+1}|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|,\sigma(A)=\{\lambda_i,1\leqslant i\leqslant n\}$.

非负矩阵(nonnegative matrix) 一类重要矩阵. 由非负数排成的矩阵. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$,若满足 $a_{ij}\geqslant 0,1\leqslant i,j\leqslant n$,则称 A 为非负矩阵. 特别地,若 $a_{ij}>0,1\leqslant i,j\leqslant n$,则称 A 为正矩阵. 非负矩阵可分为不可约与可约两大类. 因为每个非负可约阵都可表为非负不可约矩阵序列之极限,所以只须重点讨论非负不可约矩阵的谱性质. 佩龙(Perron,O.)于 1907 年首先发现了正矩阵的谱性质,弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F. G.)于 1912 年扩大并推广佩龙结果到非负不可约矩阵上,建立了完善的理论. 非负矩阵的理论是矩阵理论的基础之一,它在数理经济、控制理论、纯性系统稳定性理论以及随机理论等许多领域有着广泛的应用.

正矩阵(positive matrix) 见"非负矩阵".

非负不可约矩阵的谱(spectrum of a nonnegative irreducible matrix) 非负矩阵理论中的基本研究对象. 同时,它的许多结果也被应用于矩阵谱理论中. 若非负矩阵 A 为不可约,则称 A 为非负不可约矩阵. 非负不可约矩阵的谱理论是由佩龙(Perron,O.)及弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F. G.)创立的,经过 80 年的发展现在已经比较完善. 下述结论是非负不可约矩阵的基本谱性质:

1. $\rho(A)>0$ 是 A 的单重特征值,随 A 的元素之增加而严格增加,且存在对应于 $\rho(A)$ 的左、右正特征向量;进而,若 A 还是本原的,则对任意 $\lambda\neq\rho(A),\lambda\in\sigma(A)$ 皆有 $|\lambda|<\rho(A)$,且有

$$\lim_{k\to\infty}[\rho(A)]^{-k}A^k=(v^Tw)^{-1}(wv^T)=E(A),$$

式中 v,w 满足 $Aw=\rho(A)w,v^TA=\rho(A)v^T,w>0,v>0$.

2. 若 $\lambda_2(A)$ 是 A 的次大模特征值(即 $|\lambda|\leqslant|\lambda_2(A)|<\rho(A),\forall\lambda\in\sigma(A),\lambda\neq\rho(A)$),$0<w$ 满足 $Aw=\rho(A)w$,且记

$$\tau(A)=\max_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ x^Tw=0}}\|x^TA\|,$$

则

$$\begin{aligned}\tau(A)\geqslant\lambda_2(A)&=\lim_{k\to\infty}[\tau(A^k)]^{\frac{1}{k}}\\&=\inf_k[\tau(A^k)]^{\frac{1}{k}}\\&=\rho[A(I-E(A)]\\&=\rho[A-\rho(A)E(A)],\end{aligned}$$

并且,当 $\alpha^Tw=\rho(A)$)时,

$$\lambda_2(A)=\rho(A-w\alpha^T),$$
$$\lambda_2(A)\leqslant\rho(A-w\alpha^T)\quad(\forall\alpha\in\mathbf{R}^n).$$

3. 若 $a=\min\limits_i a_{ii},P_{n-1}(A)$ 为 A 之所有 $n-1$ 阶主子阵之最大谱半径,则对任意 $\lambda\in\sigma(A)$ 有下述不等式

$$|\lambda-a|\leqslant\rho(A)-a,$$
$$|\lambda-\rho_{n-1}(A)|\geqslant\rho(A)-\rho_{n-1}(A),$$

等号成立的充分必要条件是 $\lambda=\rho(A)$.

非负矩阵的谱半径(spectral radius of a nonnegative matrix) 非负矩阵理论中的重要概念. 关于非负矩阵谱半径的估计是一个十分活跃的研究课题,其成果及方法已涉及到许多方向,同时在实际计算中也已得到了广泛的应用. 下述基本结论是由佩龙(Perron,O.)、弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F. G.)以及布饶尔(Brauer,A.)等人给出的. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$:

1. 若 $R(A)=\max\limits_i\sum\limits_k a_{ik},r(A)=\min\limits_i\sum\limits_k a_{ik}$,则

$$r(A)\leqslant\rho(A)\leqslant R(A),$$

并且,当 A 不可约时,或同时成立等号,或同时成立不等号,进而

$$\lim_{k\to\infty}[r(A^k)]^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}[R(A^k)]^{\frac{1}{k}} = \rho(A).$$

2. 若

$$M_{ij}=\frac{1}{2}\{a_{ii}+a_{jj}+[(a_{ii}-a_{jj})^2+4\Lambda_i\Lambda_j]^{\frac{1}{2}}\},$$

$$M(A)=\max_{i\neq j}M_{ij}, m(A)=\min_{i\neq j}M_{ij},$$

$$\Lambda_i=\sum_{k\neq i}a_{ik}\ (1\leqslant i,j\leqslant n, i\neq j),$$

则 $m(A)\leqslant\rho(A)\leqslant M(A)$.

3. 若 A 分块为 $A=(A_{ij})_{m\times m}$, $0\leqslant A_{ij}\in R^{n_i\times n_j}$ ($1\leqslant i,j\leqslant m$), $\sum_{i=1}^{m}n_i=n$, 又 p_{ij} 及 q_{ij} 分别表 A_{ij} 的最小与最大行和,且 $P(A)=(p_{ij})_{m\times m}$, $Q(A)=(q_{ij})_{m\times m}$, 则

$$\rho(P(A))\leqslant\rho(A)\leqslant\rho(Q(A)),$$

并且,当 A 不可约时,或同时成立等号,或同时成立不等号.

4. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m\in\mathsf{R}^{k\times k}$, $(A_s)_{ij}$ 表 $A_s(i,j)$ 元 ($1\leqslant s\leqslant m, 1\leqslant i,j\leqslant k$), 且记

$$(\bigwedge_{s=1}^{m}A_s)_{ij}=\min_s(A_s)_{ij},\ (\bigvee_{s=1}^{m}A_s)_{ij}=\max_s(A_s)_{ij},$$

若 A 分块为 $A=(A_{ij})_{m\times m}$, $0\leqslant A_{ij}\in\mathsf{R}^{k\times k}$ ($k=n/m$) 为正整数,则

$$\rho(\bigwedge_{i=1}^{m}R_i(A))\leqslant\rho(A)\leqslant\rho(\bigvee_{i=1}^{m}R_i(A)),$$

式中 $R_i(A)=\sum_{k=1}^{m}A_{ik}$ ($1\leqslant i\leqslant m$),并且,当 A 不可约时,或同时成立等号,或同时成立不等号.

5. 若 B_k 为 A 之 k 阶顺序主子阵

$$R_i=\sum_{j=k+1}^{n}a_{ij}\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

且 $b_k=(R_1,R_2,\cdots,R_k)^T$, $C_p=(a_{p1},a_{p2},\cdots,a_{pk})$, 记

$$A_p=\begin{bmatrix}B_k & b_k\\ C_p & R_p\end{bmatrix}\quad(p=k+1,\cdots,n),$$

则 $\min_p\rho(A_p)\leqslant\rho(A)\leqslant\max_p\rho(A_p)$.

6. 樊𪩘给出了利用非负矩阵谱半径估计矩阵谱的包含域的著名公式:若 $A=(a_{ij})\in\mathsf{C}^{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$ 满足 $|A|\leqslant B$, 则

$$\sigma(A)\subset\bigcup_{i=1}^{n}\{z\mid |z-a_{ii}|\leqslant\rho(B)-b_{ii}\}.$$

本原矩阵(primitive matrix) 亦称素矩阵.非负不可约矩阵的重要子类.它同循环阵共同组成了非负不可约矩阵类.若一个 n 阶非负不可约矩阵 A 的模为 $\rho(A)$ 的特征值个数为 1,则称 A 为本原矩阵.本原阵最重要的等价表征是存在一个正整数 k 使 $A^k>0$.罗马诺夫斯基(Romanovsky,V.)于 1936 年给出了一个用图论方法确定本原阵的方便方法:若 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$ 不可约,S_i 表示方向图 $G(A)$ 中过顶点 u_i 之环路长 m_i 之集合,k_i 表示所有 m_i 之最大公约数,则当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=1$ 时,A 为本原阵;当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=k>1$ 时,A 为循环矩阵.

素矩阵(primitive matrix) 即"本原矩阵".

循环矩阵(cyclic matrix) 非负不可约矩阵的另一个重要子类.若一个 n 阶非负不可约矩阵 A 的模为 $\rho(A)$ 的特征值个数 $k>1$,则称 A 为循环指数为 k 的循环矩阵.若 n 阶非负不可约矩阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n_1}+a_2\lambda^{n_2}+\cdots+a_h\lambda^{n_h}$, $a_1,a_2,\cdots,a_h\neq 0$, $n>n_1>\cdots>n_h\geqslant 0$, 则 $n-n_1$, $n_1-n_2,\cdots,n_{h-1}-n_h$ 的最大公约数 $k>1$,称 k 为 A 的循环指数.循环矩阵 A 的主要谱性质是:

1. A 的模为 $\rho(A)$ 的 k 个特征值是

$$\lambda_t=\rho(A)e^{i\theta_t}, \theta_t=2\pi t/k\quad(0\leqslant t\leqslant k-1).$$

2. 复平面绕原点旋转角 $2\pi/k$ 时,$\sigma(A)$ 不变.

3. 存在置换阵 P 使

$$PAP^T=\begin{bmatrix}0 & a_{12} & & & \\ & 0 & a_{23} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & a_{k\,k-1}\\ a_{k1} & & & & 0\end{bmatrix},$$

式中对角子块皆为零方阵.

循环指数(cycle index) 见"循环矩阵".

本原指标(index of primitivity) 亦称本原指数.本原矩阵的一个重要属性,也是非负矩阵理论中的重要概念.设 A 为 n 阶本原矩阵,使得 $A^m>0$ 之最小正整数 k 称为 A 的本原指标,记为 $\gamma(A)$.由定义,$\gamma(A)\leqslant(n-1)n^n$.关于本原矩阵的本原指标的确定与估计一直是矩阵理论的重要研究课题,许多数学家提供了各种方法.近年来在这一课题的研究中取得了较大的突破性成果,这些成果也推动了图论等学科的发展.维郎特(Wielandt,H.)于 1950 年证明:$\gamma(A)\leqslant n^2-2n+2$.若 s 表 n 阶本原阵方向图 $G(A)$ 中最短单环路长,则 $\gamma(A)\leqslant n+s(n-2)$.瓦尔加(Varga,R.S.)等于 1958 年证明:对 n 阶本原阵 A,若有正整数 k,使 $A+A^2+\cdots+A^k$ 至少有 d 个正对角元,则 $\gamma(A)\leqslant n-d+k(n-1)$.近年来郭忠、柳伯谦等给出了 $k=1$ 时等号成立的矩阵类的完全刻画.邵嘉裕于 1986 年给出了 n 阶对称本原阵的完全刻画,指出这一指标集为 $\{1,2,\cdots,2n-2\}\backslash S$, S 表示 $[n,2n]$ 中全部奇数的集合,揭示了本原指标集的短缺现象.已有如下确定本原指标的简单方法:记 $(B)_{ij}$ 为 B 的 (i,j) 元,取

$$(B_1)_{ij}=\begin{cases}1 & (a_{ij}>0),\\ 0 & (a_{ij}=0)\end{cases}=\operatorname{sgn}(a_{ij}),$$

$(B_k)_{ij}=((\operatorname{sgn} B_1B_{k-1})_{ij})$ ($k=2,3,\cdots$),于是使序列 $B_1,B_2,\cdots,B_k,\cdots$ 满足 $B_k>0$ 之最小足码即为 $\gamma(A)$.

本原指数(primitive index) 即"本原指标".

(0,1)矩阵的谱半径(spectral radius of (0,1) matrices)　对(0,1)矩阵的一种刻画.(0,1)矩阵是重要的非负矩阵类,在计算机科学中有着极重要的应用.设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$,若 $a_{ij}=1$ 或 $a_{ij}=0$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$,则称 A 为(0,1)矩阵.又设 $S(n,e)$ 的主对角元为0,主对角元上方有 e 个1的对称(0,1)矩阵集合,$g_s(n,e)=\max\ \{\rho(A)\mid A\in S(n,e)\}$.美国数学家布饶尔迪(Brualdi,R.A.)与霍夫曼(Hoffman,A.J.)证明:任给 $A\in S(n,e)$,$\rho(A)\leqslant g_s^*(n,e)$,且等式成立的充分必要条件是,有置换阵 P 使 $PAP^T\in S^*(n,e)$,其中 $S^*(n,e)$ 表 $S(n,e)$ 中满足 $a_{ij}=1(i<j)$ 且 $a_{kl}=1(k<l$ 且 $k\leqslant i,l\leqslant j)$ 的子集,

$$g_s^*(n,e)=\max\{\rho(A)\mid A\in S^*(n,e)\}.$$

积和式(permanent)　关于矩阵元素的一种展式.若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为域 P 上的 m 行 n 列矩阵,$m\leqslant n$,则称和式

$$\operatorname{per}(A)=\sum_{\sigma\in S_m}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{m\sigma(m)}$$

为 A 的积和式,也称为 A 的固定式,它与 A 的行列式 $\det A$(当 $m=n$ 时)的展式的差别在于积和式中不必考虑 σ 的奇偶性,每项都省去形式上的符号 $\varepsilon(\sigma)=\pm 1$.在 $m>n$ 时可类似地定义积和式.但最常用的情形仍是 $m=n$ 的情况,尤其在组合数学中的计数问题与极值问题中是非常有用的工具.

固定式(permanent)　即"积和式".

随机阵(stochastic matrix)　一个重要的非负矩阵类.设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$ 满足

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}=1\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

称 A 为(行)随机阵.特别地,当 A 与 A^T 都是随机阵时,称 A 为双随机阵.由定义,A 为随机阵的充分必要条件是:$e=(1,\cdots,1)^T$ 为 $\lambda(A)=1$ 的相应特征向量.

伯克霍夫(Birkhoff,G.D.)于1946年证明:任意一个双随机阵都是不多于 $(n-1)^2+2$ 个置换阵的凸组合.马库斯(Marcus,M.)进一步得出:全体 n 阶双随机阵集合是以置换阵为顶点的凸多面体.进而,A 为双随机阵的充分必要条件是,有 k 个置换阵 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 及 k 个正数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 使

$$A=\sum_{i=1}^{k}\alpha_iP_i\ \left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1\right).$$

叶戈瑞捷夫(Egoristjev,G.P.)于1980年证明了著名的范·德·瓦尔登(Van der Waerden,B.L.)猜想:若 A 为双随机阵,则 $\operatorname{per}(A)\geqslant n!/n^n$,等式成立当且仅当

$$A=J_n=\left(\frac{1}{n}\right)_{n\times n},$$

式中 $\operatorname{per}(A)$ 表 A 的积和式.

关于随机阵 A 的谱有下述基本结论:

1. $\sigma(A)\subset\{z-a_{i_0i_0}\mid |z-a_{j_0j_0}|\leqslant(1-a_{i_0i_0})(1-a_{j_0j_0})$,式中 $a_{i_0i_0}$ 及 $a_{j_0j_0}$ 分别表 A 之最小与次小对角元.

2. 对任意 $1\neq\lambda\in\sigma(A)$,有
$$|\lambda|\leqslant\min\left\{1-\sum_k\min_i a_{ik},\sum_k\max_i(a_{ik})-1\right\}.$$

随机阵不但在矩阵理论中占有重要的地位,而且在概率统计、经济数学等学科有着广泛的应用,它还是马尔科夫过程理论的基础.

双随机阵(bistochastic matrix)　见"随机阵".

非负矩阵的优势比(dominance ratio of a nonnegative matrix)　非负矩阵理论的重要概念之一.设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$,其特征值集合为 $\sigma(A)=\{\lambda_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$,并满足 $\rho(A)=\lambda_1\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$,称 $d(A)=|\lambda_2|/|\lambda_1|=|\lambda_2|/\rho(A)$ 为 A 的优势比.在 $A=(a_{ij})_{n\times n}>0$ 时,奥斯乔夫斯基(Ostrowski,A.M.)证明了一个优势比的重要公式

$$d(A)\leqslant\frac{M-m}{M+m},$$

式中 $M=\max\limits_{i,j}a_{ij}$,$m=\min\limits_{i,j}a_{ij}$.若 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$ 不可约,则有

$$d(A)\leqslant\left[\frac{1-n\left(\dfrac{g}{nG}\right)^{\omega}}{1+n\left(\dfrac{g}{nG}\right)^{\omega}}\right]^{\frac{1}{\omega}}\leqslant\frac{1-\dfrac{n}{\omega}\left(\dfrac{g}{nG}\right)^{\omega}}{1+\dfrac{n}{\omega}\left(\dfrac{g}{nG}\right)^{\omega}},$$

式中 $G=\max\limits_{i,j}a_{ij}$,$g=\min\limits_{\substack{i,j\\a_{ij}>0}}a_{ij}$,$\omega=(n-1)^2+1$.

1979年已得到了更好的结果

$$d(A)\leqslant\left[\frac{1-\dfrac{g^{\omega}}{R^{\omega-1}G}}{1+\dfrac{g^{\omega}}{R^{\omega-1}G}}\right]^{\frac{1}{\omega}}<\frac{1-\dfrac{g^{\omega}}{\omega R^{\omega-1}G}}{1+\dfrac{g^{\omega}}{\omega R^{\omega-1}G}},$$

式中 $R=\min\{\max\limits_i\sum\limits_j a_{ij},\max\limits_i\sum\limits_j a_{ji}\}$.

在矩阵理论与实际计算中常需估计矩阵的最大模特征值与次大模特征值,而在诸如用幂迭代法求矩阵的最大模特征值等问题中,常需估计该矩阵的优势比,并且由最大模特征值与优势比之估计也可间接地估计次大模特征值,从而解决次大模特征值直接估计的困难.优势比的估计是矩阵论及其应用中的一个重要问题.

对称非负矩阵(symmetric nonnegative matrix)　一个重要的非负矩阵子类.它在逆特征值问题上有着很重要的应用.对实数集合 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$,能否找到一个对称非负矩阵,使之以这 n 个实数为特征值,就是所谓对称非负矩阵的逆特征值问题.设

$$S_n^+=\{(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\mid\sigma(A)=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\ \lambda_1=\rho(A),A=A^T\geqslant 0\}.$$

费德勒(Fiedler, M.)于1974年证明：若 $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$，且

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geqslant 0,$$

则 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in S_n^+$. 进而，若

$$S_n^{++} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) | \sigma(A) = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n), \lambda_1 = \rho(A), A = A^T > 0\},$$

则当 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in S_n^+$ 时，对任意 $\varepsilon > 0$ 皆有 $(\lambda_1 + \varepsilon, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in S_n^{++}$.

幂正阵的谱(spectrum of a power positive matrix)　直接应用非负矩阵谱性质估计谱的矩阵类，具有重要的实际意义及应用价值. 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$，若有正整数 k 使得 $A^k > 0$，则称 A 为具有指标 k 的幂正矩阵. 对幂正矩阵 A 有下述基本谱性质：

1. A 有一实特征值 λ_1，使得 $|\lambda_1| = \rho(A)$，且 A 之相应于 λ_1 的特征向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T > 0$. 又，若

$$R = \max_i \sum_j a_{ij}, \quad r = \min_i \sum_j a_{ij},$$

则 $r \leqslant \lambda_1 \leqslant R$.

2. 对 A 之任意异于 λ_1 的特征值 λ 恒有 $|\lambda_1| > |\lambda|$，且有估计式

$$|\lambda| \leqslant \min\left\{\lambda_1 - \sum_j \min_i \frac{a_{ij}x_j}{x_i}, \left(\sum_j \max_i \frac{a_{ij}x_j}{x_i}\right) - \lambda_1\right\}.$$

M 矩阵(M-matrix)　亦称非奇异 M 矩阵. 一类重要的矩阵. 若 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$，满足 $a_{ij} \leqslant 0$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j)$，则称 A 为 Z 矩阵. 所有 n 阶 Z 矩阵的集合记为 $\mathrm{Z}^{n \times n}$. $A = (a_{ij}) \in Z^{n \times n}$ 称为 M 矩阵，是指 A 的所有主子式皆正. 所有 n 阶 M 矩阵之集合记为 K. M 矩阵除等价表征外仍有许多重要的性质，主要有下述几点：

1. 若 $A \in K$，m 是任意一个正整数，则 A^{-1} 与 A^{-m} 具有相同的零结构(n 阶实方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{n \times n}$ 称为具有相同的零结构，指 $a_{ij} = 0$ 当且仅当 $b_{ij} = 0$)，且 A^{-1} 与 $|A|^{n-1}$ 具有相同的零结构.

2. 若 $A \in K$，$A \leqslant B \in \mathrm{Z}^{n \times n}$，则 $B \in K$ 且 $B^{-1} \leqslant A^{-1}$.

3. 若 $A \in K$，则对任意正整数 k，$A^k \in K$ 的充分必要条件是 $A^m \in \mathrm{Z}^{n \times n}$.

4. 若 $A \in K$，且对某一正整数 m 有 A^m 为(上)下三角阵，则 A 必为(上)下三角阵.

5. 若 $A \in K, B \in K$，则 $A \circ B^{-1} \in K$. 特别地，$A \circ A^{-1} \in K$，式中 $A \circ B^{-1}$ 表 A 与 B^{-1} 的阿达马积，进而有 $\rho((A \circ A^{-1})^{-1}) \geqslant n$.

M 矩阵是由奥斯乔夫斯基(Ostrowski, A. M.)于1937年首先提出的一个重要矩阵类，它起源于矩阵计算中的迭代程序之收敛性的研究. 这一矩阵类在矩阵之谱分析中十分重要，近年来研究者颇多，成果也十分丰富，仅 M 矩阵的等价表征就有几十种.

非奇异M 矩阵(nonsingular M-matrix)　见“M 矩阵”.

Z 矩阵(Z-matrix)　见“M 矩阵”.

M 矩阵的表征(characterizations of M-matrix)　M 矩阵理论的基本内容，也一直是研究 M 矩阵的热门课题，到目前为止，比较重要的等价表征就有50余种之多. 这些重要的等价表征涉及到 M 矩阵在自身结构、谱性质等各个方面的重要性质，这里仅列出若干具有代表性的等价表征. 设 $A \in Z^{n \times n}$，则下述各点等价于 $A \in K$(n 阶 M 矩阵的集合)：

1. $A = tI - B, B \geqslant 0, t > \rho(B)$.

2. A 为逆正阵，即 $A^{-1} \geqslant 0$.

3. $a_{ii} > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 且存在一正对角矩阵 D，使 AD 为严格对角占优阵(即 A 为广义严格对角占优矩阵).

4. A 为正稳定阵，即 $\mathrm{Re}\,\lambda > 0, \forall\, \lambda \in \sigma(A)$.

5. 存在一个正向量 $x \in \mathbf{R}^n$ 使得 $Ax > 0$.

6. 有上三角阵 $U \in K$ 及下三角阵 $L \in K$ 使得

$$A = LU.$$

7. A 的所有顺序主子式皆正.

8. $A = M - N, M^{-1} \geqslant 0, N \geqslant 0$ 且 $\rho(M^{-1}N) < 1$.

9. 对每一符号差矩阵 S(即对角元皆为1或-1的对角阵)有正向量 x 使 $SASx > 0$.

10. 存在一正对角阵 D 使 $AD = DA^T$ 为正定.

若 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$，则 $A \in K$ 当且仅当 A 的每个一阶，二阶及 n 阶主子阵是逆正阵.

不可约M 矩阵(irreducible M-matrix)　M 矩阵的一个重要子类. 有若干特殊的重要性质. 若 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Z}^{n \times n}$ 不可约，则 $A \in K$(n 阶 M 矩阵的集合)等价于下述各点的任意一个：

1. $A^{-1} > 0$.

2. 存在 $x > 0$ 使得 $Ax > 0$.

若 $A = tI - B$ $(t > \rho(B), B \geqslant 0)$ 为不可约，且记 $a = \max_i a_{ii}$，则对任意 $\lambda \in \sigma(A)$ 有：

1. $|\lambda - a| \leqslant \rho(aI - A) = a + \rho(B) - t$.

2. $\lambda - (t - \rho_{n-1}(B))| \geqslant \rho(B) - \rho_{n-1}(B)$，$\rho_{n-1}(B)$ 表 B 之所有 $n-1$ 阶主子阵的最大谱半径.

3. $\mu + \mathrm{i}\gamma \in \sigma(A)$ 当且仅当

$$\mu - |\gamma| \tan \frac{\pi}{n} \geqslant t - \rho(B).$$

M 矩阵的谱(spectrum of an M-matrix)　是 M 矩阵理论的重要内容之一. 很长时间这一方面的结论只停留在 M 矩阵是正稳定的结论上. 佟文廷于1979年推进了这一工作. 若 $A = (a_{ij})_{n \times n} \in K$，则有下述重要谱性质：

1. $\sigma(A)$中正特征值个数l(t重特征值算t个)满足$1\leqslant l=n-2k$,k为某一非负整数.

2. $\sigma(A)$中按模最小也是实部最小特征值$\sigma=t-\rho(B)>0$,且满足$\min\limits_i\sum\limits_j a_{ij}\leqslant\sigma\leqslant\max\limits_i\sum\limits_j a_{ij}$.

3. 分别记A^{-1}的最大与最小行和为$R(A^{-1})$及$r(A^{-1})$,则$(R(A^{-1}))^{-1}\leqslant\sigma\leqslant(r(A^{-1}))^{-1}$,且$\det(A-tI)>0$当$t<\sigma$时.

4. 若$a_{ij}\neq0(1\leqslant i,j\leqslant n)$,则($A_{ij}$表$a_{ij}$之代数余子式)

$$\frac{\det A\min\limits_{i,j}|a_{ij}|}{2\max\limits_i a_{ii}A_{ii}-\det A}\leqslant\sigma\leqslant\frac{\det A\max\limits_{i,j}|a_{ij}|}{2\min\limits_i a_{ii}A_{ii}-\det A}.$$

斯蒂尔杰斯矩阵(Stieltjes matrix)　M矩阵的重要子类.这一矩阵类在块迭代法收敛性的讨论中以及线性互余等问题中有着重要的应用.设$A\in K$为对称矩阵,则称A为斯蒂尔杰斯矩阵.由定义,斯蒂尔杰斯矩阵必为正定阵.若$A\in\mathrm{Z}^{n\times n}$为斯蒂尔杰斯矩阵,且有正则裂分$A=M-N$,$M^{-1}\geqslant0$,$N\geqslant0$,则必有

$$\rho(M^{-1}N)\leqslant\frac{\rho(N)\rho(A^{-1})}{(1+\rho(N)\rho(A^{-1}))}<1,$$

且N为实对称阵.

逆正阵(inverse positive matrix)　包括M矩阵在内的更广泛的矩阵类.$A\in\mathrm{R}^{n\times n}$为逆正阵,是指$A$非奇异且$A^{-1}\geqslant0$.下述各点等价于$A\in\mathrm{R}^{n\times n}$为逆正阵:

1. 存在逆正阵B使$B\geqslant A$且$\rho(I-B^{-1}A)<1$.

2. A为单调阵,即$Ax\geqslant Ay$意味着$x\geqslant y$.

3. 存在逆正阵B及$C\in K$使$B\geqslant A$且$A=BC$.

4. 存在逆正阵B_1,B_2使$B_1\leqslant A\leqslant B_2$.

5. A有收敛的正则裂分,即$A=M-N$,$M^{-1}\geqslant0$,$N\geqslant0$且$\rho(M^{-1}N)<1$.

6. 对所有裂分$A=B-C$,$B\geqslant0$,$C\geqslant0$,存在向量$v>0$及$\alpha\in[0,1]$使$Cv=\alpha Bv$,进而,若还有$u>0$使$Cu=\beta Bu$,则必$\beta\leqslant\alpha$.

矩阵的正则裂分(regular splitting of a matrix)　矩阵分析理论中的重要概念.它在一般迭代法收敛性的讨论中起着重要的作用.设$A=(a_{ij})\in\mathrm{R}^{n\times n}$,若有$M,N\in\mathrm{R}^{n\times n}$,使$A=M-N$,且$M^{-1}\geqslant0$,$N\geqslant0$,则称$A$有正则裂分.由定义,$A\in K$充分必要条件是,$A$有收敛的正则裂分或$A$有收敛的弱正则裂分(即$A=M-N$,$M^{+}\geqslant0$,$M^{-1}N\geqslant0$且$\rho(M^{-1}N)<1$).下述是关于正则裂分的常用结论:

1. 若A有正则裂分,则A为逆正的充分必要条件是

$$\rho(M^{-1}N)=\frac{\rho(A^{-1}N)}{(1+\rho(A^{-1}N))}<1.$$

2. 设$A=M_1-N_1=M_2-N_2$是A的两个正裂分,若A逆正且$M_2^{-1}\leqslant M_1^{-1}(N_2\leqslant N_1)$,则

$$\rho(M_2^{-1}N_2)\leqslant\rho(M_1^{-1}N_1)<1.$$

准M矩阵(quasi M-matrix)　亦称一般M矩阵或奇异M矩阵.是M矩阵的推广.设$A=(a_{ij})\in\mathrm{Z}^{n\times n}$,若$A$的所有主子式皆非负,则称$A$为准M矩阵,记为$A\in K_0$.由定义,$K_0$是$K$的闭包.若$A\in\mathrm{Z}^{n\times n}$,则下述各点等价于$A\in K_0$:

1. $A=tI-B$,$B\geqslant0$,$t\geqslant\rho(B)$.

2. 对任意$\varepsilon>0$,$A+\varepsilon I\in K$.

3. 对每一符号差矩阵S,存在一个非负向量x使$SASx\geqslant0$.

4. $\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant0$,$\forall\ \lambda\in\sigma(A)$.

5. 对每一非零实向量x,存在非负对角阵D_x使$x^TD_xx>0$且$x^TAD_xx\geqslant0$.

6. 存在一n阶置换阵P及具有非负对角元的上、下三角阵V,L使$PAP^T=LV$.

7. 存在一非负阵B及正整数k使$BA^{k+1}=A^k$.

若$A=(a_{ij})\in K_0$且非零主子式最大阶数$k=n$或$k<n$为一奇数,则A有一正特征值.记$a=\max\limits_i a_{ii}$,$A\in K_0$,$\forall\ \lambda\in\sigma(A)$皆满足下式

$$a-\rho(aI-A)\leqslant|\lambda|\leqslant a+\rho(aI-A).$$

准M矩阵在实际应用上与M矩阵几乎同等重要.但由于这类矩阵研究的难度较大,所以其理论同M矩阵理论相比尚未得到完善的发展,现有的结论也都是近二三十年研究的成果.

一般M矩阵(usual M- matrix)　即"准M矩阵".

奇异M矩阵(singular M- matrix)　即"准M矩阵".

不可约准M矩阵(irreducible quasi Mmatrix)　准M矩阵的重要子类,具有许多特殊性质.若$A\in K_0$为不可约,则称A为不可约准M矩阵.若$A\in\mathrm{Z}^{n\times n}$不可约,则下述各点等价于$A\in K_0$:

1. $a_{ii}\geqslant0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$且对某一正向量$x$有

$$Ax\geqslant0.$$

2. $a_{ii}\geqslant0(1\leqslant i\leqslant n)$且有一正对角阵$D$使$AD$为对角占优阵(即$A$为广义对角占优阵).

3. 对每一符号差阵S,有$x>0$使$SASx\geqslant0$.

4. 有正对角阵D使$AD+DA^T$为半正定阵.

不可约准M矩阵还具有下述基本性质:

1. $\mathrm{rank}\,A=n-1$,且具有性质C.

2. 若$Ax\geqslant0$必$x=0$,即A几乎单调(参见"具有性质C的准M矩阵").

3. 有下三角M阵L及上三角准M阵V使

$$A=LV.$$

具有性质C的准M矩阵(quasi M-matrix with property C)　包含M矩阵及不可约准M矩阵在内

的重要准 M 矩阵子类，在奇异线性代数方程组迭代求解等方面有广泛的应用. $A\in K_0$ 称为具有性质 C，是指 $A=tI-B$ $(B\geqslant 0,t>0)$且

$$\lim_{k\to\infty}(B/t)^k$$

存在. 若 $A\in K_0$，则下述各点等价于 A 具有性质 C：

1. $\operatorname{index}A\leqslant 1$(即 A 非奇异或

$$\operatorname{rank}A^2=\operatorname{rank}A).$$

2. 群逆 $A^{\#}$ 存在.

3. 有正定阵 W 使 $AW+WA^T$ 为半正定阵.

$A\in Z^{n\times n}$满足下述条件之一时，具有性质 C：

1. A 为对称的 M 矩阵.

2. 存在 $x>0$ 使 $Ax\geqslant 0$.

逆M 矩阵(inverse M-matrix) 非负矩阵的一个重要子类，近年来研究者颇多. 研究结果表明，该矩阵类有许多重要性质. 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$ 满足 $A^{-1}\in K$，则称 A 为逆 M 矩阵，记为 $A\in K^{-1}$. 若 $A\in K^{-1}$，则 A 有下述基本性质：

1. 有正对角阵 D，使 $AD+DA^T$ 为正定阵.

2. 对任意非负对角阵 D，有

$$A+D\in K^{-1}.$$

3. A 与 A^m 有相同零结构，$m=1,2,\cdots$.

4. 有 K^{-1}中的上下三角阵 V,L，使 $A=LV$.

5. 对任意正整数 k，有矩阵 B 使 $B^k=A$ 且满足 $B,B^2,\cdots,B^k\in K^{-1}$.

若 $A\geqslant 0$，则 $A\in K^{-1}$当且仅当对每一正对角阵 D 有$(A+D)^{-1}A\geqslant 0$；当且仅当 A 与 A^2 有相同零结构.

H 矩阵(H-matrix) 包含 M 矩阵类在内的矩阵类，在矩阵谱分析等领域有着重要的作用. 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，称

$$\mu(A)=\begin{cases}|a_{ii}| & (i=j),\\ -|a_{ij}| & (i\neq j)\end{cases}$$

为 A 的比较阵. 若 $\mu(A)\in K$，则称 A 为 H 矩阵，记为 $A\in H$. 施耐德(Schneider, H.)等给出了下述基本结论：

1. 若 $A\in H$ 且 $a_{ii}\geqslant 0(1\leqslant i\leqslant n)$，则 A 为对角稳定的充分必要条件是 $\det A\neq 0$.

2. 若 $A\in H$，则有上、下三角阵 V,L，使 $A=LV$ 且$|A^{-1}|\leqslant[\mu(V)]^{-1}[\mu(L)]^{-1}\leqslant[\mu(A)]^{-1}$.

3. 若 $A=(A_{ij})_{m\times m}\in H$，$A_{ij}\in C^{k\times k}$，$1\leqslant i,j\leqslant m$，则$(\det A_{ij})_{m\times m}\in H$，进而，$D_A=(|\det A_{ij}|)_{m\times m}\in H$ 且 $\det[\mu(D_A)]\geqslant\det A$.

比较阵(comparison matrix) 见"H 矩阵".

P 矩阵(P-matrix) 包含 M 矩阵类在内的重要矩阵类，在线性互余及其他许多领域都有广泛的应用. 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若 A 的所有主子式皆为正(非负)，则称 A 为 $P(P_0)$矩阵，记为 $A\in P(P_0)$. 若 $A\in R^{n\times n}$，则下述各点等价于 $A\in P$：

1. 对每一 $0\neq x\in R^n$，有正对角阵 D_x 使

$$x^TD_xAx>0.$$

2. A 的每一实特征值皆正.

3. 对每一符号差阵 S，有 $x\geqslant 0$ 使 $SASx>0$.

4. 线性互余问题 $y=Ax+q$ 有惟一解 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 满足 $x^Ty=0$，式中 $q\in R^n$ 为给定的向量.

常用的 P 矩阵的判定条件是：若 $A+A^*$ 为正定(半正定)阵，则 $A\in P(P_0)$.

P 矩阵的谱(spectrum of a P-matrix) 矩阵谱理论的一个重要内容，具有广泛的应用价值. 凯洛格(Kellogg, R. B.)于 1972 年首先证明：

1. $A\in P$，$\lambda=re^{i\theta}\in\sigma(A)$当且仅当$|\theta-\pi|>\pi/n$；$A\in P_0$，$0\neq\lambda=re^{i\theta}\in\sigma(A)$当且仅当$|\theta-\pi|\geqslant\pi/n$.

2. n 个复数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $A\in P(P_0)$的谱当且仅当多项式

$$\prod_{j=1}^{n}(t+\lambda_j)=\sum_{j=0}^{n}b_jt^j$$

满足 $b_j>0(b_j\geqslant 0)$，$0\leqslant j\leqslant n$.

赫斯考维茨(Hershkowitz, D.)与比曼(Berman, A.)于 1983 年证明：n 个复数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $A\in P(P_0)$的谱，当且仅当$\sigma_k(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)>0(\geqslant 0)$ $(k=1,2,\cdots,n)$，式中 $\sigma_k(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$表 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 之 k 元对称函数.

完全正矩阵(totally positive matrix) 一个重要的非负矩阵子类，起源于稳定性理论的研究，在弹性系统之微振动理论等方面有广泛的应用. 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$ 满足所有子式皆正(非负)，则称 A 为完全正(非负)阵，记为 $A\in TP(TN)$. 若 $A\in TP$，则下述基本结论成立：

1. $A\in P$ 且每一特征值皆为非负实数.

2. 若 $\sigma(A)=\{\lambda_1(A)\geqslant\lambda_2(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)\}$，$A_k$ 为 A 划去 k 行 k 列后得到的 $n-1$ 阶子阵，则 $\lambda_1(A)\geqslant\lambda_1(A_k)\geqslant\lambda_2(A)$，$\lambda_{n-1}(A_k)\geqslant\lambda_n(A)$，$1\leqslant k\leqslant n$.

3. $\det A\leqslant\det A_p\det A_{n-p}$，式中 A_p 表示 A 之 p 阶顺序主子阵，A_{n-p}表示 A 之后 $n-p$ 阶主子阵.

完全非负矩阵(totally nonnegative matrix) 见"完全正矩阵".

N_0 矩阵(N_0-matrix) 是 Z 矩阵的一个重要子类，也是 N 矩阵的推广，具有重要的理论意义与应用价值. 设 $A=tI-B$，$B\geqslant 0$. 若 $\rho_{n-1}(B)\leqslant(<)t\rho(B)$，则称 A 为 $N_0(N)$矩阵，记为 $A\in N_0(N)$，式中 $\rho_{n-1}(B)$表 B 之所有 $n-1$ 阶主子阵之最大谱半径. 约翰逊(Johnson, G. A.)等证明了下述基本结论：

1. $M=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\in N_0$，

当且仅当 $M\in Z^{n\times n}$，$\det M<0$，M 的所有真主子阵是

准 M 阵；当且仅当 M 不可约且 $M^{-1}\leqslant 0$；当且仅当 M 的所有主子式非正.

2. 若 $\det A\neq 0$，则 $D-CA^{-1}B\in N_0$.

3. 若 $A,B\in N_0$，$A\leqslant B$，$n\geqslant 2$，则

$$A^{-1}\geqslant B^{-1},\quad \det A\leqslant \det B.$$

N_0 **矩阵的谱**(spectrum of an N_0-matrix)　对 N_0 矩阵的重要刻画. 由于 N_0 矩阵的特殊结构，所以它具有特殊的谱性质，成为矩阵谱理论的一个重要内容. 史密斯(Smith, R. L.)等证明了下述基本结论：

1. A 的最小模特征值为一负数，记为 $n(A)$，进而有

$$\sigma(A)\subseteq\{z\mid |z-a|\leqslant a-n(A),\ |z|\geqslant -n(A)\},$$

式中 $a=\max\limits_i a_{ii}$，且 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in N_0$.

2. 若 $A,B\in N_0$ 且 $A\leqslant B$，则 $\rho(I-A^{-1}B)<1$，$\rho(I-BA^{-1})<1$ 且 $n(B)\geqslant n(A)$.

3. 若 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & B\\ C & D\end{bmatrix}\in N_0$，

式中 $A_{11}\in K$，则有 $n(D-CA_{11}^{-1}B)<n(A)$.

逆 N_0 **矩阵**(inverse N_0-matrix)　由 N_0 矩阵派生的一个重要矩阵类. 设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 非奇异，若 $A^{-1}\in N_0$，则称 A 为逆 N_0 矩阵，记为 $A\in N_0^{-1}$. 约翰逊(Johnson, G. A.)等给出下述基本结论：

1. 设 $A\leqslant 0$ 且 $n-1$ 阶子式皆非正，则 $A\in N_0^{-1}$ 的充分必要条件是，$\det A<0$，$\det A(i|j)=0$，$i+j=2k$，$i\neq j$，式中 $A(i|j)$ 表删去 i 行 j 列后所得 $n-1$ 阶子阵.

2. 若 $A\leqslant 0$ 满足 $A\in N_0^{-1}$，则 A 的几乎方子阵皆非正，几乎方子阵指行、列足码为 α,β，且 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$，$\beta=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$，$1\leqslant\alpha_1,\beta_1<\alpha_2,\beta_2<\cdots<\alpha_s,\beta_s\leqslant n$ 且 $|\alpha_r-\beta_r|\leqslant 1$，$1\leqslant r\leqslant s$ 之子阵 $A[\alpha|\beta]$.

3. 若 $M=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\in N_0^{-1}$

且 $\det A\neq 0$，$n\geqslant 2$，则 $A\in N_0^{-1}$.

F_0 **矩阵**(F_0-matrix)　由 N_0 矩阵类拓广出的新的矩阵类，具有许多与 N_0 矩阵相似的重要性质. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}=tI-B$，$B\geqslant 0$，若 A 满足 $\rho_{n-2}(B)\leqslant t<\rho_{n-1}(B)$，则称 A 为 F_0 矩阵，记为 $A\in F_0$，式中 $\rho_{n-1}(B)$，$\rho_{n-2}(B)$ 分别表 B 所有 $n-1$ 阶、$n-2$ 阶主子阵之最大谱半径. 史密斯(Smith, R. L.)等证明了下述基本结论：

1. 若 $A\in\mathbf{Z}^{n\times n}$，则 $A\in F_0$ 当且仅当 $\det A<0$，A^{-1} 之所有阶数 $\geqslant 2$ 的主子式非正，且 A^{-1} 至少有一正对角元.

2. 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in F_0$，则 A 恰有一负特征值，记为 $n(A)$，又，若 $a=\max\limits_{\gamma} a_{ii}$，则

$$|\lambda-a|\leqslant a-n(A)\quad(\forall\ \lambda\in\sigma(A)).$$

矩阵多项式函数(matrix polynomial function)　一种基本而重要的矩阵函数. 设 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$A$ 的最小多项式为 $\alpha(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{\alpha_k}$，记 $\Lambda_A=\{(\lambda_i,\alpha_i)\mid 1\leqslant i\leqslant k\}$，称多项式 $\varphi(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]$ 是在 Λ_A 上给定，系指给出 $\varphi(\lambda_i),\varphi'(\lambda_i),\cdots,\varphi^{(\alpha_i-1)}(\lambda_i)$，$1\leqslant i\leqslant k$，记为 $\varphi(\Lambda_A)$，$\mathbf{C}[\lambda]$ 表复数域 $\mathbf{C}$ 上全体 λ 之一元多项式集合. 对任意 $\varphi(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]$，若 $\varphi(\Lambda_A)=\psi(\Lambda_A)$，则定义 $\varphi(A)=\psi(A)$. 对多项式矩阵 $\varphi(A)$ 有如下结论：

1. 若 $\sigma(A)=\{\lambda_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$，则

$$\sigma(\varphi(A))=\{\varphi(\lambda_i)\mid 1\leqslant i\leqslant n\}.$$

2. 若 $A=\mathrm{diag}[A_1,A_2,\cdots,A_m]$，则

$$\varphi(A)=\mathrm{diag}[\varphi(A_1),\varphi(A_2),\cdots,\varphi(A_m)].$$

3. $\varphi(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]$ 满足 $\varphi(\Lambda_A)=0$ 的充分必要条件是 $\alpha(\lambda)\mid\varphi(\lambda)$，即 $\alpha(\lambda)$ 整除 $\varphi(\lambda)$.

矩阵幂级数(matrix power series)　用幂级数表达矩阵函数的一种常用的方法，在系统微分方程求解时经常用到. 若 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，给定一个用幂级数表达的复变量解析函数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k,$$

其收敛半径为 r，则称相应的

$$f(A)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_kA^k$$

为矩阵幂级数. 关于矩阵幂级数的基本结论是，若 $\rho(A)<r$，则 $f(A)$ 可以由

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kA^k$$

表示；而当 $\rho(A)>r$ 时，矩阵级数发散，不能用幂级数表示. 常用的矩阵幂级数有：

$$\mathrm{e}^{A\tau}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k\tau^k}{k!},\ \sin A\tau=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}A^{2k-1}\tau^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

$$\cos A\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kA^{2k}\tau^{2k}}{2k!},\ (I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k$$

等.

广义逆矩阵(generalized inverse matrix)　矩阵理论中的重要概念. 设 $A\in\mathbf{C}^{m\times n}$，若 $X\in\mathbf{C}^{n\times m}$ 满足下述彭罗斯方程：

1. $AXA=A$；
2. $XAX=X$；
3. $AX=(AX)^*$；
4. $XA=(XA)^*$；

则称 X 为 A 的彭罗斯-穆尔逆，或 A 的 $\{1,2,3,4\}$ 逆，记为 A^+. 对 $\{1,2,3,4\}$ 的一个非空子集 λ，称 $X\in\mathbf{C}^{n\times m}$ 是 A 的一个 λ 逆是指若 X 满足第 i 个彭罗斯方程，$\forall\ i\in\lambda$. 记 A 的所有 λ 逆的集合为 $A\{\lambda\}$，而 $A^{[\lambda]}$ 表 $A\{\lambda\}$ 中的任一元素. 对 A 的各种 λ 逆，有下述基本结论：

1. A 的各种 λ 逆皆存在，且只有惟一的{1,2,3,4}逆存在，它可表为

$$A^{+}=V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^{*},$$

式中的 U,V 使

$$U\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{*}$$

为 A 的奇异值分解.

2. 若 A 具有满秩分解 $A=FG,F\in \mathbf{C}^{m\times r},G\in \mathbf{C}^{r\times n}$，$\mathrm{rank}\,A=r$，则 $A^{+}=G^{*}(F^{*}AG^{*})F^{*}=G^{+}F^{+}$.

3. $A^{+}=(A^{*}A)^{+}A^{*}=A^{*}(AA^{*})^{+}$.

4. 对任意 m 阶酉阵 U 及 n 阶酉阵 V 皆有

$$(UAV)^{+}=V^{*}A^{+}U^{*}.$$

广义逆矩阵是非奇异矩阵的逆的概念之推广，但它的讨论范围却包括最普通的长方形矩阵. 矩阵的广义逆理论自 1920 年由穆尔(Moore, E. H.)首次提出 $m\times n$ 阶长方形矩阵的广义逆之概念后，20 世纪 50 年代中期由彭罗斯(Penrose, R.)更加完整地建立了所谓彭罗斯方程. 此后的 30 多年里，矩阵的广义逆理论之研究得到迅速的发展. 现在已出现了多种形式与背景的矩阵广义逆，这一理论不仅在理论上更加趋于完善，而且在优化计算、系统理论等许多领域均有着广泛深入的应用. 广义逆理论大致可以分为两类：一类是基于彭罗斯方程建立起来并主要用于建立投影算子的广义逆，另一类则是考虑到矩阵谱性质而确定的各种谱广义逆.

矩阵的{1}逆({1}-inverse of a matrix)　一种重要的广义逆矩阵. 设 $A\in \mathbf{C}^{m\times n}$，$X\in \mathbf{C}^{n\times m}$ 满足彭罗斯方程 1，则称 X 为 A 之{1}逆，记为 $X\in A\{1\}$. 下述是关于{1}逆之基本结果：

1. 若 $\mathrm{rank}\,A=r$ 且有奇异值分解

$$A=U\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{*},\quad \Sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$$

$(\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r)$ 为 A 的奇异值，$U\in \mathbf{C}^{m\times m}$，$V\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 皆为酉阵，则

$$A\{1\}=\left\{V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & K\\ L & M\end{bmatrix}U^{*}\;\middle|\;\forall\, L\in \mathbf{C}^{(n-r)\times r},\right.$$
$$\left.K\in \mathbf{C}^{r\times(m-r)},M\in \mathbf{C}^{(n-r)\times(m-r)}\right\}.$$

2. {1}逆惟一的充分必要条件是

$$m=n,\quad \det A\neq 0,\quad X=A^{-1}.$$

3. $X\in A\{1\}$，当且仅当 AX 为幂等阵且 $\mathrm{Im}(AX)=\mathrm{Im}\,A$；当且仅当对任意 $b\in\mathrm{Im}\,A$ 有 $AXb=b$. 注意，由定义，$X\in A\{2\}$ 等价于 $A\in X\{1\}$.

矩阵的{1,2}逆({1,2}-inverse of a matrix)　一种重要的广义逆矩阵. 是 A 的满足彭罗斯方程 1，2 的广义逆矩阵. 由定义，$A\{1\}\cap A\{2\}\subset A\{1,2\}$，且 A 与其{1,2}逆 X 互为{1,2}逆. 对于 $A\in \mathbf{C}^{m\times n}$ 的{1,2}逆有如下基本结论：

1. 若 A 有奇异值分解

$$A=U\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{*},$$

则
$$A\{1,2\}=\left\{V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & \Sigma\\ L & L\Sigma K\end{bmatrix}\;\middle|\;L,K\text{ 任意}\right\}.$$

2. 下述结论中的任意两个蕴含另外的一个：

$X\in A\{1\}$，$X\in A\{2\}$，$\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\,X$.

3. $X\in A\{1,1\}$ 的充分必要条件是 AX 为幂等阵，且 $\mathbf{C}^{n}$ 可表为 $\ker A$ 及 $\mathrm{Im}\,X$ 之直和，充分必要条件是 $X\in A\{1\}$ 且 $\mathrm{rank}\,X=\mathrm{rank}\,A$.

矩阵的{1,3}逆({1,3}-inverse of a matrix)　一种重要的广义逆矩阵. 是 $A\in \mathbf{C}^{m\times n}$ 满足彭罗斯方程 1,3 的广义逆矩阵. 对 A 的{1,3}逆及{1,4}逆，有如下基本结论：

1. 若 A 有奇异值分解

$$A=U\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{*},$$

则
$$A\{1,3\}=\left\{V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & 0\\ L & M\end{bmatrix}U^{*}\;\middle|\;L,M\text{ 任意}\right\},$$
$$A\{1,4\}=\left\{V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & K\\ 0 & M\end{bmatrix}U^{*}\;\middle|\;K,M\text{ 任意}\right\}.$$

2. 若 $P_{\mathrm{Im}A}$ 为 $\mathrm{Im}\,A$ 上的正交投影，则 $X\in A\{1,3\}$ 的充分必要条件是 $AX=P_{\mathrm{Im}A}$，$X\in A\{1,4\}$ 的充分必要条件是 $XA=P_{\mathrm{Im}A^{*}}$.

3. 对任意给定的 $A^{[1,3]}\in A\{1,3\}$ 及 $A^{[1,4]}\in A\{1,4\}$ 有 $A\{1,3\}=\{A^{[1,3]}+(I_n-A^{[1,3]}A)Z\mid\forall\, Z\in \mathbf{C}^{n\times m}\}$ 以及 $A\{1,4\}=\{A^{[1,4]}+Y(I_m-AA^{[1,4]})\mid\forall\, Y\in \mathbf{C}^{n\times m}\}$.

矩阵的{1,4}逆({1,4}-inverse of a matrix)　见“矩阵的{1,3}逆”.

分块矩阵的广义逆(generalized inverse of a partitioned matrix)　一类重要的广义逆矩阵. 是广义逆矩阵在分块矩阵上的表征. 通常与解并行方程组、空间直流形之间相互关系等问题有密切联系，同时在相应的计算问题上往往会带来许多方便之处. 设 $A\in \mathbf{C}^{m\times n}$，$\mathrm{rank}\,A=r$ 有置换阵 $P\in \mathbf{C}^{m\times m}$ 以及 $Q\in \mathbf{C}^{n\times n}$，使

$$A=P^{T}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}Q^{T}=P^{T}\begin{bmatrix}I_r\\ S\end{bmatrix}A_{11}[I_r\quad T]Q^{T},$$

式中 A_{11} 为 r 阶非奇异方阵，$T=A_{11}^{-1}A_{12}$，$S=A_{21}A_{11}^{-1}$. 于是有下述广义逆的表达式：

1. $X=Q\begin{bmatrix}A_{11}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P\in A\{1,2\}$.

2. $X=Q\begin{bmatrix}A_{11}^{-1}\\ 0\end{bmatrix}[I_r+S^{*}S]^{-1}[I_r S^{*}]P$
$\in A\{1,2,3\}$.

3. $X=Q\begin{bmatrix}I_r\\T^*\end{bmatrix}[I_r+TT^*]^{-1}[A_{11}^{-1}\quad 0]P$
$\in A\{1,2,4\}$.

4. $A^+=Q\begin{bmatrix}I_r\\T^*\end{bmatrix}[I_r+TT^*]^{-1}A_{11}^{-1}$
$\cdot[I_r+S^*S]^{-1}[I_r S^*]P$.

矩阵的德雷津逆(Drazin-inverse of a matrix) 亦称谱广义逆.一类仅适用于方阵的广义逆.这类广义逆矩阵在奇异线性常微分方程组及奇异差分方程组求解问题中有着重要的应用.除四个彭罗斯方程外,还考虑如下两个方程:

1^k. $A^kXA=A^k$,

5. $AX=XA$.

设 $A\in C^{n\times n}$有 ind $A=k$,满足彭罗斯方程 2 及上述 1^k,5 的 $X\in C^{n\times n}$称为 A 的德雷津逆,记为 A^D.对 A^D 有下述基本结论:

1. 若$m(\lambda)=c\lambda^k(1-\lambda q(\lambda))$,$c\neq0$ 为 A 的最小多项式,则 A 有惟一的德雷津逆 $A^D=A^k(q(A))^{k+1}$.

2. $\lambda\in\sigma(A)$的充分必要条件是 $\lambda^+\in\sigma(A^D)$,

$$\lambda^+=\begin{cases}\lambda^{-1} & (\lambda\neq0),\\ 0 & (\lambda=0).\end{cases}$$

矩阵的群逆(group inverse of a matrix) 一类广义逆.德雷津逆的相关广义逆.设 $A\in C^{n\times n}$,若 $X\in C^{n\times n}$满足彭罗斯方程 1,2,5,则称 X 为 A 之群逆,记为 $A^\#$.由定义,X 为 A 的群逆等价于 A 为 X 的群逆,且群逆是 A 的指数为 1 时的德雷津逆,从而是惟一的.下述结论是关于群逆的基本结果:

1. 若 rank $A=r>0$,且有满秩分解 $A=FG$,则 A 有群逆当且仅当 index $A\leqslant1$;当且仅当 Im A 与 ker A 互补.

2. $A^\#=A^+$当且仅当 $AA^+=A^+A$.

3. $A^\#=A(q(A))^2=F(GF)^{-2}G$,$A$ 的最小多项式为 $m(\lambda)=c\lambda^k(1-\lambda q(\lambda))$.

撰　稿　孙宗明　张宝林　逄明贤
审　阅　佟文廷　武同锁

多重线性代数

多重线性代数(multilinear algebra) 代数学的一个重要分支.可以将它看做是线性代数的发展.它是伴随着微分几何、现代分析、群表示论、理论物理、量子力学等学科发展起来的,并且在这些学科中已得到重要的应用.

多重线性代数形成为一个学科还是近几十年来的事,值得提出的是 20 世纪 50 年代,布尔巴基(Bourbaki,N.)论述多重线性代数的书及 20 世纪 60 年代,葛瑞布(Greub,W.)的多重线性代数专著(第一版),特别是从 1973 年,由马库斯(Marcus,M.)和汤普森(Thompson,R. C.)创办了国际性的《线性和多重线性代数》(Linear and Multilinear Algebra)杂志以及同年马库斯出版了经典性著作《有限维多重线性代数》以来,多重线性代数的发展进入了一个活跃的新阶段,这当中以梅里斯(Merris,R.)等人研究高阶特征标的张量对称类所获得的成果最为突出.

多重线性代数研究的内容包括:多重线性映射、具有一定对称性质的多重线性映射、张量空间、张量对称类、张量代数、对称张量代数、格拉斯曼代数、外代数、克利福德代数及其表示理论等.这里的前半部分只就常用的有限维多重线性代数来叙述,对于以泛性质手段处理的无限维情形可参看葛瑞布(Greub,W. H.)于 1978 年著的《多重线性代数》(第二版).对可换环上建立在环模上的多重线性代数则可参看诺茨考特(Northcott,D. G.)于 1984 年著的《多重线性代数》.

多重线性代数这部分词条的向量空间一般是指一个特征为零的域 K 上的(向量)空间,但当关系到内积和群的任意特征标时,为了叙述简明则只在复数域 C 上讨论.域上的多重线性代数的主要概念与结果都可用模论(参见《模论》有关部分)的工具推广到交换环上的多重线性代数,这里不再一一提及.交换环上的多重线性代数在模论、同调代数、代数 K 理论、代数几何等学科中都有重要应用.

序列集合记号(notation of sequence sets) 以正整数为分量的有限序列集合的记号.下面是多重线性代数中常用的序列集合及记号:

$$\begin{aligned}\Gamma&=\Gamma(n_1,n_2,\cdots,n_m)\\&=\{\alpha=(\alpha(1),\alpha(2),\cdots,\alpha(m))\mid 1\leqslant\alpha(i)\leqslant n_i,i=1,2,\cdots,m\};\end{aligned}$$

$$\Gamma_{m,n}=\{\alpha=(\alpha(1),\alpha(2),\cdots,\alpha(m))\mid 1\leqslant\alpha(i)\leqslant n,i=1,2,\cdots,m\};$$

$$G_{m,n}=\{\alpha\mid\alpha\in\Gamma_{m,n},\alpha(1)\leqslant\alpha(2)\leqslant\cdots\leqslant\alpha(m)\};$$

$$D_{m,n}=\{\alpha\mid\alpha\in\Gamma_{m,n},\text{当 } i\neq j \text{ 时},\alpha(i)\neq\alpha(j)\};$$

$$Q_{m,n}=\{\alpha\mid\alpha\in\Gamma_{m,n},\alpha(1)<\alpha(2)<\cdots<\alpha(m)\}.$$

上面这些集合的序列数目分别为:

$$|\Gamma(n_1,n_2,\cdots,n_m)|=\prod_{i=1}^m n_i;\quad |\Gamma_{m,n}|=n^m;$$

$$|G_{m,n}|=\binom{n+m-1}{m};$$

$$|D_{m,n}|=\binom{n}{m}m!;\quad |Q_{m,n}|=\binom{n}{m}.$$

还有几个重要的序列集合为 $\Delta,\bar{\Delta},\hat{\Delta},\Omega$(参见"轨道代表集").

多重线性映射(multilinear mapping) 多重线性代数最基本的研究对象.它是线性映射概念的推

广. 设 $V_1,V_2,\cdots,V_m,W$ 是一个(特征为 0 的)域 K 上的 $m+1$ 个向量空间,若映射 $\varphi:V_1\times V_2\times\cdots\times V_m\to W$ 对每个用作变元的向量 $v_i\in V_i$ 都是线性的,即 $\varphi(v_1,\cdots,v_i+av_i',\cdots,v_m)=\varphi(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_m)+a\varphi(v_1,\cdots,v_i',\cdots,v_m)$ $(a\in K,1\leqslant i\leqslant m)$,则称 φ 为 m 重线性映射(m 线性映射). 当 $m\geqslant 3$ 时,统称为多重线性映射;当 $m=2$ 时,称为双线性映射. 多重线性映射 $\varphi:V_1\times V_2\times\cdots\times V_m\to W$ 的全体记为 $M(V_1,V_2,\cdots,V_m;W)$ 或 $L^m(V_1,V_2,\cdots,V_m;W)$,它具有加法与纯量乘法运算:

1. $(\varphi+\psi)(v_1,v_2,\cdots,v_m)=\varphi(v_1,v_2,\cdots,v_m)+\psi(v_1,v_2,\cdots,v_m)$.

2. $(a\varphi)(v_1,v_2,\cdots,v_m)=a\varphi(v_1,v_2,\cdots,v_m)$ $(a\in K)$,

从而也构成域 K 上的向量空间. 多重线性映射 $\varphi:V_1\times V_2\times\cdots\times V_m\to W$ 的值域记为 $\mathrm{Im}\,\varphi$,一般它不是个向量空间,由 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 生成的 W 的子空间记为 $\langle\mathrm{Im}\,\varphi\rangle$. 这个子空间的维数

$$\dim\langle\mathrm{Im}\varphi\rangle\leqslant\prod_{i=1}^{m}\dim V_i.$$

当上述的 $W=K$ 时,m 重线性映射、多重线性映射、双线性映射又分别称为 m 重线性函数、多重线性函数、双线性函数.

***m* 重线性映射**(m-linear mapping) 见"多重线性映射".

双线性映射(bilinear mapping) 见"多重线性映射".

***m* 重线性函数**(m-linear function) 见"多重线性映射".

双线性函数(bilinear function) 见"多重线性映射".

多重线性函数(multilinear function) 一种特殊的多重线性映射. 即当映射空间 W 为域 K 时的多重线性映射. 有些作者把一般多重线性映射也称为多重线性函数.

多重线性开拓(multilinear extension) 确定多重线性映射的过程. 即要求此映射在空间 $\mathop{\times}\limits_{1}^{m}V_i$ 的某些元素上取给定值,然后将它多重线性地开拓到整个空间上. 具体如下:若 $\{e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{in_i}\}$ 是向量空间 V_i 的基 $(i=1,2,\cdots,m)$,则存在惟一的 m 重线性映射

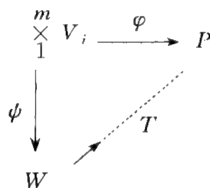
$$\varphi:\ \mathop{\times}\limits_{1}^{m}V_i\to W,$$

使 φ 在下面的元素上取预先给定的值,这些元素为

$$\{e_\gamma=(e_{1\gamma(1)},e_{2\gamma(2)},\cdots,e_{m\gamma(m)})\in\mathop{\times}\limits_{1}^{m}V_i\mid \gamma\in\Gamma(n_1,n_2,\cdots,n_m)\},$$

其个数为 $\prod\limits_{i=1}^{m}n_i$. 一般地,它比空间 $\mathop{\times}\limits_{1}^{m}V_i$ 的维数($\sum\limits_{i=1}^{m}n_i$)多得多,这是与确定线性映射很不相同的地方.

因子化泛性质(universal factorization property) 一种特殊的多重线性映射所具有的重要性质. 这个性质能把一般的多重线性映射转换为线性映射来研究. 即一个多重线性映射



$$\varphi:\ V_1\times V_2\times\cdots\times V_m\to P$$

称为具有因子化泛性质,是指对于任意的多重线性映射

$$\psi:\ V_1\times V_2\times\cdots\times V_m\to W$$

(W 也任意),总存在线性映射 $T\in L(P,W)$,使得 $\psi=T\varphi$. 这个性质常用上面的可换图来表示. 多重线性映射

$$\varphi:\ \mathop{\times}\limits_{1}^{m}V_i\to P$$

具有因子化泛性质,等价于(对于有限维空间)多重线性映射 φ 满足

$$\dim\langle\mathrm{Im}\,\varphi\rangle=\prod_{i=1}^{m}\dim V_i.$$

张映射(spread mapping) 多重线性代数的重要概念. 具有因子化泛性质的多重线性映射. 也可等价地(对于有限维空间)定义为:设 $\otimes:V_1\times V_2\times\cdots\times V_m\to P$ 是多重线性映射,若

$$\dim\langle\mathrm{Im}\ \otimes\rangle=\prod_{i=1}^{m}\dim V_i,$$

则称 $\otimes$ 是关于 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 的张映射. 张映射是构成张量空间的基本要素.

张量空间(tensor space) 多重线性代数的重要概念. 定义有张映射的一种向量空间. 具体定义有多种不同的形式. 例如,可定义为:设 P 是一个向量空间,若存在张映射 $\otimes:V_1\times V_2\times\cdots\times V_m\to P$ 使得 $\langle\mathrm{Im}\ \otimes\rangle=P$,则称 P 为 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 的带有张映射 $\otimes$ 的张量空间;或称 P 为 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 的张量积空间;或简称 P 为 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 的张量积,记为

$$P=V_1\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_m=\bigotimes_{1}^{m}V_i.$$

张量空间对于多重线性代数的重要性如同向量空间对于线性代数的重要性. 张量空间的维数是

$$\dim(\bigotimes_{1}^{m}V_i)=\dim\langle\mathrm{Im}\ \otimes\rangle=\prod_{i=1}^{m}\dim V_i.$$

张量积空间(tensor space) 即"张量空间".

向量空间的张量积(tensor product of vector spaces) 多重线性代数的基本运算. 有各种意义下的张量积,例如向量的张量积,矩阵的张量积等. 有些文献上把 $(P,\otimes)$ 称为张量积,其中 P 是定义有张

映射$\otimes$的张量空间，即映射$\otimes \in M(V_1, V_2, \cdots, V_m; P)$具有因子化泛性质且$\langle \mathrm{Im}\ \otimes \rangle = P$.

可合张量(decomposable tensor) 亦称可合元素.一类特殊的张量.张量空间

$$\bigotimes_1^m V_i = \langle \mathrm{Im}\ \otimes \rangle$$

的元素称为张量，其中属于 Im $\otimes$的元素(即张映射$\otimes$的值)称为可合张量，又称为可分解张量或可分解元素，记为$\otimes(v_1, v_2, \cdots, v_m) = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m = v^{\otimes}$.可合张量 $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m$ 也称为 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 的张量积.可合张量有下面的重要性质：

1. 若 $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m = u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_m$，则对任意 $\psi \in M(V_1, V_2, \cdots, V_m; W)$ 有 $\psi(v_1, v_2, \cdots, v_m) = \psi(u_1, u_2, \cdots, u_m)$.

2. $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m = 0$ 的充要条件是有某一个 $v_i = 0$.

3. $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m = u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_m \neq 0$ 的充分必要条件是存在 $c_i \in K$ 使 $v_i = c_i u_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$且

$$\prod_{i=1}^m c_i = 1.$$

可合元素(decomposable element) 即“可合张量”.

张量(tensor) 见“可合张量”.

可分解元素(decomposable element) 即“可合张量”.

可分解张量(decomposable tensor) 即“可合张量”.

不可合张量(non-decomposable tensor) 亦称不可合元素.一类特殊的张量.张量空间

$$\bigotimes_1^m V_i = \langle \mathrm{Im}\ \otimes \rangle$$

中不属于 Im $\otimes$的元素称为不可合张量，也称为不可分解张量或不可分解元素.例如，若 e_1, e_2 是 V 中线性无关的向量，则张量空间 $V \otimes V$ 中的元素 $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$ 就是不可合张量.而 $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_2 = (e_1 + e_2) \otimes e_2$ 则是可合张量.

不可合元素(non-decomposable element) 即“不可合张量”.

不可分解元素(non-decomposable element) 即“不可合张量”.

不可分解张量(non-decomposable tensor) 即“不可合张量”.

张量空间的基(bases of a tensor space) 张量空间作为线性空间的基.张量空间由可合张量生成，通常选取可合张量作为基.若$\{e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{in_i}\}$是域 K 上向量空间 V_i 的基 $(i = 1, 2, \cdots, m)$，对于 $\gamma \in \Gamma$(即 $\Gamma(n_1, n_2, \cdots, n_m)$)，记可合张量 $e_{1\gamma(1)} \otimes e_{2\gamma(2)} \otimes \cdots \otimes e_{m\gamma(m)}$为 $e_\gamma^{\otimes}$，则称$\{e_\gamma^{\otimes} | \gamma \in \Gamma\}$为张量空间$\bigotimes_1^m V_i$ 的一组基.对于任一张量 $z \in \bigotimes_1^m V_i$ 可表示为

$$z = \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma e_\gamma^{\otimes} \quad (c_\gamma \in K | \gamma \in \Gamma).$$

$\{c_\gamma \in K | \gamma \in \Gamma\}$称为张量 z 关于基$\{e_\gamma^{\otimes} | \gamma \in \Gamma\}$的张量坐标或张量分量.

张量坐标(coordinates of a tensor) 见“张量空间的基”.

张量分量(components of a tensor) 见“张量空间的基”.

惟一因子化性质(unique factorization property) 亦称泛性质.刻画特殊映射本质的一种性质.称多重线性映射

$$\varphi: \mathop{\times}_1^m V_i \to P$$

具有惟一因子化性质，是指对于任意的 $\psi \in M(V_1, V_2, \cdots, V_m; W)$($W$ 任意给定)，都存在惟一的 $T \in L(P, W)$使 $\psi = T\varphi$.具有因子化性质的 $\varphi \in M(V_1, V_2, \cdots, V_m; P)$是惟一因子化性质当且仅当$\langle \mathrm{Im}\,\varphi \rangle = P$.张量空间的张映射$\otimes$就具有惟一因子化性质，这是张量空间最为重要的性质.于是对于任意的多重线性映射 $\psi: V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m \to W$($W$ 也任意)，必存在惟一的线性映射

$$T \in L(\bigotimes_1^m V_i, W)$$

使得 $\psi = T\otimes$，即

$$\psi(v_1, v_2, \cdots, v_m) = T(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m) = Tv^{\otimes}.$$

泛性质(universal property) 即“惟一因子化性质”.

诱导内积(induced inner product) 多重线性代数的重要概念.张量空间$\bigotimes_1^m V_i$ 上由 V_i 的内积定义的一种内积.通常只考虑域 K 为复数域 C 的情形.若设复数域 C 上的向量空间 V_i 上定义了内积 $(\ ,\ )_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$，则

$$(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m, u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_m) = \prod_{i=1}^m (v_i, u_i)_i$$

确定了张量空间$\bigotimes_1^m V_i$ 上的一个内积，称为诱导内积.若$\{e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{in_i}\}$是内积空间 V_i 的标准正交基，则$\{e_\gamma^{\otimes} | \gamma \in \Gamma\}$成为张量空间$\bigotimes_1^m V_i$ 关于诱导内积的标准正交基，即对于 $\alpha, \beta \in \Gamma$ 有$(e_\alpha^{\otimes}, e_\beta^{\otimes}) = \delta_{\alpha\beta}$；在此标准正交基之下，对于 $v, u \in \bigotimes_1^m V_i$，若

$$v = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma e_\gamma^{\otimes}, \quad u = \sum_{\gamma \in \Gamma} b_\gamma e_\gamma^{\otimes},$$

则

$$(v, u) = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma b_\gamma.$$

矩阵的克罗内克积(Kronecker product of ma-

trices）　亦称矩阵的张量积. 矩阵（可看做线性映射）的一种张量积. 通常可用矩阵的元素定义如下：若 $A_i=(a^i_{st})$ 是 k_i 行 n_i 列矩阵 $(i=1,2,\cdots,m)$，则 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的克罗内克乘积 $A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_m$ 定义为一个 $\prod_{i=1}^m k_i$ 行 $\prod_{i=1}^m n_i$ 列的大矩阵，其 (α,β) 位置上的元素为

$$(\bigotimes_1^m A_i)_{\alpha,\beta}=\prod_{i=1}^m a^i_{\alpha(i)\beta(i)},$$

其中 $\alpha\in\Gamma(k_1,k_2,\cdots,k_m)$，$\beta\in\gamma(n_1,n_2,\cdots,n_m)$ 都按词典次序排列. 矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的克罗内克乘积 $\bigotimes_1^m A_i$ 具有线性映射张量积的各种性质，当每个 A_i 都为方阵时，则 $\bigotimes_1^m A_i$ 具有线性算子张量积的各种性质. 例如，若

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{pmatrix},$$

则

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B&a_{12}B\\a_{21}B&a_{22}B\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}&a_{11}b_{12}&a_{11}b_{13}&a_{12}b_{11}&a_{12}b_{12}&a_{12}b_{13}\\a_{11}b_{21}&a_{11}b_{22}&a_{11}b_{23}&a_{12}b_{21}&a_{12}b_{22}&a_{12}b_{23}\\a_{21}b_{11}&a_{21}b_{12}&a_{21}b_{13}&a_{22}b_{11}&a_{22}b_{12}&a_{22}b_{13}\\a_{21}b_{21}&a_{21}b_{22}&a_{21}b_{23}&a_{22}b_{21}&a_{22}b_{22}&a_{22}b_{23}\end{pmatrix}.$$

矩阵的张量积（tensor product of matrices） 即“矩阵的克罗内克积”.

诱导线性映射（induced linear mapping）　张量空间之间的一种线性映射. 设 V_i,W_i 是向量空间，T_i 是 V_i 到 W_i 的线性映射，即 $T_i\in L(V_i,W_i)$，$i=1,2,\cdots,m$. 若定义映射

$$\varphi(v_1,v_2,\cdots,v_m)=T_1v_1\otimes T_2v_2\otimes\cdots\otimes T_mv_m=(\otimes(T_1v_1,T_2v_2,\cdots,T_mv_m)),$$

则 φ 是一个 $\times_1^m V_i$ 到 $\bigotimes_1^m W_i$ 的 m 重线性映射. 因而存在惟一的

$$T\in L(\bigotimes_1^m V_i,\bigotimes_1^m W_i)$$

使 $T\otimes=\varphi$，即

$$T(v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_m)=T_1v_1\otimes T_2v_2\otimes\cdots\otimes T_mv_m.$$

这个线性映射 T 称为 $T_1,T_2,\cdots,T_m$ 的诱导线性映射并记为

$$T=T_1\otimes T_2\otimes\cdots\otimes T_m=\bigotimes_1^m T_i.$$

诱导线性映射有下列基本性质：

1. 若 $S_i\in L(W_i,U_i)$，$T_i\in L(V_i,W_i)$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则

$$(\bigotimes_1^m S_i)(\bigotimes_1^m T_i)=\bigotimes_1^m S_iT_i.$$

2. 若 $T_i\in L(V_i,W_i)$，$i=1,2,\cdots,m$，则秩

$$\operatorname{rank}(\bigotimes_1^m T_i)=\prod_{i=1}^m\operatorname{rank}T_i.$$

3. 若 $T_i\in L(V_i,W_i)$，V_i,W_i 为内积空间，$T_i^*\in L(W_i,V_i)$ 为 T_i 的共轭映射 $(i=1,2,\cdots,m)$，又

$$\bigotimes_1^m V_i 与 \bigotimes_1^m W_i$$

上都定义了诱导内积，则

$$(\bigotimes_1^m T_i)^*=\bigotimes_1^m T_i^*.$$

线性映射的张量积（tensor product of linear mappings）　线性映射的一种运算. 线性映射 $T_1,T_2,\cdots,T_m$ 的张量积通常是指诱导线性映射 $T_1\otimes T_2\otimes\cdots\otimes T_m$. 这是因为在有限维的情况下存在张映射使

$$L(\bigotimes_1^m V_i,\bigotimes_1^m W_i)$$

成为向量空间 $L(V_1,W_1),L(V_2,W_2),\cdots,L(V_m,W_m)$ 的张量积空间（在无限维的情况下，这是不对的），并使其中的诱导线性映射 $T_1\otimes T_2\otimes\cdots\otimes T_m$ 成为可合张量. 于是作为线性映射张量积的诱导线性映射便有可合张量的性质. 例如，$\bigotimes_1^m T_i=0$ 的充分必要条件是某 $T_i=0$；又如

$$\bigotimes_1^m T_i=\bigotimes_1^m S_i\neq 0$$

的充分必要条件是存在 $c_i\in K$ 使 $v_i=c_iu_i\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 且

$$\prod_{i=1}^m c_i=1.$$

线性算子的张量积（tensor product of linear operators）　线性算子的一种运算. 当 $T_i\in L(V_i,V_i)$ 时，T_i 称为（V_i 上的）线性算子 $(i=1,2,\cdots,m)$，这时线性映射的张量积 $\bigotimes_1^m T_i$ 也就称为线性算子的张量积. 作为线性算子张量积的 $\bigotimes_1^m T_i$，除了有一般线性映射张量积的性质外，还有如下的常用性质：若 $T_i\in L(V_i,V_i)$ 的全部特征值为 λ_{ij} $(j=1,2,\cdots,n_i,n_i=\dim V_i,i=1,2,\cdots,m,n=\prod_{i=1}^m n_i)$，则有：

1. $\bigotimes_1^m T_i$ 的全部特征值为

$$\prod_{i=1}^m\lambda_{i\gamma(i)},\quad\gamma\in\Gamma(n_1,n_2,\cdots,n_m).$$

2. $\operatorname{tr}(\bigotimes_1^m T_i)=\prod_{i=1}^m\operatorname{tr}(T_i)$.

3. $\det(\bigotimes_1^m T_i)=\prod_{i=1}^m(\det T_i)^{n/n_i}$.

4. 若每个 T_i 是：(a) 正规的，(b) 埃尔米特的，(c) 正定的，(d) 非负定的，(e) 酉的，则 $\bigotimes_1^m T_i$ 也具有相应性质.

注意：n_i 维线性空间 V_i 上的线性算子可看做(域 K 或 $\mathbb{C}$ 上的) $n_i\times n_i$ 矩阵(在取定的基下)，上述概念与结果可搬到矩阵的克罗内克积(张量积)上(参见“矩阵的克罗内克积”).

混合张量(mixed tensor)　一类张量. 向量空间及其对偶空间张量积的元素. 张量空间

$$\overbrace{V\otimes\cdots\otimes V}^{p}\otimes\overbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}^{q}$$

(记为 V_q^p)中的元素称为 p 重反变 q 重共变张量；或称为 (p,q) 重混合张量，其中 V 是 $\mathbb{C}$ 上向量空间，$V^*=L(V,\mathbb{C})$ 是 V 的对偶空间. 混合张量也指

$$M(\overbrace{V^*,\cdots,V^*}^{p},\overbrace{V,\cdots,V}^{q};\mathbb{C})$$

中的多重线性函数. 可以定义张映射 $\otimes$ 使

$$V_q^p=M(\overbrace{V^*,\cdots,V^*}^{p},\overbrace{V,\cdots,V}^{q};\mathbb{C}).$$

V_0^p 中的元素称为反变张量. V_q^0 中的元素称为共变张量. 这些都是微分几何、黎曼几何及物理上用得较多的概念.

共变张量(covariant tensor)　见“混合张量”.

反变张量(contravariant tensor)　见“混合张量”.

张量收缩(contraction of tensors)　一种张量运算. 把混合张量空间 V_q^p 中的张量按一定的规则收缩为 V_{q-1}^{p-1} 中的张量的运算. 这个过程如下：考虑由 $\varphi_{st}(v_1,v_2,\cdots,v_p,f_1,f_2,\cdots,f_q)=f_t(v_s)v_1\otimes\cdots\otimes v_{s-1}\otimes v_{s+1}\otimes\cdots\otimes v_p\otimes f_1\otimes\cdots\otimes f_{t-1}\otimes f_{t+1}\otimes\cdots\otimes f_q$ 定义的多重线性映射

$$\varphi_{st}:\overbrace{V\times\cdots\times V}^{p}\times\overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{q}\to V_{q-1}^{p-1},$$

其中 $f_i\in V^*(i=1,2,\cdots,q)$ 为 V 上的线性函数，由惟一因子化性质，存在惟一的线性映射 $C_{st}\in L(V_q^p,V_{q-1}^{p-1})$ 使 $\varphi_{st}=C_{st}\otimes$. 线性映射 C_{st} 称为关于 (s,t) 的收缩映射. 注意收缩映射可以继续进行. 例如

$$\begin{aligned}&C_{21}^2(v_1\otimes v_2\otimes v_3\otimes f_1\otimes f_2)\\&=f_1(v_2)C_{21}(v_1\otimes v_3\otimes f_2)\\&=f_1(v_2)f_2(v_3)v_1.\end{aligned}$$

收缩映射(contraction mapping)　见“张量的收缩”.

置换算子(permutation operator)　张量空间 $\overset{m}{\otimes}V$ 的重要线性算子. 对于 $\sigma\in S_m$(m 元对称群)，若定义 m 重线性映射 $\varphi:\overset{m}{\times}V\to\overset{m}{\otimes}V$，

$$\varphi(v_1,v_2,\cdots,v_m)=v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(m)},$$

则存在惟一的 $T\in L(\overset{m}{\otimes}V,\overset{m}{\otimes}V)$ 使 $T\otimes=\varphi$，称 T 为张量空间 $\overset{m}{\otimes}V$ 上的置换算子，记为 $T=P(\sigma)$. 即有

$$P(\sigma)v^{\otimes}=v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(m)}=v_{\sigma^{-1}}^{\otimes},$$

也有 $P(\sigma^{-1})v^{\otimes}=v_\sigma^{\otimes}$. 置换算子的常用性质有：

1. $P(\sigma\pi)=P(\sigma)P(\pi)$.

2. $P(e)=I_{\otimes V}^{m}$，这里 e 是 S_m 的恒等置换，$I_{\otimes V}^{m}$ 是张量空间 $\overset{m}{\otimes}V$ 的恒等算子.

3. $P(\sigma^{-1})=P(\sigma)^{-1}$.

4. $P(\sigma)$ 关于 $\overset{m}{\otimes}V$ 的诱导内积是酉算子，即

$$P(\sigma)^{-1}=P(\sigma)^*.$$

5. $\mathrm{tr}\ (P(\sigma))=n^{c(\sigma)}$，$n=\dim V$，$c(\sigma)$ 是 σ 分解为不相交的循环置换乘积中因子的个数.

对称多重线性映射(symmetric multilinear mapping)　一类具有对称性质的多重线性映射. 设 G 是 n 元对称群 S_m 的子群，χ 是群 G 的不可约特征标，若多重线性映射

$$\psi:\overset{m}{\times}V\to W$$

(V 和 W 都是复数域 $\mathbb{C}$ 上的向量空间)满足

$$\begin{aligned}&\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})\psi(v_{\sigma(1)},v_{\sigma(2)},\cdots,v_{\sigma(m)})\\&=\psi(v_1,v_2,\cdots,v_m),\end{aligned}$$

则称 ψ 为关于 G 和 χ 对称的多重线性映射. 当 χ 为 G 的一阶特征标即 $\chi(e)=1$ 时，多重线性映射

$$\psi:\overset{m}{\times}V\to W$$

为关于 G 和 χ 称，当且仅当对任意 $\sigma\in G$ 和所有 $v_i\in V$ 有

$$\psi(v_{\sigma(1)},v_{\sigma(2)},\cdots,v_{\sigma(m)})=\chi(\sigma)\psi(v_1,v_2,\cdots,v_m).$$

不涉及上述的 G 与 χ，若对任意的 $\sigma\in S_m$ 都有

$$\psi(v_{\sigma(1)},v_{\sigma(2)},\cdots,v_{\sigma(m)})=\psi(v_1,v_2,\cdots,v_m),$$

则 ψ 就直接地称为 $\overset{m}{\times}V$ 到 W 的对称多重线性映射. 有时也称 ψ 为完全对称的多重线性映射，或简称对称映射.

对称映射(symmetric mapping)　见“对称多重线性映射”.

反对称多重线性映射(skew-symmetric multilinear mapping)　一类重要的多重线性映射. 关于 G 和 χ 对称的多重线性映射

$$\psi:\overset{m}{\times}V\to W,$$

当 $G=S_m$，$\chi=\varepsilon$(称号特征标，$\sigma\in S_m$ 为偶(奇)置换时 $\varepsilon(\sigma)=1(-1)$)时，称为反对称多重线性映射，简称反对称映射. 或等价地定义为：当对任意 $\sigma\in S_m$ 有

$$\psi(v_{\sigma(1)},v_{\sigma(2)},\cdots,v_{\sigma(m)})=\varepsilon(\sigma)\psi(v_1,v_2,\cdots,v_m)$$

时，称 ψ 为反对称多重线性映射. 当域 K 的特征为 0 时，多重线性映射

$$\psi:\overset{m}{\times}V\to W$$

为反对称的当且仅当对任意的 $(i\neq j)$，当 $v_i=v_j(1\leqslant i,j\leqslant m)$ 时，有 $\psi(v_1,v_2,\cdots,v_m)=0$. 在域 K 之特征非 0 时，这二者未必等价.

反对称映射(skew-symmetric mapping)　见“反对称多重线性映射”.

交错多重线性映射(alternating multilinear mapping)　一种特殊的反对称多重线性映射. 设

$$\psi: \overset{m}{\times} V \to W$$

为多重线性映射(其中 V,W 都是域 K 上的线性空间),若对任意的 $i \neq j$,当 $v_i = v_j (1 \leqslant i, j \leqslant m)$ 时,必有 $\psi(v_1, v_2, \cdots, v_m) = 0$,则称 ψ 为交错多重线性映射. 由于偶(奇)置换必可分解为偶(奇)数个对换之积,利用 ψ 的多重线性性质展开 $\psi(\cdots, v_i + v_j, \cdots, v_i + v_j, \cdots)$,即知交错多重线性映射一定是反对称多重线性映射,反过来未必成立,但在 K 的特征不为 2(特别是 K 的特征为 0,例如 $K=\mathbf{C}$ 时)二者是等价的概念.

完全对称多重线性映射(completely symmetric multilinear mapping)　一类重要的多重线性映射. 关于 G 和 χ 对称的多重线性映射

$$\psi: \overset{m}{\times} V \to W,$$

当 $G = S_m$,$\chi \equiv 1$ 时,称为完全对称多重线性映射. 或者等价地定义为:当对任意 $\sigma \in S_m$ 有

$$\psi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \cdots, v_{\sigma(m)}) = \psi(v_1, v_2, \cdots, v_m)$$

时,称 ψ 为完全对称多重线性映射. 有时也简称对称多重线性映射.

对称化算子(symmetrizer)　亦称对称化子. 张量空间 $\overset{m}{\otimes} V$ 上的一种投影算子. 定义为

$$T(G,\chi) = \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) P(\sigma),$$

其中 χ 为群 G 的不可约特征标,$P(\sigma)$ 为 $\overset{m}{\otimes} V$ 上的置换算子. 对称化算子 $T(G,\chi)$ 对张量空间 $\overset{m}{\otimes} V$ 的分类起着重要的作用,它具有下面的性质:

1. $T(G,\chi)^2 = T(G,\chi) = T(G,\chi)^*$ (表明 $T(G,\chi)$ 关于 $\overset{m}{\otimes} V$ 的诱导内积是正交投影).

2. $\sum\limits_{\chi \in I(G)} T(G,\chi) = I_{\overset{m}{\otimes} V}$,这里 $I(G)$ 表示群 G 的全部不可约特征标集合.

3. 当 $\chi \neq \mu$ 时,$T(G,\chi) T(G,\mu) = 0$.

对称化子(symmetrizer)　即“对称化算子”.

张量对称类(symmetry class of tensors)　张量空间 $\overset{m}{\otimes} V$ 的一种子空间. 它是对称化算子 $T(G,\chi)$ 的投影子空间. 关于 G 和 χ 的张量对称类记为 $V_\chi(G) = \operatorname{Im} T(G,\chi)$. 定义了诱导内积的张量空间 $\overset{m}{\otimes} V$ 等于所有张量对称类的正交直和,即

$$\overset{m}{\otimes} V = \sum_{\chi \in I(G)} V_\chi(G),$$

且当 $\chi \neq \mu$ 时 $V_\chi(G)$ 与 $V_\mu(G)$ 中的张量是正交的. 张量对称类 $V_\chi(G)$ 的维数是

$$\dim V_\chi(G) = \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) n^{c(\sigma)},$$

其中 $n = \dim V$,$c(\sigma)$ 是 σ 分解为不相交的循环置换乘积中因子的数目. 为了叙述简明,有关张量对称类的词条一般都在 $K=\mathbf{C}$ 上讨论,但在 $\chi \equiv 1$ 与 $\chi = \varepsilon$ 的情形则除外.

可合对称张量(decomposable symmetrized tensor)　亦称可合对称元素. 一类特殊的对称张量. 张量对称类 $V_\chi(G)$ 中形如 $T(G,\chi) v_1 \otimes \cdots \otimes v_m$ 的元素称为可合对称张量. 在研究一个固定的张量对称类 $V_\chi(G)$ 时,其可合对称张量常写成

$$T(G,\chi) v^{\otimes} = v_1 * \cdots * v_m = v^*.$$

张量对称类 $V_\chi(G)$ 的可合元素有如下性质:

1. 若 $v^* = u^*$,则对关于 G 和 χ 对称的任意多重线性映射

$$\psi: \overset{m}{\times} V \to W$$

都有 $\psi(v_1, v_2, \cdots, v_m) = \psi(u_1, u_2, \cdots, u_m)$.

2. 若 $v_1 * \cdots * v_m = 0$,则 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 线性相关.

3. 若 $v_1 * \cdots * v_m = u_1 * \cdots * u_m \neq 0$,则

$$\langle v_1, v_2, \cdots, v_m \rangle = \langle u_1, u_2, \cdots, u_m \rangle.$$

可合对称元素(decomposable symmetric element)　即“可合对称张量”.

对称(多重线性映射)因子化性质(factorization property for symmetric multilinear mappings)　张量对称类的一种重要性质. 利用张量对称类 $V_\chi(G)$ 可把关于 G 和 χ 对称的多重线性映射转换为线性映射来研究. 即,若

$$\psi: \overset{m}{\times} V \to W$$

是关于 G 和 χ 对称的多重线性映射,则存在惟一的线性映射 $T_\chi \in L(V_\chi(G), W)$ 使 $\psi = T_\chi *$,即

$$\psi(v_1, v_2, \cdots, v_m) = T_\chi v^*.$$

稳定子子群(stabilizer subgroup)　m 元对称群 S_m 的一类子群. 若 G 是 S_m 的子群,$\alpha \in \Gamma_{m,n}$,则 G 的子群 $G_\alpha = \{\sigma \in G \mid \alpha\sigma = \alpha\}$ 称为 G 对 α 的稳定子子群,它是由 G 中对 α 置换后不变的那些置换组成.

轨道代表集(system of distinct representatives of orbits)　序列集合 $\Gamma_{m,n}$ 中与群 G 有关的一个子集. 对于 $\alpha \in \Gamma_{m,n}$,集合 $\Gamma_\alpha = \{\alpha\sigma \mid \sigma \in G\}$ 称为 $\Gamma_{m,n}$ 中包含 α 的 G 轨道. 把每个轨道中按字典次序排在第一的序列排出来组成的集合称为轨道代表集,记为 Δ. $\Gamma_{m,n}$ 可表示为不相交的轨道的并,即

$$\Gamma_{m,n} = \bigcup_{\alpha \in \Delta} \Gamma_\alpha.$$

轨道代表集 Δ 是研究张量对称类时用到的重要集合. 还有三个集合 $\bar{\Delta}, \Omega, \hat{\Delta}$ 也是重要集合,定义为

$$\bar{\Delta} = \left\{ \alpha \in \Delta \mid \sum_{\sigma \in G_\alpha} \chi(\sigma) \neq 0 \right\},$$

$$\Omega = \left\{\alpha \in \Gamma_{m,n}, \Big| \sum_{\sigma \in G_\alpha} \chi(\sigma) \neq 0\right\}.$$

$\hat{\Delta}$ 的定义见“轨道子空间”. 这些集合具有关系：

$$\bar{\Delta}=\Delta \cap \Omega,\ \Omega=\bigcup_{\alpha \in \bar{\Delta}} \Gamma_\alpha,\ G_{m,n} \subseteq \Delta,\ Q_{m,n} \subseteq \bar{\Delta}.$$

注意 $\bar{\Delta}, \Omega, \hat{\Delta}$ 都与群 G 的不可约特征标 χ 有关.

轨道(orbit)　见“轨道代表集”.

轨道子空间(orbital subspace)　张量对称类 $V_\chi(G)$ 的子空间. 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 V 的基, $\alpha \in \Gamma_{m,n}$, $V_\chi(G)$ 的子空间 $\langle e_{\alpha\sigma}^* = T(G,\chi)e_{\alpha\sigma}^{\otimes} \mid \sigma \in G\rangle$ 称为 $V_\chi(G)$ 对应于 α 的轨道子空间. 弗里斯(Freese, R.)首先证明了轨道子空间的维数为

$$s_\alpha = \dim\langle e_{\alpha\sigma}^* \mid \sigma \in G\rangle = \frac{\chi(e)}{|G_\alpha|} \sum_{\sigma \in G_\alpha} \chi(\sigma).$$

张量对称类 $V_\chi(G)$ 可分解为轨道子空间的直和. 由 $e_{\alpha\sigma}^* \neq 0$ 当且仅当 $\alpha \in \bar{\Delta}$, 所以 $V_\chi(G)$ 可表示为

$$V_\chi(G) = \sum_{\alpha \in \bar{\Delta}} \langle e_{\alpha\sigma}^* \mid \sigma \in G\rangle.$$

对于 $\alpha \in \bar{\Delta}$ 可以选取 s_α 个序列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{s_\alpha}$, 使 $\{e_{\alpha_1}^*, e_{\alpha_2}^*, \cdots, e_{\alpha_{s_\alpha}}^*\}$ 组成轨道子空间 $\langle e_{\alpha\sigma}^* \mid \sigma \in G\rangle$ 的基. 设 $\bar{\Delta}$ 按字典次序排列为 $\bar{\Delta} = \{\alpha, \beta, \gamma, \cdots\}$, 对 β, γ 等也类似地分别选出 s_β 个与 s_γ 个序列, 这样就组成一个重要的集合记为 $\hat{\Delta} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{s_\alpha}; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{s_\beta}; \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{s_\gamma}; \cdots\}$. 于是, $\{e_\omega^* \mid \omega \in \hat{\Delta}\}$ 就构成张量对称类 $V_\chi(G)$ 的基.

张量对称类的指标(index of a symmetry class of tensors)　刻画对称张量类的非负整数. 张量对称类 $V_\chi(G)$ 的指标记为 $\mathrm{Ind}V_\chi(G)$, 是使得只要 $\dim\langle v_1, v_2, \cdots, v_m\rangle \leqslant r$ 就有 $v_1 * v_2 * \cdots * v_m = 0$ 的最大非负整数 $(1 \leqslant r \leqslant m)$. 例如, $\mathrm{Ind}V_1(S_m) = 0$. 又如当 $m \leqslant \dim V$ 时, $\mathrm{Ind}V_\varepsilon(S_m) = m-1$.

张量对称类上的诱导算子(induced operator of a symmetry class of tensors)　张量对称类 $V_\chi(G)$ 上的一种线性算子. 若 $T \in L(V,V)$, 则

$$\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_m) = Tv_1 * Tv_2 * \cdots * Tv_m$$

定义了一个关于 G 和 χ 对称的多重线性映射, 由对称因子化性质, 存在惟一的线性算子, 记为

$$K(T) \in L(V_\chi(G), V_\chi(G)),$$

使 $K(T)v^* = Tv_1 * Tv_2 * \cdots * Tv_m$, 称 $K(T)$ 为 T 在 $V_\chi(G)$ 上的诱导算子. $K(T)$ 有如下的性质：

1. $K(T) = \overset{m}{\otimes} T|_{V_\chi(G)}$, 即为 $\overset{m}{\otimes} T$ 在 $V_\chi(G)$ 上的限制.

2. $K(I_V) = I_{V_\chi(G)}$.

3. $K(ST) = K(S)K(T)$.

4. $\mathrm{rank}\, K(T) = |\hat{\Delta} \cap \Gamma_{m,r}|$, 其中 $r = \mathrm{rank}\, T$.

5. 若 T 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则 $K(T)$ 的特征值为

$$\prod_{i=1}^{m} \lambda_{\omega(i)},\ \omega \in \hat{\Delta}.$$

6. $\det K(T) = (\det T)^{\frac{m}{n}|\hat{\Delta}|}$, 其中

$$|\hat{\Delta}| = \dim V_\chi(G) = \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) n^{c(\sigma)}.$$

7. $K(T)^* = K(T^*)$.

8. 若 T 分别是正规的、埃尔米特的、正定的、非负定的、酉的, 则 $K(T)$ 也具有相应性质.

反对称张量空间(skew-symmetric tensor space)　亦称格拉斯曼空间. 是一个最常见的张量对称类, 即当 $G = S_m$, $\chi = \varepsilon$(符号特征标)时的张量对称类. 通常写为

$$V_\varepsilon(S_m) = \overset{m}{\wedge} V (\text{或} \wedge^m V),$$

可合元素则写为

$$T(S_m, \varepsilon)v^{\otimes} = v^{\wedge} = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_m,$$

又称为 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 的外积. 反对称张量空间 $\overset{m}{\wedge} V$ 具有许多很好的性质. 例如, $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_m \neq 0$ 的充分必要条件是 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 线性无关；又如

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_m = au_1 \wedge \cdots \wedge u_m \neq 0$$

的充分必要条件是 $\langle v_1, v_2, \cdots, v_m\rangle = \langle u_1, u_2, \cdots, u_m\rangle$ 且维数是 m. 也有

$$\dim(\overset{m}{\wedge} V) = |Q_{m,n}| = \binom{n}{m},$$

其中 $n = \dim V$. 若 $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 是 V 的基, 则 $\{e_\omega^{\wedge} \mid \omega \in Q_{m,n}\}$ 是 $\overset{m}{\wedge} V$ 的基. 例如 $\overset{2}{\wedge} V$ 的基为 $\{e_1 \wedge e_2, \cdots, e_1 \wedge e_n, \cdots, e_i \wedge e_j, \cdots, e_{n-1} \wedge e_n\}$ (其中 $i < j$).

格拉斯曼空间(Grassmann space)　即“反对称张量空间”.

向量的外积(exterior product of vectors)　见“反对称张量空间”.

普吕克坐标(Plücker coordinates)　格拉斯曼空间 $\overset{m}{\wedge} V$ 中可合元素的坐标. 若 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的基, 则 $\overset{m}{\wedge} V$ 的可合元素 $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_m$ 可表示为

$$v^{\wedge} = \sum_{\omega \in Q_{m,n}} a_\omega e_\omega^{\wedge},$$

可合元素 $v^{\wedge}$ 的坐标 $\{a_\omega \mid \omega \in Q_{m,n}\}$ 称为子空间 $\langle v_1, v_2, \cdots, v_m\rangle$ 的普吕克坐标. 存在着许多判别 $\overset{m}{\wedge} V$ 的元素为可合元素的充分必要条件, 通常就是判别坐标 $\{a_\omega \mid \omega \in Q_{m,n}\}$ 为普吕克坐标的充分必要条件. 例如, 若

$$z = \sum_{\omega \in Q_{m,n}} a_\omega e_\omega^{\wedge}$$

为 $\overset{m}{\wedge} V$ 的任一元素, 则 z 为可合元素的充分必要条件是存在 $m \times n$ 的矩阵 $A = (a_{ij})$ 使得

$$a_\omega = \det A[1, 2, \cdots, m \mid \omega]\ (\omega \in Q_{m,n}),$$

其中 $A[1,2,\cdots,m|\omega]$ 表示 A 的 $\omega(1),\omega(2),\cdots,\omega(m)$ 列子方阵.

复合矩阵(compound matrix) 亦称合成矩阵. 一种特殊的矩阵. 是以一个矩阵的子行列式为元素构成的矩阵. 若 A 是 $n\times n$ 阶复矩阵, 对 $\alpha,\beta\in Q_{m,n}$, 记 $C_m(A)_{\alpha,\beta}=\det A[\alpha|\beta]$, 则

$$\binom{n}{m}\times\binom{n}{m}$$

阶的矩阵 $C_m(A)$ 称为 A 的 m 级复合矩阵. 当把 A 看做线性算子时, $C_m(A)$ 就是反对称张量空间 $\overset{m}{\wedge}V$ 的诱导算子 $K(A)$, 其中 V 视作由 n 个分量构成的向量空间. 于是 $C_m(A)$ 具有诱导算子的各种性质. 例如对复矩阵 A, $C_m(A)^*=C_m(A^*)$, 若 A 分别是正规的、埃尔米特的、正定的、非负定的、酉的, 则 $C_m(A)$ 也为相应的矩阵. 特别地, 有

$$C_m(AB)=C_m(A)C_m(B),$$

此即行列式的柯西-比内定理. 写为元素形式就是

$$C_m(AB)_{\alpha,\beta}=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}C_m(A)_{\alpha,\omega}C_m(B)_{\omega,\beta},$$

此即为

$$\det(AB)[\alpha|\beta]=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}\det A[\alpha|\omega]\det\beta[\omega|\beta].$$

合成矩阵(compound matrix) 即"复合矩阵".

西尔维斯特-弗兰克定理(Sylvester-Franke theorem) 复合矩阵的行列式定理. 若 A 是 $n\times n$ 的复矩阵, $C_m(A)$ 为 A 的 m 级复合矩阵, 则 $C_m(A)$ 的行列式为

$$\det C_m(A)=(\det A)^{\binom{n-1}{m-1}},$$

这就是西尔维斯特-弗兰克定理. 它是一般诱导算子 $K(T)$ 的行列式

$$\det K(T)=(\det T)^{\frac{m}{n}|\hat{\Delta}|}$$

对于反对称张量空间 $\overset{m}{\wedge}V$ 时的特殊情形, 这时

$$|\hat{\Delta}|=|Q_{m,n}|=\binom{n}{m}.$$

复合矩阵的导数矩阵(derivation of a compound matrix) 复合矩阵论中的重要概念与有用工具. 若 A 为 $n\times n$ 阶复矩阵, $C_m(A)$ 为 A 的 m 级复合矩阵, t 为复数域 $\mathbf{C}$ 上的不定元, 展开式

$$C_m(I_n+tA)=I_{\binom{n}{m}}+tD_m^{(1)}(A)+\cdots+t^rD_m^{(r)}(A)+\cdots+t^mD_m^{(m)}(A),$$

则称

$$\binom{n}{m}\times\binom{n}{m}$$

阶的矩阵 $D_m^{(r)}(A)$ 为 $C_m(A)$ 的 r 阶导数矩阵. 若 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 则 $D_m^{(r)}(A)$ 的特征值为

$$\sum_{\omega\in Q_{r,m}}\prod_{i=1}^{r}\lambda_{\alpha\omega(i)}\quad(\alpha\in Q_{m,n}).$$

特别地, 一阶导数矩阵 $D_m^{(1)}(A)$ 的特征值为

$$\lambda_{\alpha(1)}+\lambda_{\alpha(2)}+\cdots+\lambda_{\alpha(m)}\ (\alpha\in Q_{m,n}).$$

完全对称张量空间(completely symmetric tensor space) 一种常用的张量对称类. 当 $G=S_m$, $\chi\equiv1$ 时, 常写成 $V_1(S_m)=V^{(m)}$. 若 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 V 的基, 则 $\{e_\omega^*|\omega\in G_{m,n}\}$ 是 $V^{(m)}$ 的基. $V^{(m)}$ 的维数是

$$\dim V^{(m)}=|G_{m,n}|=\binom{n+m-1}{m}.$$

对于 $V^{(m)}$ 的可合元素有: $v_1*v_2*\cdots*v_m=0$ 的充分必要条件是某个 $v_i=0$. 又若 $v_1*v_2*\cdots*v_m=u_1*u_2*\cdots*u_m\neq0$, 则存在 $\sigma\in S_m$ 及 $d_i\neq0$ 使得 $u_i=d_iv_{\sigma_1(i)}$ $(i=1,2,\cdots,m)$, 且

$$\prod_{i=1}^{m}d_i=1.$$

另外 $V^{(m)}$ 可由形如 $v\otimes\cdots\otimes v$ 的张量生成, 即

$$V^{(m)}=\langle v\otimes\cdots\otimes v\rangle|v\in V\rangle.$$

广义矩阵函数(generalized matrix function) 行列式与固定式的统一推广. 设 G 是 S_m 的子群, f: $G\to\mathbf{C}$ 是任一函数, $A=(a_{ij})$ 为 $m\times m$ 的复矩阵, 由下式定义的矩阵函数

$$d_G^f(A)=\sum_{\sigma\in G}f(\sigma)\prod_{t=1}^{m}a_{t\sigma(t)}$$

称为广义矩阵函数. 特例为

$$d_{S_m}^{\varepsilon}(A)=\det A,\quad d_{S_m}^{I}(A)=\operatorname{per}A.$$

其中

$$\operatorname{per}A=\sum_{\sigma\in S_m}\prod_{i=1}^{m}a_{i\sigma(i)},$$

称为 A 的固定式, 也称为 A 的积和式. 对广义矩阵函数的研究近几年来非常活跃. 下面是当 $f=\chi$ 为群 G 的不可约特征标时的几个结论:

1. $|d_G^\chi(AB^*)|^2\leqslant d_G(AA^*)d_G^\chi(BB^*)$, 其中 $A^*=\overline{A}^T$.
2. $|d_G^\chi(A)|^2\leqslant\chi(\sigma)d_G^\chi(AA^*)$.
3. 当 A 为 m 阶非负定方阵时, $d_G^\chi(A)\geqslant\chi(e)\det A$.
4. 当 A,B 为 m 阶非负定方阵时, $d_G^\chi(A+B)\geqslant d_G^\chi(A)+d_G^\chi(B)$.
5. $\det A\leqslant\det A[1,2,\cdots,k|1,2,\cdots,k]\cdot\det A[k+1,\cdots,m|k+1,\cdots,m]$, 其中 A 为 m 阶非负定方阵.
6. $\operatorname{per}A\geqslant\operatorname{per}A[1,2,\cdots,k|1,2,\cdots,k]\cdot\operatorname{per}A[k+1,\cdots,m|k+1,\cdots,m]$, 其中 A 为 m 阶非负定方阵.

固定式(permanent) 见"广义矩阵函数".

积和式(permanent) 见"广义矩阵函数".

行列式函数(determinant function) 一种特殊的多重线性函数. n 维向量空间上的反对称 n 重线性函数. 若 K 为特征不为 2 的域, V 为 K 上的 n 维向量空间, 用常规方法定义 V 上的内积并取 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 与 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 为对偶基, 记

$$\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(f_1,x_1)(f_2,x_2)\cdots(f_n,x_n) \quad (\forall\, x_1,x_2,\cdots,x_n\in V),$$

则

$$\Phi(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\cdots,e_{\sigma(n)})=\begin{cases}1 & (\sigma\in S_n \text{ 为单位置换}),\\ 0 & (\text{其他情况}).\end{cases}$$

若记

$$\Delta=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_\sigma(\sigma\Phi),$$

$\varepsilon_\sigma=1$(σ 为偶置换), $\varepsilon_\sigma=-1$(σ 为奇置换), 则 Δ 为 V 上的 n 重反对称线性函数, 称为 V 上的行列式函数. 由于 $\Delta(e_1,e_2,\cdots,e_n)=1$, 所以 V 上的非零行列式函数一定存在, 并且 V 上的任何行列式函数都只有(K 中)常数因子的差别. 用行列式函数可建立与经典行列式理论等价的理论, 且可使许多经典的行列式定理得到简单的证明, 使外代数在行列式理论中得到了优美的应用.

广义矩阵函数的柯西-比内定理(Cauchy-Binet theorem for generalized matrix function) 行列式的柯西-比内定理的推广. 若 A,B 为 $n\times n$ 阶复矩阵, G 是 S_m 的子群, χ 是群 G 的不可约特征标, 则对于

$$\alpha,\beta\in\Omega=\Big\{\omega\in\Gamma_{m,n}\,\Big|\,\sum_{\sigma\in G_\omega}\chi(\sigma)\neq 0\Big\}$$

有

$$d_G^\chi((AB)[\alpha|\beta])=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\omega\in\Omega}d_G^\chi(A[\alpha|\omega])d_G^\chi(B[\omega|\beta]).$$

对于行列式与固定式, 可写为:

$$\det(AB)[\alpha|\beta]=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}\det A[\alpha|\omega]\det B[\omega|\beta];$$

$$\operatorname{per}(AB)[\alpha|\beta]=\sum_{\omega\in G_{m,n}}\frac{1}{|(S_m)_\omega|}\operatorname{per}A[\alpha|\omega]\cdot\operatorname{per}[\omega|\beta].$$

向量空间上的张量代数(tensor algebra over a vector space) 多重线性代数中最基本的代数系. 设 V 是域 K 上的向量空间, 记 p 个 V 的张量积空间为

$$T^p(V)=\overbrace{V\otimes\cdots\otimes V}^{p},$$

并规定 $T^0(V)=K, T^1(V)=V$. 做直和

$$T(V)=T^0(V)\oplus T^1(V)\oplus\cdots\oplus T^p(V)\oplus\cdots,$$

并在 $T(V)$ 上按如下方式定义乘法

$$(x_1\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_m)\cdot(y_1\otimes y_2\otimes\cdots\otimes y_n)$$
$$=x_1\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_m\otimes y_1\otimes y_2\otimes\cdots\otimes y_n,$$

再用分配律定义整个 $T(V)$ 上的元素之乘法, 从而 $T(V)$ 成为域 K 上的代数(结合代数). 称 $T(V)$ 为向量空间 V 上的张量代数.

张量代数的泛性质(universal property of tensor algebras) 张量代数的特征性质. 它更能揭示张量代数的本质. 也可用来定义张量代数. 设 V 为域 K 上的向量空间. 若 U 为 K 上有单位元 1 的结合代数, $\varepsilon: V\to U$ 为线性映射, 称 (ε,U) 对(或 U)具有 V 上张量代数的泛性质, 若它们满足如下条件:

1. $\operatorname{Im}\varepsilon$ 与 1 代数地生成 U.

2. 对任意的有单位元 e 的 K 上结合代数 A 及任意的线性映射 $\eta: V\to A$, 都有代数同态 $h: U\to A$ 使 $h(1)=e$ 且 $h\varepsilon=\eta$.

上述条件 1 和 2 可改为: 对任意的有单位元 e 的结合代数 A 及任意的线性映射 $\eta: V\to A$, 都有惟一的代数同态 $h: U\to A$, 使 $h(1)=e$ 且 $h\varepsilon=\eta$. 当 V 取定后, 满足上述泛性质的代数 U 在代数同构意义下是惟一的, 因此上述的 U 必同构于用向量空间上的张量代数中的办法具体构作出的张量代数 $\otimes V$.

外代数(exterior algebra) 亦称格拉斯曼代数. 设 V 是特征不为 2 的域 K 上的向量空间, $\overset{m}{\wedge}V$ 为域 K 上的格拉斯曼空间, 并规定 $\overset{0}{\wedge}V=K$, $\overset{1}{\wedge}V=V$. 做直和 $E(V)=\overset{0}{\wedge}V\oplus\overset{1}{\wedge}V\oplus\cdots\oplus\overset{n}{\wedge}V$. 对 $x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_p\in\overset{p}{\wedge}V$, $y_1\wedge y_2\wedge\cdots\wedge y_q\in\overset{q}{\wedge}v$, 定义乘法

$$(x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_p)\cdot(y_1\wedge y_2\wedge\cdots\wedge y_q)$$
$$=x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_p\wedge y_1\wedge y_2\wedge\cdots\wedge y_q,$$

再用分配律定义整个 $E(V)$ 上元素的乘法, 从而 $E(V)$ 成为 K 上的代数(结合代数), 称为向量空间 V 上的外代数. 当 $\dim V=n$ 时, $\dim E(V)=2^n$. 外代数的运算满足如下规律:

1. $u\wedge v=(-1)^{pq}v\wedge u$, $\forall\, u\in\wedge^pV, v\in\wedge^qV$, 因此, $2|pq$ 时 $u\wedge v=v\wedge u$. $2\nmid pq$ 时 $u\wedge v=-v\wedge u$.

2. $u\wedge u=0$, $\forall\, u\in V$. 但是, 当 $u\notin V$ 时, 未必有 $u\wedge u=0$.

3. 若xK 的特征为 0, 记

$$v^m=\frac{1}{m!}\underbrace{v\wedge\cdots\wedge v}_{m}\quad(\forall\, v\in E(V), k\geqslant 1),$$

称 v^m 为 v 的 m 次外乘幂, 则

$$v^m\wedge v^n=\binom{m}{m+n}v^{m+n},$$

且当 $2|pq$ 时,

$$(u+v)^m=\sum_{i+j=m}u^i\wedge v^j\quad(\forall\, u\in\wedge^pV, v\in\wedge^qV).$$

外代数在几何学、分析学及物理中都有重要应用.

格拉斯曼代数(Grassmann algebra) 即"外

代数”.

外代数的泛性质(universal property of exterior algebras) 外代数的特征性质.它更能揭示外代数的本质,也可用来定义外代数.设 K 为特征不为 2 的域,V 为 K 上的一个向量空间,U 为 K 上有单位元 1 的结合代数,并且 $\varepsilon: V\to U$ 为使 $(\varepsilon(x))^2=0$ $(\forall\ x\in V)$ 的线性映射.若对任意的 K 上有单位元 e 的结合代数 A 以任意的使 $(\varphi(x))^2=0(\forall\ X\in V)$ 的线性映射 $\varphi: V\to A$,都有惟一的代数同态 $h: U\to A$,使 $h(1)=e$ 且 $h\varepsilon=\varphi$,则称 (U,ε) 对(或 U)具有 V 上外代数的泛性质.当 V 取定后,具有上述泛性质的 U 是惟一的(在同构意义下).因此,上述的 U 必同构于用“外代数”词条中办法具体构作的外代数 $E(V)$.

克利福德代数(Clifford algebra) 外代数的推广.设 V 是特征不为 2 的域 K 上的向量空间,Q 是 V 上的一个二次型,$T(V)$ 是 V 上的张量代数.若 I 是 $T(V)$ 中下列形式的元素生成的理想

$$x\otimes x-Q(x)\ (x\in V),$$

则商代数 $C(V,Q)=T(V)/I$ 称为关于二次型 Q 的一个克利福德代数.当 $\dim V=n$ 时,$\dim C(V,Q)=2^n$.当 $Q=0$ 时,$C(V,Q)$ 即为 V 上的外代数.因此,克利福德代数是外代数的推广.实数域上的复数全体,四元数全体都构成克利福德代数.

克利福德代数的泛性质(universal property of Clifford algebras) 克利福德代数的特征性质,它揭示了克利福德代数的本质,也可用来定义克利福德代数.设 V 为特征不为 2 的域 K 上的向量空间,Q 为 V 上的一个二次型,U 为 K 上一个有单位元 1 的结合代数,$\varepsilon: V\to U$ 为满足 $(\varepsilon(x))^2=Q(x)\cdot 1(\forall\ x\in V)$ 的线性映射.若 (U,ε) 满足如下条件,则称 (U,ε) 对(或 U)具有 V 上(关于 Q)的克利福特代数的泛性质:

1. $\mathrm{Im}\ \varepsilon$ 与 1 代数地生成 U.

2. 对 K 上任意的有单位元 e 的结合代数及使 $(\varphi(x))^2=Q(x)e(\forall\ x\in V)$ 的线性映射 $\varphi: V\to A$,必有代数同态 $h: U\to A$ 使 $f\varepsilon=\varphi$.

克利福德代数中具体构作的 $C(V,Q)$ 即具有如上的泛性质.上述两个条件可以等价地用下述一个条件代替:对 K 上任意的有单位元 e 的结合代数及使 $(\varphi(x))^2=Q(x)e(\forall\ x\in V)$ 的线性映射 $\varphi: V\to A$,必有惟一的代数同态 $h: U\to A$ 使 $f\varepsilon=\varphi$.对给定的 V 与 Q,满足上述泛性质的 U 在代数同构意义下是惟一的,因此必同构于 $C(V,Q)$.当 $Q=0$ 时上述的 U 即为 V 上的外代数 $\wedge V$.

张量积的泛性质(universal property of tensor products) 向量空间张量积的特征性质.是用来确定向量空间张量积到一个向量空间的线性映射存在性的常用方法之一.设 U,V 与 W 是域 K 上的向量空间,$\otimes$ 是 $U\times V$ 到 W 的一个双线性映射.若 $\otimes$ 满足下列条件,则称 $\otimes$ 具有泛性质:

$$\begin{array}{ccc} U\times V & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \otimes\downarrow & \nearrow f & \\ W & & \end{array}$$

1. $\otimes_1$: $\mathrm{Im}\ \otimes=W$,即 $\{x\otimes y\mid x\in U,y\in V\}$ 生成 W.

2. $\otimes_2$: 若 φ 是 $U\times V$ 到 K 上的任意向量空间 H 的一个任意的双线性映射,则存在一个线性映射 $f: W\to H$,使得 $\varphi=f\circ\otimes$.

上述条件 2,可用图的形式陈述如图所示.若 U,V,W 与 H 是域 K 上的向量空间,$\otimes$ 是 $U\times V$ 到 W 的双线性映射,则 $\otimes$ 具有泛性质的充分必要条件是 $\otimes$ 满足:若 φ 是 $U\times V$ 到 H 的双线性映射,则存在惟一的线性映射 $f: W\to H$,使得 $\varphi=f\circ\otimes$.

直和的张量积(tensor product of direct sums) 一种特殊的张量积.向量空间直和的张量之分配律.若 E,F 为域 K 上的向量空间,

$$E=\bigoplus_{\alpha}E_\alpha,\ F=\bigoplus_{\beta}F_\beta,$$

其中 E_α,F_β 分别是 E,F 的子空间,则

$$E\otimes F=\bigoplus_{\alpha,\beta}E_\alpha\otimes E_\beta.$$

因此,若 $\{a_\alpha\mid\alpha\in I\}$,$\{b_\beta\mid\beta\in J\}$ 分别是 E,F 的基,则 $\{a_\alpha\otimes b_\beta\mid\alpha\in I,\beta\in J\}$ 是 $E\otimes F$ 的基.若 E,F 是有限维的,则 $\dim\ (E\otimes F)=\dim E\cdot\dim F$.

对偶空间(关于双线性函数)(dual spaces (on bilinear function)) 线性代数中共轭空间(也称对偶空间)概念的推广.设 φ 是 $E\times F$ 到 G 的双线性映射,其中 E,F 与 G 都是域 K 上的向量空间.若

$$N_E(\varphi)=\{x\in E\mid\varphi(x,F)=0\},$$
$$N_F(\varphi)=\{y\in F\mid\varphi(E,y)=0\},$$

则 $N_E(\varphi),N_F(\varphi)$ 分别是 E,F 的子空间,称为 φ 的零空间.若 $N_E(\varphi)=0$,且 $N_F(\varphi)=0$,则称 φ 为非退化的.设 E^*,E 是域 K 上的向量空间,$\langle\ ,\ \rangle$ 是 $E^*\times E$ 的双线性函数.若 $\langle\ ,\ \rangle$ 非退化,则称 E^*,E 关于 $\langle\ ,\ \rangle$ 是(一对)对偶空间,$\langle\ ,\ \rangle$ 称为纯量积.若 $L(E)$ 是 E 的共轭空间,即 E 上的线性函数空间,则存在线性单射 $\varphi: E^*\to L(E)$,使 $\varphi(x^*)x=\langle x^*,x\rangle$.若 E 是有限维的,则 φ 是映上的,因此

$$E^*\cong L(E).$$

零空间(null space) 见“对偶空间(关于双线性函数)”.

非退化双线性映射(nondegenerate bilinear mapping) 见“对偶空间(关于双线性函数)”.

对偶基(关于双线性函数)(dual bases (on a bilinear function)) 欧氏空间标准正交基的推广.设 E^*,E 是域 K 上的对偶空间,$\dim E=n$,$\{e^{*\gamma}\}$,$\{e_\gamma\}$ 分别是 E^* 与 E 的基 $(\gamma=1,2,\cdots,n)$,若 $\langle e^{*\gamma},l_\mu\rangle=$

δ_μ^γ，则称$\{e^{*\gamma}\}$，$\{e_\gamma\}$为对偶基. 设$\{e^{*\gamma}\}$，$\{e_\gamma\}$是对偶空间E^*，E的对偶基，$x\in E$，$x^*\in E^*$. 若

$$x^* = \sum_{\gamma=1}^{n} x_\gamma e^{*\gamma},\ x = \sum_{\gamma=1}^{n} x^\gamma e_\gamma,$$

则

$$\langle x^*, x\rangle = \sum_{\gamma=1}^{n} x_\gamma x^\gamma.$$

若E^*，E是对偶空间，$\{e^{*\gamma}\}$（$\{e_\gamma\}$）是$E^*(E)$的基（$\gamma=1,2,\cdots,n$），则惟一地存在$\{e_\gamma\}$（$\{e^{*\gamma}\}$），使$\{e^{*\gamma}\}$，$\{e_\gamma\}$是对偶基.

对偶映射(dual mapping)　线性代数中共轭变换的推广. 设E^*，E与F^*，F是对偶空间，φ是E到F的线性映射，φ^*是F^*到E^*的线性映射. 若对任意

$$x\in E,\ y^*\in F^*,\ \langle y^*, \varphi x\rangle = \langle \varphi^* y^*, x\rangle,$$

则称φ与φ^*是一对对偶映射. 设φ是E到F的线性映射，若φ的对偶映射存在，则是惟一的. 若E是有限维的，则φ的对偶映射是存在的，因而是惟一的. 设E_i^*与E_i，F_i^*与$F_i(i=1,2)$是对偶的向量空间，φ是$E_1\to E_2$，ψ是$F_1\to F_2$的线性映射. 若φ^*与ψ^*存在，则

$$(\varphi\otimes\psi)^* = \varphi^*\otimes\psi^*.$$

内积空间(inner product space)　欧几里得空间的推广. 设E是域K上的向量空间，(,)是E上的双线性函数. 若(,)满足下列条件，则E称为内积空间，(,)称为内积：

1. 对称性.
2. 非退化性.

若E，F是域K上的内积空间，则$E\otimes F$也是K上的内积空间. 若$\dim E=n$，$\dim F=m$，$\{a_\gamma\}$与$\{b_\mu\}$分别是E，F的法正交基，则$\{a_\gamma\otimes b_\mu\}$是$E\otimes F$的法正交基.

反线性变换(skew linear transformation)　实数域上反对称矩阵（使$A=-A^T$的矩阵）对应的线性变换的推广. 设K为特征不为2的域，E为K上的n维内积空间，若线性变换$\varphi: E\to E$满足$(x, \varphi(y)) = -(\varphi(x), y)$（(,)表$E$上的内积），则称$\varphi$为$E$上的反线性变换，有时也称为反变换. 在法正交基下，它对应的矩阵为反对称矩阵. E上反线性变换的全体构成E上线性变换空间$L(E,E)$的一个子空间，记为$SK(E)$，

$$\dim SK(E) = \binom{n}{2},$$

因此与$\wedge^2 E$同构，此同构可取$\Phi_E: \wedge^2 E\to SK(E)$，其中$\Phi_E(a\wedge b)(x) = (a,x)b-(b,x)a$，$\forall\, a,bx\in E$. 若$n=2m$，$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m\in SK(E)$，则$\Phi_E$的逆同构$\Psi_E$使$\Psi_E(\varphi_j)\in\wedge^2 E$且

$$\Psi_E(\varphi_1)\wedge\Psi_E(\varphi_2)\wedge\cdots\wedge\Psi_E(\varphi_m)\in\wedge^n E,$$

取a为$\wedge^n E$（一维向量空间！）的基，称

$$Pf_a(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m) = (\Psi_E(\varphi_1)\wedge\cdots\wedge\Psi(\varphi_m), a)$$

为$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$的普法夫多项式（其中(,)表$E$的内积在$\wedge^n E$上的诱导内积），由于$\Psi_E(\varphi_j)\in\wedge^2 E$，它必为$SK(E)$上的$m$重对称线性函数. 若$\varphi\in SK(E)$，取$\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_m=\varphi$，则由上即得$\varphi$的普法夫多项式的定义（其中限定$K$的特征为0）：

$$P_{f_a}(\varphi) = (\Psi_E(\varphi)^m, a) = \frac{1}{m!}P_{f_a}(\underbrace{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi}_{m}).$$

取上述$a\in\wedge^n E$使$(a,a)=1$，可得

$$P_{f_a}(\varphi)^2 = \det\varphi.$$

因此，在E的法正交基之下，此式可翻译为：对K上$2m$阶反对称矩阵A，

$$P_{f_a}(A)^2 = \det A,$$

称为A的普法夫多项式. 注意对奇数阶反对称矩阵A，由于$\det A=0$，其普法夫多项式只能为0，这是一种平庸的情况，所以反对称矩阵的普法夫多项式不对奇数阶定义.

反变换(skew transformation)　见“反线性变换”.

普法夫多项式(Pfaff polynomial)　见“反线性变换”.

合成代数(composition algebra)　一类特殊的代数. 它是一对对偶空间的张量积所成的代数. 若E^*，E是域K上的对偶空间，对任意的$x,y\in E$，$x^*,y^*\in E^*$，由

$$(x^*\otimes x)\circ(y^*\otimes y) = \langle x^*, y\rangle(y^*\otimes x)$$

定义空间$E^*\otimes E$的乘法，则$E^*\otimes E$是一个非交换的结合代数，称为E^*与E的合成代数.

单位张量(unit tensor)　合成代数的单位元. 设E^*，E是域K上的一对对偶空间，$E^*\otimes E$是E^*与E的合成代数. $a^*\in E^*$，$b\in E$，对任意的$x\in E$，由$T(a^*\otimes b)x = \langle a^*, x\rangle b$确定的线性映射

$$T: E^*\otimes E\to L(E,E)$$

是一个代数同态，且是单射. 若$\dim E=n$，则T是线性同构. 若I是E上的单位映射，则$\mathrm{t}=T^{-1}(I)$是合成代数$E^*\otimes E$的单位元，称为E的单位张量. 若$\{e^{*\gamma}\}$，$\{e^\gamma\}$是E^*与E的一对对偶基，则

$$\mathrm{t} = \sum_{\gamma=1}^{n} e^{*\gamma}\otimes e_\gamma,$$

且与对偶基的选取无关.

结构映射(structural mapping)　一类特殊的映射. 刻画代数中乘法或赋予向量空间一个乘法的映射. 若A是一个代数，乘法$A\times A\to A$确定一个线性映射$\mu_A: A\otimes A\to A$，使$\mu_A(x\otimes y)=xy$，μ_A则称之为结构映射. 若A是一个向量空间，$\mu_A: A\otimes A\to A$是一个线性映射，定义$xy=\mu_A(x\otimes y)$，则在A中诱

导一个乘法，使 A 成为一个代数．这表明在 A 的乘法与结构映射之间存在一个一一对应．

分次向量空间（graded linear space） 表成直和的一类向量空间．设 E 是域 K 上的向量空间，$(G,+)$ 是交换群，

$$E=\bigoplus_{\alpha\in I}E_\alpha.$$

若 $j:I\to G$ 是单射，则称 E 为 G 分次向量空间，G 称为 E 的分次群，E_α 的元素称为 $j(\alpha)$ 次齐次的．若 j 是一一映射，则记

$$E=\bigoplus_{i\in G}E_i;$$

若 G 为整数加群 $\mathbf{Z}$，则 E 简称分次向量空间；若

$$E=\bigoplus_{i=0}^{\infty}E_j,$$

j 是非负整数，规定 $i\leqslant -1$ 时，$E_i=0$，则称 E 是正分次向量空间．例如，域 K 上的 n 元多项式全体组成的向量空间就是一个正分次向量空间（取 E_α 为 α 次齐次多项式组成的向量空间）．设 E,F 是 G 级向量空间，$\varphi:E\to F$ 是线性映射，若存在 $k\in G$，使 $\varphi E_j\subset E_{i+k}$，$\forall\ i\in G$，则称 φ 为 k 次是齐次的，记为 $\deg\varphi=k$，其中

$$E=\bigoplus_{i\in G}E_i,\ F=\bigoplus_{i\in G}F_i.$$

分次群（graded group） 见"分次向量空间"．

正分次向量空间（positively graded vector space） 见"分次向量空间"．

庞加莱级数（Poincaré series） 一种特殊的级数．对分次向量空间有关维数的级数．设 E 是域 K 上的向量空间，

$$E=\bigoplus_{k\in Z}E_k,$$

若对一切 $k\in\mathbf{Z}$，$\dim E_k=n_k$ 是有限的，则称 E 为准有限的分次向量空间．若 E 为准有限的正分次向量空间，则称

$$P(t)=\sum_k\dim E_kt^k$$

为庞加莱级数．若 E 是有限维的，则 $P(t)\in\mathbf{Z}[t]$，称为庞加莱多项式，且 $P(1)=\dim E$．若 E,F 都是准有限正分次向量空间，则 $E\otimes F$ 的庞加莱级数为

$$P_{E\otimes F}(t)=\sum_k\dim\ (E\otimes F)_kt^k=P_E(t)P_F(t),$$

其中

$$(E\otimes F)_k=\sum_{i+j=k}(E_i\oplus E_j).$$

而 $E\otimes F$ 的庞加莱级数为 $P_{E\oplus F}(t)=P_E(t)+P_F(t)$．对准有限正分次向量空间 E,F，还有：$P_E(t)=P_F(t)$ 的充分必要条件是有次数为 0 的线性同构 φ 使

$$E\cong F.$$

准有限分次向量空间（almost finite graded vector space） 见"庞加莱级数"．

庞加莱多项式（Poincaré polynomial） 见"庞加莱级数"．

代数上的导数（derivation over an algebra） 一种特殊的代数同态．微分学中导数的推广．设 A 是域 K 上的代数，θ 是 A 上的代数同态．若对任意

$$x,y\in A,\theta(xy)=\theta x\cdot y+x\cdot\theta y,$$

则称 θ 为 A 上的导数．设 θ 是 A 上的导数．若 e 是 A 的单位元，则 $\theta e=0$；对任意 $x,y\in A$，莱布尼兹公式

$$\theta^n(xy)=\sum_i\theta^ix\cdot\theta^{n-i}y$$

成立．若 θ_1,θ_2 是 A 上的导数，$\theta_1\theta_2$ 一般不是 A 上的导数，但换位子 $[\theta_1,\theta_2]=\theta_1\theta_2-\theta_2\theta_1$ 仍是 A 上的导数．检查代数 A 上的线性自同态是否为导数，只要看定义式中 x,y 换为 A 的基元素是否成立即可．

代数上的反导数（antiderivation over an algebra） 导数的推广．设 A 是域 K 上的代数，若 ω 是 A 上的代数同态，且 $\omega^2=I_A$（I_A 表示 A 上的恒等映射），则 ω 称为 A 上的对合．若 θ 是 A 上的代数同态，对任意 $x,y\in A$，

$$\theta(xy)=\theta x\cdot y=\omega x\cdot\theta y,$$

则称 θ 为关于 ω 的反导数．若取 $\omega=I_A$，I_A 为 A 的单位映射，则反导数即为导数．设 A,B 是域 K 上的代数，$\varphi:A\to B$ 是代数同态，ω_A 是 A 中的对合．若 $\Omega:A\to B$ 是线性映射，且对任意 $x,y\in A$，

$$\Omega(xy)=\Omega x\cdot\varphi y=\varphi\omega_Ax\cdot\Omega y,$$

则称 Ω 为 φ 反导数．若 $A=B$，且 $\varphi=I_A$，则 Ω 即为反导数．

对合（involution） 见"代数上的反导数"．

微分空间（differential space） 一种特殊的向量空间．带微分算子的向量空间．设 E 是域 K 上的向量空间，∂ 是 E 上的线性映射．若 $\partial^2=0$，则称 ∂ 为微分算子，(E,∂) 为微分空间．若 $Z(E)=\ker\partial$，$B(E)=\operatorname{Im}\partial$，则 $B(E)\subset Z(E)$．称 $H(E)=Z(E)/B(E)$ 为 E 的同调空间．若 (E,∂_E)，(F,∂_F) 都是微分空间，ω 是 E 中的一个对合，且满足 $\partial_E\omega+\omega\partial_E=0$，定义

$$\partial_{E\otimes F}=\partial_E\otimes I_F+\omega\otimes\partial_F,$$

其中 I_F 是 F 上的单位映射，则 $\partial_{E\otimes F}^2=0$．因此 $(E\otimes F,\partial_{E\otimes F})$ 是一个微分空间．

微分算子（differential operator） 见"微分空间"．

同调空间（homology space） 见"微分空间"．

诱导同态（induced homomorphism） 线性映射在张量代数上的开拓．若 E,F 是域 K 上的向量空间，$\otimes E$，$\otimes F$ 是 E,F 上的张量代数，$\varphi:E\to F$ 是线性映射，则 φ 可以惟一地开拓为 $\otimes E\to\otimes F$ 的代数同态，记为 $\varphi_\otimes$．若 $1_{\otimes E}$，$1_{\otimes F}$ 是 $\otimes E$，$\otimes F$ 的单位元，则 $\varphi_\otimes(1_{\otimes E})=1_{\otimes F}$．称 $\varphi_\otimes$ 为 φ 的诱导同态．若 $\varphi_\otimes$ 是 φ 的诱导同态，则 φ 是单（满）映射的充分必要条件是 $\varphi_\otimes$ 为单（满）映射．若 G 也是域 K 上的向量空间，ψ:

$F \to G$ 为线性映射，则$(\psi\varphi)_{\otimes}=\psi_{\otimes}\varphi_{\otimes}$，且$(I_E)_{\otimes}=I_{\otimes E}$，其中 I 表单位映射(恒等映射).

混合张量代数(mixed tensor algebra)　张量代数的推广. 设 E^*,E 是域 K 上的对偶空间，若

$$\otimes_q^p(E^*,E)=(\otimes^p E^*)\otimes(\otimes^q E),$$

约定

$$\otimes_0^p(E^*,E)=\otimes^p E^*,$$

$$\otimes_q^0(E^*,E)=\otimes^q E\quad(p\geqslant 1,q\geqslant 1),$$

则 $x\in\otimes_q^p(E^*,E)$称为(E^*,E)上的混合张量，$p+q$ 称为 x 的全次数. x 也称为 E^* 上的 p 阶反变，q 阶共变张量，或称为 E 上的 p 阶共变，q 阶反变张量. 若 $p=0$，则称 x 为 E^* 上的 q 阶共变张量或 E 上的 q 阶反变张量；若 $q=0$，x 则称为 E^* 上的 p 阶反变张量，或 E 上的 p 阶共变张量. 若

$$\otimes(E^*,E)=(\otimes E^*)\otimes(\otimes E),$$

对任意 $u_j^*\in\otimes E^*$，$u_j\in\otimes E$，定义

$$(u_1^*\otimes u_1)(u_2^*\otimes u_2)=u_1^*u_2^*\otimes u_1u_2,$$

则$\otimes(E^*,E)$是有单位元 $1_{\otimes E^*}\otimes 1_{\otimes E}$的非可换的结合代数，称为$(E^*,E)$对上的混合张量代数.

混合张量(mixed tensor)　见“混合张量代数”.

反变张量(contravariant tensor)　见“混合张量代数”.

共变张量(covariant tensor)　见“混合张量代数”.

张量映射(tensorial mapping)　混合张量代数中的一类线性映射. 设 E^*,E 是域 K 上的对偶空间，$\dim E=n$，α 是 E 的自同构. 对每对(p,q)都确定$\otimes_q^p(E^*,E)$的线性自同构 T_α，它由

$$T_\alpha(u^*\otimes u)=(\alpha^{\otimes})^{-1}u^*\otimes\alpha_{\otimes}u$$

给出，其中 $\alpha^{\otimes}$，$\alpha_{\otimes}$分别为 α 在$\otimes E^*$，$\otimes E$ 上的诱导同态，$u^*\in\otimes^p E^*$，$u\in\otimes^q E$. 设

$$\varphi:\otimes_q^p(E^*,E)\to\otimes_s^r(E^*,E)$$

是线性映射，若对 E 的任意自同构 α，$T_\alpha\circ\varphi=\varphi\circ T_\alpha$，则称 φ 为张量映射. 例如，收缩映射 C_{ij}(也记为 C_j^i)就是张量映射.

度量张量(metric tensor)　处理度量问题的一类重要张量. 基向量张量积的一种和. 若 E 是域 K 上的 n 维内积空间，E^*,E 是对偶空间，$\{e_\gamma\}$是 E 的法正交基，$\{e^{*\gamma}\}$是其对偶基$(\gamma=1,2,\cdots,n)$，则

$$g=\sum_{r=1}^n l_\gamma\otimes l_\gamma,\quad g^*=\sum_{\gamma=1}^n e^{*\gamma}\otimes e^{*\gamma}$$

与基的选取无关. g 称为 E 的反变度量张量，g^* 称为 E 的共变度量张量，统称度量张量. 对任意 $x,y\in E$，$x^*,y^*\in E^*$，有

$$(x,y)=\langle g^*,x\otimes y\rangle,\quad(x^*,y^*)=\langle x^*\otimes y^*,g\rangle.$$

交错子(alternator)　张量空间上的一种线性变换. 设 E 是特征为 0 的域 K 上的向量空间，$\otimes^p E$ 是 E 的 p 次张量幂，$p\geqslant 2$，若 S_p 是 p 阶对称群，对任意的 $\sigma\in S_p$，记

$$\varepsilon_\sigma=\begin{cases}1 & (\sigma\text{ 是偶置换}),\\ -1 & (\sigma\text{ 是奇置换}),\end{cases}$$

定义

$$\pi_A=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in s_p}\varepsilon_\sigma\sigma,$$

则 $\pi_A:\otimes^p E\to\otimes^p E$ 是线性映射. π_A 称为$\otimes^p E$ 上的交错子. 若 π_A 是$\otimes^p E$ 的交错子，对任意的 $\tau\in S_p$，$\tau\circ\pi_A=\pi_A\circ\tau=\varepsilon_\tau\pi_A$；$\pi_A^2=\pi_A$；对任意的 $u\in\otimes^p E$，$\pi_A u$ 是反对称张量，称为 u 的反对称部分. 若 $N^p(E)$为$\{u-\varepsilon_\tau\tau u\mid u\in\otimes^p,\tau\in S_p\}$生成的$\otimes^p E$ 之子空间，$X^p(E)$为$\otimes^p E$ 中反对称张量组成的子空间，则 $\ker\pi_A=N^p(E)$，$\operatorname{Im}\pi_A=X^p(E)$且

$$\otimes^p E=N^p(E)\oplus X^p(E).$$

反对称部分(skew symmetric part)　见“交错子”.

完全对称化子(completely symmetrizer)　张量空间上的一种投影算子. 有时也称为对称化子. 设 E 是特征为 0 的域 K 上的向量空间，$\otimes^p E$ 为 E 的 p 次张量幂，$p\geqslant 2$，若 $u\in\otimes^p E$，S_p 是 p 阶对称群，对任意 $\sigma\in S_p$，$\sigma u=u$，则 u 称为对称张量. 若

$$\pi_s=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in s_p}\sigma,$$

则 π_s 是$\otimes^p E\to\otimes^p E$ 的线性映射，称为$\otimes^p E$ 上的对称化子. $\pi_s u$ 称为 u 的对称部分. 若$\otimes^p E$ 中对称张量所成的子空间为 $Y^p(E)$，$M^p(E)$为$\{u-\tau u\mid u\in\otimes^p E,\tau\in s_p\}$生成的$\otimes^p E$ 之子空间，则

$$\pi_s^2=\pi_s,\quad\ker\pi_s=M^p(E),\quad\operatorname{Im}\pi_s=Y^p(E),$$

并且，

$$\otimes^p E=M^p(E)\oplus Y^p(E).$$

对称张量(symmetric tensor)　见“完全对称化子”.

对称化子(symmetrizer)　即“完全对称化子”.

对称部分(symmetric part)　见“完全对称化子”.

反对称算子(anti-symmetric operator)　一种特殊的映射. p 重线性映射到反对称映射之间的映射. 设 E,F 是特征为 0 的域 K 上的向量空间，$\varphi:X^p E\to F$ 是 E 上的 p 重线性映射，若

$$A_\varphi=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in s_p}\varepsilon_\sigma\sigma\varphi,$$

其中 S_p 是 p 阶置换群，对 $x_i\in E\ (i=1,2,\cdots)$，p 有

$$\sigma\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_p)=\varphi(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\cdots,x_{\sigma(p)}),$$

$$\varepsilon_\sigma=\begin{cases}1 & (\sigma\text{ 是偶置换}),\\ -1 & (\sigma\text{ 是奇置换}).\end{cases}$$

则 A_φ 是反对称映射. 若定义 $A:\varphi\to A_\varphi$,则称 A 为反对称算子. 若 A 是反对称算子,则:

1. $A^2=A$.

2. $\forall\ \sigma\in S_P,\sigma A_\varphi=\varepsilon_\sigma A_\varphi$.

3. 若 φ 为反对称的,则 $A_\varphi=\varphi$.

反对称算子的一个重要例子是 $\pi_A\otimes^P$,其中 π_A 为交错子.

对角映射(diagonal mapping)　标准内射的和. 设 E,F 是特征不为 2 的域 K 上的向量空间,

$$i_1:E\to E\oplus F,\quad i_2:F\to E\oplus F$$

是标准内射. 若 $E=F$,则称 $\Delta=i_1+i_2: E\to E\oplus E$ 是对角映射. 记 Δ 在外代数上的诱导同态为 $\Delta^\wedge$: $\wedge(E^*\oplus E^*)\to\wedge E^*$,其中 E^* 为 E 的对偶空间, $\wedge(E^*\oplus E^*)\simeq\wedge E^*\otimes\wedge E^*$ ($\otimes$表示代数的反可换张量积),从而有 $u^*\wedge v^*=\Delta^\wedge(u^*\otimes v^*)$, $\forall\ u^*,v^*\in\wedge E^*$. 因此,$\Delta^\wedge$ 即 $\wedge E^*$ 的结构映射.

(p,q)型的反对称映射((p,q)-antisymmetric mapping)　反对称映射的推广. 设 K 是特征不为 2 的域,E^*,E 是 K 上的一对对偶空间. 若 H 是 K 上的向量空间,

$$\psi:\underbrace{E^*\times\cdots\times E^*}_{p}\times\underbrace{E\times\cdots\times E}_{q}\to H$$

是$(p+q)$重线性映射,且对任何置换 $\sigma\in S_p,\tau\in S_q$,满足

$$\psi(x^*_{\sigma(1)},x^*_{\sigma(2)},\cdots,x^*_{\sigma(p)};x_{\tau(1)},x_{\tau(2)},\cdots,x_{\tau(q)})$$
$$=\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau\psi(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_p^*;x_1,x_2,\cdots,x_q),$$

则称 ψ 为(p,q)型反对称映射,其中 $x_i^*\in E^*,x_j\in E$. 每一个(p,q)型的反对称映射 ψ 都确定一个惟一的线性映射

$$f:(\wedge^pE^*)\otimes(\wedge^qE)\to H,$$

使

$$f((x_1^*\wedge\cdots\wedge x_p^*)\otimes(x_1\wedge\cdots\wedge x_q))$$
$$=\psi(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_p^*,x_1,x_2,\cdots,x_q).$$

线性变换的框积(box product of linear transformations)　特殊的线性变换. $\wedge^pE$ 上的线性变换. 设 E 是特征为零的域 K 上的向量空间,$\varphi_j(j=1,2,\cdots,p)$是 E 上的线性变换,$\wedge^pE$ 是 E 的 p 次外乘幂. 对任意 $x_i\in E$,由

$$(\varphi_1\square\varphi_2\square\cdots\square\varphi_j)(x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_p)$$
$$=\sum_{\sigma\in S_p}\varepsilon_\sigma\varphi_1x_{\sigma(1)}\wedge\varphi_2x_{\sigma(2)}\wedge\cdots\wedge\varphi_px_{\sigma(p)}$$

定义的 $\wedge^pE$ 上的线性映射 $\varphi_1\square\varphi_2\square\cdots\square\varphi_p$ 称为 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p$ 的框积. 若 $p=2$,则

$$(\varphi_1\square\varphi_2)(x_1\wedge x_2)=\varphi_1x_1\wedge\varphi_2x_2-\varphi_1x_2\wedge\varphi_2x_1.$$

框积$\square$关于 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p$ 是对称的,即

$$\varphi_{\sigma(1)}\square\cdots\square\varphi_{\sigma(p)}=\varphi_1\square\varphi_2\square\cdots\square\varphi_p,\quad\forall\ \sigma\in S_p.$$

当 $\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_p=\varphi$ 时

$$\underbrace{\varphi\square\cdots\square\varphi}_{p}=\frac{1}{p!}\wedge^p\varphi.$$

代数的标准张量积(canonical tensor product of algebras)　亦称代数的张量积. 一种重要的张量积. 设 A,B 是域 K 上的代数,μ_A,μ_B 分别是 A,B 的结构映射,$A\otimes B$ 是 A,B 作为向量空间的张量积. 对任意 $x_i\in A,y_i\in B,i=1,2$,由

$$s((x_1\otimes y_1)\otimes(x_2\otimes y_2))=(x_1\otimes x_2)\otimes(y_1\otimes y_2)$$

定义

$$s:(A\otimes B)\otimes(A\otimes B)\to(A\otimes A)\otimes(B\otimes B),$$

称 s 为中翻算子. 若 $\mu_{A\otimes B}=(\mu_A\otimes\mu_B)\circ S$,则 $\mu_{A\otimes B}$是 $A\otimes B$ 的结构映射. 因此,$A\otimes B$ 成为一个代数,称为代数 A 与 B 的标准张量积. 由 $\mu_{A\otimes B}$确定的乘法满足

$$(x_1\otimes y_1)(x_2\otimes y_2)=x_1x_2\otimes y_1y_2.$$

代数的张量积(tensor product of algebras)　即"代数的标准张量积".

中翻算子(flip operator)　见"代数的标准张量积".

混合外代数(mixed exterior algebra)　外代数的推广. 设 E^*,E 是特征为零的域 K 上的对偶空间,$\wedge E^*,\wedge E$ 是 E^*,E 的外代数,若 $\wedge(E^*,E)=\wedge E^*\otimes\wedge E$ 为 $\wedge E^*$ 与 $\wedge E$ 的标准张量积,对任意 $u^*,v^*\in\wedge E^*,u,v\in\wedge E$,定义

$$(u^*\otimes u)\cdot(v^*\otimes v)=(u^*\wedge v^*)\otimes(u\wedge v),$$

则 $\wedge(E^*,E)$是一个有单位元$1\otimes1$的结合代数,称为 E^*,E 上的混合外代数. 它是由形如 $1\otimes1,x^*\otimes1,1\otimes x(x^*\in E^*,x\in E)$的元生成的代数.

合成积(composition product)　一种运算. 混合外代数 $\wedge(E^*,E)$的第二种乘法. 设 E^*,E 是特征为零的域 K 上的对偶空间,$\wedge(E^*,E)$是 E^*,E 的混合外代数. 对任意 $u^*,v^*\in\wedge E^*,u,v\in\wedge E$,由

$$(u^*\otimes u)\circ(v^*\otimes v)=\langle u^*,v\rangle v^*\otimes u$$

确定的乘法,称为 $\wedge(E^*,E)$的合成积. 在合成积下,若 E 是无限维向量空间,则 $\wedge(E^*,E)$无单位元;若 E 是有限维向量空间,则 $\wedge(E^*,E)$有单位元. 由上述定义:

$$\wedge_q^p(E^*,E)\circ\wedge_s^r(E^*,E)=0,\quad\forall\ p\neq s,$$
$$\wedge_q^p(E^*,E)\circ\wedge_p^r(E^*,E)\subset\wedge_q^r(E^*,E).$$

特别地,

$$\wedge_p^p(E^*,E)\circ\wedge_p^p(E^*,E)\subset\wedge_p^p(E^*,E),$$

因此,子空间 $\Delta_pE=\wedge_p^p(E^*,E)$为 $\wedge(E^*,E)$关于合成积的子代数.

算子$i(a)$(operator $i(a)$)　一种算子. $\wedge E$ 中乘法算子$\mu(a)$在 $\wedge E^*$ 中的对偶算子. 设 E^*,E 是特征不为 2 的域 K 上的对偶空间,$\wedge E^*,\wedge E$ 是 E^*,E 上的外代数且是对偶的. 对 $a\in\wedge E$,$\wedge E$ 中由 a 的左乘所确定的线性变换 $\mu(a)$,即 $\mu(a)u=a\wedge u$,称

为 $\wedge E$ 上的乘法算子. $\mu(a)$ 的对偶映射

$$\mu(a)^*: \wedge E^* \to \wedge E^*,$$

即由 $\langle \mu(a)^* u^*, v\rangle = \langle u^*, a\wedge v\rangle$ 确定的算子记为 $i(a)$, 其中 $u^*\in E^*$, $u\in E$. 它有如下的运算法则:

$$i(a)u^* = \begin{cases} au^* & (a\in\Gamma), \\ 0 & (a\in\wedge^p E, u^*\in\wedge^r E^* \text{ 且 } r<p), \\ \langle u^*, a\rangle & (a\in\wedge^p E, u^*\in\wedge^p E^*); \end{cases}$$

$i(a\wedge b)=i(b)i(a)$, $\forall\, a,b\in\wedge E$;

$i(a\wedge b)=(-1)^{pq} i(b\wedge a)$ ($\forall\, a\in\wedge^p E, b\in\wedge^q E$).

对角子代数(diagonal subalgebra) $\wedge(E^*,E)$ 的一类子代数. 设 E^*,E 是特征不为 2 的域 K 上的一对对偶空间, $\wedge(E^*,E)$ 是 E^*,E 上的混合外代数. 若 $\Delta_p E=\wedge_p^p(E^*,E)$, 则

$$\Delta E=\bigoplus_{p\geq 0}\Delta_p E$$

是 $\wedge(E^*,E)$ 的子代数, 称为它的对角子代数. 对角子代数 $\Delta(E)$ 是交换的, 且对任意 $z\in\Delta E$, $i(z)\Delta E\subseteq\Delta E$. 同时, $\wedge(E^*,E)$ 的内积在 ΔE 上的限制是非退化的.

庞加莱同构(Poincaré isomorphism) 一种线性同构. 对偶空间的外代数之间的线性同构. 设 E^*,E 是特征为零的域 K 上的有限维对偶空间. 若 $\dim E=n$, e 为 $\wedge^n E$ 的基向量, e^* 为 $\wedge^n E^*$ 中的使 $\langle e^*,e\rangle=1$ 的基向量, 对任意 $u\in\wedge E$, $u^*\in\wedge E^*$, 定义 $D_e(u)=i(u)e^*$, $D^e(u^*)=i(u^*)e$, 则

$$D_e:\wedge E\to\wedge E^*,\quad D^e:\wedge E^*\to\wedge E$$

是线性同构, 称为庞加莱同构. 由定义, $D_e(1)=e^*$, $D_e(e)=1$; $D^e(1)=e$, $D^e(e^*)=1$; 对任意 $\lambda\neq 0$, $\lambda\in\Gamma$, $D_{\lambda e}=\lambda^{-1}D_e$, $D^{\lambda e}=\lambda D^e$. 此外, 还有:

$D_e(u\wedge v)=i(v)D_e(u)$ ($\forall\, u,v\in\wedge E$).

$D^e(u^*\wedge v^*)=i(v^*)D^e(u^*)$ ($\forall\, u^*,v^*\in\wedge E^*$),

其中 $i(v)$, $i(v^*)$ 的意义参见“算子 $i(a)$”条目. 特别值得注意的是以下公式

$$\langle D_e u, D^e u^*\rangle=\langle u^*,u\rangle\ (\forall\, u\in\wedge E, u^*\in\wedge E^*).$$

交积(intersection product) 一种运算. $\wedge E$ 的第二种乘法. 设 E^*,E 是特征为零的域 K 上的有限维对偶空间, D^e 是 $\wedge E^*\to\wedge E$ 的庞加莱同构. 对任意 $u,v\in\wedge E$, $u\cap v=D^e[(D^e)^{-1}u\wedge(D^e)^{-1}v]$ 称为 u 与 v 的交积. 若 $\dim E=n$, 对任意 $u\in\wedge^p E$, $v\in\wedge^q E$, 则 $u\cap v\in\wedge^{p+q-n}E$. 特别地, 若 $p+q>2n$ 或 $p+q<n$, 则 $u\cap v=0$; 若 $u\in\wedge^p E$, $v\in\wedge^{n-p}E$, 则 $u\cap v\in K$; 若 $e\in\wedge^n E$ 为定义庞加莱同构 D^e 的基元素, 则 $u\cap e=e\cap u=u$, $\forall\, u\in\wedge E$. 因此, 交积也使 $\wedge E$ 成为一个有单位元的代数, 称为 E 上的交代数, D_e 为交代数到外代数的同构.

交代数(intersection algebra) 见“交积”.

外积(external product) 向量叉积的推广. 设 E^*,E 是特征为零的域 K 上的对偶空间. 若 $\dim E=n$, $x_j\in E$ ($j=1,2,\cdots,n-1$), 定义

$$[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}]=D_e(x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_{n-1}),$$

其中 D_e 为庞加莱同构, 则称 $[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}]$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 的外积(它依赖于基向量 e 的选取). 设 $x^{*j}\in E^*$, 定义

$$[x^{*1},x^{*2},\cdots,x^{*n-1}]=D^e(x^{*1}\wedge x^{*2}\wedge\cdots\wedge x^{*n-1}),$$

称 $[x^{*1},x^{*2},\cdots,x^{*n-1}]$ 为 $x^{*1},x^{*2},\cdots,x^{*n-1}$ 的外积. 对于 $n-1$ 个向量的外积, 拉格朗日恒等式

$$\langle[x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}],[x^{*1},x^{*2},\cdots,x^{*n-1}]\rangle=\det(\langle x^{*i},x_j\rangle)$$

成立, 其中 $0\leqslant i,j\leqslant n-1$. 还有:

$$[e_1,e_2,\cdots,e_{i-1},e_{i+1},\cdots,e_n]=(-1)^{n-i}e^{*i}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

其中 $\{e_i\}$, $\{e^{*i}\}$ 为对偶基. 例如, 在 $n=3$ 时,

$$[e_1,e_2]=e^{*3},\ [e_2,e_3]=e^{*1},\ [e_3,e_1]=e^{*2}.$$

反张量积(skew tensor product) 一种运算. $\wedge(E^*,E)$ 的第三种代数运算. 设 E^*,E 是特征不为 2 的域 K 上的对偶空间, $AE^*\otimes\wedge E$ 是 $\wedge E^*$ 与 $\wedge E$ 的向量空间的张量积. 若对任意 $u^*\in\wedge E^*$, $u\in\wedge^q E$, $v^*\in\wedge^r E$, $v\in\wedge E$, 定义

$$(u^*\otimes u)\wedge(v^*\otimes v)=(-1)^{qr}(u^*\wedge v^*)\otimes(u\wedge v),$$

则 $\wedge E^*\otimes\wedge E$ 成为一个代数, 称为 $\wedge E^*$ 与 $\wedge E$ 的反张量积, 记为 $\wedge E^*\hat{\otimes}\wedge E$. 它是具有单位元 $1\otimes 1$, 且由 $1\otimes 1$, $E^*\otimes 1$ 与 $1\otimes E$ 生成的非交换的结合代数. 由定义, $\forall\, W_1\in\wedge^p E^*\otimes\wedge^q E$, $W_2\in\wedge^r E^*\otimes\wedge^s E^*$,

$$W_1\wedge W_2=(-1)^{(p+q)(r+s)}W_2\wedge W_1,$$

因此, $p+q$ 或 $r+s$ 为偶数时, $W_1\wedge W_2=W_2\wedge W_1$.

对称算子(symmetry operator) 一种映射. p 重线性映射到对称映射之间的映射. 设 E,F 是特征为零的域 K 上的向量空间, φ 是 E 上的 p 重线性映射, 若

$$s\varphi=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\sigma\varphi,$$

则称 $s\varphi$ 是 φ 的对称部分, 称 s 为对称算子. 若 φ 是 E 上的 p 重线性映射, 则 φ 是对称映射的充分必要条件为 $s\varphi=\varphi$.

伴随映射(adjoint mapping) 一种映射. 内积空间中的共轭映射. 设 E,F 是域 K 上的内积空间, $\varphi:E\to F$, $\tilde{\varphi}: F\to E$ 是线性映射. 若 $\forall\, x\in E, y\in F$,

$$(\varphi x,y)=(x,\tilde{\varphi}y),$$

则 $\tilde{\varphi}$ 称为 φ 的伴随映射. 若 $\tilde{\varphi}=\varphi$, 则 φ 称为自伴算子; 若 $\tilde{\varphi}=-\varphi$, 则 φ 称为反自伴算子.

自伴算子(self-adjoint operator) 见“伴随映射”.

反自伴算子(anti-adjoint operator) 见“伴随

映射".

同构D_E(isomorphism D_E) 一种特殊同构. $\wedge(E^*,E)$上的自同构. 设E^*,E是特征为零的域K上的一对对偶空间,$\dim E=n$. 由$T_E(a^*\otimes b)u=\langle a^*,u\rangle b$给出从$\wedge(E^*,E)$到$L(\wedge E,\wedge E)$的线性同构. 对每对$(p,q)$,$T_E$限制出同构

$$\wedge_q^p(E^*,E)\to L(\wedge^p E,\wedge^q E),$$

而$\mathfrak{T}_E=T_E^{-1}(I_{\wedge E})$与$\mathscr{T}_p=T_E^{-1}(I_{\wedge^p E})$分别是合成代数与子代数$\Delta_p(E)$的单位元. $\mathscr{T}_p$称为p次单位张量,记$\mathscr{T}=T_E^{-1}(I_E)$. 若$e^*$与$e$为$\wedge^n E^*$与$\wedge^n E$的对偶基,则$\mathscr{T}_n=e*\otimes e$. 若$D_E W=i(W)\mathscr{T}_n$,对任意$W\in\wedge(E^*,E)$,则称$D_E$是$\wedge(E^*,E)$上的线性自同构,且与$\wedge^n E$的基向量选取无关.

伴随张量(adjoint tensor) 伴随变换的推广. 设E^*,E是特征为零的域K上的对偶空间,且$\dim=n$. 对任意$z_r\in E^*\otimes E$,由$\mathrm{Ad}(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1})=D_E(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1})$,给出一个对称的$(n-1)$重线性映射

$$\mathrm{Ad}:\underbrace{(E^*\otimes E)\times\cdots\times(E^*\otimes E)}_{n-1}\to E^*\otimes E.$$

若

$$\mathrm{ad}(z)=\frac{1}{(n-1)!}\mathrm{Ad}(z,\cdots,z),$$

则$\mathrm{ad}(z)=D_E(z^{n-1})$,称$\mathrm{ad}z$为$z$的伴随张量. 除了$n=1$的情况外,$\mathrm{ad}z$非线性地依赖于$z$. 因为$D_E$是对角子代数$\Delta E$中的对合,所以$D_E\mathrm{ad}(z)=z^{n-1}$. 对$\mathrm{ad}(z)$,雅可比(Jacobi)恒等式成立:

$$D_E(\mathrm{ad}z)^p=(\det T_E(z))^{p-1}z^{n-p}\quad(1\leqslant p\leqslant n).$$

经典伴随变换(classical adjoint transformation) 向量空间中的一种线性变换. 设E是特征为零的域K上的n维向量空间,$\varphi_j\in L(E,E)$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$,Δ是E中的一个非零的行列式函数. 对任意$h\in E$与任一个n元向量

$$\begin{aligned}&\Omega_\Delta(z_1,z_2,\cdots,z_n)h\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_\sigma\Delta(\varphi_1 z_{\sigma(1)},\cdots,\varphi_{n-1}z_{\sigma(n-1)},h)z_{\sigma(n)}\end{aligned}$$

给出E上的一个线性变换$\Omega_\Delta(z_1,z_2,\cdots,z_n)$,且$\Omega_\Delta$对$z_j$是反对称的,而映射

$$(z_1,z_2,\cdots,z_n)\to\Omega_\Delta(z_1,z_2,\cdots,z_n)$$

给出了一个反对称的n重线性映射

$$\underbrace{E\times\cdots\times E}_{n}\to L(E,E).$$

因此有惟一的$L(E,E)$中的一个元素,记为$\mathrm{Ad}(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$,使

$$\begin{aligned}&\Omega_\Delta(z_1,z_2,\cdots,z_n)\\&=\Delta(z_1,z_2,\cdots,z_n)\mathrm{Ad}(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}).\end{aligned}$$

由定义,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ad}(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})h\cdot\Delta(z_1,z_2,\cdots,z_n)\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_\sigma\Delta(\varphi z_{\sigma(1)},\cdots,\varphi_{n-1}z_{\sigma(n-1)},h)z_{\sigma(n)}.\end{aligned}$$

若$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$为E的基,且使$\Delta(l_1,l_2,\cdots,l_n)=1$,则

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ad}(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})h\\&=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_\sigma\Delta(\varphi_1 e_{\sigma(1)},\cdots,\varphi_{n-1}e_{\sigma(n-1)},h)e_{\sigma(n)},\end{aligned}$$

且Ad是对称的. 若φ是E上的线性变换,记

$$\mathrm{ad}\varphi=\frac{1}{(n-1)!}\mathrm{Ad}(\varphi,\cdots,\varphi),$$

则称$\mathrm{ad}\varphi$为φ的经典伴随变换.

对称幂(symmetric power) 一种特殊的多重对称线性映射. 设E是域K上的向量空间,

$$\vee^p:\underbrace{E\times\cdots\times E}_{p}\to S$$

是E到域K上的向量空间S上的p重对称线性映射. 若$\vee^p$满足以下条件:$\mathrm{Im}\vee^p$生成S;若$\varphi:E\times\cdots\times E\to H$为任意一个$E$到域$K$上的向量空间的$p$重对称线性映射,则存在一个线性映$f:S\to H$,使图是可换的,则称$\vee^p$关于对称映射具有泛性质. E的p次对称幂是一个$(S,\vee^p)$对,其中

$$\begin{array}{ccc}E\times\cdots\times E&\xrightarrow{\varphi}&H\\ \downarrow\vee^p&\nearrow f&\\ S&&\end{array}$$

$$\vee^p:\underbrace{E\times\cdots\times E}_{p}\to S$$

为具有泛性质的p重线性映射,向量空间S也称为E的p次对称幂,记为$\vee^p E$. 具有泛性质的p重对称线性映射$\vee^p$是存在的,且在同构的意义是惟一的.

对称代数(symmetric algebra) 概括多元多项式代数的一种代数. 设E是特征为0的域K上的向量空间,$\vee^p$是E的p次对称幂,约定$\vee^0 E=K$,$\vee^1 E=E$,记

$$\vee E=\bigoplus_{p=0}^{\infty}\vee^p E$$

是$\vee^p E$的直和,$\vee E$对乘法

$$\begin{aligned}&(x_1\vee\cdots\vee x_p)\vee(x_{p+1}\vee\cdots\vee x_{p+q})\\&=x_1\vee\cdots\vee x_{p+q}\end{aligned}$$

构成一个K上的交换的结合代数,称为E上的对称代数. 1是$\vee E$的单位元且$\vee E$由$\{E,1\}$生成. 设$u\in\vee E$,若

$$u^k=\frac{1}{k!}u\vee\cdots\vee u\quad(k\geqslant 0,u^0=1),$$

则

$$(u+v)^k=\sum_{i+j=k}u^0\vee v^j,$$

对任意$u,v\in\vee E$. E上的对称代数在同构的意义下是惟一的. 若$\dim E=n$,则$\vee E$的庞加莱级数$P(t)=(1-t)^{-n}$. K上的n元多项式的代数$K[x_1,x_2,$

$\cdots,x_n]$就是一种对称代数.

对称代数的泛性质(the universal property of symmetric algebras) 对称代数的特征性质.它揭示了对称代数的本质,也可以用来定义对称代数.设U为一个特征为0的域K上的结合代数,其单位元为1,E为K上的向量空间,$\varepsilon:E\to U$为使$\varepsilon(x)\varepsilon(y)=\varepsilon(y)\varepsilon(x)(\forall\ x,y\in E)$的线性映射,若对$K$上任意的有单位元$e$的结合代数及任意的使$\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(y)\varphi(x)(\forall\ x,y\in E)$的线性映射,必有惟一的代数同态$h:U\to A$使$h(1)=e$且$h\varepsilon=\varphi$,则称$(U,\varepsilon)$对(或$U$)具有$E$上对称代数的泛性质.于是,用对称代数中办法直接定义的对称代数$\vee E$正好具备这个泛性质.具有上述泛性质的U在代数同构意义下是惟一的,因此$U\cong\vee E$.

对称函数代数(symmetric functional algebra) 对称代数的一个重要例子.设E是特征为0的域K上的向量空间,φ是E上的p重线性函数,若对任意$\sigma\in S_p$,$\sigma\varphi=\varphi$,则称φ为对称p重线性函数.设$S^p(E)$表示p重对称线性函数空间,若$\varphi\in S^p(E)$,$\psi\in S^q(E)$,定义

$$\varphi\vee\psi=\frac{(p+q)!}{p!\ q!}s(\varphi\otimes\psi),$$

其中s为对称算子,则

$$S^{\otimes}(E)=\bigoplus_{p=0}^{\infty}S^p(E)$$

是一个可换的结合代数,称为E的对称函数代数.

对合S_E(involution S_E) 一个特殊的代数同态.它是E上克利福德代数到其反向代数的代数同态.设A是一个代数,"·"表示乘法.若在A中定义另一种乘法"∘"为:$a\circ b=b\cdot a$,则$(A,\circ)$是一个代数,称为A的反向代数,记为A^{opp}.设E是域K上的向量空间,C_E^{opp}是E的克利福德代数C_E的反向代数.包含映射$j:E\to C_E^{opp}$在$C_E\to C_E^{opp}$的代数开拓是一个对合,记为S_E.

反向代数(opposite algebra) 见"对合S_E".

克利福德代数的标准元素(canonical element of a clifford algebra) 克利福德代数中的元素,是正交基之积的推广.设E是特征为0的域K上的n维向量空间,C_E是E上的克利福德代数,$\wedge E$是E上的外代数.若对任意的$x_i\in E$,定义

$$\xi_E(x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_p)=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in s_p}\varepsilon_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(p)},$$

则ξ_E是$\wedge E\to C_E$的线性同构.若Δ是E上非零行列式函数,则由

$$\xi_E(x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_n)=\Delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)l_\Delta$$

决定的$l_\Delta\in C_E$与$x_1,x_2,\cdots,x_n$的选取无关,l_Δ称为C_E的标准元素.若$l_1,l_2,\cdots,l_n$为E的正交基,且$\Delta(l_1,l_2,\cdots,l_n)=1$,则$l_\Delta=l_1l_2\cdots l_n$.

正交表示(orthogonal representation) 正交变换的推广.设A是有单位元e的结合代数,V是域K上的向量空间,$L(V)$是V的线性变换的代数,若$R:A\to L(V)$是代数同态,且$R(e)=I_V$,其中I_V是V的恒等变换,则称R是A在V中的表示.设E是域K上的向量空间,C_E是E的克利福德代数,R是C_E在欧几里得空间V的表示,若满足

$$(R(x)u,R(x)v)=\varepsilon(x,x)(u,v)\quad(\forall\ x\in E,u,v\in V),$$

其中$\varepsilon=\pm1$,则称R为正交表示.若$\varepsilon=1$,则称R为正正交表示;若$\varepsilon=-1$,称R为负正交表示.

表示(representation) 见"正交表示".

正正交表示(positive orthogonal representation) 见"正交表示".

负正交表示(negative orthogonal representation) 见"正交表示".

对合W_E(involution W_E) 克利福德代数的一种自同构.设E是特征为零的域K上的向量空间,C_E是E上的克利福德代数.若对任意$x\in E$,定义$W(x)=-x$,则W是等距线性同构.因此,存在惟一的代数自同构$W_E:C_E\to C_E$,且$W_E^2=I$,I是恒等映射.若

$$C_E^0=\ker(W_E-I),\quad C_E^1=\ker(W_E+I),$$

则克利福德代数有如下的直和分解:$C_E=C_E^0\oplus C_E^1$.

挠伴随表示(twisted adjoint representation) 克利福德代数乘法群的一种表示.设E是特征为零的域K上的n维向量空间,$(\ ,\ )$是E上的非退化双线性对称函数,C_E^*是C_E中可逆元的乘法群,由$\mathrm{ad}(a)u=W_E(a)ua^{-1}$定义的ad称为$C_E^*$的挠伴随表示,其中$a\in C_E^*$,$u\in C_E$,$W_E$是由$w(x)=-x$在$C_E$上开拓的对合自同构.由定义,

$$\mathrm{ad}W_E(a)=W_E\circ\mathrm{ad}(a)\circ W_E^{-1}.$$

克利福德群(Clifford group) 克利福德代数乘法群的一个重要子群.若E是特征为零的域K上的向量空间,C_E^*是C_E的可逆元的乘法群,则

$$\Gamma_E=\{a\in C_E^*\mid ad(a)E\subseteq E\}$$

是C_E^*的子群,称为E上的克利福德群.

撰　稿　朱作桐　李时吉　吴　俊　佟文廷　张福振

审　阅　佟文廷　武同锁

群 及 其 推 广

群论(group theory) 代数学的一个分支. 群是数学中广泛存在的一个重要概念. 它的出现始于18世纪末. 19世纪中叶,凯莱(Cayley,A.)首先给出了群的公理化定义,后来在物理、化学等学科中找到了重要的应用. 例如,一个集合的所有置换构成一个群,又如,数学的某些系统或其他系统的自同构群等. 因而,作为独立数学分支的群论是在其他研究工作中逐渐形成的. 群的定义常见的有如下两种:

1. 群 G 是一个非空的元素集合,具有一个称为"乘法"的二元运算(即对任意的 $a,b\in G$,存在惟一的 $c\in G$ 使得 $ab=c$),且满足:

1)结合律,即 $(ab)c=a(bc)$,$\forall\ a,b,c\in G$.

2)存在单位元 e,即存在元素 $e\in G$,$\forall\ a\in G$,有

$$ea=ae=a.$$

3)存在逆元,即对任意的 $a\in G$,存在元素 $a^{-1}\in G$,使得 $a^{-1}a=aa^{-1}=e$.

2. 群 G 是一个具有"乘法"的二元运算的非空元素集合,且满足:

1)结合律.

2)对任意的 $a,b\in G$,都存在惟一的 G 中元素 x,y,满足 $ax=b$,$ya=b$.

上述第一个定义作为公理系统并不独立,可以去掉 2)和 3)中相应的各一半. 第二个定义是由苏联数学家库洛什(Курош,А.Г.)最先提出的.

由于群的抽象性,尽管群广泛存在,并且早在欧几里得(Euclid)时代,群的思想在《几何原本》中已经出现,但却迟至18世纪末期才真正萌生群的概念. 此后,直到19世纪中叶是群论的孕育时期,拉格朗日(Lagrange,J.-L.)、柯西(Cauchy,A.-L.)、伽罗瓦(Galois,E.)、西洛(Sylow,L.)等人的工作中已包含了丰富的群论思想与基本结果. 特别地,在伽罗瓦关于代数方程的杰出研究中运用现代群论的这些基本思想与结论,显示了巨大威力,这是数学史上的重要一页. 1854年,凯莱第一次给出了群的公理化定义后,1870年出版了由若尔当(Jordan,M.E.C.)撰写的第一本有影响的群论著作,群论才真正成为一个独立学科. 此后,克莱因(Klein,C.F.)从几何的角度考虑,发表了著名的埃尔朗根(Erlangen)纲领,李(Lie,M.S.)由微分方程的研究引入了李群(现在,李群已独立成为另一分支学科). 群已被广泛地应用,并独立地发展成为一个庞大的多方向的代数分支,至今仍长盛不衰.

群论发展的历史错综复杂,它涉及众多著名数学家以及不少数学领域和其他科学领域,而作为代数分支的群论,主要指那些以群或其推广为主要研究对象,以代数方法为主要研究方法的各种理论.

当今群论包括基础理论、置换群论、群表示论、抽象有限群论、无限群的有限群结构及分类理论、无限群有限群的专门方向、线性代数群(含典型群)、半群、群的各种推广等十多个下属分支学科.

群论是以公理化的形式出现的. 随着发展,其研究课题、思想与方法愈来愈丰富多彩,在具体方法上常常以作用的形式出现,如在集合上的置换作用、在空间上施加一个旋转作用等. 所以群论与其他数学学科、自然科学学科的相互渗透及群的应用都相当广泛. 群论复杂的历史与复杂的现状足以说明这一点,这也正是群论的生命力之所在. 例如,群论特别是群表示论对量子物理与量子化学的应用形成了一个单独的边缘分支学科.

群论基础

乘法(multiplication) 代数结构的二元运算. 群中的二元运算常用此名称.

乘(法)群(multiplicative group) 群的一种名称. 为了方便和强调群中的运算是乘法,有时称群为乘法群或乘群.

结合律(associative law) 一种运算律. 代数结构中二元运算所满足的一条规律,群的运算也满足此条规律.

群的单位元(identity element (unit element) of a group) 群的特殊元素. 对于乘法群的单位元通常用 e 或 1 表示,它是惟一确定的.

逆元(inverse element) 与某元素相关的特殊元素. 在乘法群中,元素 a 的逆元用 a^{-1} 表示,它是由 a 惟一确定的.

阿贝尔群(Abelian group) 亦称交换群. 一种重要的群类. 对于群 G 中任意二元 a,b,一般地,$ab\neq ba$. 若群 G 的运算满足交换律,即对任意的 $a,b\in G$ 都有 $ab=ba$,则称 G 为阿贝尔群. 由于阿贝尔(Abel,N.H.)首先研究了交换群,所以通常称这类群为阿贝尔群. 交换群的运算常用加法来表示,此时群的单位元用 0(零元)表示,a 的逆元记为 $-a$(称为 a 的负元). 用加法表示的交换群称为加法群或加群.

交换群(commutative group) 即"阿贝尔群".

加法群(additive group) 见"阿贝尔群".

加群(additive group) 见"阿贝尔群".

整数加法群(additive group of integers) 亦称整数加群.一种具体的群.指全体整数在通常的加法运算下所成的群.常用 Z 表示整数加法群.同样地,所有有理数 Q,实数 R 以及复数 C 对于通常的加法运算所成的群,分别称为有理数加法群、实数加法群和复数加法群.

整数加群(additive group of integers) 即"整数加法群".

有理数加法群(additive group of rational numbers) 见"整数加法群".

实数加法群(additive group of real numbers) 见"整数加法群".

复数加法群(additive group of complex numbers) 见"整数加法群".

模n的剩余类加群(residue class additive group modulo n) 一种重要的群.指整数全体模 n 后的类,在类的加法运算下所成的群.设 n 是一个正整数,记 $\mathrm{Z}_n=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\cdots,\overline{n-1}\}$.在 Z_n 上定义加法如下:若 $i+j\equiv k\ (\mathrm{mod}\, n)$,其中 $0\leqslant k<n$,则定义 $\bar{i}+\bar{j}=\bar{k}$.在此定义之下,Z_n 成为由 n 个元素组成的加法群,称为模 n 的剩余类加群.

域的乘法群(multiplicative group of a field) 一类重要的群.指域中非零元对定义的乘法运算所成的群.任意域 F 的非零元素集合 $F^*=F\backslash\{0\}$对于定义在 F 上的乘法所成的群,常用 F^* 表示域 F 的乘法群.在 F^* 中,单位元是域 F 的单位元.

线性变换群(group of linear transformations) 一种重要的非交换群.设 V 是域 F 上的 n 维向量空间,用 $\mathrm{GL}(V)$表示 V 的所有一一线性变换的集合.若在 $\mathrm{GL}(V)$中把映射的合成作为运算,则$\mathrm{GL}(V)$对于该运算成为一个群,称为线性变换群.

二面体群(dihedral group) 一种具体的群.保持平面上正 $n(n>2)$边形 R_n 不变的线性变换所成的群.它由保持 R_n 不变的 n 个旋转和 n 个反射所组成.通常记为 D_{2n}.D_{2n}是 $2n$ 阶的非交换群.从生成的角度来定义,二面体群是由两个不同的特殊元所生成的群,即它有如下的定义关系

$$D_{2n}=\langle x,y\,|\,x^n=y^2=1,y^{-1}xy=x^{-1}\rangle.$$

群的阶(order of a group) 对群的一种刻画.群 G 中所含元素的个数.记为$|G|$.若$|G|$为有限,则称 G 为有限群;否则,称 G 为无限群.若 S 为群 G 的子集,即 $S\subseteq G$,则称 S 中所含元素的个数为 S 的阶,记为$|S|$.

有限群(finite group) 见"群的阶".

无限群(infinite group) 见"群的阶".

子群(subgroup) 群的特殊的非空子集.群 G 的非空子集 H,若对 G 的乘法也成为群,则称 H 为 G 的子群,记为 $H\leqslant G$.若子群 $H\neq G$,则称 H 为 G 的真子群,记为 $H \lneqq G$ 或简记为 $H<G$.任何一个非单位元群 G 至少有两个子群,G 自身以及由单位元 e 作成的单位元群$\{e\}$(或用$\{1\}$或 1 表示),称它们为 G 的平凡子群.不是平凡子群的子群称为非平凡子群.群 G 的非空子集 H 为 G 的子群的充分必要条件是:对任意的 $a,b\in H$,恒有 $ab^{-1}\in H$.若$\{H_i|i\in I\}$是 G 的子群的集合,I 是一个指标集,则所有 H_i 的交$\bigcap\limits_{i\in I}H_i$ 是 G 的一个子群.

真子群(proper subgroup) 见"子群".

平凡子群(trivial subgroup) 见"子群".

非平凡子群(nontrivial subgroup) 见"子群".

生成子群(generated subgroup) 一类重要的子群.由元素通过"乘法"、"取逆"等运算所得到的子群.它是构造子群的最基本的方法.若 S 是群 G 的一个非空子集,则包含 S 的 G 的所有子群的交仍是 G 的一个子群,称它为由 S 生成的子群,记为$\langle S\rangle$.$\langle S\rangle$是 G 中含 S 的最小子群,它由 G 中形如

$$a_1^{\varepsilon_1}a_2^{\varepsilon_2}\cdots a_n^{\varepsilon_n}\ (a_i\in S,\varepsilon_i=\pm1,n\ 为任意正整数)$$

的元的全体构成.特别地,当

$$S=\bigcup_{i\in I}H_i,\quad H_i\leqslant G\quad(i\in I)$$

时,子群$\langle S\rangle$称为诸子群 H_i 所生成的子群,记为$\langle H_i|i\in I\rangle$;当只有子群 H,K 时,记为$\langle H,K\rangle$.若 $U=\langle S\rangle$,则称 S 为 U 的生成元集,S 中元为 U 的生成元.特别地,当 $G=\langle S\rangle$时,S 中元称为 G 的生成元.若 S 是有限集时,则称 G 为有限生成的.有限群是有限生成的群.

生成元(generator) 见"生成子群".

有限生成群(finitely generated group) 见"生成子群".

极大子群(maximal subgroup) 一种重要的子群.即在包含的意义下极大的真子群.它是群 G 的真子群 H,且 G 与 H 之间无 G 的其他真子群.若 H 是群 G 的真子群,并且,对于 G 的真子群 K,由 $H\leqslant K$ 得出 $K=H$,则称 H 是 G 的极大子群.

极小子群(minimal subgroup) 一种重要的子群.极大子群的对偶概念.指在包含的意义下,群的最小的非平凡真子群.它是群 G 的真子群 K,且 K 除了单位元群$\{e\}$为真子群以外无其他真子群.若 K 是群 G 的真子群,$K\neq\{e\}$,并且,对于 G 的真子群 H,由 $H\leqslant K$ 得出 $H=\{e\}$或 $H=K$,则称 K 是 G 的极小子群.

弗拉梯尼子群(Frattini subgroup) 一类重要的特征子群.设 G 是群,若 G 有极大子群,则 G 的所有极大子群的交称为 G 的弗拉梯尼子群.若 G 无极大子群,则 G 本身是 G 的弗拉梯尼子群.G 的弗拉梯尼子群常记为 $\Phi(G)$或 Frat G.有限群的弗拉梯

尼子群为幂零群.

元素的阶(order of an element) 刻画元素自乘与单位元关系的一个数量. 对群 G 的元素 a,能使等式 $a^m=1$ 成立的最小正整数称为元素 a 的阶. 记为 $|a|=m$(或 $o(a)=m$). 若这样的 m 不存在,则称 a 是无限阶的,记为 $|a|=\infty$. 阶为 m 的元称为 m 阶元,当元素 a 的阶为素数 p 的方幂时,称 a 为 p 元素;若元素 g 的阶与 p 互素,则称 g 为 p' 元素. 特别地,二阶元在群论研究尤其是在有限单群分类中起重要作用. 二阶元亦称对合.

无限阶(infinite order) 见"元素的阶".

m 阶元(element of order m) 见"元素的阶".

p 元素(p-element) 见"元素的阶".

p' 元素(p'-element) 见"元素的阶".

有限群的方次数(exponent of a finite group) 对有限群的一种刻画. 有限群中元素阶的最小公倍数. 设 G 是一个有限群,对任意 $a\in G$ 都满足 $a^n=1$ 的最小正整数 n 即为 G 的方次数. 通常记为 $\exp(G)$.

循环群(cyclic group) 一种重要的群. 即由一个元素生成的群. 循环群分为两类:一类是有限循环群,n 个元的有限循环群与模 n 的剩余类加群同构;另一类是无限循环群,它与整数加法群同构. 循环群是特殊的阿贝尔群. 循环群的子群和商群仍是循环群.

有限循环群(finite cyclic group) 见"循环群".

无限循环群(infinite cyclic group) 见"循环群".

共轭(conjugacy) 群中一种重要的等价关系. 设 S,T 是群 G 的两个非空子集,H 是 G 的子群,若存在 H 中元素 g 使得 $T=g^{-1}Sg=S^g$,则称 S 和 T 关于 H 共轭,其中 $T=g^{-1}Sg=\{g^{-1}sg\mid s\in S\}$ 称为 S 按 g 的变形. 若 S 为 G 的子群,T 称为 S 关于 H 的共轭子群;若 $S=\{s\}$ 为一个元的集合,则称 $t=g^{-1}sg$ 为 s 关于 H 的共轭元. 当 $H=G$ 时,通常就不加"关于 G"这个修饰词了. 共轭关系是一种等价关系. 设 S 是群 G 的一个子集,H 是 G 的一个子群,与 S 关于 H 共轭的所有子集组成的集合称为 S 关于 H 的共轭类. 当 $S=\{s\}$ 为一个元素的集合,s 关于 G 的共轭类是元素的集合,就简称 G(的元素)的一个共轭类.

共轭子群(conjugate subgroups) 见"共轭".

共轭元(conjugate elements) 见"共轭".

共轭类(conjugate class) 见"共轭".

正规化子(normalizer) 刻画群的子集与群的元素可换程度大小的一种概念. 设 S 是群 G 的一个子集,H 是 G 的一个子群,使得 $x^{-1}Sx=\{x^{-1}sx\mid x\in S\}=S$ 的一切 $x\in H$ 所构成的集合称为 S 在 H 中的正规化子,记为 $\mathrm{N}_H(S)$,即 $\mathrm{N}_H(S)=\{x\in H\mid x^{-1}Sx=S\}$. 对所有的 $s\in S$,使得 $x^{-1}sx=s$ 的一切 $x\in H$ 所构成的集合,称为 S 在 H 中的中心化子,记为 $\mathrm{C}_H(S)$,即 $\mathrm{C}_H(S)=\{x\in H\mid x^{-1}sx=s,\forall\ s\in S\}$. 当 $H=G$ 时,习惯上简称 S 的正规化子和中心化子. G 在 G 中的中心化子称为 G 的中心,记为 $\mathrm{Z}(G)$ 或 $\mathrm{C}(G)$. 阿贝尔群的中心为其自身,反之亦对,即若 $\mathrm{Z}(G)=G$,则 G 为阿贝尔群.

中心化子(centralizer) 见"正规化子".

中心(center) 见"正规化子".

类方程(class equation) 有限群的阶与其共轭类的长度之间的一个等式. 设 G 是有限群,$a\in G$,a 在 G 中的共轭元的全体构成 G 的一个共轭类. G 可表为若干个互不相交的(元素的)共轭类的和集(并集),即 $G=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_m$,其中 $|C_i|=|G:\mathrm{C}_G(x_i)|$,$x_i\in C_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$. 于是

$$|G|=\sum_{i=1}^{m}|G:\mathrm{C}_G(x_i)|.$$

上式称为有限群 G 的类方程.

陪集(coset) 亦称傍系. 群中元素依赖于子群的一种等价类. 设 G 是一个群,H 是 G 的子群,对固定的元 $x\in G$,一切形如 $xh(h\in H)$ 的元所成的集合,记为 xH,称为 H(在 G 中)的左陪集. 同样地,$Hx=\{hx\mid h\in H\}$ 称为 H 的右陪集. 在一般情况下,左陪集不一定等于右陪集. 由于子群 H 的任意两个左(右)陪集或者不相交,或者相等,从而群 G 可以分解为 H 的所有左陪集(或右陪集)的无交并.

傍系(coset) 即"陪集".

左(右)陪集(left(right) coset) 见"陪集".

重陪集(double coset) 亦称双陪集. 群中元素依赖于两个子群的一种等价类. 设 G 是一个群,H,K 是它的两个子群(不必相异),x 为 G 中固定元. 记 $HxK=\{hxk\mid h\in H,k\in K\}$,称为 H 与 K 的一个重陪集. 两个重陪集 HxK 与 HyK 或者不相交,或者相等. 它是若干个 H 的右陪集之并,也是若干个 K 的左陪集之并. 而 G 可以分解为这些重陪集的无交并. 重陪集的另一译名为双陪集.

双陪集(double coset) 即"重陪集".

子群的指数(index of a subgroup) 简称指数. 子群在群中的陪集的基数(势). 若 H 是群 G 的子群,则 G 可以分解为 H 的左(右)陪集的无交并. H 在 G 中的诸左陪集所成之集合和诸右陪集所成之集合有相同的基数(势)r,称 r 为 H 在 G 中的指数,记为 $|G:H|=r$.

拉格朗日定理(Lagrange theorem) 有限群论的一个基本定理. 即揭示群的阶与其子群的阶之间的关系的定理. 若 G 是群,H 是 G 的子群,则 $|G|=$

$|G:H||H|$. 当 G 为有限群时，$|G:H|=|G|/|H|$. 于是，有限群的子群的阶恒为群的阶的因子.

正规子群(normal subgoup)　亦称不变子群. 一类重要的子群. 在共轭作用下不变的子群. 设 H 是群 G 的一个子群，若对任意的 $x\in G$ 有 $Hx=xH$，则称 H 是 G 的一个正规子群，记为 $H\lhd G$. 子群 H 是 G 的正规子群的充分必要条件是对于任意的 $h\in H$，$x\in G$，有 $x^{-1}hx\in H$. $\{e\}$和 G 是 G 的两个正规子群，称为 G 的平凡正规子群.

不变子群(invariant subgroup)　即"正规子群".

平凡正规子群(trivial normal subgroup)　见"正规子群".

拟正规子群(quasinormal subgroup)　一类特殊子群. 即与群的任一子群可换的子群. 正规子群必为拟正规子群，但反之不成立.

单群(simple group)　一类重要的群. 即不含非平凡正规子群的群. 若群 $G\neq\{e\}$，且除$\{e\}$及 G 本身外不再含其他的正规子群，则称 G 为单群. 若此时 G 还是有限群，则称 G 为有限单群. 有限单群的例子有：素数阶群，交错群 A_n，$n\geqslant 5$. 有限单群的研究是有限群论中一个十分活跃的领域.

极大正规子群(maximal normal subgroup)　一种特殊的正规子群. 指群的非平凡正规子群中的极大者. 群 G 的一个正规子群 H 称为 G 的极大正规子群，若 H 满足条件：

1. $H\neq G$.

2. 若 K 是 G 的一个正规子群，$H\subseteq K\subseteq G$，则有 $K=G$ 或者 $K=H$.

类似地，群 G 的一个正规子群 M 称为 G 的极小正规子群，若 M 满足条件：

1. $M\neq\{e\}$.

2. 若 N 是 G 的一个正规子群，$\{e\}\subseteq N\subseteq M$，则有 $N=\{e\}$或 $N=M$.

最大的正规 p 子群常记为 $O_p(G)$. 最大的由 p' 元素组成的正规子群常记为 $O_{p'}(G)$. 它们分别称为极大正规 p 子群和极大正规 p' 子群.

极小正规子群(minimal normal subgroup)　见"极大正规子群".

极大正规 p 子群(maximal normal p-subgroup)　见"极大正规子群".

极大正规 p' 子群(maximal normal p'-subgroup)　见"极大正规子群".

商群(quotient group)　亦称因子群，又称模 H 的剩余类群. 由正规子群的陪集组成的一种群. 设 H 是群 G 的一个正规子群，G 关于 H 的所有左陪集所成的集合 $G/H=\{xH\mid x\in G\}$按照如下的乘法：$(xH)(yH)=(xy)H$ 成为一个群，称为 G 关于 H 的商群. 由于 H 是正规子群，$xH=Hx$，所以 G/H也是 H 的右陪集所成的集合，因此，无论用左陪集还是右陪集来定义商群，结果是一致的. 当 G 是加法群时，G/H 也常写成 $G-H$，称为差群.

因子群(factor group)　即"商群".

差群(difference group)　见"商群".

正规闭包(normal closure)　一种特殊的正规子群. 群中包含某个子集的最小正规子群. 设 G 是群，M 是 G 的非空子集，称 $M^G=\langle g^{-1}mg\mid m\in M,g\in G\rangle$为 M 在 G 中的正规闭包，M^G 是 G 的包含 M 的最小的正规子群.

群的子集的核(core of subset of a group)　简称核. 一种特殊的正规子群. 含于子集中群的最大的正规子群. 设 X 是群的子集，G 的含于 X 中的诸正规子群生成的子群称为 X 的核，记为 X_G. 若 X 不含 G 的正规子群，则规定 $X_G=1$，特别当 X 为 G 的子群时，

$$X_G=\bigcap_{g\in G}g^{-1}Xg.$$

核(core)　见"群的子集的核".

群的同态(homomorphism of group)　一类重要的映射. 群之间的保持运算的一类映射. 设 f 是群 G 到群 G'(不必异于 G)的映射，若 f 保持运算，即对所有的 $x,y\in G$，总有 $f(xy)=f(x)f(y)$(或 $(xy)^f=x^f\cdot y^f$)，则称 f 是群 G 到群 G'的同态映射，简称同态. 若同态映射 f 还是一个双射，则称 f 为 G 到 G'的同构映射，记为 $G\cong G'$. 这时称群 G 和 G'同构，记为 $G\cong G'$. 特别地，若 $G=G'$时，则分别称 f 为群 G 的自同态和自同构.

同构映射(isomorphic map)　见"群的同态".

群的自同态(endomorphism of a group)　见"群的同态".

群的自同构(automorphism of a group)　见"群的同态".

群的阶方程(order equation of a group)　对有限群的一种重要刻画. 若 G 是 n 阶群，则有 n 的正约数 $1=n_1,n_2,\cdots,n_s$ 及相应的正整数 $1=k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 G 中恰有 $k_i\varphi(n_i)$个 n_i 阶元素，从而有等式

$$n=\sum_{i=1}^{s}k_i\varphi(n_i).\tag{1}$$

(1)称为 n 阶群 G 的阶方程. 为方便，称 $k_i\varphi(n_i)$为关于 n_i 的项，有时也称项 $\varphi(n_i)$，称 k_i 为项 $\varphi(n_i)$的系数. 群 G 的阶方程(1)有下列性质：

1. $n_1=1$，$k_1=1$.

2. $n_i\mid n$，$i=1,2,3,\cdots,s$.

3. 若 m 属于$\{n_1,n_2,\cdots,n_s\}$，则 m 的任一正约数均属于$\{n_1,n_2,\cdots,n_s\}$.

4. 若素数 $p|n$，则 p 属于 $\{n_1,n_2,\cdots,n_s\}$.

对于交换群，有定理：若 G_1 与 G_2 均为 n 阶交换群，则 $G_1\cong G_2\Leftrightarrow G_1$ 与 G_2 有相同的阶方程. n 为正整数，称满足性质 1—4 的等式

$$n=\sum_{i=1}^{s}k_i\varphi(n_i)$$

是正整数 n 的拟阶方程. n 阶交换群 G 的阶方程(1)具有性质：

5. 若 $n_1<n_2<\cdots<n_s$，则 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 是 n_s 的全部正约数，且 $s=T(n_s)$.

6. 若 $w_1,w_2,\cdots,w_u$ 属于 $\{n_1,n_2,\cdots,n_s\}$，则它们的最小公倍数也属于 $\{n_1,n_2,\cdots,n_s\}$.

设 p 为素数，若 $p^m|n,p^{m+1}\nmid n$，则 n 阶交换群 G 的阶方程(1)有性质：

7. 存在 $p^{\alpha_1},p^{\alpha_2},\cdots,p^{\alpha_u},0<\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_u$，使阶方程(1)中关于 p 的方幂的项是 $1,k_j\varphi(p^j),j=1,2,\cdots,\alpha_u$，

$$1+\sum_{j=1}^{\alpha u}k_j\varphi(p^j)=p^m, \tag{2}$$

并且，若设 $\alpha_0=0,\alpha_{t-1}<j\leqslant\alpha_t$，则

$$k_j=p^{v_j}\left(\sum_{i=0}^{u-t}p^i\right), \tag{3}$$

其中

$$v_j=\left(\sum_{i=1}^{t-1}\alpha_i\right)+(j-1)(u-t). \tag{4}$$

若 $n_i=p_1^{\delta_1}p_2^{\delta_2}\cdots p_r^{\delta_r},p_1,p_2,\cdots,p_r$ 为互异素数，则 n 阶交换群 G 的阶方程(1)有性质：

8. 有项 $\varphi(n_i)\Leftrightarrow$ 有 $\varphi(p_1^{\delta_1}),\varphi(p_2^{\delta_2}),\cdots,\varphi(p_r^{\delta_r})$ 诸项，并且，$\varphi(n_i)$ 的系数为 $\varphi(p_1^{\delta_1}),\varphi(p_2^{\delta_2}),\cdots,\varphi(p_r^{\delta_r})$ 诸项系数的积.

于是，有定理：正整数 n 的拟阶方程是某个 n 阶交换群的阶方程 $\Leftrightarrow n$ 的拟阶方程满足性质 7，8. 进而，有定理：正整数 n 的等式

$$n=\sum_{i=1}^{s}k_i\varphi(n_i)$$

是某个 n 阶交换群的阶方程 $\Leftrightarrow$ 该等式满足性质 1，7，8. 这样，就得到了 n 阶交换群的阶方程的特征性质，从元素的阶的角度深刻地认识了 n 阶交换群的构造. 利用阶方程(1)，得到 n 阶群 G 成为循环群的几个较弱的充分条件(当然也是必要条件)：

1. 若对于 n 的任意正约数 m，G 中的 m 阶元素不多于 $\varphi(m)$ 个，则 n 阶群 G 为循环群.

2. 若对于 n 的任意正约数 m，G 中的 m 阶子群不多于一个，则 n 阶群 G 为循环群.

3. 若对于 n 的正约数 m，方程 $x^m=e$ 在 G 中的解不多于 m 个，其中 e 是 G 的单位元，则 n 阶群 G 是循环群.

n 阶交换群的阶方程(order equation of a commutative group with order n)　见“群的阶方程”.

正整数n 的拟阶方程(quasi-order equation of a positive interger n)　见“群的阶方程”.

群的单同态(injective homomorphism of group)　亦称单射同态或称单一同态. 群之间的一种同态. 设 f 是群 G 到群 G' 的同态映射，若 f 作为映射还是单射，即由 $x\neq y,x,y\in G$，必得 $f(x)\neq f(y)$，则称此同态为单同态.

群的单射同态(injective homomorphism of group)　即“群的单同态”.

群的单一同态(injective homomorphism of group)　即“群的单同态”.

群的满同态(surjective homomorphism of group)　亦称满射同态或称映上同态. 群之间的一种同态. 设 f 是群 G 到群 G' 的同态映射. 若 f 作为映射还是满射，即对 G' 中任一元 x' 总有 $x\in G$，使得 $f(x)=x'$，则称 f 为满同态. 既单且满的同态即为同构.

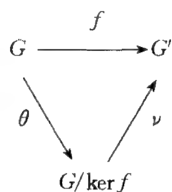
群的满射同态(surjective homomorphism of group)　即“群的满同态”.

群的映上同态(surjective homomorphism of group)　即“群的满同态”.

群的同态像(homomorphic image of a group)　群在同态映射下的像集. 设 f 是群 G 到群 G' 的同态，同态像记为 $\mathrm{Im}\,f$ 或 $f(G)$. $\mathrm{Im}\,f=\{f(g)\mid g\in G\}$，它是 G' 的子群. 若 $\mathrm{Im}\,f=G'$，则 f 为满同态.

群的同态核(homomorphic kernel)　在同态映射下，单位元的原像集. 设 f 是群 G 到 G' 的同态，G 的子集 $K=\{g\mid g\in G,f(g)=e'$ 为 G' 中单位元$\}$是 G 的一个正规子群，称为 f 的同态核，记为 $\ker f$，即 $\ker f=K$. 若 $\ker f=e$，即它只含 G 的单位元，则 f 为单同态.

同态基本定理(fundamental homomorphism theorem)　群论的基本定理之一. 有关同态映射的定理. 若 f 是群 G 到群 G' 的一个满同态，则 f 的同态核 $\ker f$ 是 G 的正规子群. 并且从 $G/\ker f$ 到 G' 有惟一的同构映射 ν，使得 $f=\nu\theta$，其中 θ 是从 G 到 $G/\ker f$ 上的自然同态. 即右图为交换图.



自然同态(natural homomorphism of a group)　亦称标准同态或典范同态. 群到其商群上的一种特殊同态. 若 N 是群 G 的一个正规子群，则存在 G 到商群 G/N 上的一个映射 $f:g\mapsto Ng$. 这个映射是 G 到 G/N 的满同态，称为自然同态，其中

$$\mathrm{Im}f=G/N,\quad \ker f=N.$$

标准同态(canonical homomorphism)　即“自

然同态".

典范同态(canonical homomorphism) 即"自然同态".

第一同构定理(first isomorphism theorem) 群论的基本定理之一.应用同态基本定理得到的一个重要的同构定理.设 f 是群 G 到群 G' 的一个满同态,N' 是 G' 的一个正规子群.若 $N=f^{-1}(N')=\{g\in G\mid f(g)\in N'\}$($N'$ 在 G 中的原像),则 $N\lhd G$,且 $G/N\cong G'/N'$.此即群的第一同构定理.

第二同构定理(second isomorphism theorem) 群论的基本定理之一.应用第一同构定理得到的一个用途更广的同构定理.若 H 是群 G 的正规子群,K 是 G 的子群,则 $HK=\{hk\mid h\in H,k\in K\}$ 是群 G 的含 H 的子群,$H\cap K$ 是 K 的正规子群,且在映射 $Hk\rightarrow(H\cap K)k(k\in K)$ 下,

$$HK/H\cong K/H\cap K.$$

此即群的第二同构定理.

第三同构定理(third isomorphism theorem) 群论的基本定理之一.若 M,N 是群 G 的正规子群,$N\leqslant M$,则 $M/N\lhd G/N$,且 $(G/N)/(M/N)\cong G/M$.此即群的第三同构定理.

自同构群(group of automorphism) 一种特殊的群.指群自身的映射所构成的群.群 G 的所有自同构在映射的合成运算下构成的一个群,称为群 G 的自同构群,常记为 $\mathrm{Aut}(G)$.

内自同构(inner automorphism) 一类特殊的自同构.若 g 是群 G 中一个元,则映射

$$\sigma_g: G\rightarrow G,\ x\rightarrow g^{-1}xg=x^g\quad(\forall\ x\in G)$$

给出群 G 的一个自同构,称这样的自同构为群 G 的内自同构.群 G 的所有内自同构在映射的合成运算下构成一个群,称为 G 的内自同构群,常记为 $\mathrm{Inn}(G)$.若 G 为交换群,则 $\mathrm{Inn}(G)=\{1\}$.群 G 的内自同构群是它的自同构群的正规子群.群 G 的内自同构群同构于商群 $G/\mathrm{Z}(G)$,其中 $\mathrm{Z}(G)$ 为 G 的中心,即 $\mathrm{Inn}(G)\cong G/\mathrm{Z}(G)$.群 G 的不是内自构的自同构称为外自同构.商群 $\mathrm{Out}(G)=\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ 称为 G 的外自同构群.外自同构群的元素一般不是自同构.

内自同构群(group of inner automorphism) 见"内自同构".

外自同构(outer automorphism) 见"内自同构".

外自同构群(group of outer automorphism) 见"内自同构".

特征子群(characteristic subgroup) 一类特殊的正规子群.指在群的自同构作用下不变的子群.设 H 是群 G 的一个子群,若 H 在群 G 的任意一个自同构作用下不变,即对任意的 $\sigma\in\mathrm{Aut}(G)$,$\sigma(H)\leqslant H$,则称 H 是 G 的特征子群,常记为 H char G;又若 H 在 G 的任一自同态下的像仍属于 H,则称 H 为 G 的全不变子群.全不变子群是特征子群,特征子群是正规子群;但反之不一定对.例如,群 G 的中心是 G 的特征子群,但通常不是 G 的全不变子群.

全不变子群(fully invariant subgroup) 见"特征子群".

反同态(anti-homomorphism) 一类特殊映射.使运算反序的映射.设 G 与 G' 是两个群,f 是 G 到 G' 的映射,若对任意的 $a,b\in G$,$f(b)f(a)=f(ab)$,则称 f 是群 G 到群 G' 的一个反同态.若映射 f 还是一一映射,则称 f 为 G 到 G' 的反同构.特别地,当 $G'=G$ 时,上述的反同态称为反自同态,反同构称为反自同构.

反同构(anti-isomorphism) 见"反同态".

反自同态(anti-endomorphism) 见"反同态".

反自同构(anti-automorphism) 见"反同态".

完全群(complete group) 一类特殊的群.指无中心、无外自同构的群.设 G 是一个群,若 $\mathrm{Z}(G)=\{1\}$,且 G 的任一自同构都是内自同构,即 $\mathrm{Aut}(G)=\mathrm{Inn}(G)$,则称 G 为完全群.对称群 S_n 当 $n\neq 2,6$ 时都是完全群.

完满群(perfect group) 一类特殊的群.即与导群相等的群.设 G 是一个群,若 G 等于它的导群,则称 G 为完满群.此时 G 没有非平凡的交换商群.

凯莱定理(Cayley theorem) 联系抽象群与置换群的一个重要的定理.若 G 是一个群,则存在集 X,使得 G 同构于 X 上的一个置换群.此即凯莱定理.凯莱定理把对抽象群的研究归结为对置换群的研究.当 G 是 n 阶有限群时,由凯莱定理知不同构的 n 阶群只能有有限多个.如何估计其个数?这是有限群研究中历史悠久的一个问题.

字(word) 若干符号的一个排列.它是构造自由群的基本元素.给定集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$,它的势 r 不一定有限或可数.若 $X^{-1}=\{x_1^{-1},x_2^{-1},\cdots,x_r^{-1}\}$,并设 $X\cap X^{-1}=\varnothing$,$S=X\cup X^{-1}$,则称有限序列 $w=a_1a_2\cdots a_n$ 为 X 上的字,其中每个 $a_i\in S$.并规定空集也为字,称为空字.称两个字 w_1 和 w_2(以及 w_2 和 w_1)是邻接的,意指它们的形状为:$w_1=uv$,而 $w_2=ux_ix_i^{-1}v$ 或 $w_2=ux_i^{-1}x_iv$,其中 u,v 是 X 上的字,而 $x_i\in X$.对两个字 w_1,w_2,若可以找到有限多个字 $w_1=f_1,f_2,\cdots,f_{n-1},f_n=w_2$,使得 f_i 和 f_{i+1} 是邻接的,$i=1,2,\cdots,n-1$,则称字 w_1 和 w_2 等价.这是一个等价关系.以 $[w]$ 记字 w 所在的等价类,并规定等价类的乘法为 $[w_1][w_2]=[w_1w_2]$.于是所有等价类组成的集合 F 对此乘法成为一个群,称为 X 上的自由群.集合 X 称为自由群 F 的自由生成系,它

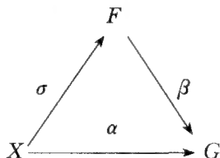
的势称为自由群 F 的秩. 秩为 r 的自由群记为 F_r.

空字(empty word) 见"字".

自由群的秩(rank of a free group) 见"字".

等价的字(equivalent words) 见"字".

自由群(free group) 在一定意义下能概括所有群的一种群. 自由群的另一种等价的定义如下:设 F 是群,X 是非空集合,$\sigma:X\to F$ 是一个函数. 若对 X 到任意群 G 的每一函数 α,都对应着惟一的同态 $\beta:F\to G$,使得 $\alpha=\beta\sigma$,即右下的关于集合和函数的图形是交换的,则称 F 是 X 上的自由群,更确切地,称 (F,σ) 是 X 上的自由群. 若 F_1 在 X_1 上自由,F_2 在 X_2 上自由,且 X_1 和 X_2 的势相等,则 $F_1\cong F_2$. 所以,X 上的自由群 F 的秩定义为 X 的势. 自由群的重要性在于:每一个群都同构于某一个自由群的商群,因此从同构意义上说,自由群的商群概括了所有的群. 但是,自由群的子群却有很强的条件限制,事实上,自由群的任何子群都是自由的. 这一重要事实及其证明方法常被用来研究自由群子群的其他性质.



定义关系(defining relation) 群的生成元之间的一组重要关系,其他关系皆可由它导出. 若 G 为群,$G=\langle a_1,a_2,\cdots,a_r\rangle$,做自由群 $F_r=\langle x_1,x_2,\cdots,x_r\rangle$,则 G 为 F_r 的同态像,即 $G\cong F_r/K$,其中同态核 K 是 F_r 的正规子群. 设字

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_r)=x_{i_1}^{\varepsilon_1}x_{i_2}^{\varepsilon_2}\cdots x_{i_s}^{\varepsilon_s},$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_s\in\{1,2,\cdots,r\}$,$\varepsilon_j=\pm1$ $(j=1,2,\cdots,s)$是 K 中任意元. 于是在 G 中有等式

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_r)=a_{i_1}^{\varepsilon_1}a_{i_2}^{\varepsilon_2}\cdots a_{i_s}^{\varepsilon_s}=1$$

与之对应,这个等式称为 G 的一个关系. 若 V 是 K 中某些元所成的集合,它使得 K 是 F_r 的包含 V 的最小的正规子群,则集 V 中元在 G 中所对应的关系所组成的集合称为 G 的生成元集的一个定义关系. 给定了一个群的生成元系及定义关系,这个群就被惟一地确定了. 例如,二面体群

$$D_{2n}=\langle x,y\mid x^n=y^2=1,y^{-1}xy=x^{-1}\rangle.$$

一般地,若 G 的生成元系为 X,定义关系的集合为 V,则可用记号 $G=\langle X\mid V\rangle$ 或 $G=\langle X;V\rangle$. 这个记法称为群的呈示.

克莱因四元群(Klein 4-group) 一个特殊的群. 指两个二阶元生成的一种交换群. 若

$$K=\langle x,y\mid x^2=y^2=1,xy=yx\rangle,$$

则 K 是一个四阶的交换群,称为克莱因四元群.

哈密顿群(Hamilton group) 一类非交换群. 若 H 不是阿贝尔群,H 的每个子群都是正规子群,则称 H 为哈密顿群. 哈密顿群是四元数群、每个元素的阶都是奇数的阿贝尔群以及方次数为 2 的阿贝尔群这三个群的直积. 其中四元数群

$$Q_8=\langle x,y\mid x^4=1,y^2=x^2,xy=yx^{-1}\rangle.$$

一般地,若一个群 G 的任何子群都是正规子群,称 G 为戴德金群.

四元数群(quaternion group) 见"哈密顿群".

戴德金群(Dedekind group) 见"哈密顿群".

广义四元数群(generalized quaternion group) 一类重要的有限 2 群. 即由下面等式所定义的群

$$Q_{2^n}=\langle x,y\mid x^{2^{n-1}}=1,y^2=x^{2^{n-2}},xy=yx^{-1}\rangle\ (n\geqslant3),$$

称为广义四元数群.

正则轨道(regular orbit) 群对向量空间的一种特殊作用. V 是域 F 上的向量空间,群 G 作用在 V 上,对 $x\in V$,设 $x^G=\{x^g\mid g\in G\}$及$C_G(x)=\{g\in G\mid x^g=x\}$. 若 $C_G(x)=1$,则称 x^G 是 G 在 V 上的正则轨道. 正则轨道的存在性是有限群论中的一个重要问题.

稳定子群(stabilizer) 亦称稳定化子. 一种特殊的子群. 设群 G 作用在集合 X 上,$x\in X$,G 中作用在 x 上使 x 不变的元素的全体,即$\{g\in G\mid x^g=x\}$,它是 G 的一个子群,称为 x 的稳定子群,记为 $\mathrm{S}_G(x)$,或 $\mathrm{St}_G(x)$.

稳定化子(stabilizer) 即"稳定子群".

算子群(operator group) 亦称带算群或称 Ω 群. 比群更广且有重要运用价值的群类. 群 G 到 G 的一个映射 $\alpha:g\leftrightarrow g^\alpha$ 称为 G 的一个算子,若对于任意的 $x,y\in G$,均有 $(xy)^\alpha=x^\alpha y^\alpha$. G 的一个算子就是 G 的一个自同态. G 的某些算子做成的集合,称为 G 的一个算子集. 算子集常用 Ω 记. 带有算子集的群称为带算群,或算子群,或 Ω 群. 设 H 是群 G 的子群,Ω 是 G 的一个算子集,若对任意的 $\alpha\in\Omega,h\in H$,均有 $h^\alpha\in H$,则称 H 是 G 的 Ω 容许子群(Ω 不变子群). 当 Ω 是 G 的全体内自同构所成之集时,G 的 Ω 容许子群就是 G 的正规子群;当 Ω 是 G 的全体自同构所成之集时,G 的 Ω 容许子群就是 G 的特征子群. 算子群的理论与一般群的理论是平行的,群的一般理论都可以推广到算子群上去,且取定适当的算子集,有时还可以提高对群本身的研究效果. 而一般的群可以看成算子集为空集的群.

带算群(operator group) 即"算子群".

Ω 群(Ω-group) 即"算子群".

算子集(operator set) 见"算子群".

容许子群(admissible subgroup) 见"算子群".

算子同态(operator homomorphism) 一般群的同态、同构在算子群上的推广. 设 G_1,G_2 为两个算子群,Ω_i 分别为 G_i 的算子集 $(i=1,2)$. 若 G_1 与 G_2

同态，Ω_1 与 Ω_2 之间存在一一映射 $\alpha_1 \rightleftharpoons \alpha_2 (\alpha_i \in \Omega_i, i=1,2)$，使得在 G_1 与 G_2 的同态下，即当 $g_i \in G_i\ (i=1,2)$，$g_1 \to g_2$ 时恒有 $g_1^{\alpha_1} \to g_2^{\alpha_2}$，则称 G_1 与 G_2 关于 Ω_1，Ω_2 是算子同态的. 当上述 G_1 与 G_2 间的同态为同构映射时，称 G_1 与 G_2 为算子同构，记为

$$G_1 \overset{\Omega}{\cong} G_2.$$

算子同态（同构）又称为 Ω 同态（同构），或容许同态（同构）.

算子同构（operator isomorphism） 见"算子同态".

Ω 同态（Ω-homomorphism） 见"算子同态".

容许同态（admissible homomorphism） 见"算子同态".

Ω 同构（Ω-isomorphism） 见"算子同态".

容许同构（admissible isomorphism） 见"算子同态".

查森浩斯引理（Zassenhaus lemma） 群论中运用较广的重要引理. 若 G 是 Ω 群，U_1,U_2,V_1,V_2 均为 G 的 Ω 子群，且 $U_2 \lhd U_1, V_2 \lhd V_1$，则

1. $U_2(U_1 \cap V_2) \lhd U_2(U_1 \cap V_1)$，
   $V_2(V_1 \cap U_2) \lhd V_2(V_1 \cap U_1)$.
2. 对应的商群为 Ω 同构，即
   $$U_2(U_1 \cap V_1)/U_2(U_1 \cap V_2) \overset{\Omega}{\cong} V_2(V_1 \cap U_1)/V_2(V_1 \cap U_2).$$

此即查森浩斯引理.

左（右）正则表示（left (right) regular representation） 在同构意义下，把一般群表示为置换群的一种方法. 设 G 是群，$g \in G$，置换 $L(g): x \to gx$，对任意的 $x \in G$，称为 G 的左正则表示. 类似地，置换 $R(g): x \to xg$，对任意的 $x \in G$，称为 G 的右正则表示. 上述两个映射的像 $g \to L(g)$ 和 $g \to R(g)$ 都是 G 上的对称群 S_G 的子群，且 $R(G) \cong G$，$L(G)$ 与 G 反同构. 进而，群 G 的左（右）正则表示是右（左）正则表示在群 S_G 中的中心化子.

全形（holomorph） 与群的左、右正则表示有关的一种置换群. 设 G 是一个群，S_G 为 G 上的对称群，$R(G)$ 为 G 的右正则表示，则称 $R(G)$ 在 S_G 内的正规化子为群 G 的全形，记为 Hol G，即 Hol $G = \mathrm{N}_{S_G}(R(G))$. 群 G 的全形也可用 G 的左正则表示与 G 的自同构群的半直积表出，即 Hol $G = (\mathrm{Aut}G) \ltimes L(G)$. 若 G 是完全群，则 Hol $G = R(G) \times L(G)$.

子群积（product of subgroups） 群的子群（子集）的一种运算. 设 U,V 是群 G 的两个子群（子集），$UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$，它由元素 $u \in U$ 和 $v \in V$ 的乘积组成，称其为 U 和 V 的子群（子集）积. 注意，两个子群的乘积不一定是 G 的子群，子群 U,V 的乘积是 G 的子群的充分必要条件是 $UV = VU$.

子集积（product of subsets） 见"子群积".

群的直积（direct product of groups） 群分解的重要概念，也是构造新群的一种方法. 设 A,B 为群，若 $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$，规定 $A \times B$ 的元素相等及乘法如下：$(a_1,b_1) = (a_2,b_2)$ 当且仅当 $a_1 = a_2, b_1 = b_2$；

$$(a_1,b_1)(a_2,b_2) = (a_1a_2, b_1b_2).$$

则 $A \times B$ 成群. $A \times B$ 的单位元是 $(1,1)$，(a,b) 的逆元 $(a,b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$. 群 $A \times B$ 称为群 A 与群 B 的（外）直积. 同样地，可以定义 n 个群 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的（外）直积 $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$. 设 G 是群，A,B 是 G 的子群，若 $G = AB$，并且映射 $(a,b) \to ab$ 是 $A \times B$ 到 G 的同构映射，则称 G 是子群 A,B 的（内）直积，也记为 $G = A \times B$. 同样地，可以定义 G 是 n 个子群的（内）直积. 若一个群可分解成若干个子群的（内）直积，则称这个分解为群的直积分解，其中每个子群称为这个直积的直因子. 当群为加法群，直积通常称为直和，常记为 $A \oplus B$. 若一个群不能表示为两个非平凡的子群的直积（直和），则此群称为不可分解群. 若群 G 可表为若干个单群的直积（和），则称 G 为完全可约群.

群的外直积（outer direct product of groups） 见"群的直积".

群的内直积（inner direct product of groups） 见"群的直积".

群的直和（direct sum of groups） 见"群的直积".

群的直因子（direct factor of groups） 见"群的直积".

不可分解群（indecomposable group） 见"群的直积".

完全可约群（completely reducible group） 见"群的直积".

不变量（invariant） 亦称不变型. 在同构意义下，决定有限阿贝尔群的一组数. 若阿贝尔群 A 可分解成素数幂阶循环群 $A_i = \langle a_i \rangle \neq 1\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的直和，则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 称为 A 的一个基或基底. 有限阿贝尔 p 群 A 可以分解成循环群的直和，这些循环群的阶所成的数组 $(p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, \cdots, p^{\alpha_s})$（不妨设 $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_s$）由 A 惟一决定，称为 A 的不变量或型. 具有相同不变量的有限阿贝尔群是同构的. 不变量为 $(p,p,\cdots,p)$ 的阿贝尔群，称为初等阿贝尔群.

不变型（invariant） 即"不变量".

阿贝尔群的基（base of an Abelian group） 见"不变量".

初等阿贝尔群（elementary Abelian group） 见"不变量".

克鲁尔-施密特定理（Krull-Schmidt's theo-

rem） 群分解理论中的一个基本定理. 若 G 是有限 Ω 群，则 G 可分解为有限个不可分解的 Ω 子群的直积 $G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_r$. 又，若 $G=H_1\times H_2\times\cdots\times H_s$ 也是 G 的不可分解 Ω 子群的直积分解式，则 $r=s$，且对诸 H_i 适当编序后有 Ω 同构：

$$G_i\overset{\Omega}{\cong}H_i\quad(i=1,2,\cdots,r).$$

半直积(semidirect product） 亦称正规积. 一类特殊的子群积. 设 σ 是群 H 到群 K 的自同构群的一个同态，$h\in H$，于是 $\sigma(h)$ 是 K 的一个自同构，$\sigma(h):k\rightarrow k^h$，对任意 $k\in K$. 因为 σ 是同态，所以 $(k^{h_1})^{h_2}=k^{h_1h_2}$. 若 $G=\{(h,k)\mid h\in H,k\in K\}$，并规定 G 的乘法为 $(h_1,k_1)(h_2,k_2)=(h_1h_2,k_1^{h_2}k_2)$，则 G 在规定的乘法下成群，称为 K 依 H 的半直积，或正规积，记为 $H\ltimes K$. 设 G 是群，H,K 是 G 的子群，若 $K\lhd G=HK$，$H\cap K=\{1\}$，则称 G 是 K 依 H 的(内)半直积. 此时，映射 $(h,k)\rightarrow hk$ 是 $H\ltimes K$ 到 G 的同构映射.

正规积(normal product） 即“半直积”.

内半直积(inner semidirect product） 见“半直积”.

中心积(central product） 直积的一种推广. 设 H 和 K 是群 G 的子群，若 H 和 K 的元素可换，且 $G=HK$，则称 G 为 H,K 的中心积. 当 $H\cap K=\{1\}$ 时，中心积即为直积.

群的Ω列(Ω-series of a group） 群的一种重要结构. 设 G 是带算子集 Ω 的算子群，首先考虑有限长的 Ω 序列，G 的如下的子群列：

$$1=G_r\lhd G_{r-1}\lhd\cdots\lhd G_2\lhd G_1\lhd G_0=G$$

称为 G 的一个次正规 Ω 列，r 称为群列的长. 一个子群，若它是某个有限长 Ω 列中的一项，就称为次正规 Ω 子群. 其次考虑一般序型的列，它是有限长序列概念的推广，是研究群的正规结构及定义广义可解群和广义幂零群的重要手段. 群 G 的具有一般序型的列是指按包含关系成线性序的子群集合 S，且满足：

1. 若 $1\neq x\in G$，则 S 中不包含 x 的子群的联 V_x 在 S 中.

2. 若 $1\neq x\in G$，则 S 中包含 x 的子群的交 Λ_x 在 S 中.

3. $V_x\lhd\Lambda_x$.

4. S 的每一子群都型如 V_x 或 Λ_x，其中 x 是 G 的某一非平凡元素.

V_x 和 Λ_x 称为 S 的项，Λ_x/V_x 称为 S 的因子. S 的因子集合按下列规定可以成为线性序：$\Lambda_x/V_x\ll\Lambda_y/V_y$ 当且仅当 $\Lambda_x\leqslant V_y$. S 的序型 Σ 定义为在此偏序下因子集合的序型. 当这序型为有限时，这恰是有限长的列. 这时最小的 Λ_x 为 1，最大的 V_x 是 G. 设 G 是 Ω 算子群，只要要求所有 S 的项是 Ω 子群，就可以得到 G 的 Ω 列的概念. 若 $\Omega=\mathrm{Inn}(G)$，则 Ω 列称为正规列；若列的所有项为次正规的，则列称为次正规列. 若列 S 的序型或其逆序型为一序数，则 S 为升列或降列. 若 $\Sigma=\{\beta\mid\beta<\alpha\}$，则序型为 Σ 的列成一升列，

$$1=V_0\lhd V_1\lhd\cdots\lhd V_\sigma\lhd V_{\sigma+1}\lhd\cdots\lhd V_\alpha=G,$$

其中当 λ 为极限序数时 $V_\lambda=\bigcup_{\beta<\lambda}V_\beta$. 若序型 Σ 的逆序型 $\Sigma'=\{\beta,\beta<\alpha\}$，则序型为 Σ 的列成一降列，

$$1=\Lambda_\alpha\lhd\cdots\lhd\Lambda_{\sigma+1}\lhd\Lambda_\sigma\lhd\cdots\lhd\Lambda_1\lhd\Lambda_0=G,$$

其中当 λ 为极限序数时 $\Lambda_\lambda=\bigcap_{\beta<\lambda}\Lambda_\beta$.

群列的长(length of group series） 见“群的 Ω 列”.

正规Ω列(normal Ω-series） 见“群的 Ω 列”.

正规列(normal series） 见“群的 Ω 列”.

次正规列(subnormal series） 见“群的 Ω 列”.

序列子群(serial subgroup of a group） 利用群列的概念定义的一类子群. 若群 G 的子群 H 为出现在群的一个列中的子群，则称 H 为 G 的序列的序列子群. 特别地，若子群 H 分别为出现在群的一个升列或降列中的子群，则分别称 H 为 G 的升序或降序子群.

升序子群(ascendant subgroup of a group） 见“序列子群”.

降序子群(descendant subgroup of a group） 见“序列子群”.

合成列(composition series） 一种特殊类型的子群列. 设 S 和 S^* 是群 G 的 Ω 列. 若 S 的每一项是 S^* 的项，则称 S^* 是 S 的一个加细. G 的一个 Ω 合成列是指 G 的没有真加细的无重复的 Ω 列. 若取 Ω 为空集，则合成列恰为绝对单的列，即其因子没有非平凡的序列真子群. G 的 $\mathrm{Inn}(G)$ 合成列称为 G 的主列. 主列中的因子称为主因子. 主因子同构于单群的直积. 利用佐恩引理，每一 Ω 列均可以加细成为 Ω 合成列，所以在 Ω 群内总存在 Ω 合成列. 合成列中的因子称为合成因子，合成因子是 Ω 单群. 在有限长的 Ω 列的情形，施赖埃尔(Schreier,O.)证明了如下的加细定理：Ω 群 G 的两个次正规 Ω 群列都可加细成为两个等价的群列：即它们的长度相等，且对应的商群为 Ω 同构.

主列(principal series） 见“合成列”.

主因子(pricipal factor） 见“合成列”.

合成因子(composition factor） 见“合成列.

若尔当-霍尔德定理(Jordan-Hölder theorem） 群结构的一个著名定理. Ω 群 G 的任何两个有限长的合成 Ω 群列必为等价群列. 此结论称为若尔当-霍尔德定理. 对一般序型的合成列没有类似于若尔当-

霍尔德定理的结果.

换位子(commutator) 群的一类特殊元.它可以表为$x^{-1}y^{-1}xy$,其中x,y是G的两个元.设x,y是群G的两个元,形如$x^{-1}y^{-1}xy$的元称为元素x和y的换位子,记为$[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$.由G的一切换位子所生成的子群称为换位子群,或导群,记为G',即$G'=\langle[x,y]|x,y\in G\rangle$.$G$的换位子群$G'$是$G$的全不变子群.$G$为阿贝尔群的充分必要条件是$G'=1$,因此,可用换位子群$G'$的大小来表达一个群与交换群的差距.一般地,若$A,B$是$G$的非空子集,则称$[A,B]=\langle[a,b]|a\in A,b\in B\rangle$为$A,B$的换位子群.于是$G'=[G,G]$.一般地,设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为群$G$的子集,可记

$$[X_1,X_2,\cdots,X_n]=[[X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}],X_n],$$

其中$n\geqslant 2$,$[X_1]=\langle X_1\rangle$.

换位子群(commutator subgroup) 见"换位子".

导群(derived group) 见"换位子".

导出列(derived series) 一类重要的正规列.设$G=G^{(0)}$为群,$G^{(1)}=G'=[G,G]$为G的导群,定义

$$G^{(n+1)}=[G^{(n)},G^{(n)}]\ (n=1,2,\cdots)$$

$G^{(n+1)}$为$G^{(n)}$的导群,群列$G=G^{(0)}\geqslant G^{(1)}\geqslant G^{(2)}\geqslant\cdots$称为$G$的导出列.若群$G$的导出列有限步后终止于$\{1\}$,即$G$有导出列$G=G^{(0)}>G^{(1)}>\cdots>G^{(n)}=\{1\}$,则称这个导出列的长度$n$为群$G$的导出长.此时$G$为可解群.

导出长(derived length) 见"导出列".

亚阿贝尔群(metAbelian group) 一种可解群.指导出列长度至多为2的群.设G是群,若G有导出列$G\geqslant G^{(1)}\geqslant G^{(2)}=1$,则称$G$为亚阿贝尔群.设$G$是群,若$G$有循环的正规子群$N$,使得$G/N$为循环群,则称$G$为亚循环群.亚循环群是特殊的超可解群.

亚循环群(metacyclic group) 见"亚阿贝尔群".

三子群引理(three subgroups lemma) 关于换位子群的一个引理.设A,B,C是群G的三个子群,$N\leqslant G$.若$[B,C,A]\leqslant N$,$[C,A,B]\leqslant N$,则$[A,B,C]\leqslant N$.此即三子群引理,它首先由霍尔(Hall,P.)给出.

转移(transfer) 一种特殊的同态.它是研究群的构造的一种有力工具.设H是群G的子群,$|G:H|=n$,G的陪集分解为

$$G=Hx_1+Hx_2+\cdots+Hx_n.$$

于是可定义G上的函数$\varphi(g)=x_i$,其中$g\in Hx_i$.又设K是H的正规子群且H/K为可换,定义G到H/K内的映射V如下

$$V(g)=\prod_{i=1}^{n}x_ig\varphi(x_ig)^{-1}K,$$

称此映射为G到H/K内的转移.V是G到H/K内的同态映射.

群的扩张(extension of group) 研究群构造的一种工具(方法).若N是群G的正规子群,记$F=G/N$,则称群G为群N借助于群F的扩张.群的扩张理论是群论的一个重要内容.

群扩张的因子集(factor set of a group extension) 群扩张理论中的基本概念.设群G是N借助于F的一个扩张,σ为F到G/N上的一个同构映射.对$x\in F$,$\bar{z}$是$\sigma(x)$作为N的左陪集中的任一指定代表元,规定$\bar{1}$为G的单位元1.于是$G=N+\bar{x}N+\bar{y}N+\cdots+\bar{z}N$,$x,y,\cdots,z\in F$.因为$\bar{x}\cdot\bar{y}\in\sigma(xy)=\overline{xy}N$,所以$\bar{x}\cdot\bar{y}=\overline{xy}f(x,y)$,其中$f(x,y)\in N$.这就确定一个二元映射$f:F\times F\rightarrow N$.这个二元映射的像集称为因子集.又,$N\lhd G$,对任意的$x\in F$,映射$\alpha(x):a\rightarrow\bar{x}^{-1}a\bar{x}$,$a\in N$是$N$的自同构.这又确定了一个单值映射$\alpha:F\rightarrow\mathrm{Aut}(N)$.这两个映射$f$和$\alpha$称为由扩张$G$及陪集代表系$\{1,\bar{x},\bar{y},\cdots,\bar{z}\}$得到的扩张映射,它们满足下列关系:对任意的$x,y,z\in F$,有

$$\begin{cases}f(xy,z)f(x,y)^{\alpha(z)}=f(x,yz)f(y,z),\\ f(1,1)=1,\\ \alpha(x)\alpha(y)=\alpha(xy)f(x,y).\end{cases}$$

反之,设给定满足上式的映射$f:F\times F\rightarrow N$及$\alpha:F\rightarrow\mathrm{Aut}(N)$.考虑下列符号所组成的集合$G=\{\bar{x}a|x\in F,a\in N\}$并规定相应的乘法,使$G$对此乘法成群.且可将$N$看成$G$的正规子群,$G/N\cong F$.这样得到的群$G$称为由$N,F$以及映射$f,\alpha$所得的扩张,记为$G=\mathrm{Ext}(N,F;f,\alpha)$.$N$借助于$F$的两个扩张:$G=\mathrm{Ext}(N,F;f,\alpha)$和$G_1=\mathrm{Ext}(N,F;f_1,\alpha_1)$称为等价的,是指存在函数$\varphi:F\rightarrow N$使得$\varphi(1)=1$,且$f,\alpha$;$f_1,\alpha_1$满足:

$$\begin{cases}f_1(x,y)=\varphi(xy)^{-1}f(x,y)\varphi(x)^{\alpha(y)}\varphi(y),\\ \alpha_1(x)=\alpha(x)\varphi(x).\end{cases}$$

此时也称这样的两对扩张映射f,α和f_1,α_1为等价的扩张映射.

等价扩张(equivalent extension) 见"群扩张的因子集".

可裂扩张(split extension) 群的一种特殊扩张.实际上是一个半直积.设N,F为两个群,N借助于F的一个扩张G称为可裂扩张,是指存在G的子群K使得$NK=G$,$N\cap K=\{1\}$.满足上述条件的子群K称为N在G中的补(子)群.实际上,一个可裂扩张G就是一个N借助于K的半直积.由同构定理,补群K同构于F.一个扩张是否为可裂扩张,

有如下判别定理：若 $N \lhd G$，且 $(|N|, |G:N|)=1$，则 N 在 G 内有补群，即 N 借助于 G 的扩张为可裂扩张.

补子群(complementary subgroup)　见“可裂扩张”.

群的中心扩张(central extension of group)　群扩张的类型之一. 在群 N 借助于群 F 的扩张中，若所有的因子 $f(x,y)$ 均属于 N 的中心 $Z(N)$，则称扩张 $\mathrm{Ext}(N,F;f,\alpha)$ 是 N 借助于 F 的中心扩张，其中 α 为一个同态映射.

有限群的圈积(wreath product of finite groups)　亦称有限群的织积. 用一种特殊扩张来构造新的群的方法. 设 G 是群，H 是有限集合 Ω 上的置换群，

$$\Omega=\{1,2,\cdots,n\},\ N=\underbrace{G\times G\times\cdots\times G}_{n\text{个}}.$$

对任意的 $h\in H$，规定映射

$$\alpha(h):(g_1,g_2,\cdots,g_n)^{\alpha(h)}=(g_1^{h^{-1}},g_2^{h^{-1}},\cdots,g_n^{h^{-1}}),$$

其中 $g_i\in G\ (i=1,2,\cdots,n)$. 则 $\alpha(h)$ 为 N 的一个自同构. 做 N 和 H 关于 α 的半直积 $N\ltimes H$，称 $N\ltimes H$ 为 G 和 H 的圈积，记为 $G\wr H$.

有限群的织积(wreath product of finite group)　即“有限群的圈积”.

有限群论(finite group theory)　群论的一个重要分支. 它是由解代数方程的需要，也就是由伽罗瓦理论的需要而产生的. 最先产生的是置换群的概念. 抽象群论的很多基本思想，至少可以追溯到1800年，隐含在高斯(Gauss，C. F.)、阿贝尔(Abel，N. H.)、伽罗瓦(Galois，E.)、柯西(Cauchy，A.-L.)等人的著作中. 而作为抽象群概念的形成并加以研讨是从弗罗贝尼乌斯(Frobenius，F. G.)等人开始的. 正是这种发展，才使得群的一般理论得以建立在公理基础上而变得严谨、清晰，并有利于它的发展.

在群论的众多分支中，有限群论无论从理论本身还是从实际应用来说都占据着突出的地位. 它在数学本身以及理论物理、量子力学、量子化学、结晶学等方面都有广泛的应用. 因此，它是近几十年来研究得最多、最活跃的一个分支. 特别是最近30多年，经过很多数学家的努力，已经使有限群论这个分支获得了一个全新的面貌. 这期间有很多重大的发展. 例如，费特(Feit，W.)和汤普森(Thompson，J. G.)于1962年证明了奇数阶群的可解性，杨科(Janko，Z.)于1965年找到了除马蒂厄群外的第一散在单群，以及随后出现的在单群分类问题上的飞速发展，并终于在1981年前后基本上解决了著名的有限单群分类问题. 分类定理证明完成以后，对有限群的有关问题带来了深远的影响，一些长时间没有得到解决的猜想，随着分类定理证明的完成而解决. 然而，有限群理论并不以分类问题的解决而终止. 分类定理的简化，单群的构造，可解群理论以及扩张问题等都存在一些深刻而没有解决的问题，这些问题的解决将促使有限群论的进一步发展. 目前，有限群论仍然是现代数学中一个比较活跃的分支.

西洛定理(Sylow theorem)　有限群论中的一个重要定理. 若 G 是有限群，$|G|=p^n m$，p 为素数，$(p,m)=1$，则称 G 中阶恰为 p^n 的子群为 G 的西洛 p 子群. 记 $\mathrm{Syl}_p(G)$ 为 G 的西洛 p 子群之集. 若 G 为有限群，p 为整除 $|G|$ 的一个素数，则：

1. $\mathrm{Syl}_p(G)$ 非空，G 的任意一个 p 子群包含在 G 的某一个西洛 p 子群中.

2. 任意两个西洛 p 子群在 G 中共轭.

3. $|\mathrm{Syl}_p(G)|=|G:N_G(P)|\equiv 1 \pmod p$，$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$.

西洛定理是西洛(Sylow，L.)于1872年首先给出证明的.

西洛 p 子群(Sylow p-subgroup)　见“西洛定理”.

霍尔 π 子群(Hall π-subgroup)　西洛 p 子群的一种推广. 设 π 为素数集. 正整数 n 的 π 部分是

$$n_\pi=\prod_{p\in\pi}p^{e_p},$$

其中 $\prod_p p^{e_p}=n$ 是 n 的素数分解式. 给定有限群 G，用 $\pi(G)$ 记 $|G|$ 的素因子集. G 的一个霍尔 π 子群是指阶为 $|G|_\pi$ 的子群. H 是 G 的霍尔 π 子群当且仅当 H 是 G 的一个 π 子群(即 $\pi(H)\subseteq\pi$)，且 $|G:H|_\pi=1$. 在不强调霍尔子群的阶所含的素因子时，常称为霍尔子群. 其名称为纪念霍尔(Hall，P.)而得.

霍尔子群(Hall subgroup)　见“霍尔 π 子群”.

p 幂零群(p-nilpotent group)　霍尔 p' 子群为正规的有限群. 设 G 是有限群，P 为 G 的一个西洛 p 子群. 若 G 有正规子群 N，满足 $N\cap P=1$，$NP=G$，则称 G 为 p 幂零群，而称 N 为 G 的正规 p 补. 正规子群 N 是 G 的正规 p 补的充分必要条件为 $|N|=|G|/|P|$，其中 P 为 G 的一个西洛 p 子群. G 的正规 p 补是 G 的特征子群.

正规 p 补(normal p-complement)　见“p 幂零群”.

伯恩赛德正规 p 补定理(Burnside's normal p-complement theorem)　有限群论的一个重要判定定理. 设 G 是有限群，P 为 G 的一个西洛 p 子群. 若 P 在 G 中的正规化子就等于 P 在 G 的中心化子，即 $N_G(P)=C_G(P)$，则 G 有正规 p 补. 这个定理称为伯恩赛德正规 p 补定理.

弗拉梯尼推理(Frattini argument)　有限群分解为子群积的一个重要结果. 它是由弗拉梯尼(Frattini)首先得到的. 若 H 是群 G 的有限正规子

群，$P\in \mathrm{Syl}_p(H)$，则 $G=HN_G(P)$. 上述结论称为弗拉梯尼推理.

有限单群(finite simple group) 一类阶有限的单群. 指不含非平凡正规子群，本身异于单位元群的有限群. 通过有限群的合成列，研究有限群的问题将导致为对有限单群的研究，因此，有限单群在有限群论中占有突出的地位. 从 1832 年伽罗瓦(Galois, E.)证明交错群 A_5 是单群算起，到 1981 年基本解决著名的有限单群分类问题，整整经历 150 年. 同期，参加这项工作的数学家前后共几百人. 为了证明单群分类定理，人们使用了抽象群论、表示论、几何以及组合论和图论的方法，在杂志上发表了数千页以至上万页的论文. 这些论文的总体就构成有限单群分类定理的证明.

有限单群分类定理可表述如下：每一个有限单群必同构于下列单群中的一个：

1. 素数阶群.
2. 交错群 A_n，$n\geqslant 5$.
3. 有限李型单群.
4. 26 个散在单群.

对于 26 个散在单群、一些无限系列以及阶较小的单群，现已有了它们群特征标表、子群结构、自同构群等.

拟单群(quasisimple group) 较单群更广的一类群. 设 G 是有限群，若 G 等于它的导出群，并且 $G/Z(G)$ 为单群，则称 G 为拟单群. 若 G 为拟单群，则常称 G 为 $G/Z(G)$ 的覆盖群. 有限群 G 的次正规拟单子群 H 称为 G 的分支或分量.

覆盖群(covering group) 见“拟单群”.

群的分支(component of group) 见“拟单群”.

半单群(semisimple group) 一类特殊的群. 没有异于 1 的交换正规子群的有限群. 设 G 是有限群，若 G 是拟单群的中心积或 $G=1$，则称 G 为半单群. 例如，有限非交换单群的直积为半单群. 有限群 G 具有一个惟一的极大正规半单子群，称为 G 的层，记为 $L(G)$.

群的层(layer of group) 见“半单群”.

群的基座(socle of group) 向量空间基座概念在群论中的引申. 有限群 G 的($\neq 1$)的所有极小正规子群的积称为 G 的基座，记为 $S(G)$. 若 $G=1$，则规定 $S(G)=1$. 由雷马克(Remak, R.)定理，$S(G)$是 G 的某些极小正规子群的直积.

局部子群(local subgroup) p 局部子群的统称. 若 X 是有限群 G 的非平凡 p 子群，则 X 在 G 中正规化子 $N_G(X)$称为 G 的 p 局部子群. 当 p 变动经过 $|G|$ 的诸素因子时，就把相应的各个 p 局部子群统一称为群 G 的局部子群. 有限群的局部理论就是从局部子群的角度来研究有限群，它是有限群论的一个十分重要的部分. 局部理论的第一个定理就是西洛定理.

p 局部子群(p-local subgroup) 见“局部子群”.

舒尔乘子(Schur multiplier) 一类特殊的映射，是群的二次同调群. 设 G 为有限群，A 为任一阿贝尔群，用符号 $C^2(G;A)$表示 $G\times G$ 到 A 中的所有映射之集，在 $C^2(G;A)$中定义加法如下：对任意的 $(x,y)\in G\times G$，$f,h\in C^2(G;A)$，规定 $(f+h)(x,y)=f(x,y)+h(x,y)$，在此加法下 $C^2(G;A)$成为一个交换群. 设 $B^2(G;A)$是由形为

$$f(x,y)=g(x)-g(xy)+g(y)$$

的 $f\in C^2(G;A)$所生成的子群，其中 g 为 G 到 A 的某一映射. 再设 $Z^2(G;A)$是对任意 $x,y,z\in G$ 满足：

$$f(y,z)+f(x,yz)=f(xy,z)+f(x,y)$$

的 $f\in C^2(G;A)$ 所生成的子群，从而，$B^2(G;A)\leqslant Z^2(G;A)$. 设 $H^2(G;A)=Z^2(G;A)/B^2(G;A)$，称 $H^2(G;A)$ 为系数在 A 中的 G 的二次同调群. 群 $H^2(G;K^*)$称为 G 的舒尔乘子，其中 K^* 是特征为零的代数闭域中非零元素所成的乘法群. 当 G 为单群时，舒尔(Schur, I.)证明了 G 具有一个“泛”覆盖群 $\hat{G}$，使得 G 的每一覆盖群是 $\hat{G}$ 的同态像. 而 $Z(\hat{G})$ 恰为 G 的舒尔乘子.

二次同调群(second cohomology group) 见“舒尔乘子”.

可解群(solvable group, soluble group) 一种重要的群类. 即可由交换群经有限步叠加而得的群. 若群 G 有一个有限长的正规群列 $G\geqslant G_1\geqslant G_2\geqslant\cdots\geqslant G_n=1$，使得每个商因子都是交换群，则称 G 是一个可解群，或称 G 是可解的. 可解群的概念源自伽罗瓦(Galois, E.)对解代数方程的研究，他发现由一个代数方程的所有解可产生一个置换群(也就是扩域的自同构群，称之为一个伽罗瓦群)，这个代数方程能用根式解出当且仅当该群具有正规列. 可解群的名称由此而来. 霍尔(Hall, P.)于 20 世纪 30—40 年代对有限可解群理论做了奠基性贡献. 费特-汤普森奇阶定理成为另一个里程碑. 近几十年，有限可解群研究仍属活跃领域. 例如群系等群类理论就始于有限可解研究并以可解群为重点. 对无限可解群的研究也有了长足的进步. 尽管有限可解群的研究方法与成果不能完全推到无限可解群，但带交换商因子的正规列这一定义条件使很多思想与工具，如模论、表示论等，均可发挥出色的作用.

群的 n 次方群(n-th power group of a group)群的一种特殊子群. 设 G 是群，n 是某一正整数，G^n 表示 G 的每一元素 n 次方后所得的集合. 由 G^n 所生成的子群$\langle G^n\rangle$称为群 G 的 n 次方群. 群的 n 次方群

有如下性质：

1. $\langle G^n\rangle$是 G 的正规子群.

2. $G/\langle G^n\rangle$的元素的阶均整除 n.

3. $\langle (G/\langle G^n\rangle)^n\rangle=\{\bar{e}\}$，$G/\langle G^2\rangle$为阿贝尔群，$G$ 的换位子群 $G'\subseteq\langle G^2\rangle$.

4. 若 H 是 G 的正规子群，则 G/H 中任一元素的阶均整除 $n\Leftrightarrow\langle G^n\rangle\subseteq H$.

5. 若 H 是 G 的正规子群，且 $H\subseteq\langle G^n\rangle$，则 $\langle (G/H)^n\rangle=\langle G^n\rangle/H$.

6. 若 G 是群，$|G|$表示群的阶，则 $G=G^n\Leftrightarrow(n,|G|)=1$.

7. 若 G 是群，则 G 中所有阶数与 n 互素的元素均含于 G^n 中，从而含于$\langle G^n\rangle$中.

8. 若 $m|n$，则$\langle G^n\rangle\subseteq\langle G^m\rangle$.

若 $G^n=\langle G^n\rangle$，则称 G 为 n 次方闭群. 下面列出 G 为 n 次方闭群的条件：

1. 群 G 为 n 次方闭群$\Leftrightarrow G^n$ 对 G 的乘法封闭，即对任意 $a,b\in G$，存在 $c\in G$，使 $a^nb^n=c^n$.

2. 任意阿贝尔群是 n 次方闭群.

3. 对于有限群 G，当$(|G|,n)=1$ 时，G 是 n 次方闭群，且 $G^n=\langle G^n\rangle=G$.

4. 可除群是 n 次方闭群，且 $G^n=\langle G^n\rangle=G$.

5. n 次方闭群 G 的同态像是 n 次方闭群.

6. 若 H 是 G 的正规子群，且 $HG^n\subseteq G^n$，则 G 为 n 次方闭群$\Leftrightarrow G/H$ 为 n 次方闭群.

7. 群 G 为 n 次方闭群$\Leftrightarrow G/\mathrm{Z}(G)^n$ 为 n 次方闭群，其中 $\mathrm{Z}(G)$为 G 的中心.

8. 若 $\mathrm{Z}(G)$是 G 的中心，$a\in G^n\cap\mathrm{Z}(G)^n$，则 G 为 n 次方闭群$\Leftrightarrow G/\langle a\rangle$为 n 次方闭群.

若 G 是 n 次方闭群，且 $G^n=G$，则称 G 为强 n 次方闭群. 例如，若有限群 G 的阶$|G|$与 n 互素，则 G 是强 n 次方闭群；可除群是强 n 次方闭群. 利用$\langle G^n\rangle$，讨论有限群的可解性. 为此，规定符号如下：$\langle G^{n^2}\rangle$表示$\langle G^n\rangle$的 n 次方群，$\langle G^{n^k}\rangle$表示$\langle G^{n^{k-1}}\rangle$的 n 次方群. 从而有正规群列

$$G\supseteq\langle G^n\rangle\supseteq\langle G^{n^2}\rangle\supseteq\langle G^{n^3}\rangle\supseteq\cdots,$$

于是，有限群 G 可解$\Leftrightarrow$存在素数 p，$\langle G^p\rangle$可解. 若 G 是有限群，存在正整数 m，使$\langle G^{p^m}\rangle=\{e\}$，$p$ 为一素数，则 G 可解.

n 次方闭群（n-th power closed grop） 见“群的 n 次方群”.

强 n 次方闭群（strongly n-th power closed group） 见“群的 n 次方群”.

舒尔-查森浩斯定理（Schur-Zassenhaus theorem） 有限群论的一个重要定理. 它是有关补子群的存在性与共轭性的定理. 这个定理始自舒尔（Schur，I.），完成于查森浩斯（Zassenhaus，H.）. 设 G 为有限群，N 是 G 的正规子群，该定理断言：若 N 的阶与 G/N 的阶互素，则 N 在 G 中的补子群存在而且 N 的任意两个补子群在 G 中共轭. 考虑群阶的整数特征是有限群论的重要研究途径之一，因而，舒尔-查森浩斯定理在很多场合起重要作用，成为有限群论中继西洛定理之后的另一重要定理.

费特-汤普森奇阶定理（Feit-Thompson odd order theorem） 一个断言奇阶群必为可解群的著名定理. 20 世纪初，伯恩赛德（Burnside，W.）提出了如下猜想：奇阶的有限群必为可解群. 直到 1963 年才由费特（Feit，W.）与汤普森（Thompson，J. G.）合作完成证明，从而使它由猜想成为定理. 整个证明占了《太平洋数学杂志》1963 年的整整一期，共 254 页，其困难与复杂可想而知，后虽经多人努力仍未获得大幅度简化. 这个定理的极其简单明了的表述与它的极其复杂精彩的证明成为群论史上，特别是有限单群分类研究的一个里程碑.

伯恩赛德p^aq^b 定理（Burnside p^aq^b-theorem） 关于一类群可解的著名定理. 即断言阶为 p^aq^b 的有限群是可解群的定理. 其中 p,q 是素数，a,b 是非负整数. 该定理也是 20 世纪初，伯恩赛德（Burnside，W.）提出并由他用特征标理论证明的. 20 世纪 50 年代，维兰特（Wielant，H.）与凯格尔（Kegel，O. H.）又证明了凡能分解为两个幂零子群之积的有限群为可解群，这是伯恩赛德 p^aq^b 定理的一个出色推广. 20 世纪 70 年代，本德（Bender，H. A.）完全不用特征标仅用抽象群论的方法给出了伯恩赛德 p^aq^b 定理的另一证明.

霍尔可解性准则（Hall's criterion for solvability） 有限群可解的一个重要条件. 指霍尔（Hall，P.）关于有限可解群理论的一项奠基性工作. 这个准则有几种彼此等价的表述，现列出一种，其余两种可参见“西洛系”和“西洛基底”. 霍尔准则断言：有限群 G 为可解群，当且仅当对群阶$|G|$的任何因数 m，只要 m 与$|G|/m$ 互素，G 有 m 阶子群；而且 G 为可解群时，任意两个这样的 m 阶子群在 G 中共轭.

西洛系（Sylow system） 有限可解群特有的由霍尔 p'子群构成的子群组. 设 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 为有限群 G 的阶的全部互异素因数. 若 G 是可解群，由霍尔准则知，霍尔 p'_i 子群恒存在；对每个 p_i 选定一个霍尔 p'_i 子群 $G_{p'_i}$，则称$\{G_{p'_1},G_{p'_2},\cdots,G_{p'_r}\}$为有限可解群 G 的一个西洛系；而且，若$\{G_{p'_1},G_{p'_2},\cdots,G_{p'_r}\}$与$\{\widetilde{G}_{p'_1},\widetilde{G}_{p'_2},\cdots,\widetilde{G}_{p'_r}\}$都是 G 的西洛系，则存在一个元素 $g\in G$ 使 $\widetilde{G}_{p'_i}=(G_{p'_i})^g$ 对所有 $i=1,2,\cdots,r$ 成立，简称此情况为可解群 G 的任意两个西洛系在 G 中共轭. 这样一组霍尔 p'子群的存在也是有限群 G 为可解群的充分条件. 所以，霍尔准则也可表述为：有限

群 G 为可解群，当且仅当 G 有西洛系. 有的文献中将西洛系称为西洛补系(因为霍尔 p' 子群也称为西洛 p 补子群)，而"西洛系"这一词则用于表示西洛基底.

西洛基底(Sylow basis) 有限可解群特有的由西洛子群构成的子群组. 设 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 是有限群 G 的阶的全部互异素因数. 若子群组 $\{G_{p_1},G_{p_2},\cdots,G_{p_r}\}$，其中 G_{p_i} 是 G 的西洛 p_i 子群具有性质：$G_{p_i}G_{p_j}=G_{p_j}G_{p_i}$ 对所有 $1\leqslant i,j\leqslant r$，则称它是 G 的一个西洛基底. 西洛基底的存在是有限可解群的特征性质，即：有限群 G 为可解群，当且仅当 G 有西洛基底. 而且 G 可解时，G 的任意两个西洛基底在 G 中共轭. 这是霍尔准则的又一种表述方式.

上中心列(upper central series) 群的一个重要的子群列. 它是按逐级计算中心而构造出来的由单位元群 1 出发的群 G 的特征列. 即

$$1=Z_0(G)\leqslant Z_1(G)\leqslant Z_2(G)\leqslant\cdots,$$

其中 $Z_1(G)=Z(G)$ (G 的中心)，递推地

$$Z_i(G)/Z_{i-1}(G)=Z(G/Z_{i-1}(G)).$$

下中心列(lower central series) 群的一个重要的子群列. 它是按逐级计算换位子群而构造出来的从群 G 出发的 G 的特征列. 即

$$G=\gamma_1(G)\geqslant\gamma_2(G)\geqslant\gamma_3(G)\geqslant\cdots,$$

其中 $\gamma_2(G)=[G,G]$，递推地，

$$\gamma_{i+1}(G)=[\gamma_i(G),G].$$

超中心(hypercenter) 群的一个重要特征子群. 指上中心列中诸子群的并. 群 G 的上中心列 $1\leqslant Z_0(G)\leqslant Z_1(G)\leqslant\cdots\leqslant Z_n(G)\leqslant\cdots$ 中，诸子群的并

$$\bigcup_{i=0}^{\infty}Z_i(G)$$

称为 G 的超中心，G 的超中心是 G 的特征子群.

幂零群(nilpotent group) 一种重要的群类. 指下中心列经有限步到达单位元群 1 的群. 一个等价定义是：群 G 称为幂零群，若 G 的上中心列经有限步到达 G. 当 G 为幂零群时，下中心列从 G 到达 1 的步数与上中心列从 1 到达 G 的步数相等，称这个步数为 G 的幂零类. 例如，幂零类为 1 的幂零群就是交换群. 有限幂零群的一个重要结构定理是：有限群 G 为幂零群，当且仅当 G 的任何西洛子群都是正规子群，从而

$$G=G_{p_1}\times G_{p_2}\times\cdots\times G_{p_r},$$

这里 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 是群阶 $|G|$ 的所有互异素因数，G_{p_i} 是 G 的西洛 p_i 子群. 所以，有限幂零群的研究可归结为有限 p 群的研究. 任意幂零群皆为可解群.

幂零类(nilpotent class) 见"幂零群".

幂零剩余(nilpotent residual) 对下中心列的一种刻画. 指下中心列能经有限步终止时的最后一项(终止系指此后成为等式链而非真降链，此条件对有限群肯定成立). 群 G 的幂零剩余常记为 $\gamma_\infty(G)$. 这个名称是由下面性质而来的：对任意 $N\lhd G$，G/N 为幂零群，当且仅当 $N\supseteq\gamma_\infty(G)$.

p 群(p-group) 一种特殊的有限群. 指每元之阶均为 p 之幂的群，这里 p 表示一个固定素数. 有限群 G 为 p 群，当且仅当 $|G|=p^n$. 有限 p 群的研究是有限群论中的重大课题. 西洛定理已显示有限 p 子群的结构对整个群的性质有重大影响. 有限幂零群的研究可归结为有限 p 群的研究. 霍尔(Hall,P.)从 20 世纪 30 年代到 50 年代在 p 群上的一系列工作，对 p 群研究有深远影响. 按同构将有限 p 群分类是有限 p 群研究的基本任务，然而这是一项极其困难的任务，至今仍远未解决.

有限 p 群的深度(depth of a finite p-group) 按交换子群的秩确定的有限 p 群的一种数量性质. 若有限 p 群 P 的所有交换子群的秩 $\leqslant d$ 而且有交换子群的秩 $=d$，则称 P 的深度为 d. 若将交换子群换为正规交换子群或特征交换子群等，则可定义正规深度、特征深度等.

正规深度(normal depth) 见"有限 p 群的深度".

特征深度(characteristic depth) 见"有限 p 群的深度".

伯恩赛德基定理(Burnside basis theorem) p 群的类似于有限维向量空间基底的一个定理. 该定理断言：若有限 p 群 P 模去其弗拉梯尼子群 $\Phi(P)$ 的商群的阶 $|P/\Phi(P)|=p^r$，则 P 的任何极小生成组含有 r 个元.

特殊 p 群(special p-group) p 群的特殊类型. 满足下列条件的有限 p 群 P：或者 P 是初等交换的；或者 P 的幂零类为 2 且 $P'=Z(P)=\Phi(P)$ 为初等交换的. 其中 $\Phi(p)$ 为弗拉梯尼子群.

超特殊 p 群(extra-special p-group) 特殊 p 群的子类. 满足下列条件的有限 p 群 P：P 的幂零类为 2 且 $P'=Z(P)=\Phi(P)$ 为 p 阶群，就称其为超特殊 p 群.

正规化子条件(normalizer condition) 刻画幂零群的一个重要条件. 若群 G 的任何真子群都真小于其正规化子，则称 G 满足正规化子条件. 有限群满足正规化子条件，当且仅当它是幂零群. 这个断言对无限群不成立，此时正规化子条件比幂零性条件要弱.

有限 p 群的李环(Lie ring of a finite p-group) 一种特殊李环. 指利用有限 p 群的下中心列构造出来的李环. 这种构造李环的方法对任意群都可用，但对有限 p 群或幂零群更有用.

正则 p 群(regular p-group) 一类重要的有限

p 群. 它是霍尔(Hall,P.)引入的. 有限 p 群 P,若对 P 的任何二元 x,y 恒可找到由 x,y 生成的子群 $\langle x,y\rangle$ 的换位子群 $\langle x,y\rangle'$ 中的若干个元 $c_1,c_2,\cdots,c_r$,使 $(xy)^p=x^py^pc_1^p\cdots c_r^p$,则称 p 为正则 p 群. 这类 p 群比一般 p 群有更强的性质.

伯恩赛德问题(Burnside problem) 群论发展史上的一个著名问题. 伯恩赛德(Burnside,W.)于1902年提出的问题:有限生成的具有有限方指数的群是有限群吗?这个问题意想不到的困难,它在群论发展史以及代数发展史上都起过重要作用. 后来有所谓广义伯恩赛德问题:有限生成的挠群(即每元的阶有限但方指数不必有限的群)是有限群吗?对广义伯恩赛德问题,哥洛德(Golod,E.S.)于1964年给出了否定回答. 他的反例是一个有限生成的无限 p 群. 对伯恩赛德问题,阿江(Adjan,S.I.)等人于1968年给出了否定回答,当方指数是充分大的奇数和生成元多于1个时,伯恩赛德讲的群不一定是有限群. 后来阿江进一步做了更细致的工作.

费廷子群(Fitting subgroup) 群的一个重要子群. 指群的所有幂零正规子群之积. 有限群的费廷子群是幂零的,而且是最大的幂零正规子群. 无限群的费廷子群不必幂零. 群 G 的费廷子群常记为$\mathrm{Fit}(G)$.

有限可解群的幂零长(nilpotent length of a finite solvable group) 对有限可解群的一种重要刻画. 指有限可解群按逐级构造费廷子群给出的特征群列的长度;直观地讲,也就是用幂零群逐步叠加而构作一个有限可解群所需的步数. 设 G 是有限可解群,$1=U_0(G)<U_1(G)<\cdots<U_n(G)=G$,其中 $U_{i+1}(G)/U_i(G)$ 是 $G/U_i(G)$ 的费廷子群. 此群列称为 G 的上幂零列,它的长度 n 称为 G 的幂零长.

有限群的上 p 列(upper p-series of a finite group) 有限群的一个重要的群列. 即有限群 G 的如下特征群列

$$1=P_0\leqslant N_0\leqslant P_1\leqslant N_1\leqslant P_2\leqslant N_2\leqslant\cdots,$$

其中 $N_i/P_i=O_{p'}(G/P_i)$,$P_i/N_{i-1}=O_p(G/N_{i-1})$. 若有限群 G 的上 p 列经有限步后到达 G,则称 G 为 p 可解群,其中到达 G 的步数(P—N 为一步)称为 G 的 p 长. 所以 p 可解群的 p 长就是其上 p 列中非平凡的 p 商因子的个数.

p 可解群(p-solvable group) 见“有限群的上 p 列”.

p 可解群的 p 长(p-length of a p-solvalbe group) 见“有限群的上 p 列”.

p 费廷子群(p-Fitting subgroup) 群的一个重要子群. 指群的所有 p 幂零正规子群之积. 它是将费廷子群概念推广到 p 局部情形时所得的特征子群.

π 闭群(π-closed group) p 闭群的推广. 任意两个 π 元之积仍为 π 元的有限群,称为 π 闭群,其中 π 是某些素数的一个集合. 在 π 闭群中所有 π 元构成一个特征子群,其商群为 π' 群,这里 π' 是 π 在全体素数集合中的补集. 这也可作为 π 闭群的另一定义. 当 $\pi=\{p\}$ 为一个素数 p 时,π 闭群就是 p 闭群. 当 $\pi=p'$ 为异于 p 的所有素数之集时,π 闭群就是 p' 闭群. p' 闭群就是 p 幂零群.

π 齐性群(π-homogeneous group) 一种特殊的群. 有限群 G 若对任何 π 子群 H 恒有 $\mathrm{N}_G(H)/\mathrm{C}_G(H)$ 是 π 群,则称 G 为 π 齐性群. 由于 π 子群的存在性一般没有保证,所以较有意义的是 $\pi=\{p\}$ 为一个素数的情形,即所谓 p 齐性.

弗罗贝尼乌斯准则(Frobenius criterion) 有关 p 幂零性的一个极好判别准则. 该准则断言:一个有限群为 p 幂零群(即 p' 闭群),当且仅当它是 p 齐性群.

系正规化子(system normalizer) 有限可解群的西洛系的正规化子. 即该群中这样一些元素的集合,它们能正规化一个西洛系的每个成员,这个集合肯定是个子群. 一个西洛系的正规化子重合于由这个西洛系构造出来的西洛基底的正规化子. 所以也可以用西洛基底来定义系正规化子.

卡特子群(Carter subgroup) 一种特殊的幂零子群. 群的幂零的自正规化(即正规化子重合于自己)的子群,称为卡特子群. 在有限可解群中卡特子群必存在,而且任两个卡特子群彼此共轭. 卡特子群的研究对群系理论的发展有重要影响.

有限可解群的秩(rank of a finite solvable group) 决定有限可解群特征的一个参数. 有限可解群的所有主因子的最大秩,称为有限可解群的秩. 这个概念是因推广有限超可解群概念产生的,而有限可解群的所有主因子的秩的最小公倍数,称为它的算术秩.

有限可解群的算术秩(arithmetic rank of a finite solvable group) 见“有限可解群的秩”.

超可解群(supersolvable group) 一种重要的群类. 指能用循环群有限叠加起来的群. 若一个群有一个有限长的正规列且其商因子均为循环群,则称之为超可解群. 有限超可解群也就是秩为1的有限可解群. 对超可解群的研究已经形成了相当丰富的理论. 对有限超可解群的研究已很透彻,贝尔(Baer,R.)、胡佩特(Huppert,B.)等人有重要贡献. 对无限超可解群也有丰富的研究成果.

内 Σ 群(inner Σ-group) 一种重要的群类. 指所有真子群都具有性质 Σ 而自己不具有性质 Σ 的群,这里 Σ 是任一给定的群论性质(即在同构之下被保持着的性质),如交换性、超可解性等. 内 Σ 群的研究由来已久,这方面的第一个结果是米勒尔

(Miller,G. A.)的工作,它给出了有限内交换群的构造.第一个影响深远的结果当推施密特-岩泽定理,它描述了有限内幂零群的结构.此后对各种群论性质 Σ(p 幂零性、超可解性等)的一系列结果陆续产生.

外Σ群(outer Σ-group)　一种重要的群类.指所有真商群具有性质 Σ 而自己不具有性质 Σ 的群,这里 Σ 是群论性质.

极小非Σ群(minimal non-Σ-group)　一种重要的群类.有两种涵义,一种是指既为内 Σ 群又为外 Σ 群的群;另一种涵义即指内 Σ 群.由于在有限群论中归纳法是重要的论证方法(它常常以讨论极小反例的形式出现),内 Σ 群、外 Σ 群与极小非 Σ 群的研究不仅对性质 Σ 的认识有重要意义,也为有关性质 Σ 的探索与论证提供有效工具.对这一点的认识因陈重穆的工作而明确起来.

戴德金律(Dedekind law)　关于子群的一个等式.群论中的一条类似于格论中模律的公式.若 H,K,L 为群 G 的子群,$H\supseteq K$,$KL=LK$(即 KL 为 G 的子群),则 $H\cap(KL)=K(H\cap L)$.这个公式在很多群论论证中起重要作用.

西洛塔(Sylow tower)　在有限群中按一定顺序将西洛子群叠加起来构成的特征群列.例如,按自然顺序的西洛塔的严格定义如下:设 G 为有限群,$p_1>p_2>\cdots>p_r$ 是群阶 $|G|$ 的全部互异素因数,若对每 p_i,群 G 有西洛 p_i 子群 G_{p_i} 使

$$G_{p_1}\lhd G,G_{p_1}G_{p_2}\lhd G,\cdots,G_{p_1}G_{p_2}\cdots G_{p_r}\lhd G,$$

则子群链

$$1<G_{p_1}<G_{p_1}G_{p_2}<\cdots<G_{p_1}G_{p_2}\cdots G_{p_r}=G$$

就称为 G 的(自然顺序的)西洛塔.通常,西洛塔是指自然顺序的西洛塔.并非任意有限群都有西洛塔,但超可解群必有西洛塔;反之,有西洛塔的有限群不一定为超可解群,但必为可解群.

群系(formation of groups)　对取同态像与取有限次直积封闭的群类.若群类 $\mathscr{F}$ 满足以下两个封闭条件,则称此群类为群系:

1. 若群 G 在 $\mathscr{F}$ 中,则 G 的任何同态像也在 $\mathscr{F}$ 中.

2. 若 $M\lhd G$,$N\lhd G$,$G/M\in\mathscr{F}$,$G/N\in\mathscr{F}$,则 $G/M\cap N\in\mathscr{F}$.

自 1963 年格舒兹(Gaschütz,W.)引入群系概念并作出一些令人感兴趣的结果以后,群系理论发展很快,各种群类的概念也应运而生.群系理论最初的成功在于它概括并发展了有限可解群的一些重要理论,提炼出了许多好概念.群系理论现已不仅仅限于有限可解群,也不仅仅用来研究群的群论性质与构造,群系本身的性质与构造也成为吸引人的课题.群的性质与群系作为一个整体的性质,二者交互作用,相互影响,使群系理论充满活力.

饱和群系(saturated formation of groups)　附加条件的群系.即满足以下条件的群系 $\mathscr{F}$:$G/\Phi(G)\in\mathscr{F}$,则 $G\in\mathscr{F}$,这里 $\Phi(G)$是 G 的弗拉梯尼子群,就称为饱和群系.这个概念的来源与价值是,很多被充分研究过的有限群类,如幂零群群类、超可解群群类,具有这种饱和性.而且这个概念与另一个从主因子的角度产生的概念奇妙地统一起来了.

局部群系(local formation of groups)　借助于主因子由一组群系来定义的群系.若对每个素数 p 给定了一个群系 $\mathscr{F}(p)$,则可按下述方式规定一个有限群的群系 $\mathscr{F}$:有限群 $G\in\mathscr{F}$,当且仅当对 G 的每个主因子 H/K 及$|H/K|$的每个素因数 p,

$$G/C_G(H/K)\in\mathscr{F}(p).$$

这里 $C_G(H/K)$是 G 的所有这样的元构成的子群,它们在 H/K 上的共轭作用是平凡作用,所以 $G/C_G(H/K)$就是 G 在 H/K 上共轭作用产生的自同构群.这样决定的群系 $\mathscr{F}$ 称为由$\{\mathscr{F}(p)\}$局部定义的群系,简称 $\mathscr{F}$ 为局部系;$\{\mathscr{F}(p)\}$称为 $\mathscr{F}$ 的定义系.从群对它的各个主因子的作用情况来研究群,是有限可解群论的常用研究手法之一,这是局部群系概念的来源.而这个概念也正好高度概括了这种研究思想.

局部化定理(localization theorem)　群系理论的基本定理之一.该定理断言:一个有限群的群系为局部群系,当且仅当它是饱和群系.有限群的局部群系必为饱和群系,这是格舒兹(Gaschütz,W.)于 1963 年提出群系概念时即已证明了的结论.紧接着伯恩赛德(Burnside,W.)又证明:当所论群系只含有限可解群时,饱和系必为局部系.直到 1978 年,可解性条件才被施米德(Schmid,P.)去掉,他的证明使用了模表示理论.因此,这个完整优美的定理一般称为格舒兹-伯恩赛德-施米德定理.值得注意的是,不仅在施米德的证明中,即使在伯恩赛德的证明中也使用了表示论方法,这表明了表示论在群论中的力量.对这个定理究竟能否找到一个抽象群论的证明,目前尚未解决.

费廷类(Fitting class)　群系的对偶概念.满足下列封闭性条件的群类 $\mathscr{F}$ 称为费廷类:

1. 若 $G\in\mathscr{F}$,$N\lhd G$,则 $N\in\mathscr{F}$.

2. 若 $M\lhd G$,$N\lhd G$,$M\in\mathscr{F}$,$N\in\mathscr{F}$,则 $MN\in\mathscr{F}$.

(注:"类"是比"集合"更广的概念,而且"群类"按群论界的通常理解,都是对同构封闭的,即若群 G 在 $\mathscr{F}$ 中,则与 G 同构的群都在 $\mathscr{F}$ 中.)在群系概念出现后不久,菲舍尔(Fischer,B.)指出群系及有关概念都可对偶化,并且是有意义的研究对象.但直到

1967 年,他与格舒兹(Gaschütz,W.)、哈特莱(Hartley,B.)的一篇合作论文中才论及.费廷类的初期理论大致是与群系理论对偶展开的.但是,费廷类理论很快就有了自己的特色和课题.

$\mathscr{F}$ 内射子($\mathscr{F}$-injector)　群 G 的由群类 $\mathscr{F}$ 定义的一种子群.若 G 的子群 I 满足条件:对 G 的任何正规子群 N,$I\cap N$ 总是 N 的极大 $\mathscr{F}$ 子群,则称 I 为 G 的一个 $\mathscr{F}$ 内射子.这里的 $\mathscr{F}$ 群是指在 $\mathscr{F}$ 中的群.当 $\mathscr{F}$ 是有限群的费廷类时,这个概念显示出其意义,因为这时任何有限可解群恒有 $\mathscr{F}$ 内射子,而且任两个 $\mathscr{F}$ 内射子彼此共轭.

$\mathscr{F}$ 投射子($\mathscr{F}$-projector)　群 G 的由群类 $\mathscr{F}$ 定义的另一种子群.若 G 的子群 P 满足条件:对 G 的任何正规子群 N,PN/N 总是 G/N 的极大 $\mathscr{F}$ 子群,则称 P 是 G 的一个 $\mathscr{F}$ 投射子.这里的 $\mathscr{F}$ 群是指在 $\mathscr{F}$ 中的群.这个概念的意义在于:当 $\mathscr{F}$ 是有限群的饱和群系时,任意有限可解群有 $\mathscr{F}$ 投射子,而且任两个 $\mathscr{F}$ 投射子彼此共轭.当 $\mathscr{F}$ 是所有有限幂零群的群类时,$\mathscr{F}$ 投射子就是卡特子群.

$\mathscr{F}$ 根基($\mathscr{F}$-radical)　有限群的由费廷群类 $\mathscr{F}$ 决定的特征子群.若 $\mathscr{F}$ 是有限群的一个费廷类,G 为有限群,则按费廷类的定义,G 中所有属于 $\mathscr{F}$ 的正规子群的积仍在 $\mathscr{F}$ 中,记这个积为 $G_{\mathscr{F}}$,称为 G 的 $\mathscr{F}$ 根基,它是 G 的最大的正规 $\mathscr{F}$ 子群.当 $\mathscr{F}$ 是所有有限幂零群的群类时,$\mathscr{F}$ 根基就是费廷子群.当 $\mathscr{F}$ 是所有有限可解群的群类时,$\mathscr{F}$ 根基就是所谓的半单根基.

$\mathscr{F}$ 剩余($\mathscr{F}$-residual)　有限群的由群 $\mathscr{F}$ 决定的特征子群.若 $\mathscr{F}$ 是有限群的一个群系,G 是有限群,则按群系的定义,G 中所有使商群在 $\mathscr{F}$ 中的正规子群之交仍使商群在 $\mathscr{F}$ 中,记这个交为 $G^{\mathscr{F}}$,称为 G 的 $\mathscr{F}$ 剩余,或称为 $\mathscr{F}$ 的上根基.当 $\mathscr{F}$ 为所有有限幂零群的群类时,$\mathscr{F}$ 剩余就是幂零剩余.

撰　稿　施武杰　樊　恽
审　阅　石生明　李世余

置　换　群

置换群(permutation group)　一类具体的有限群.有限集合到自身的一一映射称为一个置换.有限集合 Ω 上的一些置换组成的集合,在置换的乘法下所组成的群,称为置换群.此群的阶是有限的.研究置换群的性质和构造的理论称为置换群论.凯莱(Cayley,A.)证明:任何一个有限群都同构于一个置换群.因此,可以把一切有限群都看成置换群.由于置换群比抽象群更为直观,而一些数学对象的自同构群是以置换群的面貌出现的,所以,在历史上对置换群的研究先于对抽象群的研究.著名的伽罗瓦理论就是把高次方程的根式可解性的研究转化成为对置换群的研究的,事实上,伽罗瓦(Galois,E.)本人就曾得到有关置换群的一些深刻定理.

置换群论(the theory of permutation groups)　见"置换群".

置换(permutation)　一种特殊的一一映射.给定一个有限集合 Ω,将 Ω 中的元素称为点或文字.设 α 为 Ω 中的一点,g 为 Ω 上的一个置换,α 在 g 下的像记为 α^g.若 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$,则 Ω 上的置换 g 可以表作

$$g=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1^g & 2^g & \cdots & n^g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha^g\end{pmatrix}$$

的形状.这里 α^g 写在下面一行中 α 所对应的位置上,例如

$$g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$$

表示 1,2,3,4,5 在 g 下的像分别为 2,3,1,5,4.通常把 Ω 中一个子集合 Δ 中元素的个数称为 Δ 的长度,记为 $|\Delta|$.若 $|\Omega|=n$,则 Ω 上的置换共有 $n!$ 个.把 Ω 中每个点都映到自身的置换称为恒等置换.

恒等置换(identical permutation)　见"置换".

置换的轮换分解(cycle decomposition of a permutation)　置换的一种表示方法.设 $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$,g 为 Ω 上的一个置换.g 除了可以表示成

$$g=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1^g & 2^g & \cdots & n^g\end{pmatrix}$$

这种形状外,还有另外一种更为直观的表示方法,例如,若

$$g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix},$$

则 g 将 1 映成 2,将 2 映成 3,又将 3 映成 1,同时 g 将 4,5 两个点互相交换.此时又可表示成 $g=(1,2,3)(4,5)$.一般地,$\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的任何置换 g 都可以表成

$$g=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\cdots(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_u)$$

的形状,这里 $\alpha_i,\beta_j,\cdots,\gamma_k\in\Omega$,而且 Ω 中的每个点在右端恰好出现一次.这表示置换 g 把 α_1 映成 α_2,把 α_2 映成 α_3,…,把 α_{s-1} 映成 α_s,又把 α_s 映成 α_1;同理,g 把 β_1 映成 β_2,把 β_2 映成 β_3,…,把 β_t 映成 β_1,余此类推.这里 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$,$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$,…,$(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_u)$ 等都称为轮换.轮换中出现的点数称为该轮换的长度,这种表示称为 g 的轮换分解.在这一分解中各轮换的长度之和为 $|\Omega|$.按照上面的规定:

$$(1,2,3)(4,5),\ (2,3,1)(4,5),\ (4,5)(1,2,3)$$

都表示 $\{1,2,3,4,5\}$ 上的同一个置换.所以,可把 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$,$(\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s,\alpha_1)$,…,$(\alpha_s,\alpha_1,\cdots,\alpha_{s-1})$ 都看成同一个轮换,这样,g 的轮换分解除去各轮换

的次序以外是被 g 惟一确定的. 为简便计,通常把长度为 1 的轮换省略,因此

$$h=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&1&5\end{pmatrix}$$

可以表成 $h=(1,2,3,4)$. 特别把恒等置换写作(1).

轮换(cycle) 见“置换的轮换分解”.

轮换的长度(length of cycle) 见“置换的轮换分解”.

置换的乘积(product of permutations) 置换作为映射的乘积. 置换 g 与 h 的乘积是一个映射,记为 gh 或 $g\cdot h$,对任何 $\alpha\in\Omega$, $(\alpha)^{gh}=(\alpha^g)^h$. 两个置换的乘积仍为置换. 例如:$\Omega=\{1,2,3,4,5\}$, $g=(1,2,3)(4,5)$, $h=(1,2,3,4)$时 $gh=(1,3,2,4,5)$. 设把 α 在置换 g 下的像记为 $g(\alpha)$. 与之相应地,用等式 $gh(\alpha)=g(h(\alpha))$来定义乘积 gh,此时,若仍取 $g=(1,2,3)(4,5)$, $h=(1,2,3,4)$,则 gh 表示$(1,3,5,4,2)$,这意味着为求出乘积 gh,先在 Ω 上做置换 h,然后再做 g. 这和上面规定的乘法次序正好相反. 但不管采用哪种方法,都需注意表示方法的前后一贯.

偶置换(even permutation) 置换的一个子类. 长度为 2 的轮换称为对换. 每个置换都可以表示成对换的乘积. 这因为任何长度大于 2 的轮换可以写成对换的乘积. 实际上,当 $s\geqslant 3$,

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=(\alpha_1,\alpha_s)(\alpha_2,\alpha_s)\cdots(\alpha_{s-1},\alpha_s).$$

当把置换 g 写成对换的乘积时,不要求(也不能要求)这些对换没有公共的点. 也不能保证表示法的惟一性,甚至不能保证乘积中对换的个数的惟一性,但是可以证明表达式中对换个数的奇偶性是被置换 g 完全确定的. 若一个置换可以表成为偶数个对换的乘积,则称之为偶置换;否则,称为奇置换. 两个偶置换或两个奇置换的乘积都是偶置换,一个奇置换和一个偶置换的乘积是奇置换. 若 $|\Omega|=n$,则在 Ω 上的全部 $n!$ 个置换中偶置换与奇置换各有 $n!/2$ 个.

对换(transposition) 见“偶置换”.

奇置换(odd permutation) 见“偶置换”.

对称群(symmetric group) 含置换群为子类的一类具体的有限群. 有限集合 Ω 上全体置换组成的群,称为 Ω 上对称群,记为 S_Ω 或 $\mathrm{Sym}(\Omega)$. 由于当 $|\Omega|=|\Omega'|=n$ 时,对称群 S_Ω 和 $S_{\Omega'}$ 是置换同构的,所以也把 S_Ω 记为 S_n. S_n 的阶为 $n!$. 一切次数为 n 的置换群都可以看成 S_n 的子群. Ω 上全体偶置换组成的群称为 Ω 上的交错群,记为 A_Ω 或 $\mathrm{Alt}(\Omega)$,或 A_n,若 $n=|\Omega|$,则 A_n 的阶为 $n!/2$,它是 S_n 的指数为 2 的正规子群. S_n, A_n 这两个群在置换群理论和抽象群论中占有特殊的地位. 这一方面由于对一切 n, S_n 是 n 重传递群,而当 $n>2$ 时,A_n 是 $n-2$ 重传递群;另一方面也由于当 $n\geqslant 5$ 时,A_n 为单群,它们是一类重要的有限单群.

交错群(alternating group) 见“对称群”.

轨道(orbit) 集合 Ω 在置换群 G 下保持不变的某些子集. 设 G 是集合 Ω 上的置换群,Δ 是 Ω 的一个子集合,若 Δ 满足下列两个条件,则称 Δ 为 G 的一个轨道:

1. Δ 中任何点在 G 中任何元素下的像都在 Δ 内.

2. 对 Δ 中任何两个点 α,β,总有 G 中一个元素 g,使 $\alpha^g=\beta$.

例如:$\Omega=\{1,2,3,4,5\}$,若 G 是由元素 $g=(1,2)(3,4,5)$生成的置换群,则 $\Delta_1=\{1,2\}$, $\Delta_2=\{3,4,5\}$是 G 的轨道. 而 Ω 本身由于不满足条件 2,所以不是轨道. 集合$\{3,4\}$不满足条件 1,从而也不是轨道. 轨道还可以用另外的方法定义:把 Ω 的满足上述条件 1 的子集合 Δ 称为 G 在 Ω 上的不变区,若 Δ 是 G 的不变区,而 Δ 的任何真子集都不是 G 的不变区,则称 Δ 为轨道. 这两个定义是等价的. 若 $\alpha\in\Omega$,则集合 $\alpha^G=\{\alpha^g|g\in G\}$就是 G 在 Ω 上包含点 α 的轨道. G 在 Ω 上的任何两个不同的轨道的交为空集,所以 Ω 是 G 的轨道的无交并. 若 G 是 Ω 上的置换群,而 Ω 本身是一个轨道,则称 G 是 Ω 上的传递群. 置换群论研究的主要内容是传递群.

传递群(transitive group) 见“轨道”.

不变区(fixed block) 见“轨道”.

置换群的不动点(fixed point of a permutation group) 集合 Ω 中在置换群 G 下保持不变的点. 设 g 是 Ω 上的一个置换,α 为 Ω 中一个点. 若 $\alpha^g=\alpha$,则称 α 为置换 g 的不动点. 设 G 是 Ω 上的一个置换群,若 $\alpha\in\Omega$ 是 G 中一切元素的不动点,则称 α 为 G 的不动点.

置换的不动点(fixed point of a permutation) 见“置换群的不动点”.

置换的次数(degree of a permutation) 集合 Ω 中被置换实际变动的点的个数. 若 g 为 Ω 上的一个置换,Δ 为 g 的全部不动点组成的集合,则 $\Omega\backslash\Delta$ 的长度(即所含点的个数)称为 g 的次数. g 的次数是被 g 所变动的点的个数. 若 G 为 Ω 上的一个置换群,以 Δ 表示 G 的全部不动点组成的集合,则 $\Omega\backslash\Delta$ 的长度称为 G 的次数. 一般来说 G 中元素 g 的次数不大于 G 的次数,G 中非单位元素的次数的最小者称为群 G 的最小次数.

置换群的次数(degree of a permutation group) 见“置换的次数”.

最小次数(minimal degree) 见“置换的次数”.

稳定子群(stabilizer) 置换群内的一种特殊子群. 置换群 G 中把某点 α 保持不动的全体元素组成的子群. 它记为 G_α,称为 α 在 G 内的稳定子群. 若 β 是 G 中另外一个点,而 G 中有元素 g 使 $\alpha^g=\beta$,则

$G_\beta=g^{-1}G_\alpha g$. 所以同一轨道内的各点有相互共轭的稳定子群. 若 $\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 为 G 的轨道, 取 $x_i\in G$ $(i=1,2,\cdots,r)$, 使 $\alpha_1^{x_i}=\alpha_i$, 则陪集 $G_{\alpha_1}x_i$ 就是 G 中把 α_1 变成 α_i 的全部元素所成的子集. 于是, Δ 中的元素和 G_{α_1} 在 G 内的各陪集之间可以建立一一对应. 因此 Δ 的长度 r 就是 G_{α_1} 在 G 内的指数.

稳定子群的概念还可以推广. 设 Δ 是 Ω 的一个子集合, 可自然地得到两个子群. 第一个子群由 G 中那些把 Δ 中每个元素都不变的元素组成, 这个子群称为子集 Δ 的点不变稳定子群. 第二个子群由 G 中那些把 Δ 作为整体还变成 Δ 的元素组成, 这个子群称为 Δ 的集不变稳定子群, 分别记为 G_Δ 和 $G_{\{\Delta\}}$. 还有其他形式的稳定子群, 给定一个置换群后, 就可以自然地得到一系列子群. 通过这些子群的研究常常使人们可以了解所给置换群的构造, 这是研究置换群的一个方便之处.

点不变稳定子群(point-wise stabilizer) 见"稳定子群".

集不变稳定子群(set-wise stabilizer) 见"稳定子群".

半正则群(semiregular group) 一类特殊的置换群. 设 G 为 Ω 上的一个置换群, 若对任何 $\alpha\in G$, 稳定子群 G_α 仅由恒等置换组成, 则称 G 为 Ω 上的半正则群. 若半正则群 G 在 Ω 上是传递的, 则称 G 为 Ω 上的正则群. 在半正则群内, 任何非单位元素的次数等于群 G 的次数. 若 G 是 Ω 上的半正则群, 则 Ω 为 G 的一些等长的轨道的并集, 而且每个轨道的长度都等于 G 的阶 $|G|$. 因此, 半正则群 G 的阶是 $|\Omega|$ 的因子. 若 G 是 Ω 上的正则群, 则 $|\Omega|=|G|$.

正则群(regular group) 见"半正则群".

置换同构(isomorphism as permutation groups) 一种特殊的群同构. 两个置换群间的一一对应, 它是群同构且相应的置换在本质上是相同的. 设 G 是 Ω 上的置换群, H 是 Γ 上的置换群, φ 是 G 到 H 上的一一对应, 若 φ 满足下列条件, 则称 φ 是 G 到 H 的置换同构:

1. φ 是群同构.

2. 存在 Ω 到 Γ 的一一对应 ρ, 使得对 $\alpha\in\Omega, g\in G$, 有 $(\alpha^g)^\rho=(\alpha^\rho)^{\varphi(g)}$.

条件 2 说明 $g\in G$ 在 Ω 上的点上置换作用时, g 的对应元素 $\varphi(g)\in H$ 在 Ω 的点的像元素 α^ρ 上相应地进行置换作用. 因此, g 与 $\varphi(g)$ 是本质上相同的置换. 或者说, 除去点和群元素的记号有所不同外, 这两个置换群是一样的. 置换同构的置换群视为等同.

置换表示(permutation representation) 一种特殊的群同态. 即群到对称群内的同态. 若 G 为任意有限群, Ω 为一有限集合, 则称 G 到对称群 S_Ω 内的任意同态 φ 为 G 的一个置换表示. 此时 $|\Omega|$ 称为表示 φ 的次数; φ 作为同态的核称为表示 φ 的核. 若表示 φ 是一个同构, 则称 φ 是忠实的表示. 置换表示 φ 也常称为群 G 在 Ω 上的一个作用. 研究置换表示的目的是将难以处理的抽象有限群代之以较为具体的置换群, 通过后者来了解所给的抽象有限群的性质. 在置换表示中, 人们最感兴趣的是所谓传递置换表示, 这是指群 G 在表示下的像是 Ω 上的传递群. 给定一个有限群 G 以及 G 的子群 H, 可构造 G 的一个传递置换表示. 设 $G=Hx_1\cup Hx_2\cup\cdots\cup Hx_n$ 为 G 关于子群 H 的陪集分解. 设 $\Omega=\{Hx_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$, 即把陪集 Hx_i 看成 Ω 中的点. 取 $g\in G$, 对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$, Hx_ig 仍为一个陪集, 记 $Hx_ig=Hx_{k_i}$, 这里 $k_i\in\{1,2,\cdots,n\}$, 此时 $Hx_i\to Hx_{k_i}$ 是 Ω 上的一个置换, 这个置换被 g 惟一确定, 记之为 $\hat{g}$. 此时映射 $\varphi: g\to\hat{g}$ 是 G 到 S_Ω 内的同态, 即 φ 是 G 的一个置换表示. 因为 $Hx_i(x_i^{-1}x_j)=Hx_j$, 所以元素 $x_i^{-1}x_j$ 在表示 φ 下的像把 Hx_i 映到 Hx_j, 于是这个表示是传递置换表示. 表示的次数是 H 在 G 内的指数 $|G:H|$, 表示的核是子群 $K=\{g\mid Hx_ig=Hx_i, i=1,2,\cdots,n\}$, K 是 H 的一切共轭的交, 也是 G 的包含在 H 内的最大的正规子群. 反过来, 群 G 的任何一个传递置换表示都可以如此得到.

表示的次数(degree of a representation) 见"置换表示".

表示的核(kernel of a representation) 见"置换表示".

忠实表示(faithful representation) 见"置换表示".

弗罗贝尼乌斯群(Frobenius group) 一类重要的传递置换群. Ω 上的传递置换群 G, 若 G 不是正则群, 但 G 中除去恒等置换外的各元素至多有一个不动点, 则称 G 为弗罗贝尼乌斯群. 当 $|\Omega|=4$ 时, 在交错群 A_4 内只有恒等置换、二阶元素和三阶元素, 其中二阶元素都没有不动点, 而三阶元素都恰有一个不动点, 从而 A_4 为弗罗贝尼乌斯群. 关于这一类群有一个著名的弗罗贝尼乌斯定理: 若 G 是 Ω 上的一个弗罗贝尼乌斯群, 则 G 中全部在 Ω 上没有不动点的元素, 连同 G 的单位元素组成 G 的一个正则的正规子群. 这个定理早在 1902 年就由弗罗贝尼乌斯(Frobenius, F. G.)证明了, 但不论是弗罗贝尼乌斯的原始证明, 还是以后改进了的证明, 都需要使用群特征标理论, 人们寻求纯粹群论证明的努力一直未获成功. 上面所说的正则正规子群称为 G 的弗罗贝尼乌斯核. 而 Ω 中任何一点在 G 内的稳定子群称为 G 的一个弗罗贝尼乌斯补. 关于弗罗贝尼乌斯群

有一个著名猜想：弗罗贝尼乌斯核是幂零群. 这个猜想于 20 世纪 60 年代初被汤普森(Thompson, J. G.)证实.

一个抽象群 G，若它有一个子群 H，使得对 G 的任何不包含在 H 内的元素 g，等式 $H \cap H^g = 1$ 成立，则也称 G 是(关于 H 的)一个弗罗贝尼乌斯群. 从这个定义可以看出，抽象群 G 是(关于 H 的)一个弗罗贝尼乌斯群是反映 G 同构于一个传递置换群，后者作为置换群是弗罗贝尼乌斯群，并且在上述同构下，H 的像恰好是一个点的稳定子群.

弗罗贝尼乌斯核(Frobenius kernel)　见“弗罗贝尼乌斯群”.

弗罗贝尼乌斯补(Frobenius complement)　传递置换群的特殊子群(参见“弗罗贝尼乌斯群”). 若 H 是有限群 G 的一个弗罗贝尼乌斯补，则 $G=HN$，$H \cap N = 1$，且 $N \lhd G$，其中 N 为 G 的弗罗贝尼乌斯核.

区(block)　集合 Ω 由于置换群 G 的作用而产生的一些子集. 设 G 是 Ω 上的传递置换群. 若 Ω 可以表示成一些子集 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_s$ 的无交并，使得对任何一个 $\Delta_i, i \in \{1,2,\cdots,s\}$ 和任何 $g \in G$，Δ_i^g 都是某个 $\Delta_j, j \in \{1,2,\cdots,s\}$，则称 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_s$ 是 G 的一个完全区系，而其中任何一个 Δ_i 都称为 G 的一个区，此时这些 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_s$ 的长度都相同，而且 $|\Omega| = s|\Delta_1|$. 一个完全区系 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_s$ 称为非平凡的，若 $s>1$，而且 $|\Delta_1|>1$；否则，称为平凡的. 一个传递群 G 总有平凡的完全区系. 例如，取 $s=1$ 而 $\Delta_1 = \Omega$，就得到一个完全区系. 又如，各 Δ_i 由单独一个点组成而 $s=|\Omega|$，也得到一个完全区系.

完全区系(complete block system)　见“区”.

非平凡完全区系(nontrivial complete block system)　见“区”.

平凡完全区系(trivial complete block system)　见“区”.

本原群(primitive group)　传递置换群的一个子类. 集合 Ω 上的传递置换群 G，若没有非平凡完全区系，则称 G 为 Ω 上的本原群. 否则，即 G 具有非平凡完全区系，就称 G 为非本原群. 例如，$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ 而 G 由元素 g 生成，其中 $g=(1,2,3,4,5,6)$，那么 $\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}$ 是 G 的一个非平凡的完全区系，同样 $\{1,3,5\},\{2,4,6\}$ 也是 G 的非平凡的完全区系. 因此 G 是非本原群. 由这个例子还可以看出，在 G 为非本原群时，G 可能有不止一个非平凡的完全区系. G 在 Ω 上是本原的当且仅当对 Ω 中的任何两个不同的点 α, β 和 Ω 的任一非空真子集 Δ，都有 G 中一个元素 g，使 $\alpha^g \in \Delta$ 而 $\beta^g \notin \Delta$. G 在 Ω 上是本原群的另一个充分必要条件是，对任何 $\alpha \in \Omega$，G_α 是 G 的极大子群. 关于本原群的研究是置换群论的最重要的内容. 其中值得一提的工作是人们已经给出了次数 $\leqslant 50$ 的全部本原群的一览表，又借助于有限单群分类定理，决定了全部素数 p 次置换群、双传递群、秩 3 本原群，以及某种类型的奇数次本原群.

非本原群(nonprimitive group)　见“本原群”.

多重传递群(multiply transitive group)　比传递群有更强的传递性质的置换群. 设 k 是一个自然数，而 G 是 Ω 上的一个置换群，且 $|\Omega| \geqslant k$. 若对 Ω 的任意两个有序 k 元子集 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$ 和 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\}$，都可找到一个元素 $g \in G$，使得 $\alpha_1^g = \beta_1, \alpha_2^g = \beta_2, \cdots, \alpha_k^g = \beta_k$，则称 G 在 Ω 上是 k 重传递的；或简单地称，G 在 Ω 上是 k 传递的. 由这个定义，1 重传递群就是通常所称的传递群，2 重传递群称为双传递群. 一般地，若 $k \geqslant 1$，一切 $k+1$ 重传递群都是 k 重传递群. S_n 是惟一的 n 次 n 重传递群，而 A_n 是 n 次的 $n-2$ 重传递群. 还可推出：当 $k \geqslant 2$ 时，G 在 Ω 上是 k 重传递的当且仅当 G 在 Ω 上是传递的并且对任意 $\alpha \in \Omega$，稳定子群 G_α 在 $\Omega \backslash \{\alpha\}$ 上是 $k-1$ 重传递的. 由此可知，若 G 是 Ω 上的 k 重传递群而 $|\Omega|=n$，则 G 的阶是 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 的倍数. 若 $k \geqslant 2$，则一切 k 重传递群都是本原群. 人们常把传递置换群分作三类加以研究：即二重和二重以上的传递群；非二重传递的本原群；非本原群. 其中二重以上传递(即多重传递)群的研究一直是置换群理论的引人注意的课题. 其背景是，虽然有大量的 2 重传递群和 3 重传递群，但除去 S_n 和 A_n 外，人们从未发现任何一个 6 重传递群，而 4 重传递群只知道有 4 个，马蒂厄群 $M_{11}, M_{12}, M_{23}, M_{24}$，其中 M_{12}, M_{24} 是 5 重传递的. 利用有限单群分类定理，已经决定出全部的 2 重传递群. 由此也证实了上述四个马蒂厄群是 A_n, S_n 以外的全部 4 重传递群.

双传递群(double transitive group)　见“多重传递群”.

多重本原群(multiply primitive group)　一种本原群. 指群 G 及它的某些稳定子群都具有本原性的置换群. 为更精细地把 k 重传递群加以分类，而引进 k 重本原群的概念. 若 G 是 Ω 上的 k 重传递群，任取 Ω 中的 $k-1$ 个点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$，则稳定子群 $G_{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1})}$ 在集合 $\Omega \backslash \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}\}$ 上是传递的. 若对任意的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$，稳定子群 $G_{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1})}$ 在 $\Omega \backslash \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1}$ 上还是本原的，则称 G 在 Ω 上是 k 重本原群. 一切 $k+1$ 重传递群都是 k 重本原群，而一切 k 重本原群都是 k 重传递群. 因此，k 重本原性是弱于 $k+1$ 重传递性，而强于 k 重传递性的一个有关传递性的条件.

精确 k 重传递群(sharply k-fold transitive

group）　一类特殊的 k 重传递群. 设 G 是 Ω 上的 k 重传递群，若对 Ω 的任何两个有序 k 元子集 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$ 和 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\}$，有且仅有一个元素 $g\in G$，使得 $\alpha_1^g=\beta_1,\alpha_2^g=\beta_2,\cdots,\alpha_k^g=\beta_k$，则称 G 在 Ω 上是精确 k 重传递的. 一个等价的说法是：G 是精确 k 重传递的，当且仅当 G 是 k 重传递的并且 Ω 的任何 k 元子集在 G 内的点稳定子群是一阶群. 次数为 n 的精确 k 重传递群的阶为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

马蒂厄群(Mathieu group)　特殊的多重传递群. 法国数学家马蒂厄(Mathieu, É. L.)发现的 5 个多重传递群. 它们的次数分别为 11, 12, 22, 23, 24. 后人把这 5 个群称为马蒂厄群，并且用 $M_{11},M_{12},M_{22},M_{23},M_{24}$ 来表示. 马蒂厄群的最直接的定义方法是举出集合 Ω 和 S_Ω 内的若干特别的元素而规定马蒂厄群是这些元素生成的群. 例如，取 $\Omega=\{1,2,\cdots,12\}$，记

$$a=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11),$$
$$b=(5,6,4,10)(11,8,3,7),$$
$$c=(1,12)(2,11)(3,6)(4,8)(5,9)(7,10).$$

并规定 $M_{11}=\langle a,b\rangle,M_{12}=\langle a,b,c\rangle$. 又取 $\Omega=\{1,2,\cdots,24\}$，记

$$d=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23),$$
$$e=(3,17,10,7,9)(5,4,13,14,19)\cdot(11,12,23,8,18)(21,16,15,20,22),$$
$$f=(1,24)(2,23)(3,12)(4,16)(5,18)\cdot(6,10)(7,20)(8,14)(9,21)\cdot(11,17)(13,22)(19,15),$$

并规定 $M_{23}=\langle d,e\rangle,M_{24}=\langle d,e,f\rangle$. 而记

$$g=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11)\cdot(12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22),$$
$$h=(1,4,5,9,3)(2,8,10,7,6)\cdot(12,15,16,20,14)(13,19,21,18,17),$$
$$j=(11,22)(1,21)(2,10,8,6)(12,14,16,20)\cdot(4,17,3,13)(5,19,9,18).$$

规定 $M_{22}=\langle g,h,j\rangle$. 马蒂厄群的阶分别为

$$|M_{11}|=7920,\quad |M_{12}|=95040,$$
$$|M_{22}|=443520,\quad |M_{23}|=10200960,$$
$$|M_{24}|=244823040,$$

其中 M_{11} 可视为 M_{12} 的一个点的稳定子群；M_{22},M_{23} 可分别视为 M_{24} 的两个点的和一个点的稳定子群.

马蒂厄群的特别重要的性质是：1. 它们都是单群，是最早发现的散在单群. 2. 除 M_{22} 外，其余 4 个马蒂厄群都是 4 重传递群，其中 M_{12} 和 M_{24} 还是 5 重传递的，而且 M_{11},M_{12} 分别为精确 4 重传递和精确 5 重传递群. 马蒂厄群与组合设计有密切的关系，存在施泰纳 3 元系 $S(4,5,11),S(5,6,12),S(4,7,23),S(5,8,24)$，使 $M_{11},M_{12},M_{23},M_{24}$ 为它们的自同构群. 同时存在一个施泰纳 3 元系 $S(3,6,22)$，使 M_{22} 是它的自同构群的指数为 2 的正规子群.

传递群的秩(rank of a transitive group)　对传递群的一种重要刻画. 指传递群中一点的稳定子群的轨道数目. 为了研究非 2 重传递的传递群特别是本原群，人们引进秩和次轨道的概念. 设 G 是 Ω 上的传递群，而 α 为 Ω 中的点. G_α 是 Ω 上的置换群，它有轨道 $\{\alpha\}=\Delta_0,\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_{r-1}$. 若 $\beta\in\Omega,g\in G$ 而 $\alpha^g=\beta$，则 G_β 在 Ω 上的轨道就是 $\{\beta\}=\Delta_0^g,\Delta_1^g,\Delta_2^g,\cdots,\Delta_{r-1}^g$，这里 $\Delta_i^g=\{\gamma^g\mid\gamma\in\Delta_i\}$. 这说明一个点的稳定子群在 Ω 上的轨道个数以及这些轨道的长度与点的选取无关，它们反映了群 G 的性质. 人们把任意一点 α 的稳定子群 G_α 的轨道个数 r 称为 G 的秩，而把 G_α 的轨道 $\Delta_0,\Delta_1,\cdots,\Delta_{r-1}$ 称为 G 的次轨道. 传递群的秩总是大于 1 的整数，秩 2 的传递群就是 2 重传递群. 对于非 2 重传递的传递群，可以按秩将其分类加以研究，利用有限单群分类定理，目前已经决定了所有秩 3 的本原群. 次轨道的长度是特别值得注意的参数. 这些参数的构成反映了群的内在性质. 例如，记 $n_i=|\Delta_i|$，并将各 Δ_i 编号，使 $1=n_0\leqslant n_1\leqslant\cdots\leqslant n_{r-1}$，若只要有一个 $j,j<r-1$，使 $n_{j+1}>n_1n_j$，则 G 为非本原群. 另外，若有一个 j，使 $1\leqslant j<r-1$，而 n_j 和 n_{r-1} 互素，则 G 也是非本原群. 把这些条件与其他定理结合起来，在次数比较小的情况下，有可能决定一个本原群的构造.

次轨道(suborbit)　见"传递群的秩".

传递扩张(transitive extension)　以给定的置换群为其点稳定子群的传递群. 设 H 是集合 Ω 上的置换群，在 Ω 上添加一个新的点 $*$，并设 $\Sigma=\{*\}\cup\Omega$，若 G 是 Σ 上的一个传递置换群，并且 $*$ 在 G 内的稳定子群 G_* 恰好是 H，则称 G 是 H 的一个传递扩张. 然而，仅当 H 满足十分严格的条件时，H 才能有传递扩张. 若 H 在 Ω 上有 $r-1$ 轨道，并且 H 有传递扩张 G，则 G 的秩为 r，并称之为秩 r 扩张. 在历史上，通过研究某些极为特殊的置换群(秩 3)的扩张，人们发现了一些新的单群.

撰　稿　李慧陵
审　阅　王萼芳　石生明

典　型　群

典型群(classical group)　一类重要的群. 一般线性群、酉群、辛群、正交群，以及它们的换位子群、对中心的商群等统称为典型群. 实数域和复数域上的典型群是李群的重要例子，它们的构造及表示在李群理论、几何学、多复变函数论以至物理学中都起

着重要作用. 迪克森(Dickson, L. E.)通过对有限域上典型群的构造的研究得到了一大批有限单群. 这是继交错群之后人们发现的又一批重要的有限单群系列. 经过谢瓦莱(Chevalley, C.)的工作进一步扩展为有限李型单群的系列后，为有限单群分类的最后完成奠定了一个重要基础. 迪厄多内(Dieudonné, J.)将迪克森的工作加以推广，通过研究任意体上的典型群的构造也得到了大量的单群. 迪厄多内、施赖埃尔(Schreier, O.)、范·德·瓦尔登(Van der Waerden, B. L.)、华罗庚、万哲先等对研究典型群的构造、自同构及同构作出了重要贡献.

一般线性群(general linear group)　亦称全线性群. 一类重要的典型群. 若 V 是体 K 上 n 维右线性空间，则 V 上全体可逆线性变换在映射的乘法下构成一个群，称为 V 上的一般线性群或全线性群，记为 $GL(V)$. 体 K 上全体 $n\times n$ 可逆方阵在矩阵乘法下构成一个群，称为 K 上 n 次一般线性群，记为 $GL_n(K)$或 $GL(n,K)$. 取定 V 在 K 上任一组基后可将每个 $g\in GL(V)$对应一个矩阵 $A\in GL_n(K)$，从而得到 $GL(V)$到 $GL_n(K)$上的一个同构. 在这个意义下，可以将 $GL(V)$与 $GL_n(K)$等同起来.

全线性群(full linear group)　即"一般线性群".

射影一般线性群(projective general linear group)　一类典型群. 即一般线性群对中心的商群. 一般线性群$GL_n(K)$对它的中心的商群称为 K 上 n 次射影一般线性群，记为 $PGL_n(K)$. $GL_n(K)$的中心由所有的形如 λI 的纯量阵组成，其中 λ 跑遍 K 中所有的非零的中心元素. 若 V 是 K 上 n 维右向量空间，$P(V)$是 V 的全体一维子空间的集合(即射影空间)，则由 $GL(V)$ 在 $P(V)$ 上的作用所得到的群 $PGL(V)$就是射影一般线性群 $PGL_n(K)$.

特殊线性群(special linear group)　亦称幺模群. 一般线性群的一个重要的子群. 对 $A\in GL_n(K)$，若矩阵 $A-I$ 的秩是 1 并且$(A-I)^n=0$，则称 A 为平延. $GL_n(K)$中所有的平延生成一个正规子群，称为 K 上 n 次特殊线性群，记为$SL_n(K)$. $SL_n(K)$也可由全体形如 $I+\lambda E_{ij}(i\neq j,\lambda\in K^*)$的初等矩阵生成，这里 E_{ij}表示第(i,j)元素为 1，其余元素为 0 的 $n\times n$ 矩阵. 当 K 交换时，$SL_n(K)$就是 $GL_n(K)$中行列式为 1 的全体矩阵组成的子群. 除 $SL_2(F_2)$外，$SL_n(K)$是 $GL_n(K)$的换位子群.

幺模群(unimodular group)　即"特殊线性群".

平延(transvection)　见"特殊线性群".

射影特殊线性群(projective special linear group)　一类典型群. 即特殊线性群对中心的商群. 特殊线性群 $SL_n(K)$对它的中心的商群称为射影特殊线性群，记为$PSL_n(K)$，又称为线性分式群并记为 $LF(n,K)$. 除$PSL_2(F_2)$，$PSL_2(F_3)$外，$PSL_n(K)$是单群.

线性分式群(linear fractional group)　即"射影特殊线性群".

辛群(symplectic group)　一类重要的典型群. 若 V 是域 K 上 $2m$ 维列向量空间，f 是 V 的非退化的交错双线性型，则使 $f(Ax,Ay)=f(x,y)$对所有的 $x,y\in V$ 成立的线性变换 $A\in GL(V)$称为关于 f 的辛变换. 关于 f 的全体辛变换在映射乘法下构成的群称为辛群，记为 $Sp_{2m}(K,f)$. 由不同的 f 决定的辛群 $Sp_{2m}(f,K)$相互同构. 因此，不妨取

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{m}(x_{2i-1}y_{2i}-x_{2i}y_{2i-1}),$$

并将相应的辛群记为 $Sp_{2m}(K)$，这里

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{2m}\end{bmatrix},\quad y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_{2m}\end{bmatrix}.$$

从矩阵观点来看，

$$Sp_{2m}(K)=\left\{A\in GL_{2m}(K)\,|\,{}^tA\begin{bmatrix}0 & I^{(m)}\\-I^{(m)} & 0\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}0 & I^{(m)}\\-I^{(m)} & 0\end{bmatrix}\right\}.$$

辛变换的行列式都是 1，辛群的中心为$\{\pm I\}$.

辛变换(symplectic transformation)　见"辛群".

射影辛群(projective symplectic group)　一类重要的典型群. 即辛群对中心的商群. 辛群 $Sp_{2m}(K)$对它的中心的商群称为射影辛群，记为 $PSp_{2m}(K)$. 除 $PSp_2(F_2)$，$PSp_2(F_3)$，$PSp_4(F_2)$外，$PSp_{2m}(K)$都是单群.

正交群(orthogonal group)　一类重要的典型群. 在实数域的特殊情形，全体 $n\times n$ 正交方阵在矩阵乘法下构成的群称为 n 次正交群，记为 $O(n)$. 一般地，设 V 是域 K 上 n 维列向量空间，$Q(x)={}^txAx$ 是V 上的非退化二次型(A 是 K 上某个 $n\times n$ 矩阵)，若 $g\in GL(V)$使 $Q(gx)=Q(x)$对所有的 $x\in V$ 成立，则称 g 是关于 Q 的正交变换. 关于 Q 的全体正交变换在映射乘法下构成一个群，称为关于 Q 的正交群，记为 $O_n(K,Q)$. 当 K 的特征$\neq 2$ 时，V 上每个非退化对称双线性型 f 也决定一个正交群

$$O_n(K,f)=\{g\in GL(V)\,|\,f(gx,gy)=f(x,y),\ \forall\, x,y\in V\}=O_n(K,Q),$$

其中 $Q(x)=f(x,x)/2$. 当 K 是实数域，Q 是单位二次型 $Q(x)={}^tx\cdot x$ 时的正交群 $O_n(K,Q)$就是

$O(n)$.

正交变换(orthogonal transformation) 见"正交群".

洛伦茨群(Lorentz group) 一类重要的典型群. 实数域上使二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_r^2-x_{r+1}^2-\cdots-x_n^2$ 不变的所有 $n\times n$ 实可逆方阵所成的群称为符号差为 $(r,n-r)$ 的洛伦茨群. 符号差为(3,1)的洛伦茨群在狭义相对论中起着重要的作用.

酉群(unitary group) 一类重要的典型群. 在复数域的特殊情形,全体 $n\times n$ 酉方阵在矩阵乘法下构成的群称为 n 次酉群,记为 $U(n)$. 一般地,设 K 是带有对合 $J:a\to\bar{a}$ 的体,V 是 K 上 n 维列向量空间,$f(x,y)={}^t\bar{x}Hy$ 是 V 上非退化厄米特型或反厄米特型,这里 $H\in GL_n(K)$ 且 ${}^t\bar{H}=\varepsilon H,\varepsilon=\pm1$. 若 $A\in GL(V)$ 使 $f(Ax,Ay)=f(x,y)$ 对所有的 $x,y\in V$ 成立,则称 A 是关于 f 的酉变换. 关于 f 的全体酉变换组成 $GL(V)$ 的一个子群,称为关于 f 的酉群,记为 $U_n(K,f)$. 从矩阵的观点看,$U_n(K,f)=\{A\in GL_n(K)\mid {}^t\bar{A}HA=H\}$. 当 f 是交错双线性型时 $U_n(K,f)$ 就是辛群 $Sp_n(K,f)$;当 K 的特征 $\neq2$ 且 f 是对称双线性型时 $U_n(K,f)$ 就是正交群 $O_n(K,f)$;当 K 是复数域,J 是复共轭,$H=I$ 时,酉群 $U_n(K,f)$ 就是酉群 $U(n)$.

酉变换(unitary transformation) 见"酉群".

射影酉群(projective unitary group) 一类典型群. 指酉群的自然同态像. 具有对合 J 的体 K 上关于厄米特型或反厄米特型 f 的酉群 $U_n(K,f)$ 在自然同态 $GL_n(K)\to PGL_n(K)$ 下的像. 记为 $PU_n(K,f)$. 酉群 $U(n)$ 对应的射影酉群记为 $PU(n)$.

迹形式(trace form) 空间上定义的重要的型. 设 V 是体 K 上 n 维线性空间,f 是 V 上关于 K 的对合 J 的厄米特型或反厄米特型,$\varepsilon=\pm1$ 使 $f(x,y)=\varepsilon f(y,x)^J$ ($\forall\ x,y\in V$)成立. 若对每个 $x\in V$ 都可找到 $a\in K$ 使 $f(x,x)=a+\varepsilon a^J$,则称 f 是迹形式. 当 K 的特征 $\neq2$ 时,所有的厄米特型和反厄米特型都是迹形式. 若 K 交换,则仅当 K 的特征 $=2$,$J=1$ 且 f 不是交错型时,f 才不是迹形式.

维特指数(Witt index) 全迷向或全奇异子空间的最大维数. 设 V 是体 K 上右线性空间,f 是定义于 V 上的非退化厄米特型或反厄米特型. 对 V 的子空间 W,若对任意 $x,y\in W$ 都有 $f(x,y)=0$,则称 W 是全迷向子空间. 所有的极大全迷向子空间具有相同的维数,这个维数称为 f 的维特指数,简称 f 的指数. 设 V 是域 K 上线性空间,Q 是 V 上的二次型. 对 V 的子空间 W,若 $Q(x)=0$ 对所有的 $x\in V$ 成立,则称 W 是全奇异子空间. 全奇异子空间一定是关于对称型 $f(x,y)=Q(x+y)-Q(x)-Q(y)$ 的全迷向子空间. V 的所有的极大全奇异子空间具有相同的维数,这个维数称为 Q 的维特指数,简称 Q 的指数.

全迷向子空间(totally isotopic subspace) 见"维特指数".

全奇异子空间(totally singular subspace) 见"维特指数".

二次型的维特指数(Witt index of quadratic form) 见"维特指数".

特殊酉群(special unitary group) 酉群的一个重要子群. 酉群 $U_n(K,f)$ 的子群 $U_n(K,f)\cap SL_n(K)$ 称为特殊酉群,记为 $SU_n(K,f)$. $U(n)$ 的特殊酉群记为 $SU(n)$. 若 $U_n(K,f)$ 不是正交群,f 是迹形式且指数 $\geqslant1$,则 $U_n(K,f)$ 含有平延,称为酉平延. 此时 $U_n(K,f)$ 中全体酉平延生成一个正规子群 $T_n(K,f)$,称为酉平延群. 若 K 交换,则除 $U_n(K,f)=U_3(F_4,f)$ 的情形外,$T_n(K,f)=SU_n(K,f)$. 当 $U_n(K,f)$ 是辛群时酉平延改称辛平延,此时 $T_n(K,f)=Sp_n(K,f)$. $SU_n(K,f)$ 和 $T_n(K,f)$ 在自然同态 $GL_n(K)\to PGL_n(K)$ 下的像 $PSU_n(K,f)$ 和 $PT_n(K,f)$ 分别称为射影特殊酉群和射影酉平延群. 除少数例外情形外,$PT_n(K,f)$ 是单群,例外情形是:$Sp_2(F_2)$,$Sp_2(F_3)$,$Sp_4(F_2)$ 及 $U_n(K,f)\neq Sp_n(K,f)$ 时是

$$PU_2(F_4,f),PU_2(F_9,f),PU_3(F_4,f).$$

酉平延(unitary transvection) 见"特殊酉群".

辛平延(symplectic transvection) 见"特殊酉群".

酉平延群(unitary transvection group) 见"特殊酉群".

射影特殊酉群(projective special unitary group) 见"特殊酉群".

射影酉平延群(projective unitary transvection group) 见"特殊酉群".

二次型的亏数(defect of a quadratic form) 二次型的一种性质. 设 V 是域 K 上线性空间,Q 是 V 上的二次型,$f(x,y)=Q(x+y)-Q(x)-Q(y)$ 是与 Q 相伴的对称双线性型,$V^{\perp}=\{x\in V\mid f(x,y)=0,\forall\ y\in V\}$. 设 Q 非退化,即 $Q(x)\neq0$ 对所有 $0\neq x\in V^{\perp}$ 成立. 当 K 的特征 $\neq2$ 时必有 $V^{\perp}=0$;当 K 的特征 $=2$ 时,$V^{\perp}$ 的维数称为 Q 的亏数,且当 $V^{\perp}=0$ 时称 Q 是无亏数的二次型.

无亏数的二次型(quadratic form without defect) 见"二次型的亏数".

对称(symmetry) 一类特殊的正交变换. 设 A

$\in O_n(K,Q)$(正交群)是线性空间 V 上关于 Q 的正交变换. 若被 A 固定不动的全体向量组成 V 的一个超平面 W,则 A 具有形式

$$x \to Ax = x - \frac{f(x,h)}{Q(h)}h,$$

其中 f 是与 Q 相伴的双线性型,h 是与 W 关于 f 正交的向量且 $Q(h)\neq 0$. 当 K 的特征 $\neq 2$ 时,A 称为关于超平面 W 的对称,它将 h 映到 $-h$. 当 K 的特征 $=2$ 时,A 是平延,称为正交平延;当 K 的特征 $\neq 2$ 时,$O_n(K,Q)$中每个正交变换可以表成不超过 n 个对称之积(嘉当-迪厄多内定理);当 K 的特征 $=2$ 时,$O_n(K,Q)$中的正交变换可以写成正交平延之积,但 $n=4,K=F_2$ 且 Q 的指数 $=2$ 的情形除外.

正交平延(orthogonal transvection) 见"对称".

特殊正交群(special orthogonal group) 一类元素行列式为 1 的重要的典型群. 正交群 $O_n(K,Q)$ 的元素的行列式都是 1 或 -1,其中行列式为 1 的全体正交变换组成一个子群,称为特殊正交群,记为 $SO_n(K,Q)$. 当 K 的特征 $\neq 2$ 时,

$$[O_n(K,Q) : SO_n(K,Q)] = 2,$$

此时$SO_n(K,Q)$也称为旋转群,并记为 $O_n^+(K,Q)$. 它也就是由偶数个对称的乘积的全体组成的群. 实正交群$O(n)$的旋转群记为 $SO(n)$或 O_n^+. 当 K 的特征 $=2$ 时 $SO_n(K,Q)=O_n(K,Q)$. 设 Q 无亏数,即

$$f(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$$

是 Q 所定义的空间 V 上的非退化交错型,$n=2m$ 为偶数,$O_{2m}(K,Q)<Sp_{2m}(K,f)$. 取 V 的基 $e_1,e_2,\cdots,e_{2m}$使 $f(e_i,e_j)=1$(当 $j=i\pm m$)或 0(当 $j\neq i\pm m$). 对任一 $A\in Sp_{2m}(K,f)$,若

$$Ae_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}e_j + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}e_{m+j},$$

$$Ae_{m+i} = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}e_j + \sum_{j=1}^{m} d_{ij}e_{m+j} \quad (1\leqslant i\leqslant m),$$

则

$$D(A) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant m} (Q(e_i)a_{ij}c_{ij} + Q(e_{m+i})b_{ij}d_{ij} + b_{ij}c_{ij})$$

称为 A 的迪克森不变量. 当 $A\in O_{2m}(K,Q)$时 $D(A)=0$ 或 1,满足条件 $D(A)=0$ 的全体正交变换 A 组成 $O_{2m}(K,Q)$的一个指数为 2 的子群,称为旋转群,记为 $O_{2m}^+(K,Q)$. 除 $n=4,K=F_2$ 且 Q 的指数为 2 的情形外,旋转群 $O_n^+(K,Q)$就是 $O_n(K,Q)$中偶数个正交平延的乘积的全体组成的子群.

旋转群(rotation group) 见"特殊正交群".

迪克森不变量(Dickson invariant) 见"特殊正交群".

正交群的换位子群(commutator groups of an orthogonal groups) 一类重要的典型群. 正交群 $O_n(K,Q)$的换位子群记为 $\Omega_n(K,Q)$,$\Omega_n(K,Q)$对$\{\pm I\}\cap\Omega_n(K,Q)$的商群记为 $P\Omega_n(K,Q)$. 若 Q 的指数 $\upsilon\geqslant 1$,则除下述例外情形外,$P\Omega_n(K,Q)$是单群. 例外情形是:$n=2$;$n=3,K=F_3$;$n=4,\upsilon=2$;$n=4,\upsilon=1$,且 $K=F_2$.

李型单群(simple group of Lie type) 一类重要的特殊单群. 谢瓦莱单群和单扭群统称为李型单群. 任意域上的李型单群是按复数域上的单李群仿造出来的. 复单李群对应于复单李代数. 由于存在谢瓦莱基,复单李代数可以改造成为任意域上的李代数,谢瓦莱群就被定义为这个李代数的自同构群的某个子群. 由李代数的邓金图的非平凡对称可以得到相应的谢瓦莱群的自同构,扭群就是在这个自同构下不变的某些元素所生成的群. 有限域上的李型单群组成了最主要的有限单群系列.

谢瓦莱群(Chevalley group) 与一类特殊李代数密切相关的群. 设 L 是复数域上单李代数,Π 是 L 的基础根系,Φ 是 L 的根系,

$$L = H \oplus \sum_{r\in\Phi} L_r$$

是 L 的嘉当分解. 根据谢瓦莱基定理,可以取嘉当子代数的基$\{h_\alpha | \alpha\in\Pi\}$及每个根子空间 L_r 的基 e_r,使 L 关于基$\{h_\alpha,e_r | \alpha\in\Pi,r\in\Phi\}$的乘法常数全是有理整数. 这组基的整系数线性组合的全体 $L_{\mathbf{Z}}$,按 L 的李乘法构成有理整数环 $\mathbf{Z}$ 上一个李代数. 对任意域 K,可将加群 $L_K=K\otimes L_{\mathbf{Z}}$ 定义成一个李代数,使$[1_K\otimes x,1_K\otimes y]=1_K\otimes[x,y]$. 对任意 $r\in\Phi$ 与 $t\in K$,$\mathrm{ad}(te_r):x\to[t\otimes e_r,x]$是 L_K 的幂零微分,

$$x_r(t) = \exp(\mathrm{ad}(te_r)) = 1 + \mathrm{ad}(te_r) + \frac{(\mathrm{ad}(te_r))^2}{2!} + \frac{(\mathrm{ad}(te_r))^3}{3!} + \cdots$$

是 L_K 的自同构. 所有的 $x_r(t)(r\in\Phi,t\in K)$生成的群 $L(K)$是 L_K 的自同构群的一个子群,称为 K 上的谢瓦莱群. 每个 $x_r(t)(t\in\Phi,t\in K^*)$ 称为 $L(K)$的根元素,而 $X_r=\{x_r(t) | t\in K\}$称为 $L(K)$的根子群. 当 L 分别是 $A_l(l\geqslant 1)$,$B_l(l\geqslant 2)$,$C_l(l\geqslant 3)$,$D_l(l\geqslant 4)$,$E_l(6\leqslant l\leqslant 8)$,$F_4$,$G_2$ 型李代数时,分别得到谢瓦莱群 $A_l(K)$,$B_l(K)$,$C_l(K)$,$D_l(K)$,$E_l(K)$,$F_4(K)$,$G_2(K)$. 其中 $A_l(K)$,$B_l(K)$,$C_l(K)$,$D_l(K)$分别同构于典型群 $PSL_{l+1}(K)$,$P\Omega_{2l+1}(K,Q_B)$(Q_B 的指数 $=l$),$PSp_{2l}(K)$,$P\Omega_{2l}(K,Q_D)$(Q_D 的指数 $=l$). 当 K 是 q 元有限域时,也将 $L(K)$简记为 $L(q)$. 除 $A_1(2)$,$A_1(3)$,$B_2(2)$,$G_2(2)$外,谢瓦莱群都是单群.

扭群(twisted group) 谢瓦莱群的重要子群. 设单李代数 $L=A_l,D_l,E_6,B_2,G_2$ 或 F_4,它的邓金图有非平凡的对称 ρ,ρ 的阶 $n=2$ 或 3. 设 K 是域,且

当 $L=B_2$ 或 F_4 时 K 是特征 2 的完全域；当 $L=G_2$ 时 K 是特征 3 的完全域. 若 $G=L(K)$ 是 K 上 L 型谢瓦莱群，则存在 G 的自同构 g，称为图自同构，将每个基础根 $\alpha\in\Pi$ 对应的根子群 X_α 变为基础根 $\rho(\alpha)$ 对应的根子群 $X_{\rho(\alpha)}$. 域 K 的每个自同构 τ 也决定 G 的一个自同构，称为域自同构并仍记为 τ，将每个根元素 $x_r(t)$ 变为 $x_r(t^\tau)$. 图自同构 g 与每个域自同构 τ 相交换，它们的乘积 $\sigma=g\tau$ 仍是 G 的自同构. 选取非平凡的域自同构 τ 使 $\sigma=g\tau$ 与 ρ 具有相同的阶 n，即 $\sigma^n=1$. 所有的正根 $r\in\Phi^+$ 对应的根子群 X_r 生成 G 的子群 U，所有的负根 $r\in\Phi^-$ 对应的根子群 X_r 生成子群 V. 又，若

$$U^1=\{x\in U\,|\,\sigma(x)=x\},$$
$$V^1=\{x\in V\,|\,\sigma(x)=x\},$$

则 U^1 与 V^1 生成的子群记为 ${}^nL(K)$，称为扭群. 当 $n=2$ 时，${}^nL(K)$ 称为 K 上 L 型扭群，包括 ${}^2A_l(K)$，${}^2D_l(K)$，${}^2E(K)$，${}^2B_2(K)$，${}^2G_2(K)$，${}^2F_4(K)$；当 $n=3$ 时，${}^nL(K)$ 为 ${}^3D_4(K)$，称为 K 上 D_4 型三次扭群. 群 ${}^2B_2(K)$ 又称为铃木群；群 ${}^2G_2(K)$，${}^2F_4(K)$ 又称为雷群. 群 ${}^2A_l(K)$ 同构于酉群 $\mathrm{PSU}_{l+1}(K,f)$，f 的指数为 $(l+1)/2$（当 l 奇）或 $l/2$（当 l 偶）. 群 ${}^2D_l(K)$ 同构于正交群 $\mathrm{P}\Omega_{2l}(K_0,\mathrm{Q})$，其中 K_0 是域自同构 L 的不变子域，Q 的指数为 $l-1$. 当 K 是 q 元域时可将 ${}^nL(K)$ 简记为 ${}^nL(q)$. 除 ${}^2A_2(2^2)$，${}^2B_2(2)$，${}^2G_2(3)$，${}^2F_4(2)$ 外，扭群都是单群.

图自同构(graph automorphism)　见“扭群”.

域自同构(isomorphism of fields)　见“扭群”.

铃木群(Suzuki group)　见“扭群”.

雷群(Ree group)　见“扭群”.

撰　稿　李尚志
审　阅　王仰贤　石生明

群 表 示 论

群表示论(representation theory of groups)　用具体的群来描述抽象群的理论. 它是群论研究的有力工具. 一个群 G 到另一个群 H 的同态称为群 G 的一个表示. 通过群表示，将一个需要加以研究的群 G 与一个已经了解得比较多的具体的群 H 联系起来，并由 H 的性质来探究 G 的性质，这种理论就是群表示论. 线性表示与置换表示是最重要的两种表示. 群 G 的线性表示就是 G 到一个向量空间 V 上的完全线性群 $\mathrm{GL}(V)$ 的同态. V 称为表示空间，V 的维数也称为表示的维数. 群 G 的置换表示是指 G 到一个对称群 S_n 内的同态. 群表示论是群论的重要组成部分. 19 世纪末，弗罗贝尼乌斯(Frobenius，F. G.)与伯恩赛德(Burnside，W.)首先对有限群表示论做了系统的研究工作，这些结果出现在伯恩赛德 1911 年的重要著作《有限群理论》一书中. 后来，有限群表示论又发展到无限群表示论，且对各类不同的群建立了相应表示理论，如拓扑群、李群、紧李群、李型群等的表示论. 群表示论在现代数学的许多分支以及理论物理、量子化学、通讯理论等方面具有广泛的应用.

表示空间(representation space)　见“群表示论”.

群的线性表示(linear representations of groups)　见“群表示论”.

表示的维数(degree of a representation)　见“群表示论”.

矩阵表示(Matrix representation)　群到矩阵群的同态. 设 $\rho:G\to\mathrm{GL}(V)$ 是群 G 的一个线性表示，其中 V 是域 F 上 n 维向量空间. 这时 ρ 也称为 G 的 F 表示. 取定 V 的一个基 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，对于 G 的每个元 g，设 $\rho(g)$ 在这一基下的矩阵为 $T(g)$，则称同态 $T:G\to\mathrm{GL}_n(F)$ 使 $g\to T(g)$ 为 ρ 对应的矩阵表示，其中 $\mathrm{GL}_n(F)$ 表示 F 上全体 n 阶可逆矩阵所组成的乘法群.

F 表示(F-representation)　见“矩阵表示”.

等价表示(equivalent representations)　数学结构相同的线性表示. 设 ρ_1,ρ_2 是群 G 的两个线性表示，表示空间分别为 V_1,V_2. 若存在 V_1 到 V_2 的同构 μ 使得对每个 $g\in G$ 有 $\rho_2(g)\mu=\mu\rho_1(g)$，则称 ρ_1，ρ_2 是等价表示，或简称 ρ_1 与 ρ_2 等价. 若取定 V_1,V_2 的一个基，ρ_i 在取定基之下的矩阵表示为 $T_i:G\to\mathrm{GL}_n(F)$ $(i=1,2)$，则 ρ_1 与 ρ_2 等价当且仅当存在 F 上的可逆矩阵 M 使得对每个 $g\in G$ 有

$$M^{-1}T_1(g)M=T_2(g).$$

舒尔引理(Schur lemma)　描述不可约模之间同态的重要定理. 该引理断言：设 ρ_1,ρ_2 是群 G 的两个不可约 F 表示，表示空间分别为 V_1,V_2，σ 是 V_1 到 V_2 的非零线性映射，若 $\forall\, g\in G$ 有 $\rho_1(g)\sigma=\sigma\rho_2(g)$，则 σ 是 V_1 到 V_2 的同构且 ρ_1 与 ρ_2 是等价表示. 实际上舒尔引理具有下面更一般的形式：若 R 是一个环，M,N 是不可约 R 模，则 M 到 N 的任何非零模同态均为同构. 特别地，模自同态环 $\mathrm{End}_R(M)$ 是除环.

整表示(integral representation)　一类特殊的线性表示. 设 R 是一个整环，其分式域为 F. 若群 G 在域 F 上的一个矩阵表示 $T:G\to\mathrm{GL}_n(F)$ 使得对任 $g\in G$，矩阵 $T(g)$ 的每个元素均在 R 中，则称这种表示为整表示. 若 R 是一个主理想整环，其分式域为 F，则每个 F 表示均等价于一个 R 表示.

酉表示(unitary representation)　群到酉群的

同态. 若 V 是一个 n 维酉空间，V 上全体酉变换成为一个乘法群 U_n，则称 n 为次酉群，它是 n 次完全线性群 $GL_n(V)$ 的一个子群. 群 G 到 U_n 的一个同态 $\rho: G \to U_n$ 称为 G 的酉表示. 酉表示与通常的表示有如下关系：有限群 G 在一个酉空间上的每个线性表示均等价于一个酉表示.

群的忠实表示(faithful representation of group)　群到线性群的子群的同构. 若 ρ 是 G 的 F 表示，V 是表示空间，则使 $\rho(g)$ 为 V 上恒等变换的全体元素 g 组成 G 的一个正规子群 N，N 称为表示 ρ 的核. 若表示 ρ 的核为单位元群，则 ρ 称为忠实表示，ρ 提供的特征标称为忠实特征标.

忠实特征标(faithful character)　见"群的忠实表示".

群的不可约表示(irreducible representation of a group)　群 G 的一类线性表示. 设 $\rho: G \to GL(V)$ 是 G 的一个表示，若 $V \neq \{0\}$ 且除 V 本身以外不存在任何其他 $\rho(G)$ 不变子空间，则称 ρ 是 G 的一个不可约表示；否则，称为可约表示. 不可约表示所对应的特征标称为不可约特征标. 若 V_1, V_2 都是 V 的 $\rho(G)$ 不变子空间且 $V_1 \subseteq V_2$，则 ρ 在子空间 V_1 及商空间 V_2/V_1 上得出 G 的表示，分别称为子表示和商表示. ρ 的某个子表示或商表示不可约时，称它为 ρ 的一个不可约成分.

群的可约表示(reducible representation of group)　见"群的不可约表示".

不可约特征标(irreducible character)　见"群的不可约表示".

子表示(subrepresentation)　见"群的不可约表示".

商表示(factor representation)　见"群的不可约表示".

不可约成分(irreducible constituent)　见"群的不可约表示".

绝对不可约表示(absolutely irreducible representation)　域扩张之下保持不可约性的线性表示. 若 ρ 是群 G 的一个 F 表示，K 是 F 的扩域，则 ρ 也可以看成一个 K 表示. 若对 F 的任一个扩域 K，ρ 均为不可约 K 表示，则 ρ 称为绝对不可约表示.

完全可约表示(completely reducible representation)　可完全分解为不可约表示的一种表示. 设 $\rho: G \to GL(V)$ 是 G 的一种表示，若 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ 使每个 V_i 均为 $\rho(G)$ 不变子空间且 V_i 对应 G 的不可约表示，则称 ρ 为完全可约表示.

特征标(character)　一种特殊函数. 即群 G 的与它的某个线性表示有密切关系的函数. 设 $\rho: G \to GL(V)$ 是群 G 的一个 F 线性表示. 取定 V 的一个基，并假定在这一基下 ρ 对应的矩阵表示为 $T: G \to GL_n(F)$. 对 $g \in G$，记 $\mathrm{tr}(T(g))$ 为矩阵 $T(g)$ 的迹，即 $T(g)$ 的主对角线元素之和. 定义 G 上的 F 值函数 $\chi(g) = \mathrm{tr}(T(g))$，$g \in G$，其取值与 V 的基选择无关. 称这一函数为 ρ 所提供的 F 特征标. 通常把复数域上表示对应的特征标称为复特征标. 特征标是群 G 上的类函数，即其取值在 G 的同一个共轭类上相同.

复特征标(complex character)　见"特征标".

主特征标(principal character)　单位表示的特征标. 若 F 是一个域，G 是一个群，ρ 是 G 的 1 维 F 表示使 $\forall\, g \in G$ 有 $\rho(g) = 1$，则此表示 ρ 称为 G 的单位表示或恒等表示. 单位表示所提供的特征标称为主特征标. 对于主特征标 θ，则对每 $g \in G$ 有 $\theta(g) = 1$.

单位表示(unit representation)　见"主特征标".

恒等表示(identity representation)　即"单位表示".

特征标表(character table)　特征标的数值表. 设有限群 G 的全体复不可约特征标为 $\{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n\}$，$G$ 的一个共轭类代表系为 $\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$. 复数矩阵 $A = (\chi_i(g_j))_{n \times n}$ 称为 G 的特征标表. G 的许多群论性质可以通过特征标表反映出来. 例如，通过特征标表可以查出 G 的所有正规子群. 因此 G 是单群可以由特征标表直接决定. 但是不同构的群可能有相同的特征标表.

正交关系(orthogonality relation)　特征标满足的一类恒等式. 设 $\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n\}$ 是 G 的全体不可约复特征标，$\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ 是 G 的共轭类代表系. 下面的等式称为特征标的正交关系：

$$\text{第一正交关系：} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \chi_j(g^{-1}) = \delta_{ij}.$$

$$\text{第二正交关系：} \frac{1}{|C_G(g_i)|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}G} \chi(g_i) \chi(g_j^{-1}) = \delta_{ij}.$$

其中，$C_G(g_i)$ 为 g_i 在 G 内的中心化子. 设 $n \times n$ 矩阵 $A = \{\chi_i(g_j)\}$，i 为 A 的行指标，j 为 A 的列指标，A 为群 G 的特征标表，第一正交关系表达了特征标表的行正交性，第二正交关系表达了特征标表的列正交性. 对 G 上复值类函数(即取值于复数域且在群 G 的相同共轭类上函数值相同的函数)，可以定义一个内积. 设 φ, ψ 是两个类函数，若

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \psi(g^{-1}),$$

则它是一个内积，称为类函数的内积. 第一正交关系说明 G 的两个不同的不可约复特征标是正交的.

类函数的内积(inner product of class functions)　见"正交关系".

群表示的马施克定理(Maschke theorem for

representation of group） 群表示的一个重要的定理. 是关于群表示的完全可约性的定理. 该定理断言：设 G 是一个群，F 是一个域，则 G 的每个 F 表示完全可约，当且仅当 F 的特征 $\mathrm{ch}F$ 不能整除 G 的阶.

中心特征标（central character） F 代数 A 到 F 的非零代数同态. 若 F 是复数域，A 是群代数 FG，$\{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n\}$ 是 G 的全体不可约复特征标，则 FG 恰有 n 个中心特征标 $\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$. 若对于 G 的每个共轭类 C，记 $\hat{C} = \sum_{x \in C} x$，则定义中心特征标 ω_i 是 $\omega_i(\hat{C}) = |C|\chi_i(g)/\chi_i(1)$ $(g \in C)$.

群的正则表示（regular representation of group） 一种重要的群表示. 由群代数 FG 作为表示空间而得到的表示. 代数 A 本身通过 A 的元素右（左）乘作用做成一个右（左）A 模，将这种模称为 A 的右（左）正则模. 群代数 FG 的正则模对应于 G 的一个线性表示称为 G 的正则表示，其对应的特征标称为正则特征标. 正则表示具有下面的重要性质：任何不可约表示都是正则表示的一个不可约成分.

左（右）正则模（left（right） regular module） 见“群的正则表示”.

正则特征标（regular character） 见“正则表示”.

群的诱导表示（induced representation of group） 由子群表示导出大群表示的一种方法. 设 $\rho: G \to \mathrm{GL}(V)$ 是群 G 的一个表示，定义 G 对 V 的作用：$vg = \rho(g^{-1})(v)$ $(v \in V; g \in G)$，并将 G 的作用线性开拓为群代数 FG 的作用，即对

$$\sum_{g \in G} a_g g \in FG \quad (v \in V),$$

记

$$v\Big(\sum_{g \in G} a_g g\Big) = \sum_{g \in G} a_g \rho(g^{-1}) v,$$

这样 V 成为一个右 FG 模，称之为 ρ 的表示模. 反过来，若 V 是一个右 FG 模，对于每个 $g \in G, v \in V$，定义 $\rho(g)v = vg^{-1}$，则 ρ 是 G 的一个表示. 若 H 是 G 的一个子群，ρ 是 H 的一个 F 表示，θ 是 ρ 对应的特征标，W 是 ρ 对应的表示模，则张量积 $W \otimes_{FH} FG$ 是一个右 FG 模，称为 W 的诱导模，记为 W^G，W^G 所对应的 G 的表示称为 ρ 的诱导表示，记为 ρ^G，ρ^G 对应的特征标称为 θ 的诱导特征标，记为 θ^G.

表示模（representation module） 见“群的诱导表示”.

诱导模（induced module） 见“群的诱导表示”.

诱导特征标（induced character） 见“群的诱导表示”.

广义特征标（generalized character） 由给定特征标经运算而得的新的特征标. 群 G 的若干个复特征标的整系数线性组合，称为 G 的广义特征标. 由于 G 的特征标之和与积仍是 G 的一个特征标，所以 G 的全体广义特征标组成一个环，通常将这个环记为 $\mathrm{ch}(G)$，并称之为广义特征标环.

广义特征标环（generalized character ring） 见“广义特征标”.

特征标刻画定理（characterization theorem of characters） 群 G 的类函数成为特征标的判别条件. 设 G 是一个有限群，若 G 的子群 H 为一个素数幂阶群与另一个循环群的直积，则 H 称为初等子群. 布劳尔（Brauer，R. D.）于 1953 年证明了下面的定理：G 上的复值类函数 χ 是 G 的广义特征标，当且仅当 χ 限制在 G 的每一个初等子群上是这个初等子群的广义特征标. 通常把这一定理称为特征标刻画定理.

初等子群（elementary subgroup） 见“特征标刻画定理”.

弗罗贝尼乌斯互反律（Frobenius reciprocity） 在特征标计算中将诱导特征标与限制特征标联系起来的重要公式. 设 χ, ψ 是群 G 的两个复特征标，定义 χ 与 ψ 的内积

$$(\chi, \psi)_G = |G|^{-1} \sum\nolimits_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}).$$

(χ, ψ) 是一个非负整数. 若 H 是 G 的子群，χ 与 θ 分别是 G 及 H 的复特征标，θ^G 表 θ 的诱导特征标，χ_H 表 χ 在 H 上的限制，它仍是 H 的特征标，则有以下公式：$(\chi, \theta^G)_G = (\chi_H, \theta)_H$. 这一公式称为弗罗贝尼乌斯互反律，它表示 θ^G 的某不可约成分 χ 的重数等于 χ_H 中不可约成分 θ 的重数. 这一性质对于特征标的计算很有用处.

克里福德理论（Clifford theory） 群表示论的重要理论之一. 研究有限群 G 的不可约表示与其正规子群 N 的不可约表示的关系的理论. 它主要包含三个方面：

1. G 的不可约表示对 N 的限制.
2. N 的不可约表示到 G 的扩张.
3. N 的不可约表示到 G 的诱导.

克里福德（Clifford，A. H.）于 1937 年首先发展了这一理论. 下面的克里福德定理是这一理论的基本结果之一. 该定理断言：若 $N \lhd G, \chi \in \mathrm{Irr}G$，$\theta$ 是 χ_N 的一个不可约成分，$\theta = \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ 是 θ 在 G 下的全体不同的共轭，则存在正整数 e 使得

$$\chi_N = e \sum_{i=1}^{n} \theta_i.$$

特别地，χ_N 完全可约.

克里福德定理（Clifford theorem） 见“克里福德理论”.

麦凯分解(Mackey decomposition) 关于诱导模限制到子群上的某个直和分解的定理.麦凯(Mackey,G.W.)于1951年证明了下面的定理:设R是一个交换环,H,L是有限群G的子群,W是RH模,S是G的(H,L)双陪集代表系,则有RL模的直和分解

$$(W^G)_L \cong \bigoplus_{x\in S}(W^x_{H^x\cap L})^L.$$

通常将这一定理中给出的分解称为麦凯分解.

单项表示(monomial representation) 一类特殊的线性表示.一个n阶方阵,若它的每行及每列至多只有一个元素不为零,则称这个方阵为单项矩阵.设ρ是群G的一个线性表示,V是表示空间,取定V的一个基,ρ在这一基下的矩阵表示为T,若对每个$g\in G$,$T(g)$均为单项矩阵,则称ρ为单项表示.G的不可约表示ρ是单项表示,当且仅当它是G的某个子群的一维表示的诱导表示.

单项矩阵(monomial matix) 见"单项表示".

M群(M-group) 界于可解与幂零之间的一类群.每个不可约复表示都是单项表示的有限群称为M群.M群是可解群,而有限超可解群是M群.此外,M群还有一些有趣的性质.达德(Dade,E.C.)于1964年证明:每个有限可解群必是一个M群的子群.如何用纯粹群论的条件来刻画M群,至今仍是一个颇受关注的问题.

群的分裂域(splitting field of a group) 一类重要的域.使一个代数的每个不可约表示在基础域扩张之下保持不可约性不变的基础域.设F是一个域,A是一个F代数,若V是一个A模,E是F的一个扩域,则$V\otimes_F E$是一个$A\otimes_F E$模.若V是一个不可约A模且对于F的每个扩域E,$V\otimes_F E$均为不可约$A\otimes_F E$模,则称V为绝对不可约A模.若F使得每个不可约A模均为绝对不可约的,则F称为A的分裂域.若G是一个群,F是群代数FG的分裂域,则F也称为群的分裂域.布劳尔(Brauer,R.D.)于1945年证明:若G的方指数是n,则在有理数域中添加n次本原单位根所得的扩域是G的分裂域.这一定理通常称为布劳尔分裂域定理.

布劳尔分裂域定理(Brauer splitting field theorem) 见"群的分裂域".

射影表示(projective representation) 与相应射影线性群密切相关的一种表示.若F是一个域,G是一个群,映射$\rho:G\to GL_n(F)$使得对于任意$g,h\in G$,存在$\alpha(g,h)\in F$使$\rho(g)\rho(h)=\alpha(g,h)\rho(gh)$,则$\rho$称为群$G$的$F$射影表示,$n$称为表示$\rho$的维数.其中,$\alpha:G\times G\to F^*=F\backslash\{0\}$满足条件

$\alpha(xy,z)\alpha(x,y)=\alpha(x,yz)\alpha(y,z)\ (\forall\ x,y,z\in G)$,

则称α为与射影表示ρ有关的因子团.若$Z(n,F)$是一般线性群$GL(n,F)$的中心,

$$PGL(n,F)=GL(n,F)/Z(n,F)$$

为射影线性群,则ρ与自然同态的合成就是$G\to PGL(n,F)$的同态,因此,称ρ为射影表示.

因子团(factor set) 见"射影表示".

惯性群(inertia group) 群表示论中一类重要的群.可由正规子群特征标的稳定子群决定的群.设N是一个有限群G的正规子群,θ是N的一个特征标,G的元g如下地作用在θ上:对每$a\in N$使$\theta^g(a)=\theta(gag^{-1})$,这时$\theta^g$仍是$N$的特征标,将$\theta$的稳定子群$I_G(\theta)=\{g\in G\mid\theta^g=\theta\}$称为$\theta$的惯性群.

设R是一个交换环,W是一个右RN模.对任意$g\in G$,做一个右RN模记为W^g如下:它作为R模与W同构.对$w\in W$,记它在W^g中的对应元为w^g.于是$W^g=\{w^g\mid w\in W\}$.任意$a\in N$,若a对W^g中元w^g的作用为$w^g a=(w(gag^{-1}))^g$,则$I_G(W)=\{g\in G\mid W^g\cong W\}$称为$RN$模$W$的惯性群.当$R$是域时,若$W$提供的特征标为$\theta$,则$W^g$提供的特征标正是$\theta^g$.这时$I_G(\theta)=I_G(W)$.

舒尔指数(Schur index) 将子域的特征标看成扩域的特征标时,刻画分解程度的一类数量.若F是一个域,E是F的扩域,ρ是群G的一个不可约E表示,则存在G的一个不可约F表示ζ使ρ是ζ^E的不可约成分,其中ζ^E是将ζ看做E表示.进而,若G的两个不可约F表示ζ_1,ζ_2使ζ_1^E与ζ_2^E都有不可约成分ρ,则ζ_1与ζ_2是等价表示.下面假定χ是G的一个不可约E特征标,对应表示ρ,F是E的一个子域,ζ是G的一个不可约F表示使得ρ为ζ^E的不可约成分,这时定义χ在F上的舒尔指数为ρ在ζ^E中的重数,记为$m_F(\chi)$.由于前述原因,舒尔指数是一个确定的正整数.利用舒尔指数可以测度一个不可约E特征标是否是其子域F上的特征标.

模表示论(modular representation theory) 群在特征能整除群的阶的域上的表示理论.设$\rho:G\to GL(n,F)$是群G的一个表示,若域F的特征为零或者为素数p,而p不整除G的阶,则称ρ为常表示;而若域F的特征为素数p,且p整除G的阶,则ρ称为模表示,也称p模表示.模表示理论主要研究模表示的性质和构造以及模表示与常表示的关系.20世纪初,迪克森(Dickson,L.E.)首先考察了群的模表示.模表示论的建立主要归功于布劳尔(Brauer,R.D.),从1935年开始在其后的40多年中,布劳尔对模表示做了深入的研究工作,其主要结果包括布劳尔的三个块论的主要定理,以及有关特征标的一系列深入结论.这些结果被反复应用于有限单群分类的理论中.20世纪50年代之后,格林(Green,J.A.)系统地建立了不可分解模的理论.段学复对于模表示有深入的研究,对于阶的p因子部

分只含 p 的一次幂的有限群特征标的块理论得到了重要的结果. 模表示论的研究至今仍十分活跃,还有许多问题没有解决.

常表示(ordinary representation) 见"模表示论".

模表示(modular representation) 见"模表示论".

块论(block theory) 模表示论的重要组成部分. 设 e 是代数 A 的一个中心本原幂等元,将所有使 $Ve=V$ 成立的有限生成 A 模 V 所组成的模范畴 B,称为与 e 对应的代数 A 的块. Ae 是 A 的一个双边理想,而且它不能分解成更小的双边理想的直和,将 Ae 称为与 e 对应的块理想. 群代数的块也称为这个群的块. 进而,还可按块将不可约常表示及模特征标进行分类,因此,文献中也有把属于某块的所有不可约常表示及模特征标的集合称为块. 块论主要研究群代数的块中不可分解模和块中特征标的性质以及大群的块与子群块间的关系. 对于半单群代数来说,块论并不包含比常表示更多的结果.

块(block) 见"块论".

块理想(block ideal) 见"块论".

群的块(block of a group) 见"块论".

亏群(defect group) 与一个块相关的一族共轭的 p 子群. 设 k 是一个特征为 p 的域,G 是一个有限群,G 的元素通过共轭作用于群代数 kG. 设 H 是 G 的子群,S 是 H 在 G 内的陪集代表系,记 $(kG)^H$ 为 kG 在 H 作用下的固定点子代数. 将 k 线性映射

$$\mathrm{Tr}_H^G:\ (kG)^H \to (kG)^G$$

使

$$\mathrm{Tr}_H^G(x) = \sum_{g\in S} x^g.$$

称为迹映射,记

$$\mathrm{Tr}_H^G((kG)^H)) = (kG)_H^G.$$

设 B 是 kG 的一个块,块幂等元为 e,将满足条件 $e\in (kG)_D^G$ 的极小子群 D 称为块 B 的亏群,这时 D 是一个 p 群,而且,若 D 是 B 的一个亏群,则 D 的每一个共轭也是 B 的亏群. 设亏群的阶为 p^d,将 d 称为块 B 亏数. 亏数的大小是衡量块代数距单代数有多远的一个标志,是块的一个重要不变量.

迹映射(trace map) 见"亏群".

亏数(defect) 见"亏群".

主不可分解模(principal indecomposable module) 一类最重要的不可分解模. 即正则模的不可分解的非零直和项. 若诺特环 A 满足惟一分解条件,则不可分解 A 模 V 同构于主不可分解模,当且仅当 V 是有限生成的投射模.

布劳尔特征标(Brauer character) 亦称模特征标. 群表示论的一个重要概念. 设 G 是一个群,R 是一个离散赋值环,K 是 R 的分式域,$k=R/J(R)$ 是一个特征为 p 的域,且 K 及 k 含 $|G|$ 次本原单位根. 设 V 是一个 kG 模,对应 G 的 k 表示 ρ,θ 是 ρ 的迹函数. 对于 G 的每个 p' 元素 g,设

$$\theta(g) = \sum_i a_i,$$

a_i 是 $\rho(g)$ 的特征根. 由于 R 的 p' 次单位根群与 k 的 p' 次单位根群同构,所以在 R 中有 a_i 的同构像 b_i. 记复值函数

$$\varphi(g) = \sum_i b_i.$$

将 G 的 p' 元上的复值函数 φ 称为 V 的布劳尔特征标. 当 p 不能整除 $|G|$ 时布劳尔特征标就是常特征标.

模特征标(modular character) 即"布劳尔特征标".

常特征标(ordinary character) 见"布劳尔特征标".

嘉当矩阵(Cartan matrix) 群表示论的一个特殊矩阵. 即描述各主不可分解模的不可约成分重数的矩阵. 设 A 是域 F 上有限维代数,U_i 是 A 的一个主不可分解模,亦即 U_i 是正则模 A 的不可分解直和项. 若 L_j 是一个不可约 A 模,则 L_j 作为 A 模 U_i 的合成因子的重数 c_{ij} 称为代数 A 的一个嘉当不变量,由全体嘉当不变量 c_{ij} 组成的矩阵 $C=(c_{ij})$ 称为 A 的嘉当矩阵. 嘉当矩阵是一个整数方阵. 若 A 是一个对称代数,F 是 A 的分裂域,则嘉当矩阵是一个对称矩阵.

嘉当不变量(Cartan invariant) 见"嘉当矩阵".

分解矩阵(decomposition matrix) 群表示论的一个特殊矩阵. 即描述与各个不可约常表示相应的模表示的不可约成分重数的矩阵. 设 R 是一个完备的离散赋值环,K 是 R 的分式域,$k=R/J(R)$ 是特征 p 的有限域. 若 A 是一个有限维 R 代数,则存在 R 自由 A 模 $X_i(1\leqslant i\leqslant n)$,使 $\{X_i\otimes_R K\}$ 是全体不可约 $A\otimes_R K$ 模. 若

$$\overline{X}_i = X_i/J(R)X_i,\quad \overline{A} = A/J(R)A,$$

则 $\overline{A}$ 是一个 k 代数,$\overline{X}_i$ 是 $\overline{A}$ 模. 设 L_j 是不可约 $\overline{A}$ 模,将 L_j 在 $\overline{X}_i$ 中作为合成因子的重数 d_{ij} 称为 A 的分解数,由全体分解数 d_{ij} 组成的矩阵 (d_{ij}) 称为分解矩阵. 若 K 与 k 都是 A 的分裂域且 $A\otimes_R K$ 是半单代数,则 $D^TD=C$,其中 C 是 $\overline{A}$ 的嘉当矩阵,D^T 是 D 的转置矩阵. 群代数 RG 的分解矩阵也称为群 G 的分解矩阵.

分解数(decomposition number) 见"分解矩阵".

相对投射模(relatively projective module) 比

投射模性质稍弱的一类模.设 R 是一个交换环,G 是一个有限群,H 是 G 的子群,V 是一个有限生成的 RG 模,若对于每个 RG 模的正合列

$$0 \to W \to U \to V \to 0, \qquad (*)$$

只要 $0 \to W_H \to U_H \to V_H \to 0$ 是分裂的 RH 模正合列,则$(*)$也分裂,称 V 是 RH 相对投射的,或简称 V 为 H 投射的.希格曼(Higman,G.)于 1954 年证明了下面的定理:若 V 是有限生成 RG 模,$H \leqslant G$,则下列条件等价:

1. V 是 H 投射的.
2. V 是$(V_H)^G$ 的直和项.
3. 存在一个有限生成的 RH 模 W,使 V 是 W^G 的直和项.
4. $\mathrm{End}_R(V)$是 H 投射的 RG 模.
5. 存在 $f \in \mathrm{End}_{RH}(V)$使

$$\sum_g fg = 1,$$

其中 g 遍取 H 在 G 内的陪集代表系,1 是 V 上的恒等变换.

顶(vertex) 子群的特殊共轭类.与不可分解模相联系的某个 p 子群的共轭类.设 G 是有限群,R 为交换环.若 V 是有限生成的 R 自由 RG 不可分解模,则在所有使 V 为 H 投射模的子群 H 中必有一个"最小"的子群 P,且 P 共轭于上述任何子群 H.这样的 P 称为 V 的一个顶,V 的顶形成子群 P 的共轭类.

源(source) 不可分解模的特殊共轭类.不可分解模 V 的顶子群的某个不可分解模的共轭类.若 RG 不可分解模 V 的一个顶为 P,则 V 是 P 投射的,于是,有不可分解 RP 模 W,使 V 是 W^G 的直和项.称 W 为 V 的一个源.所有这样的 W 形成 G 作用下的共轭类.

格林对应(Green correspondence) 有限群与其子群之间的一类不可分解模间的对应关系.设 G 是一个有限群,R 是一个完备局部整环(即在局部整环 R 模 V 上定义一个距离函数 d,若函数 d 是完备的,即则称 V 完备.若正则模 R 完备,就称 R 为完备局部整环).格林(Green,J. A.)于 1964 年发现了群 G 的一类不可分解模与 G 的某种子群的不可分解模之间的对应关系,将这一对应关系称为格林对应.其定义依赖于下面的定理:设 P 是群 G 的一个 p 子群,G 的子群 H 含$\mathrm{N}_G(P)$.若用 $M_P(G)$表顶为 P 的不可分解 RG 模的集合,则存在一一对应 $f: M_P(G) \to M_P(H)$,使得对每个 $V \in M_P(G)$,$f(V)$是 V_H 惟一的顶为 P 的不可分解 RH 模的直和项,而对每个 $W \in M_P(H)$,$f^{-1}(W)$是 W^G 惟一顶为 P 的不可分解 RG 模直和项.这一定理中的一一映射 f 称为关于(G,P,H)的格林对应.

格林环(Green ring) 群代数产生的一个环.设 R 是一个交换环,G 是一个群.若群代数 RG 的全体不可分解 R 自由 RG 模的同构类所生成的自由加群为 $a(RG)$,并规定 $a(RG)$的加法为$(V_1)+(V_2)=(V_1 \oplus V_2)$,其中$(V_i)$表示 RG 模 V_i 的同构类;定义 $a(RG)$的乘法为$(V_1) \cdot (V_2)=(V_1 \otimes V_2)$,则 $a(RG)$成为一个交换环,称为 RG 的格林环.而将

$$A(RG) = a(RG) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}$$

称为复格林环.

复格林环(Green ring) 见"格林环".

赫克代数(Hecke algebra) 群代数的与各不可约表示相对应的一类子代数.设 K 是复数域的一个子域,且 K 是有限群 G 以及 G 的子群的分裂域.设 A 是 G 的一个子群,φ 是 A 的 K 特征标,φ 对应的表示模为 eKA,其中 e 是 KA 的幂等元.将 KG 的子代数 $eKGe$ 称为关于(A,φ)的赫克代数,记为 $H(A,\varphi)$.赫克代数对于诱导特征标的分解起着重要作用,这一点可以从下面的定理看出:若 χ 是 G 的不可约特征标,赫克代数 $H=H(A,\varphi)$,则:

1. $(\varphi^G,\chi) \neq 0$,当且仅当 $\chi_H \neq 0$.
2. $\chi \to \chi_H$ 是 G 的全体使$(\chi,\varphi^G) \neq 0$ 的不可约特征标集合与半单 K 代数 H 的全体不可约特征标集合之间的一一对应.

撰 稿 张广祥
审 阅 石生明

代 数 群

代数群(algebraic group) 具有某种拓扑结构的群.代数群理论是群论与代数几何学结合的产物,可以看成李群理论的推广或者同李群理论平行的一个群论分支.若 G 是代数闭域 K 上的代数簇,又具有群的结构,且乘法运算 $G \times G \to G$(这里的"×"表示簇的扎里斯基(Zariski,O.)积)与求逆运算 $G \to G$ 都是簇的态射,则称 G 为代数群.若 G 作为簇是不可约的,则称此代数群是连通的.代数群的闭子簇若同时也是个子群,则称为闭子群,它仍是个代数群.代数群关于它的正规闭子群的商群也是个代数群.例如,K 上 n 级一般线性群(K 上 n 级非奇异矩阵全体所成的群)$\mathrm{GL}(n,K)$是代数群;K 上 n 次特殊线性群(K 上行列式 1 的 n 阶矩阵全体所成的群)$\mathrm{SL}(n,K)$是$\mathrm{GL}(n,K)$的闭子群.若代数群 G 的簇结构是仿射的,则称 G 为仿射代数群或线性代数群.采用后一术语的理由是,这种群都同构于某个 $\mathrm{GL}(n,K)$的闭子群.若 G 的簇结构是完备的,则称 G 为阿贝尔簇.阿贝尔簇的群结构很简单(都是阿贝尔群),且被簇结构惟一决定,因此它的研究属于代

数几何学的范畴.另一方面,对任意代数群 G,总可以惟一地找到一个正规的仿射闭子群 N,使 G/N 是阿贝尔簇.因此,代数群理论研究的主要是仿射的(即线性的)代数群,并把仿射代数群简称代数群.代数群及其表示理论与域论、多重线性代数、交换环论、代数几何、李群、李代数、有限单群理论以及群表示理论等数学分支都有十分密切的联系,是近年来代数学的一个相当活跃的分支.

连通代数群(connected algebraic group)　见"代数群".

闭子群(closed subgroup)　见"代数群".

仿射代数群(affine algebraic group)　见"代数群".

线性代数群(linear algebraic group)　即"仿射代数群".

代数群同态(homomorphism of algebraic groups)　一种特殊的群同态.代数群之间的既是群同态又是簇态射的映射.若一个代数群的同态可逆,且逆映射也是代数群同态,则称之为同构.

代数群同构(isomorphism of algebraic groups)　见"代数群同态".

代数群的特征标(character of an algebraic group)　一种特殊的代数群同态.代数群 G 到 $GL(1,K)$ 的代数群同态.G 的特征标全体组成的集合 $X(G)$ 是 G 的仿射代数 $K[G]$ 的乘法半群的一个子群,称为 G 的特征标群.但习惯上把 $X(G)$ 的运算用加法记.

代数群的特征标群(character group of an algebraic group)　见"代数群特征标".

代数群的作用(action of an algebraic group)　一般指代数群在簇上的作用.设 G 是代数群,X 是簇.若 G 作为抽象群作用在集合 X 上,且导出的把 $(g,x)\in G\times X$ 映到 $g(x)$ 的映射 $G\times X\to X$ 是簇的态射($G\times X$ 赋予扎里斯基积结构),则称 G 作为代数群作用在簇 X 上.

齐性空间(homogeneous space)　被代数群传递地作用的簇.代数群 G 关于它的任一闭子群 H 的陪集空间 G/H 就称为关于 G 的齐性空间.

有理表示(rational representation)　代数群表示理论研究的对象.代数群 G 到 $GL(V)$(同构于 $GL(n,K)$)的代数群同态称为 G 的一个有理表示,这里 V 是 K 上的 $n(<\infty)$ 维向量空间,称为一个有理 G 模.

代数群的正则表示(regular representation of an algebraic group)　一种重要的代数群表示.代数群 G 通过左平移或右平移作用在自己的仿射代数 $K[G]$ 上所决定的 G 的表示.元素 $g\in G$ 所对应的左平移 $\lambda_g:K[G]\to K[G]$ 与右平移 $\rho_g:K[G]\to K[G]$ 分别定义为 $(\lambda_g f)(x)=f(g^{-1}x)$ 与 $(\rho_g f)(x)=f(xg)$,这里 $f\in K[G]$,$x\in G$.这样得到的 G 的表示 $\lambda:G\to GL(K[G])$ 与 $\rho:G\to GL(K[G])$ 分别称为 G 的左正则表示与右正则表示.一般说来,$K[G]$ 不是有限维的.正则表示具有如下性质:

1. 局部有限性,即 $K[G]$ 是有限维 G 子模的并集.

2. 局部有理性,即 $K[G]$ 的每个有限维 G 子模都是有理的.

代数群的左正则表示(left regular representation of an algebraic group)　见"代数正则表示".

代数群的右正则表示(right regular representation of an algebraic group)　见"代数正则表示".

代数群中的若尔当分解(Jordan decomposition in an algebraic group)　代数群的一种重要分解.代数群的元素分解为可交换的半单元与幂幺元之积的分解.代数群 G 的元素 g,若使右平移 ρ_g 作为 $K[G]$(的每个有限维 G 子模)上的线性变换是可对角化的,则称 g 为半单元;若使右平移 ρ_g 作为 $K[G]$(的每个有限维 G 子模)上的线性变换只有特征值 1,则称 g 为幂幺元.给定代数群 G 的元素 g,在 G 中存在惟一的半单元 s 与惟一的幂幺元 u,使 $g=su=us$.代数群 G 的元素的这一分解称为若尔当分解.

半单元(semisimple element)　见"代数群中的若尔当分解".

幂幺元(unipotent element)　见"代数群中的若尔当分解".

环面(torus)　代数群的一个重要子群.指与 n 阶可逆对角矩阵全体所成的群 $D(n,K)$ 同构的代数群.环面的有理表示都是完全可约的,不可约表示都是一维的.所以环面的表示理论被特征标群完全刻画.一个代数群中的极大环面子群(简称极大环面)在这个代数群的结构与表示理论中起着至关重要的作用.不同的极大环面在代数群中是互相共轭的.

嘉当子群(Cartan subgroup)　代数群的一个重要子群.指代数群 G 的极大环面的连通中心化子.当 G 是简约群时,嘉当子群就是 G 的极大环面.

外尔群(Weyl group)　代数群的某种子群的商群.指代数群 G 的极大环面 T 的正规化子 $N_G(T)$ 关于 T 的连通中心化子 $C_G(T)^0$ 的商群 $W(G,T)$.代数群 G 关于 T 的外尔群总是有限群,并同构于 G 关于 T 的根系的外尔群.

幂幺群(unipotent group)　一种简单的代数群.即只由幂幺元构成的代数群.例如,在 K 上主对角元素为 1 的 n 级上三角矩阵全体组成的群是个幂幺群.幂幺群作为抽象群是幂零的.

博雷尔子群(Borel subgroup)　代数群的一类可解子群.指代数群 G 的极大连通可解子群.G 的

不同博雷尔(Borel,A.)子群在 G 中互相共轭.例如,当 $G=\mathrm{GL}(n,K)$ 或 $\mathrm{SL}(n,K)$ 时,所有上三角矩阵组成的子群就是一个博雷尔子群.

抛物子群(parabolic subgroup) 代数群的一类闭子群.指代数群 G 的含有博雷尔子群的闭子群.一个闭子群 P 是抛物子群当且仅当陪集空间 G/P 是完备簇.若 P 是简约代数群 G 的抛物子群,$V=R_u(P)$ 是 P 的幂幺根基,则可找到 P 的一个简约的闭子群 L(不是惟一确定的),使得 P 是 L 与 V 的半直积.P 的这个分解称为列维分解.当基域 K 的特征数是 0 时,任何连通代数群都有列维分解.

列维分解(Levi decomposition) 见"抛物子群".

权(weight) 研究代数群表示的重要工具.设 T 是代数群 G 的极大环面,V 是有理 G 模.对 $\chi\in X(T)$,若 $V_\chi=\{v\in V\mid tv=\chi(t)v,\forall\ t\in T\}$,则 V 是 V_χ 的直和.若 $V_\chi\neq0$,则称 χ 为 V 的 T 权,称 V_χ 为 V 的属于权 χ 的权空间;V_χ 中的非零向量称为 V 的属于权 χ 的权向量;$\dim V_\chi$ 称为权 χ 的重数;而群环 $\mathbb{Z}X(T)$ 的元素

$$\mathrm{ch}(V)=\sum_{\chi\in X(T)}\dim V_\chi e^\chi$$

称为 V 的形式特征标.形式特征标的重要性在于:两个 G 模具有相同的 G 合成因子当且仅当它们具有相同的形式特征标.

权空间(weight space) 见"权".

权向量(weight vector) 见"权".

权的重数(multiplicity of a weight) 见"权".

形式特征标(formal character) 见"权".

代数群的李代数(Lie algebra of an algebraic group) 一种特殊的李代数.$K[G]$ 上的左不变 K 导子全体组成的向量空间关于方括号 $[X,Y]=X\circ Y-Y\circ X$ 所成的李代数 $\mathfrak{g}$.一个 K 导子 $X:K[G]\to K[G]$ 称为左不变的,若它与所有左平移 $\lambda_g(g\in G)$ 可交换.李代数 $\mathfrak{g}$ 作为向量空间可等同于 G 在恒等元 e 处的扎里斯基切空间.例如,当 $G=\mathrm{GL}(n,K)$ 时,$\mathfrak{g}$ 可等同于 $\mathfrak{gl}(n,K)$(K 上 n 阶矩阵全体所成的李代数);当 $G=\mathrm{SL}(n,K)$ 时,$\mathfrak{g}$ 可等同于 $\mathfrak{sl}(n,K)$(K 上迹零的 n 阶矩阵全体所成的李代数).

伴随表示(adjoint representation) 代数群的一种表示.指代数群在它的李代数上的一个典范表示.设 G 是代数群,$\mathfrak{g}$ 是它的李代数,G 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示定义为 $\mathrm{Ad}:G\to\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\subset\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$:对 $g\in G$ 与 $X\in\mathfrak{g}$,$\mathrm{Ad}_g(X)=\rho_gX\rho_g^{-1}$.例如,当 $G=\mathrm{GL}(n,K)$ 时,对 $g\in G$ 与 $X\in\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n,K)$,有 $\mathrm{Ad}_g(X)=gXg^{-1}$(矩阵乘法).

根系(root system) 研究代数群结构、分类和表示的重要工具.简约代数群 G 的伴随表示的非零 T 权称为 G 关于 T 的根,其中 T 是 G 的极大环面.G 关于 T 的根的全体 $\Phi=\Phi(G,T)$ 是实空间 $E=\mathbb{Z}\Phi\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ 中的抽象意义下的根系.即,它满足如下公理:

1. Φ 是有限集,张成 E,且不含 0.
2. 若 $\alpha\in\Phi$,则 Φ 中含有的 α 的倍数只有 $\pm\alpha$.
3. 若 $\alpha\in\Phi$,则有 E 的一个与 α 有关的反射 τ_α 保持 Φ 稳定.
4. 若 $\alpha,\beta\in\Phi$,则 $\tau_\alpha(\beta)-\beta$ 是 α 的整倍数.

根系 Φ 的外尔群(即由所有 τ_α 生成的群)同构于 G 关于 T 的外尔群.

幂幺根基(unipotent radical) 代数群的一个特殊子群.指代数群 G 的最大连通正规幂幺子群.常记为 $R_u(G)$.

简约代数群(reductive algebraic group) 一类特殊的代数群.指具有平凡幂幺根基的非平凡连通代数群.例如,一般线性群 $\mathrm{GL}(n,K)$ 就是一个简约代数群.

代数群的根基(radical of an algebraic group) 代数群的一个特殊子群.指代数群 G 的最大连通正规可解子群.常记为 $R(G)$.

半单代数群(semisimple algebraic group) 一类特殊的代数群.指具有平凡根基的非平凡连通代数群.例如,特殊线性群 $\mathrm{SL}(n,K)$ 就是一个半单代数群.

代数群的秩(rank of an algebraic group) 对代数群的一种刻画.指代数群 G 的极大环面的维数.G 的半单秩指的是 $G/R(G)$ 的秩;G 的简约秩指的是 $G/R_u(G)$ 的秩.

半单代数群的分类(classification of semisimple algebraic groups) 一般指半单代数群的同构分类.半单代数群的同构类一一对应于二元组(Φ,Λ)的同构类,这里 Φ 是一个抽象意义下的根系,而 Λ 是介于 Φ 的根格与抽象权格之间的一个在外尔群作用下稳定的格.Φ 的根格 Λ_r 就是根的整线性组合所成的格;而抽象权格则定义为

$$\Lambda_w=\{\chi\in E\mid 2(\chi,\alpha)/(\alpha,\alpha)\in\mathbb{Z},\forall\ \alpha\in\Phi\},$$

其中(,)是 Φ 张成的实空间中的一个外尔群不变的内积.若取定半单线性代数群 G 的一个极大环面 T,则 G 对应的二元组是 $(\Phi(G,T),X(T))$.因此,半单线性代数群可先按照其根系的类型进行粗略分类(同宗分类).例如,特殊线性群 $\mathrm{SL}(n,K)$ 是 A_{n-1} 型的,正交群 $\mathrm{SO}(2n+1,K)$ 是 B_n 型的,辛群 $\mathrm{Sp}(2n,K)$ 是 C_n 型的,正交群 $\mathrm{SO}(2n,K)$ 是 D_n 型的.当 $X(T)=\Lambda_r$ 时,称 G 为伴随型的,它是所有与它同宗的代数群的同态像;当 $X(T)=\Lambda_w$ 时,称 G 为普遍型或单连通的,它是所有与它同宗的代数群的覆盖.例如,$\mathrm{SL}(n,K)$ 是单连通的,而射影线性群

PGL(n,K)是与它同宗的伴随群. 若 G 的根系是不可分解的,则称 G 为殆单的. 伴随型的殆单群是严格意义的单群. 有限群 $X(T)/\Lambda_r$ 称为 G 的基本群.

伴随型半单代数群(semisimple algebraic group of adjoint type) 见"半单代数群的分类".

普遍型半单代数群(semisimple algebraic group of universal type) 见"半单代数群的分类".

单连通半单代数群(simply-connected semisimple algebraic group) 即"普遍型半单代数群".

半单代数群的基本群(fundamental group of semisimple algebraic group) 见"半单代数群的分类".

弗罗贝尼乌斯同态(Frobenius homomorphism) 素特征域上代数群的一类自同态. 若基域 K 的特征数 $p>0$,则映射 $F:(a_{ij})\to(a_{ij}^p)$是 GL(n,K)到自身上的一个代数群同态(它还是抽象群的同构,但不是代数群的同构). F 是弗罗贝尼乌斯同态最简单的例子. 一般地,设 G 是简约代数群,$\varphi:G\to G$ 是代数群同态. 若存在 G 到 GL(n,K)的嵌入以及正整数 r 与 s,使得 φ^r 与 F^s 在 G 的限制是一致的,则称 φ 是弗罗贝尼乌斯同态. 弗罗贝尼乌斯同态的一个重要性质是它的固定点集是个有限子群. 这种有限群称为有限李型群,它们在有限群理论中占据重要地位.

有限李型群(finite group of Lie type) 见"弗罗贝尼乌斯同态".

蒂茨系统(Tits system) 从简约代数群、有限李型群等重要类型的群的共同性质中抽象出来的关于一类群的公理化刻画. 设 G 是由两个子群 N 与 B 生成的群,$T=N\cap B$ 是 N 的正规子群,$W=N/T$ 是由 2 阶元素组成的子集 S 生成的群. 称四元组(G,B,N,S)为蒂茨系统,若它满足:

1. 若 $\rho\in S,\sigma\in W$,则
$\dot\rho B\dot\sigma\subset B\dot\sigma B\cup B\dot\rho\dot\sigma B,\ \dot\sigma B\dot\rho\subset B\dot\sigma B\cup B\dot\sigma\dot\rho B.$

2. 若 $\rho\in S$,则 $\dot\rho B\dot\rho\neq B$.

这里 $\dot\rho$ 与 $\dot\sigma$ 分别表示 ρ 与 σ 在 N 中的任一逆像. 在蒂茨系统(G,B,N,S)中,W 称为外尔群,S 中元素的个数称为系统的秩,B 及其共轭称为博雷尔子群. 蒂茨系统的一个重要性质是:群 G 关于 B 的双陪集以 W 作为指标集,即

$$G=\bigcup_{\sigma\in W}B\dot\sigma B\quad 且\quad B\dot\sigma B=B\dot\tau B,$$

当且仅当在 W 中 $\sigma=\tau$. 群 G 的这个分解称为布鲁哈(Bruhat,F.)分解. 对 $I\subset S$,若 W_I 是 I 生成的子群,则 $P_I=\bigcup_{\sigma\in W_I}B\dot\sigma B$ 是 G 的一个子群. P_I 及其共轭称为 G 的抛物子群. 在简约代数群中,若取 N 为极大环面 T 的正规化子,B 为含 T 的博雷尔子群,S 为 $W=N/T$ 中对应于单根的反射(在 B 的李代数中出现的根看成正根),则得到一个蒂茨系统

$$(G,B,N,S).$$

蒂茨系统的秩(rank of a Tits system) 见"蒂茨系统".

布鲁哈分解(Bruhat decomposition) 见"蒂茨系统".

共轭定理(conjugacy theorem) 关于线性代数群结构的一个重要定理. 该定理断言:在线性代数群中,不同的博雷尔(Borel,A.)子群互相共轭,不同的极大环面也互相共轭.

稠密定理(density theorem) 代数群结构的一个重要定理. 该定理断言:连通代数群 G 的所有博雷尔子群的并集是 G,所有极大环面的并集是 G 的半单元素的集合,而所有嘉当子群的并集含有 G 的一个稠密开集.

李-科尔琴定理(Lie-Kolchin theorem) 关于可解线性代数群的一个重要定理. 该定理断言:连通可解线性代数群的任何有理表示均有一维的子表示. 事实上,李-科尔琴定理是如下更一般的博雷尔不动点定理的推论:连通可解线性代数群在任何完备簇上的作用均有不动点.

博雷尔不动点定理(Borel's theorem of fixed points) 见"李-科尔琴定理".

半单线性代数群不可约有理表示的分类(classification of irreducible rational representations of a semisimple linear algebraic group) 一般指半单线性代数群不可约表示的同构分类. 半单线性代数群的不可约有理表示的同构类与支配权是一一对应的. 设 G 是半单线性代数群,T 是 G 的一个极大环面,B 是含 T 的博雷尔子群,Φ 是 G 关于 T 的根系,Φ^+是在 B 的李代数中出现的根的集合. 在实空间 $E=X(T)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ 上引进关于外尔群 W 不变的欧氏内积(,)(若不计纯量因子,它是惟一决定的). 若 $\lambda\in X(T)$使得$(\lambda,\alpha)\geqslant 0$ 对一切 $\alpha\in\Phi^+$成立,则称 λ 为 T(关于 B)的支配权,支配权全体所成的集合记为 $X(T)_+$. 若 V 是不可约有理 G 模,则 V 有惟一的一维 B 子模 L,它所对应的 T 权是支配的. 半单线性代数群不可约有理表示的分类定理断言:上述方法给出了半单线性代数群的不可约有理表示的同构类集合与 $X(T)_+$ 之间的一个一一对应. 常把 $\lambda\in X(T)_+$所对应的不可约 G 模记为 $L(\lambda)$. 若基域的特征数为 0,则 $L(\lambda)$是 G 的李代数的不可约模,并且它的形式特征标由著名的外尔特征标公式给出,即在群环 $\mathbb{Z}X(T)$中 ch$L(\lambda)=\chi(\lambda)$,而 $\chi(\lambda)$由公式

$$\Big(\sum_{\sigma\in W}e^{\sigma\rho}\Big)\chi(\lambda)=\sum_{\sigma\in W}e^{\sigma(\lambda+\rho)}$$

给出,其中 ρ 是 Φ^+中所有元素之和的一半. 若基域的特征数大于 0,则除了极少数非常简单的群外,不

可约模的形式特征标的确定问题都是未解决的.目前,这是代数群表示理论中的头号难题.但是,不难证明:$\mathrm{ch}\,L(\lambda)$可惟一地写成$\chi(\mu)(\mu\in X(T)_+)$的整线性组合:

$$\mathrm{ch}\ L(\lambda)=\sum_{\mu\in X(T)_+}c_{\lambda\mu}\chi(\mu).$$

鲁兹蒂克猜想:$c_{\lambda\mu}$是被称为卡芷当(Kazhdan)-鲁兹蒂克多项式的一组惟一确定的、具有非常好的性质的并可递归地求得的多项式在1的赋值.目前已知的例子和证据都支持这一猜想,但在它的证明上尚未有突破性的进展.

撰　稿　王建磐　叶家琛　陈承东
审　阅　石生明　施武杰

无　限　群

无限群论(infinite group theory)　群论的一个独立分支.主要研究无限群(元素个数无限的群)的理论.19世纪末,由于几何和拓扑研究的需要,无限群作为由一系列生成元及定义关系所定义的群出现.克莱因(Klein,C. F.)、李(Lie,M. S.)等对无限群的产生有很大的影响.20世纪20年代和30年代,贝尔(Baer,R.)、施米特(Шмирт,О. Ю.)和库洛什(Курош,А. Г.)等对无限群的发展起了重要作用.不假定群阶有限性而叙述群论基础的第一本书是1916年出版的施米特的《抽象群论》.由于各国群论工作者,特别是德国、英国和苏联的群论专家的努力,使无限群论日趋完善,到20世纪40年代已经形成独立的理论体系,成为群论的一个新分支,其中最精彩的理论是霍尔(Hall,P)和马尔采夫(Малцев,А. И.)关于无限可解群的工作.1940年出版的库洛什的名著《群论》对无限群论的发展起了重要作用,特别是1955年出版的这本书第二版的英译本.鲁宾孙(Robinson,D. J. S.)于1972年出版的《有限性条件和广义可解群》是继库洛什的《群论》之后最重要的无限群著作之一.

无限群论的大量工作是将有限群的许多好的结果推广到无限群中去.这样,一方面就导致比群阶的有限性弱的一些有限性条件;另一方面引入了一些在有限群中是等价的但在无限群中却不同的性质,由此产生了许多种类的广义可解群和广义幂零群.正如库洛什指出"……一个新的群论分支……它的任务是在某种意义上接近群阶的有限性的条件限制下,研究在某种意义上接近阿贝尔群的群".所以,无限群论的主要研究对象是广义幂零群、广义可解群和满足所谓有限性条件的群.目前,无限群论仍然是一个比较活跃的数学分支.

挠群(torsion group)　亦称周期群.一种常见的重要群类.若群G的所有元素的阶都是有限的,则称G为挠群;反之,若G的所有非平凡元素的阶都是无限的,则称G为无扭群.存在既不是挠群,也不是无扭群的群,即既包含非平凡的有限阶元素,又包含无限阶元素的群,称为混合群.若群G的一切有限阶元素组成群G的子群T,T是G的最大的周期子群,称为G的最大周期子群.T是G的特征子群,且G/T是无扭群.群的最大周期子群一般未必存在,但任意阿贝尔群恒有最大周期子群存在.

周期群(periodic group)　即"挠群".

无扭群(torsion-free group)　见"挠群".

混合群(mixed group)　见"挠群".

周期子群(torsion-subgroup of a group)见"挠群".

群的广义序列(series of general order type in a group)　研究无限群的正规结构和定义一些群类的重要工具,简称群的序列或者列.群G的具有一般序型的一个序列,是指满足下列条件的按包含关系成线性序的(即全序的)子群集合S:

1. 若$1\neq x\in G$,则S中不包含x的子群的联V_x在S中.
2. 若$1\neq x\in G$,则S中包含x的子群的交Λ_x在S中.
3. $V_x\lhd\Lambda_x$.
4. S的每一子群都型如V_x或Λ_x,其中x是G的某一非平凡的元素.

V_x和Λ_x称为S的项,Λ_x/V_x称为的S的因子.S的因子集合按下列规则定义包含关系"$<$"就可以成为线性序:$\Lambda_x/V_x<\Lambda_y/V_y$,当且仅当$\Lambda_x\leqslant V_y$.$S$的序型$\Sigma(<)$定义为此偏序关系下因子群集合的序型.此时,记为$S=\{\Lambda_\sigma,V_\sigma|\sigma\in\Sigma\}$.

若序列S的所有项均是G的正规子群,则称S为G的正规列;若序列S的所有项均是G的次正规子群,则称S为G的次正规列.当上述线性序集$\Sigma(<)$为良序时,就可以得到群G的升列S.此时,可以设$\Sigma=\{\beta|\beta<\alpha\}$,$S=\{H_\beta|\beta<\alpha\}$,且满足:$H_{\beta_1}\leqslant H_{\beta_2}$,当且仅当$\beta_1\leqslant\beta_2$;$H_0=1$且$H_\alpha=G$;$H_\beta\lhd H_{\beta+1}$;当$\lambda$为极限序数时,

$$H_\lambda=\bigcup_{\beta<\lambda}H_\beta.$$

类似地,当上述线性序集$\Sigma(<)$的逆序集$\Sigma'(<')$($\beta_1<'\beta_2$,当且仅当$\beta_2<\beta_1$)成良序时,就可以得到G的降列S.此时可以设$\Sigma'=\{\beta|\beta<'\alpha\}$,$S=\{H_\beta|\beta<'\alpha\}$,且满足:$H_{\beta_1}\leqslant H_{\beta_2}$,当且仅当$\beta_1\geqslant\beta_2$;$H_0=G$且$H_\alpha=1$;$H_{\beta+1}\lhd H_\beta$;当$\lambda$为极限序数时,

$$H_\lambda=\bigcap_{\beta<\lambda}H_\beta.$$

正规列(normal series)　见"群的广义序列".

次正规列(subnormal series) 见"群的广义序列".

升列(ascending series) 见"群的广义序列".

降列(desending series) 见"群的广义序列".

群的序列子群(serial subgroup of a group) 由群的序列定义的子群. 若群 G 的一个子群 H 是 G 的某一个序列的项,则称 H 为 G 的序列子群. 特别地,若群 G 的一个子群 H 出现在 G 的某一个升列或者降列中,则分别称 H 为 G 的升序列子群和降序列子群.

升序列子群(ascendant subgroup) 见"群的序列子群".

降序列子群(descendant subgroup) 见"群的序列子群".

群的圈积(wreath product of groups) 由已知群构作新的群的重要工具之一. 设 H,K 为任意群,按如下方式定义标准(限制的)圈积. 构作一系列的从 K 到 H 的限制的函数 $x:K\to H$,使对几乎所有 $k\in K$ 都有 $k\to x_k=1_H$,将这些函数看做一个序列,并记为 $x=(x_k)_{k\in K}$,其中 $x_k\in H$,且对几乎所有的 $k\in K$,$x_k=1$. 设 B 为所有这样的序列 x 的集合,即得 B 为 $H_k(k\in K)$ 的直积(对每 $k\in K$,取一份 H,记为 H_k). 按下列方式构作 K 在 B 上的置换作用:$k\in K$,$\alpha:k\to k^{\alpha}\in \mathrm{Aut}(B)$,其中 $k^{\alpha}:x\to x'$,使得 $(x')_{k_1}=x_{k_1k^{-1}}$,$k_1\in K$. 映射 α 为同态且 k^{α} 置换 x 的所有足码. 从而,可定义半直积 $W=K\ltimes_{\alpha} B$ 为群 H 和 K 的圈积,记为 $W=H_{wr}K$ 或 $W=H\wr K$,其中 B 称为 W 的基群. 这里所给的任意群的圈积的定义要比置换群的圈积的定义更为广泛.

圈积的基群(base group of wreath product) 见"群的圈积".

群的笛卡儿积(Cartesian product of groups) 亦称群的非限制性直积. 由已知群构作新的群的一种简单方法. 设 $\{G_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 为群的非空集合,若 $C=\{(g_\lambda)\mid g_\lambda\in G_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$,即 C 由所有的 λ 分量为 $g_\lambda\in G_\lambda$ 的"向量"(g_λ)组成,并通过对应分量相乘来定义 C 的运算:$(g_\lambda)(h_\lambda)=(g_\lambda h_\lambda)$,则 C 对所定义的运算成为一个群,称为$\{G_\lambda\}$的笛卡儿积,常记为

$$C=\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{Cr}}G_\lambda.$$

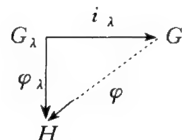
若 $D=\{(g_\lambda)\mid(g_\lambda)\in C$,且对几乎所有的 $\lambda,g_\lambda=1_\lambda\}$,则 D 是 C 的一个子群,称为$\{G_\lambda\}$的直积,常记为

$$D=\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{Dr}}G_\lambda.$$

群的非限制性直积(unrestricted direct product of groups) 即"群的笛卡儿积".

群的直积(direct product of groups) 见"群的笛卡儿积".

群的自由积(free product of groups) 由已知群构作新群的重要方法之一. 设$\{G_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$是已知群的非空集合,其中 Λ 表示某一指标集合. 给定群 G 和一系列的同态$\{i_\lambda\mid G_\lambda\to G\}$且$\{\varphi_\lambda\mid G_\lambda\to H,\lambda\in\Lambda\}$为诸 G_λ 到群 H 内的同态集,若对所给 φ_λ 存在惟一的同态 $\varphi:G\to H$,使得对所有 $\lambda\in\Lambda$ 均有 $\varphi i_\lambda=\varphi_\lambda$,即下图是可换的,则称 G 为$\{G_i\}$的自由积. 群的自由积也可等价地定义为:若 G 为由子群簇$\{G_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$生成的群,且 G 的每一元素可以惟一地表示为形如 $g=g_1g_2\cdots g_r$ 的表达式,其中 $r\geqslant0$($r=0$ 时理解为 $g_1g_2\cdots g_r=1$),$1\neq g_i\in G_{\lambda_i}$,$\lambda_i\neq\lambda_{i+1}$,则称 G 是诸 G_λ 的自由积,记为 $G=\mathrm{Fr}_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$,特别地,当 Λ 仅含两个指标时,记为 $G=G_1*G_2$. G_λ 称为 G 的自由因子,$g_1g_2\cdots g_r$ 称为 G 的元素 g 的正规式,g_i 称为 g 的符号,r 称为自由积 G 的元素 g 的长度. 由 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 生成的自由群正是由 a_i 生成的无限循环群 G_i 的自由积.



群的次笛卡儿积(subcartesian product of groups) 群的构作方法之一. 设$\{G_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$为群的非空集合且 G 为群. 若存在从 G 到诸 G_λ 的笛卡儿积 $\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{Cr}}G_\lambda$ 内的单同态 $\tau:G\to\underset{\lambda\in\Lambda}{\mathrm{Cr}}G_\lambda$,使得对每一 $\lambda\in\Lambda$,G_λ 的每一元素均是像 $\mathrm{Im}\,\tau$ 中某一元素的 λ 分量,则称 G 为$\{G_\lambda\}$的次笛卡儿积.

剩余$\mathscr{X}$群(residually $\mathscr{X}$-group) 由群的剩余性质定义的群. 设 $\mathscr{X}$ 为某种群论性质且 G 为群. 若对 G 的任意非平凡元素 g,存在 G 的正规子群 N_g,使得 $g\notin N_g$ 且 G/N_g 是 $\mathscr{X}$ 群,则称 G 为剩余 $\mathscr{X}$ 群. 群 G 是剩余 $\mathscr{X}$ 群,当且仅当 G 是一些 $\mathscr{X}$ 群的次笛卡儿积. 最常见的剩余 $\mathscr{X}$ 群如剩余有限群.

局部$\mathscr{X}$群(locally $\mathscr{X}$-group) 由群的局部性质定义的群. 若群 G 的每一有限集合皆包含在一个 $\mathscr{X}$ 子群内,其中 $\mathscr{X}$ 是一种群论性质,则称 G 是局部 $\mathscr{X}$ 群. 当 $\mathscr{X}$ 群的子群是 $\mathscr{X}$ 群时,这一定义等价于:若群 G 的每一有限生成的子群具有性质 $\mathscr{X}$,则称 G 是局部 $\mathscr{X}$ 群.

任意群的西洛p子群(Sylow p-subgroups in any group) 亦称群的极大 p 子群. 群的一类重要子群. 当群为有限群时,这一定义与通常给出的有限群的西洛 p 子群的定义是一致的. 由佐恩(Zorn, M.)引理,群 G 的任一 p 子群总含于 G 的某一西洛 p 子群内. 特别地,G 的西洛 p 子群总是存在的. 任意群的西洛理论主要是决定群的所有西洛 p 子群是否共轭,有时可以在较弱的意义下研究西洛 p 子群的共轭性. 必须指出,西洛定理对有限群是正确的,但对无限群而言,西洛 p 子群的共轭性却常常

不成立，甚至西洛 p 子群可以不同构. 例如，若 P_1 和 P_2 是任意的 p 群且 $G=P_1*P_2$ 为它们的自由积，则 P_1 和 P_2 为群 G 的西洛 p 子群. 因此，在无限群中，西洛 p 子群可以有不同的势，从而彼此不同构.

群的有限性条件(finiteness conditions of groups) 一些群论性质，它们是指比群阶的有限性弱并且所有有限群都具有的性质. 常见的满足有限性条件的群主要有以下几种：有限生成和有限呈示群；周期群和局部有限群；满足链条件的群；具有有限秩的群；满足关于换位子和共轭元的有限性条件的群. 人们对局部有限群以及满足关于共轭元素的有限性条件的群，已经获得许多有意义的研究成果，它们已经成了无限群论中独立的研究对象. 其他有限性条件在研究一些无限群类时常常作为附加条件应用.

群的链条件(chain conditions of group) 无限群论中最常见的有限性条件. 设 $\mathscr{F}$ 是群 G 的具有某种性质的子群的集合. 若在 $\mathscr{F}$ 内不存在严格上升的无限子群链，则称 G 满足关于 $\mathscr{F}$ 子群的升链条件. 这一条件等价于关于 $\mathscr{F}$ 子群的极大条件，即 $\mathscr{F}$ 内每一非空子群集合至少有一个极大元素. 类似地，关于 $\mathscr{F}$ 子群的降链条件和极小条件是等价的. 当 $\mathscr{F}$ 取群 G 的所有子群的集合时，关于子群的极大条件和极小条件，简称极大条件和极小条件，记为 max 和 min，这些是最基本的链条件.

$\mathscr{F}$ 子群的升链条件(ascending chain condition on $\mathscr{F}$-subgroups) 见“群的链条件”.

$\mathscr{F}$ 子群的极大条件(maximal condition on $\mathscr{F}$-subgroups) 即“$\mathscr{F}$ 子群的升链条件”.

$\mathscr{F}$ 子群的降链条件(descending chain condition on $\mathscr{F}$-subgroups) 见“群的链条件”.

$\mathscr{F}$ 子群的极小条件(minimal condition on $\mathscr{F}$-subgroups) 即“$\mathscr{F}$ 子群的降链条件”.

拟循环 p 群(quasicyclic p-group) 亦称型为 p^∞ 的普吕费尔群. 一种基本类型的阿贝尔群. 设 p 为素数，若群 P 是无限个元素 $a_0,a_1,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots$ 生成且定义关系为：$a_0=1,a_n^p=a_{n-1},n\in\mathbf{N}$，即

$$P=\langle a_0,a_1,a_2,\cdots\mid a_0=1,a_n^p=a_{n-1},n\in\mathbf{N}\rangle,$$

则 P 称为拟循环 p 群. 无限阿贝尔群 G 是拟循环 p 群，当且仅当 G 的所有真子群是有限的. 在拟循环 p 群 G 中恰有一个子群的阶是任意给定的素数幂 p^i，且它是循环的，从而 G 的 p^i 阶子群是 G 的特征子群. 拟循环 p 群在无限阿贝尔群的理论中起着极其重要的作用，主要用来描述周期阿贝尔群的结构，例如满足极小条件的阿贝尔群的结构.

p^∞ 型的普吕费尔群(Prüfer group of type p^∞) 即“拟循环 p 群”.

切尔尼科夫群(Černikov group) 无限群论中经常出现的基本群类，也是仅有的几个已知的满足极小条件的群类之一. 若群 G 是若干个拟循环群的有限直积的有限扩张，则 G 称为切尔尼科夫群. 切尔尼科夫群常用来描述一些满足极小条件的群的结构. 如：

1.(库洛什)阿贝尔群 G 满足极小条件，当且仅当 G 是有限多个拟循环群和素数幂阶循环群的直和.

2.(切尔尼科夫)可解群 G 满足极小条件，当且仅当 G 是有限多个拟循环群的直积的有限扩张，即 G 是切尔尼科夫群.

有限生成群(finitely generated group) 无限群论研究的重要对象之一. 指除有限群外最熟悉的满足有限性条件的群. 已知存在 $2^{\aleph_0}$ 种非同构的有限生成群，甚至有 $2^{\aleph_0}$ 种非同构的有限生成的可解群；并且每一可数群可以嵌入一个 2 生成元群，所以即使是 2 生成元群都可能有非常复杂的结构. 这说明群的有限生成性是一种非常弱的有限性条件. 若群 G 有一个呈示，其生成元集和定义关系集都是有限的，则称 G 是有限呈示群. 已经证明，只存在可数多种非同构的有限呈示群. 可解的有限呈示群是目前无限群研究的重要对象.

有限呈示群(finitely presented group) 见“有限生成群”.

群的秩(rank of a group) 群的一种与有限生成子群的生成元数有关的数量特征. 群的秩有多种定义. 若群 G 的有限生成子群的生成元的最小数有上界且 r 是其最小上界，则称 G 有有限的普吕费尔秩 r；若这样的 r 不存在，则称 G 的普吕费尔秩为 ∞. 有限的普吕费尔秩的概念主要用于可解群. 若群 G 的任意有限生成的子群均可以含于某个 R 生成元的子群内，其中 R 是满足上述性质的最小正整数，则称 G 有有限的马尔采夫秩 R；若这样的 R 不存在，则称 G 的马尔采夫秩为 ∞. 每一个具有有限普吕费尔秩 r 的群有有限的马尔采夫秩 $R\leqslant r$；但是，具有有限的马尔采夫秩的群却不一定有有限的普吕费尔秩. 若 G 为阿贝尔群，T 为 G 的周期子群，则称 G/T 的普吕费尔秩为 G 的 0 秩. 对素数 p，T 的西洛 p 子群的普吕费尔秩称为 G 的 p 秩. 此时，G 的普吕费尔秩(常常简称 G 的秩)为 G 的 0 秩与它的 p 秩中的最大数的和. 若群 G 的任意阿贝尔子群有有限的 p 秩，其中 p 为 0 或素数，则称 G 有有限的阿贝尔子群秩；否则，称 G 的阿贝尔子群秩为 ∞. 具有有限的阿贝尔子群秩的群构成比具有有限普吕费尔秩的群类大的类. 这种有限性条件广泛地应用在广义可解群的研究中.

普吕费尔秩(Prüfer rank of a group) 见“群

的秩".

马尔采夫秩(Мальцев rank of a group) 见"群的秩".

阿贝尔子群秩(Abelian subgroup rank of a group) 见"群的秩".

FN 群(finite-by-nilpotent group) 一种满足关于换位子的有限性条件的群. 若群 G 的下中心列的某项 $\gamma_{i+1}(G)(i\geqslant 0)$ 有限,或者等价地,若群 G 是有限群关于幂零群的扩张,则称 G 是 FN 群. 群 G 是 FN 群,当且仅当 G 的上中心列的某一项 $\zeta_j(G)$ 在 G 内有有限的指数.

局部有限群(locally finite group) 一种特殊的周期群. 它们构成周期群类的一个真子类. 若群 G 的任意有限多个元素生成的子群是有限的,则称 G 是局部有限群. 局部有限性是在群的有限性条件中最接近群阶的有限性的一种性质. 局部有限群理论是无限群论中比较成熟的分支之一,它在好几个方面都得到较为深入的发展. 例如,局部有限群的西洛理论,无限局部有限群中无限阿贝尔群的存在性理论等. 这一理论的最大特点是有限群论的许多深刻结果和强有力的技巧被广泛地应用.

霍尔-库拉蒂拉卡-卡尔嘉波洛夫定理(Hall-Kulatilaka-Kargapolov Theorem) 无限群论的一个重要定理. 即无限局部有限群中无限阿贝尔子群存在性定理. 该定理断言:若 G 是任意的无限局部有限群,则 G 中存在无限的阿贝尔子群. 定理的证明应用了有限群著名的费特-汤普森定理. 定理的三位作者的工作,标志着局部有限群研究的深化阶段的开始,在此阶段中,有限单群分类理论的许多深刻的定理被广泛地应用.

FC 群(FC-group) 一种满足关于共轭元的有限性条件的群. 若群 G 有有限的共轭类,则称 G 为 FC 群. 这类群首先由贝尔(Baer,R.)于 1948 年定义,然后由纽曼(Neumann,B. H.)完成它的基本理论. 关于 FC 群的理论是无限群论中得到重大发展的独立分支之一,FC 群,特别是周期 FC 群的结构,已经从多方面得到描述.

BFC 群(BFC-group) 亦称 FA 群. 一种特殊类型的 FC 群. 若群 G 的元素的共轭类的基数一致地有界,则称 G 为 BFC 群. 群 G 为 BFC 群,当且仅当群 G 的导子群 G' 有限. BFC 群构成由 FC 群构成的群类的一个真子类.

CF 群(CF-group) 一种特殊类型的 BFC 群. 若群 G 的中心 $\mathrm{Z}(G)$ 在 G 内的指数 $|G:\mathrm{Z}(G)|$ 是有限的,则称 G 为 CF 群. CF 群必定是 BFC 群,而且 CF 群构成由 BFC 群构成的群类的一个真子类. 纽曼(Neumann,B. H.)证明:G 为 CF 群,当且仅当 G 的子群的共轭类都是有限的.

FO 群(FO-group) 一种特殊的 FC 群. 若群 G 中具有相同阶的元素(包括阶为∞的元素)的个数是有限的,则称 G 为 FO 群,或者称为具有有限层的群. 由于 FO 群的定义的特殊性,人们已利用切尔尼科夫(Černikov,S. N.)群对它的结构给出令人满意的描述.

具有有限层的群(group with finite layers) 即"FO 群".

无限阿贝尔群(infinite Abelian group) 亦称无限交换群. 是理论已相当完整的一类群. 它是阶为无限的阿贝尔群. 有限生成的阿贝尔群是最早研究也是研究得最彻底的一类阿贝尔群. 这种群的意义在于它们在应用中有着非常重要的作用,例如,在组合拓扑学中具有有限生成系的阿贝尔群就是一种主要工具. 阿贝尔群 G 是有限生成的,当且仅当 G 是有限多个无限阶或者素数方幂阶循环群的直和. 而且,阿贝尔群 G 满足极大条件,当且仅当 G 是有限生成的. 若 G 为任意阿贝尔群,则 G 的所有有限阶元素组成 G 的一个子群 T,称为 G 的最大周期子群. 而且,对一个固定的素数 p,G 中所有阶为 p 的方幂的元素也构成 G 的一个子群 G_p,称为 G 的 p 准素分支. 有如下准素分解定理:若群 G 是阿贝尔群,则它的最大周期子群 T 是 G 的所有准素分支的直和. 因为 G/T 是无扭的,所以对阿贝尔群的研究可以归结为对无扭阿贝尔群和周期阿贝尔群的研究,而对后者的研究又可以归结为对阿贝尔 p 群的研究.

无限交换群(infinite commutative group) 即"无限阿贝尔群".

阿贝尔群的 p 准素分支(the p-primary component of an Abelian group) 见"无限阿贝尔群".

可除阿贝尔群(divisible Abelian group) 阿贝尔群理论中的重要概念. 设 G 是阿贝尔群,g 是 G 的元素. 若对正整数 m,在 G 中存在元素 g_1,使得 $g=mg_1$,则称元素 g 在 G 内可以被 m 除尽. 若 p^h 是能够除尽 g 的素数 p 的最大方幂,则称 g 在 G 内的 p 高度是 h;若这样的素数 p 的最大方幂不存在,即 g 可以被素数 p 的任意方幂除尽,则称 g 在 G 内有无限的 p 高度. 阿贝尔群 G 的任意元素,若能被任一正整数除尽,则称 G 为可除群. 群 G 是可除阿贝尔群,当且仅当对任意素数 p,G 的每一元素都有无限的 p 高度. 阿贝尔群 G 是可除群,当且仅当它同构于一些有理数加群 $\mathbf{Q}$ 和拟循环群的直和;而且,每一阿贝尔群同构于可除阿贝尔群的一个子群. 阿贝尔群 G 的任意可除子群 D 恒为 G 的直和项. 一个阿贝尔群,若它不含非平凡的可除子群,则称此群为既约阿贝尔群. 任意阿贝尔群 G 内必存在惟一的最大可除群 D,使得 $G=D\oplus E$,其中 E 为 G 的既约阿

贝尔子群.

既约阿贝尔群(reduced Abelian group)　见"可除阿贝尔群".

阿贝尔群元素的p高度(the p-height of an element in an Abelian group)　见"可除阿贝尔群".

纯子群(pure subgroup)　研究阿贝尔群的重要工具之一.设G是阿贝尔群,H是G的一个子群.若对所有整数$n\geqslant 0$,均有$nG\cap H=nH$,其中nG表示G的所有元素的n倍组成的子群;等价地,若对任一非负整数n和H的任意元素h,只要在G中存在元素g使得$h=ng$,就可以在H中找到某一元素h_1使得$h=nh_1$,则称H是G的纯子群.阿贝尔群G的直和项H一定是G的纯子群;反之,纯子群不一定是阿贝尔群的直和项.例如,阿贝尔群G的周期子群T是G的纯子群,但是T不一定是G的直和项.若阿贝尔群G的纯子群H是一个周期群,并且H的元素的阶一致有界,则H是G的一个直和项.一般地,若H是阿贝尔群G的纯子群且商群G/H可分解为循环群的直和,则H是G的直和项.

准素阿贝尔群(primary Abelian group)　最重要的周期阿贝尔群.准素阿贝尔群的理论是阿贝尔群的一般理论中最丰富和最深入的几个分支之一.若p是素数,则称阿贝尔p群为准素阿贝尔群.关于准素阿贝尔群能否分解成循环群的直和问题,有如下的库里科夫判定法:准素阿贝尔群G可分解成循环群的直和的充分必要条件是,它能够表成这样一个递增子群列$A^{(1)}\leqslant A^{(2)}\leqslant\cdots\leqslant A^{(n)}\leqslant\cdots$的并集,其中每一个子群$A^{(n)}$里的元素在群$G$中的高度都是有限的,而且一致有界.对于准素阿贝尔群的一般结构,通常分为不含无限高度元素和包含无限高度元素两种情况讨论.前一情况下的准素群以及后一种情况下的可数准素群的结构已获得较好的刻画.

库里科夫判定法(Kulikov's criterion)　准素阿贝尔群直和分解的重要判定法(参见"准素阿贝尔群").由库里科夫判定法可以得到几个重要的推论:普吕费尔第一定理:元素的阶一致有界的准素阿贝尔群可以分解成循环群的直和.普吕费尔第二定理:不包含无限高度元素的可数准素阿贝尔群可以分解成循环群的直和.可分解成循环群直和的准素阿贝尔群不包含无限高度元素;但是,不包含无限高度元素的准素阿贝尔群不一定能够分解成循环群的直和.它们需要用另外的方法来描述.

基子群(basic subgroup)　描述不包含无限高度元素的准素阿贝尔群的重要工具.准素阿贝尔群G的子群B,若它是G的一个纯子群并且可以分解成循环群的直和,而商群G/B是一个可除阿贝尔群,则称B为G的一个基子群.任何一个准素群G都包含基子群,且G的所有基子群彼此同构.描述全部不含无限高度元素的准素阿贝尔群的问题,归结为描述具有已知基子群B的群的问题.为此引入下述概念:取群B的一个循环群直和分解,并用B_n $(n=1,2,\cdots)$表示这一分解中p^n阶直和项,若没有p^n阶直和项,则记$B_n=0$.再对所有B_n做笛卡儿直和,并且称这个笛卡儿直和的周期部分为群B的闭包,记为$\overline{B}$.利用基子群及其闭包的概念,可做如下的描述:凡基子群与群B同构且又不含无限高度元素的所有准素阿贝尔群同构于群B的闭包$\overline{B}$的这样的一些子群H,其中H包含B并且HB/B是可除群.

厄尔姆定理(Ulm's Theorem)　可数既约准素阿贝尔群的结构定理.设G为既约准素阿贝尔群.准素阿贝尔群G中两个无限高度元素的和与差在G中也有无限高度,从而,所有具有无限高度的元素的集合(加上零元)是群G的一个子群,记为G_1.一般地,若对小于某一序数β的所有序数α,在群G中已经定义了子群G_α,则当β为非极限序数时,就让在$G_{\beta-1}$中具有无限高度的元素(加上零元)所组成的子群为G_β;若β是极限序数,则让

$$G_\beta=\bigcap_{\alpha<\beta}G_\alpha.$$

这样,就可以得到G的一个降序列$G=G_0>G_1>\cdots>G_\alpha>\cdots$.由于$G$的基数不会被超过,所以存在这样一个序数$\gamma$,使得$G_\gamma=G_{\gamma+1}$,因此,对所有大于$\gamma$的序数$\delta$,$G_\gamma=G_\delta$.但是等式$G_\gamma=G_{\gamma+1}$表明,子群$G_\gamma$中所有的元素在$G_\gamma$中有无限高度,即子群$G_\gamma$是一个可除群.根据所做假定,群$G$是既约的,所以子群$G_\gamma=0$.若$\tau$是使$G_\tau=0$的最小序数,则称$\tau$为既约准素阿贝尔群的型.若$G$是一个$\tau$型既约准素阿贝尔群,则对所有小于$\tau$的序数$\alpha$,做商群$\overline{G}_\alpha=G_\alpha/G_{\alpha+1}$,群列$\overline{G}_0,\overline{G}_1,\cdots,\overline{G}_\alpha,\cdots,\alpha<\tau$称为群$G$的厄尔姆因子列.利用这些概念,可以得到重要的厄尔姆定理:可数既约准素阿贝尔群A和B彼此同构,当且仅当它们有同一型τ,且对任何小于τ的序数α,它们的厄尔姆因子$\overline{A}_\alpha$和$\overline{B}_\alpha$彼此同构.有例子表明厄尔姆定理不能简单地推广到不可数的情形,即厄尔姆定理中群的可数性条件是不可少的.

既约准素阿贝尔群的型(the reduced type of primary Abelian group)　见"厄尔姆定理".

厄尔姆因子列(Ulm factor series)　见"厄尔姆定理".

无扭阿贝尔群(torsion-free Abelian group)　重要的阿贝尔群之一.不含有限阶元素的阿贝尔群称为无扭阿贝尔群.它比准素阿贝尔群要难处理得多,实际上除了秩为1的这样的群外,还没有得到群的真正满意的分类定理.在无扭阿贝尔群理论中,群的秩、元素的高度和纯子群等概念占有极重要的地

位.

无扭阿贝尔群元素的型(the type of an element in a torsion-free Abelian group)　无扭阿贝尔群研究的重要工具之一. 设 $p_1,p_2,\cdots$是按自然顺序排列的素数序列,G是无扭阿贝尔群且g是G的非零元素. 若h_i是g在G内的p_i高度,其中每一h_i是∞或是一个非负整数,则称序列$\mathscr{H}(g)=(h_1,h_2,\cdots)$为$g$的高度向量(简称$g$的高度). 一般地,具有这种类型分量的向量$\mathscr{H}$称为高度(不一定是群的元素的高度向量). 在所有的高度组成的集合中引入一个偏序:$\mathscr{H}\leqslant\mathscr{H}'$,当且仅当$h_i\leqslant h'_i$对所有$i$成立,这里符号$\infty$约定大于任何非负整数. 在上述高度集合中引入等价关系:$\mathscr{H}$和$\mathscr{H}'$等价,当且仅当对几乎所有i,$h_i=h'_i$且当h_i或者h'_i是无穷大时$h_i=h'_i$. 在此等价关系下,高度集合的等价类称为型. 无扭阿贝尔群的元素g的型,定义为它的高度向量在高度集合中所在的型,常记为$t(g)$. 利用这一概念,可以描述秩为1的无扭阿贝尔群:在任意秩为1的无扭阿贝尔群中,任何非零元素有相同的型;两个秩为1的无扭阿贝尔群彼此同构,当且仅当它们有同样的型;并且,高度集合中的每一个型恰为某一个秩为1或者0的无扭阿贝尔群的型.

自由阿贝尔群(free Abelian group)　无扭阿贝尔群的重要类型之一. 若群G是无限循环群的直和,则称G为自由阿贝尔群. 自由阿贝尔群的重要性在于每一阿贝尔群都是某一自由阿贝尔群的同态像. 与准素阿贝尔群的情况类似,在什么条件下无扭阿贝尔群为自由阿贝尔群?这也是一个重要问题,已经有若干种判定法来解决这一问题.

庞特里亚金判定法(Pontryagin's criterion)　可数无扭阿贝尔群为自由阿贝尔群的一种常用判定法. 该判定法断言:可数无扭阿贝尔群G是自由阿贝尔群,当且仅当G的每一秩为有限的子群是自由阿贝尔群.

混合阿贝尔群(mixed Abelian group)　一种常见的阿贝尔群. 设群G是阿贝尔群. 若G既包含非平凡的有限阶元素又包含无限阶元素,则称G是混合阿贝尔群. 混合阿贝尔群的最初研究,常常集中于以下问题:在什么条件下,它可以分解成为一个周期群和一个无扭群的直和? 下述定理是回答这一问题的判定法之一:若G为周期子群与一个给定的周期群F同构的阿贝尔群,则G可以分解成为一个周期群和一个无扭群的直和,当且仅当F可分解成为一个可除群和一个元素的阶一致有界的群的直和. 近年来,卡普兰斯基(Kaplansky, I.)等开辟了一些新的途径,能从整体上研究混合阿贝尔群,从而开创了新局面.

广义幂零群(generalized nilpotent group)　无限群论研究的重要对象之一. 泛指满足某些群论性质的群,这些群论性质在有限群中等价于群的幂零性. 由于在有限群中幂零性有许多种等价条件,所以,可以定义许多种广义幂零群. 但是,为方便起见,通常把广义幂零群类分成两大类:局部幂零群类及其子类;非局部幂零的广义幂零群类. 后一大类中的大部分群类包含所有的局部幂零群.

局部幂零群(locally nilpotent group)　最重要的广义幂零群. 若群G的每一有限生成的子群是幂零的,则称G是局部幂零群. 它的理论中最基本的结果是希尔施-普洛特金定理:若H和K是群G的两个局部幂零的正规子群,则它们的积$J=HK$也是局部幂零的正规子群. 从而,在任一群G中都存在惟一的极大局部幂零的正规子群,称为希尔施-普洛特金根,它包含G的所有升序列的局部幂零子群. 局部幂零群G的极大子群是G的正规子群;局部幂零群的主因子是中心的. 局部幂零群类中有许多由特殊类型的广义幂零组成的子类.

希尔施-普洛特金定理(Hirsch-Plotkin Theorem)　见"局部幂零群".

希尔施-普洛特金根(the Hirsch-Plotkin radical of a group)　见"局部幂零群".

满足正规化子条件的群(groups satisfying the normalizer condition)　一种特殊类型的局部幂零群. 若群G的每一真子群真含于它在G内的正规化子中,则称G满足正规化子条件. 群G满足正规化子条件,当且仅当G的每一子群是升序列的. 所以,若G满足正规化子条件,则G是局部幂零的;反之,局部幂零群不一定满足正规化子条件.

超限上中心群(hyper-ascending certral group)　一种特殊类型的局部幂零群. 设$1=G_0\lhd G_1\lhd\cdots\lhd G_\beta=G$是$G$的一个升列. 若对任意$\alpha<\beta$,$G_\alpha\lhd G$且$G_{\alpha+1}/G_\alpha$在$G/G_\alpha$的中心内,则称$G$的这个升列是中心的. 具有一个中心升列的群称为超限上中心群. 超限上中心群满足正规化子条件,从而是局部幂零群.

中心升列(central ascending series)　见"超限上中心群".

格鲁恩伯格群(Gruenberg group)　以有限生成子群的升序列性为特征的特殊类型的广义幂零子群. 设H和K是群G的有限生成的幂零子群,记$J=\langle H,K\rangle$. 若H和K在G内是升序列的,则J也是G的升序列的幂零子群. 若群G的任一有限子集包含在G的一个升序列幂零子群中,则称G为格鲁恩伯格群;或者等价地,若群G的每个循环子群是升序列的,则称G为格鲁恩伯格群. 格鲁恩伯格群是局部幂零群,且满足正规化子条件的群是格鲁恩伯格群.

贝尔群(Baer group) 以有限生成子群的次正规性为特征的特殊类型的广义幂零群. 设 H 和 K 是群 G 的有限生成的幂零子群, 记 $J=\langle H,K\rangle$. 若 H 和 K 在 G 内是次正规的, 则 J 也是 G 的次正规的幂零子群. 若群 G 的任一有限子集包含在 G 的一个次正规幂零子群中, 则称 G 为贝尔群; 或者等价地, 若群 G 的每个循环子群是次正规的, 则称 G 为贝尔群. 贝尔群是格鲁恩伯格群, 从而是局部幂零群.

费廷群(Fitting group) 一种特殊类型的局部幂零群. 设 G 为群. 若 $G=\mathrm{Fit}G$, 即 G 是它的正规的幂零子群的积, 则称 G 为费廷群. 群 G 为费廷群, 当且仅当 G 的每一元素含于一个正规的幂零子群内. 任一费廷群是贝尔群, 从而是局部幂零群.

Z 群(Z-group) 一种由群的广义序列定义的非局部幂零的广义幂零群. 它本身又包含若干种特殊类型. 若群 G 有一个中心列 $\{\Lambda_\sigma,V_\sigma \mid \sigma\in\Sigma\}$, 即对 Σ 中的所有序数 σ, 都有 $[\Lambda_\sigma,G]\leqslant V_\sigma$, 则称 G 为 Z 群. Z 群的同态像不一定是 Z 群. 若群 G 是 Z 群, 且它的任一同态像都是 Z 群, 则称 G 为 $\overline{Z}$ 群. 霍尔(Hall, P.)举出一个例子说明: $\overline{Z}$ 群的子群不一定是 $\overline{Z}$ 群. 若群 G 是 $\overline{Z}$ 群, 且它的任一子群都是 $\overline{Z}$ 群, 则称 G 为 $\overline{\overline{Z}}$ 群. 若群 G 具有一个中心降列, 则称 G 为超限下中心群; 特别地, 若群 G 具有一个型为 ω 的逆序数的中心降列, 其中 ω 是最小的无限序数, 则称 G 为剩余幂零群. 由于每一个自由群是剩余幂零的, 并且每一群是某个自由群的同态像, 所以, 剩余幂零性是比幂零性弱得多的群论性质.

$\overline{Z}$ 群($\overline{Z}$- group) 见"Z 群".

$\overline{\overline{Z}}$ 群($\overline{\overline{Z}}$- group) 见"Z 群".

超限下中心群(hyper-descending cetral group) 见"Z 群".

剩余幂零群(residually nilpotent group) 见"Z 群".

剩余中心群(residually central group) 构成一个比 Z 群范围更大的广义幂零群类. 设 G 是群. 若对任意 $1\neq x\in G$ 存在正规子群 N 使得 $x\notin N$ 且 xN 属于 G/N 的中心; 或者等价地, 对任意 $1\neq x\in G$, 均有 $x\notin[x,G]$, 则称 G 是剩余中心群. 任一 Z 群是剩余中心群.

恩格尔群(Engel group) 在非局部幂零的广义幂零群中了解得比较多的一类群. 设 G 为群, 若对 G 的任意两个元素 x 和 y, 存在正整数 $n=n(x,y)$, 使得 $[x,{}_ny]=1$, 则称 G 是恩格尔群. 特别地, 若上述的 n 与 x,y 的选择无关, 则称 G 为 n 恩格尔群. 有限恩格尔群是幂零群; 满足极大条件的恩格尔群是幂零群; 满足关于阿贝尔子群的极大条件的恩格尔群是有限生成幂零群. 但是, 满足关于阿贝尔子群的极小条件的恩格尔群的结构还没有完全确定.

贝尔幂零群(Baer-nilpotent group) 一种特殊类型的非局部幂零的广义幂零群, 它们包含所有的局部幂零群. 若群 G 的每一有限截断是幂零的, 则称 G 是贝尔幂零群, 其中群的截断是指其子群的任一同态像. 任意恩格尔群是贝尔幂零群.

广义可解群(generalized soluble group) 无限群论的重要研究对象之一, 泛指满足某些群论性质的群, 这些群论性质在有限群中等价于群的可解性. 由于在一般的广义可解群中很难得到一些非平凡的结果, 所以在研究广义可解群时常常附加一些有限性条件. 局部可解群以及若干种由广义序列定义的广义可解群是常见的广义可解群.

局部可解群(locally soluble group) 最重要的广义可解群之一. 若群 G 的每一有限子集都包含在 G 的某一可解子群中, 则称 G 为局部可解群. 虽然, 局部可解群是最自然的广义可解群, 但是, 由于在局部可解群中没有类似于局部幂零群的希尔施-普洛特金定理, 所以人们对这类群的结构了解甚少. 已知的一些结果基于下列定理: 局部可解群的主因子是阿贝尔群.

SN 群(SN-group) 常见的由广义序列定义的广义可解群之一. 若群具有一个因子为阿贝尔群的列, 则称 G 为 SN 群. 特别地, 若群 G 具有一个因子为阿贝尔群的正规列, 则称 G 为 SI 群. 若群 G 具有一个因子为阿贝尔群的正规升列, 则称 G 为超限阿贝尔群. 它们构成 SI 群类中比较有研究兴趣的一个子类; 若群 G 具有一个因子为阿贝尔群的降列, 则称 G 为亚阿贝尔群. 特别当这样的降列的型为 ω 的逆序数(其中 ω 为最小的无限序数), 则称 G 为剩余可解群.

超限阿贝尔群(hyperabelian group) 见"SN 群".

亚阿贝尔群(hypoabelian group) 见"SN 群".

剩余可解群(residually soluble group) 见"SN 群".

根群(radical group) 一种由升列定义的广义可解群. 若群 G 具有因子为幂零群的一个升列, 则称 G 为根群. 根群类是很有用的广义可解群类, 因为它包含所有的可解群和所有的局部幂零群, 而且它具有比局部可解群类好得多的性质. 根群的子群及同态像仍然是根群; 任意两个正规的根子群的积是一个正规的根子群; 在任意群 G 中都存在一个惟一的极大正规根子群(称为根群根), 它包含 G 的所有的正规根子群.

群的根群根(radical group radical of group) 见"根群".

剩余交换群(residually commutable group)

一种特殊的广义可解群.若对群的任意两个非平凡元素 a 和 b,且 a 和 b 中至少有一个元素不属于 $[a,b]^G$,其中 $[a,b]^G$ 表示 a 和 b 的换位子在 G 内的正规闭,则称 G 为剩余交换群.有限的剩余交换群是可解群,所以剩余交换群是一种广义可解群.每一 SI 群是剩余交换群,但是,至今为止还没有找到不是 SI 群的剩余交换群的例子.

撰 稿 张志让
审 阅 石生明 施武杰

组合群论

组合群论(combinatorial group theory) 群论分支之一.基于群的呈示对群进行研究的学科.从 1901 年到 1914 年,马克思·邓(MaxDehn)发表了一系列具有深远影响的论文.这些论文提出的下述问题标志着组合群论的诞生:对给定的一类群,是否都是有限的(即伯恩赛德问题)? 是否都是有限呈示的? 其子群是否仍是此类群? 以及三大群论问题:群的字问题、群的元素的共轭问题、群的同构问题.组合群论的目的就是结合拓扑学(例如,一个连通的拓扑空间的基本群可以用一个呈示予以刻画)、同调代数(例如,群的上、下同调)和数理逻辑(例如,群的有关判定问题、自动机群、群的邓函数)等学科的理论工具、技巧和方法,发展代数的技巧和方法,利用群的呈示解决群论中的问题(包括上述问题).“组合”一词也源于此,而与组合数学却没有直接的联系.

在组合群论的发展过程中,以下数学家作出了重要的贡献:马克思·邓、玛格纽斯(Magnus,W.)、内维科夫(Novikov,P. S.)、亚迪安(Adian,S. I.)、布莱顿(Britton,J. L.)、鲍姆斯兰格(Baumslag,G.)、纽曼(Neumann,B. H.)、希格曼(Higman,G.)、欧相斯基(Olshanskii,A. Ju)、伊万洛夫(Ivanov,S. V.)、林登(Lyndon,R. C.)、哥斯滕(Gersten,S. M.)、斯托宁(Stallings,J. R.)、哥罗莫夫(Gromov,M.)等.组合群论一直是群论领域一个十分活跃的分支.

群的呈示(presentation of a group) 以群的生成元和定义关系子定义群的一种形式.设 X 是任一集合.$F(X)$是 X 生成的自由群,而 R 是 $F(X)$的一个子集,N 是 R 于 $F(X)$中的正规闭包,并记 $G=F(X)/N$.于是,称 $P=\langle X;R\rangle$(或直接地 $G=\langle X;R\rangle$)为群 G 的一个呈示.X 的元素也称为 G 的生成元,而 R 的元素称 G 的定义关系子.特别地,呈示中集合 R 可以用集合$\{u=v\mid uv^{-1}\in R\}$取代,而且称每一个等式 $u=v$ 为 G 的定义关系式.

群的定义关系子(defining relator of a group) 见“群的呈示”.

群的定义关系式(defining relation of a group) 见“群的呈示”.

有限呈示群(finitely presented group) 一类重要的群.设 $P=\langle X;R\rangle$为群 G 的一个呈示.若 X 和 R 均有限时,称 G 是有限呈示群.

群的凯莱图(Cayley graph of group) 对应于给定的一个群的呈示的一个(有向)图,是研究群的几何性质和拓扑性质的一个十分重要的工具.首先,一个有向图 Γ 是一个二元组,形如 $\Gamma=\langle V,E\rangle$,$V$ 是一个非空集合,其元素称为 Γ 的结点;而集合 E 的元素由 V 的某些元素构成的二元有序组,形如$(u,v)(u,v\in V)$,称为 Γ 的起点为 u,终点为 v 的一条有向边.设 $P=\langle X;R\rangle$是群 G 的一个呈示.对应于 P 构造一个有向图 $\Gamma_X(G)$如下.$\Gamma_X(G)$的结点与 G 的元素成一一对应,并将每一结点标记为与它对应的 G 的元素.对于$\Gamma_X(G)$中任一对结点 g_1 和 g_2,若存在 $x\in X$,使得在 G 中有 $g_1x=g_2$,则在 $\Gamma_x(G)$有一条有向边(g_1,g_1x)和另一条有向边(g_2,g_2x^{-1}).

冯坎彭图形(van Kampen diagram) 刻画群的单位元及元素间相互关系的一个重要的几何工具.设 $P=\langle X;R\rangle$为群 G 的一个呈示.P 的一个冯坎彭图形是一个连通的有向平面图,其每一有向边标记为 X 的一个元素,使得每一个面为一个盘.并且,若从一个盘的边界上某一结点为终点,选择一定的方向(顺时针或逆时针),绕边界一周所经历的边(依次)所构成的 X 上的一个字(当经历一条标记为 x 的反向边时,则是 x^{-1}而不是 x 在此字中出现)则为 R 中的元素,也称为此盘的边界字.特别地,从一个冯坎彭图形的边界上任一结点出发绕边界一周(任一方向)所经历的边界所构成的 X 上的字(称为此图形的边界字)是 G 的单位元.反之,若一个 X 上的字 w 在 G 中等于单位元,则存在一个冯坎彭图形其边界字为 w.

蒂茨变换(Tietze transformations) 从群的一个呈示变到另一呈示的变换.设 $P=\langle X;R\rangle$是群的一个呈示.蒂茨变换是指如下四个变换.

T_1(添加生成元):从呈示 P 导出呈示 $P_1=\langle X\cup Y;R\cup S\rangle$,其中 Y 为任一满足 $Y\cap F(X)=\varnothing$的集合,$S=\{yw(x)^{-1}\mid y\in Y\}$,$w(x)\in F(X)$.

T_2(消去生成元):若 $X=X_1\cup X_2$,$X_1\cap X_2=\varnothing$,并且 $R=R_1\cup R_2$,其中

$R_1\subseteq F(X_1)$,

$R_2=\{x_2w(x_1)^{-1}\mid x_2\in X_2,w(x_1)\in F(X_1)\}$,

则从呈示 $P=\langle X_1\cup X_2;R_1\cup R_2\rangle$导出呈示

$$P_2=\langle X_1;R_1\rangle.$$

T_3(添加关系字):若 $S\subseteq F(X)$,且 S 的元素代

表 G 的单位元，则从呈示 $P=\langle X;R\rangle$ 导出呈示

$$P_3=\langle X;R\cup S\rangle.$$

T_4（消去关系字）：若 $R=R_1\cup R_2$，并且 R_2 中每一元素可由 R_1 中元素导出，则从呈示 $P=\langle X;R\rangle$ 导出呈示 $P_4=\langle X;R_1\rangle$.

蒂茨证明了如下断言：P 与 Ω 同为群 G 的呈示，当且仅当 Ω 可由 P 经若干次蒂茨变换得到.

群的HNN扩张(HNN-extension of group) 群的一个重要扩张形式. 由希格曼(Higman, G.)和纽曼(Neumann, B. H.)于 1994 年引入. 设 $P=\langle X;R\rangle$ 是群 G 的一个呈示. $H\leqslant G$ 由集合 $U\subseteq G$ 生成. 又，若 $\varphi: H\to G$ 的单同态，则呈示 $P^*=\langle X,t;R,\{t^{-1}ut\varphi(u)^{-1}\mid u\in U\}\rangle$ 定义的群 G^* 称为 G 的一个 HNN 扩张，G 称为 G^* 的基群，H 和 $\varphi(H)$ 称为相伴子群，t 称为稳定字.

基群(base group) 见“群的 HNN 扩张”.

相伴子群(associated subgroups) 见“群的 HNN 扩张”.

稳定字(stable letter) 见“群的 HNN 扩张”.

带融合的自由积(free product with amalgmations) 群的一个重要扩张形式. 它是自由积的推广. 设 $P_1=\langle X_1;R_1\rangle$，$P_2=\langle X_2;R_2\rangle$ 分别为群 G_1 和 G_2 的呈示，$H_1\leqslant G_1$，$H_2\leqslant G_2$，并且 $\varphi: H_1\to H_2$ 是一个同构映射. 若 U 是 H_1 的一个生成元集，则呈示 $P=\langle X_1,X_2;R_1,R_2,\{U\varphi(u)^{-1}\mid u\in U\}\rangle$ 定义的群称为群 G_1 和 G_2 的带融合子群 H_1 和 H_2 的自由积.

小消去理论(small cancellation theory) 有关群的字问题、共轭问题及有关判定算法的一套重要理论，起源于马克思・邓算法并基于冯坎彭图形. 小消去理论包括：小消去条件、小消去群和有关定理. 设 $P=\langle X;R\rangle$ 是群 G 的一个呈示. 小消去条件 $C(k)$ 是指 P 上的冯坎彭图的每一内盘与至少其他 k 个盘有共同边界；小消去条件 $T(k)$ 是指 P 上的冯坎彭图的每一内结点至少与 k 条边关联. 称 G 是满足小消去条件 $C(k)$，$T(h)$ 的小消去群，是指 R 的元素均是循环既约的，并且 P 上每一个既约的冯坎彭图(任一冯坎彭图经有限步归约可得一既约的图)满足条件 $C(k)$ 和 $T(h)$. 小消去群是非常重要的一类群，例如，满足小消条件 $C(6)$ 或 $C(4)$ 和 $T(4)$ 或 $C(3)$ 和 $T(6)$ 的群的字问题是可判定的.

小消去条件(small cancellation condition) 见“小消去理论”.

小消去群(small cancellation group) 见“小消去理论”.

第二同伦群(second homotopy group) 基于同伦的一类阿贝尔群. 将群的呈示看做二维复形而得到的第二同伦群. 是组合群论研究的重要对象. 设 $P=\langle X;R\rangle$ 是群 G 的一个呈示. P 上的冯坎彭图的对偶图(以一圈代替一盘，此盘的每一有向边替换为垂直方向的无向边，而此边上有一短有向箭头与其垂直，与有向边方向一致，并注有相同标志)称为图像；称边界字在 $F(X)$ 中等于单位元的冯坎彭图为球化图，而称球化图的对偶图为球化图像. 定义两个球化图像 p_1 与 p_2 的加法为：将其放在一起构成一个新的图像(球化) $p=p_1+p_2$. 称一个球化图像 p 与另一个 q 同伦，是指 p 经有限次如下同伦变换得到 q：

1. 去掉域增加一个独立的环(一个独立的环是一个闭合的边，环中无任何其他的边或圈).

2. 去掉或添加一个可消去对(一个可消去对由两个完全相同但方向刚好相反的圈构成的一个独立的分支).

3. 断接桥(一个桥由同一个区域的两边组成，它们的标志相同，但与其垂直的有向箭方向刚好相反，将这两条边分别截断，断口分别连结后得到的两条边构成另一桥的过程称为断接桥).

若记一球化图像 p 所在的同伦类为 $\langle p\rangle$，并定义加法：$\langle p_1\rangle+\langle p_2\rangle=\langle p_1+p_2\rangle$. 于是，所有球化图像的同伦类的全体构成一个加法群，称为 P 的第二同伦群，记为 $\pi_2(P)$.

图像(picture) 见“第二同伦群”.

球化图(spherical diagram) 见“第二同伦群”.

球化图像(spherical picture) 见“第二同伦群”.

第二同伦模(second homotopy module) 一类重要的模. 一呈示 P 的第二同伦群 $\pi_2(P)$ 也是一个左 $\mathbb{Z}G$ 模，称为呈示 P 的第二同伦模，仍记为 $\pi_2(P)$.

非球化呈示(aspherical presentation) 一类特殊的呈示. 其下同调有着精确的描述. 设 $P=\langle X;R\rangle$ 是一个群的呈示. 若其第二同伦模 $\pi_2(P)=0$，则称 P 是非球化的.

群作用于图(group acting on a graph) 用直观的几何图形研究抽象群性质的一个重要方法. 若 $\Gamma=\langle V;E\rangle$ 是一个图，其中，V 为结点集，E 为边集，$h: V\to V$ 是一一映射，使得：由 $(V,V')\in E$ 得 $(h(V),h(V'))\in E$，反之亦然，则称 h 为 Γ 的一个自同构. Γ 的所有自同构关于合成运算构成一个群，称为 Γ 的自同构群，记为 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. 若一抽象群 G 与 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 同态，则称 G 作用于图 Γ 上. 特别地，若 Γ 是树，则称群 G 作用于树 Γ 上.

群图(graph of groups) 一类特殊的图. 通过几何图形描述群之间关系和群扩张，是研究若干群无反演地作用于树的重要工具. 一个群图 Γ 由以下三部分构成：

1. 一个连通的图 $\Gamma=\langle V;E\rangle$，其中 V 为结点集，

E 为边集.

2. Γ 中的每一个结点 v 对应一个群 G_v,称为结点群,而且 Γ 中每一对边 e,e^{-1}分别有群 $H_e,H_{e^{-1}}$与之对应,称为边群,使得:若 v 是 e 的起点,则 $H_e \leqslant G_v$,而,若 u 是 e^{-1}的起点,则 $H_{e^{-1}} \leqslant G_u$.

3. 对每一边 e,存在同构映射 $\varphi_e: H_e \to H_{e^{-1}}$.

群图的基本群(fundamental group of graph of groups) 群的一种扩张形式,这类群作用于树. 设 Γ 是一个群图. Γ 的一条通路 α 是一个序列 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,其中 α_i 或是 Γ 的图的一条边,或是一个结点群的一个元素,并要求 α_j 的终点是 α_{j+1}的起点(当 $\alpha_i \in G_v$ 时,G_v 为结点 v 的群,则定义 α_i 的起点和终点均为 v). 并作如下归约:若某 α_i 是一结点群的单位元,则从 α 中去掉 α_i;若某两个相邻的 α_i,α_{i+1}是同一结点群的元素,则用此结点群中元素 $\alpha_i' = \alpha_i\alpha_{i+1}$替换这两个元素;若 $\alpha_{j-1}\alpha_j\alpha_{j+1}$形如 $eh_{e^{-1}}e^{-1}$,则用 $\varphi_e^{-1}(h_{e^{-1}})$替换这三个元素;若 $\alpha_{j-1}\alpha_j\alpha_{j+1}$形如 $e^{-1}h_ee$,则用 $\varphi_e(h_e)$替换这三个元素. Γ 的两条通路 α,β 称为等价的,若其中一条能经若干个上述归约或其逆得到. 记 α 所在的等价类为$[\alpha]$. 选定一结点 O,若

$$\pi_1(\Gamma,O) = \{[\alpha]:\alpha \text{ 的起点和终点均为 } O\},$$

则对定义的乘法

$$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta] \quad ([\alpha],[\beta] \in \pi_1(\Gamma,O)),$$

$\pi_1(\Gamma,O)$是一个群. 并且,若 O'是另一结点,则 $\pi_1(\Gamma,O) \cong \pi_1(\Gamma,O')$. 称 $\pi_1(G,O)$为群图 Γ 的基本群(或称为 Γ 的第一同伦群). 关于群图的基本群有如下一条重要定理:群 G 作用于一棵树上,当且仅当 G 是某一群图的基本群.

第一同伦群(first homotopy group) 见"群图的基本群".

霍普范群(Hopfian group) 一类特殊的群. 若一个群不与自己的任何真商群同构,则称此群为霍普范群.

三角群(triangle group) 一类特殊的群,其结构与三角形三内角及三条边长相关. 由呈示

$$P = \langle a,b,c;a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^m = (ca)^n = 1\rangle$$

定义的群称为三角群.

马可夫性质(Markov property) 与群的许多判定问题相关的一类重要的代数性质的性质. 有限呈示的群的一条代数性质称为马可夫性质. 若满足:

1. 存在一个有限呈示的群具有此性质.

2. 存在一个有限呈示的群不能嵌入一个具有此性质的群.

例如:有限性、可交换性、具有字问题可解性、单性、自由性等均为马可夫性质.

希格曼定理(Higman theorem) 有关某类有限生成子群的呈示的一个重要定理. 该定理断言:一个有限生成的群 G 是一个有限呈示的群的子群,当且仅当 G 有一个形如$\langle X;R\rangle$的呈示,其中 X 为有限集,而 R 是自由群 $F(X)$的一个递归可枚举子集.

群簇(variety of groups) 一种群类. 它是对群进行分类的一个重要概念. 一个非空的群类,若它在同态像、子群的笛卡儿积下是闭的,则称此群类为一个群簇. 例如,伊万洛夫(Ivanov,S. V.)于 1989 年证明了一个出人意料的结果:存在一个其非循环的自由群均不是霍普范群的群簇.

双曲群(hyperbolic group) 一类重要的群. 具有很好的几何性质. 源于 1987 年哥罗莫夫(Gromov,M.)发表的著名论文"双曲群". 设 $P = \langle X;R\rangle$是群的一个呈示,Γ 为基于 P 的群 G 的凯莱图. 若给 Γ 的每条边赋以单位长度,则 Γ 成为一度量空间. 若对 Γ 的任意三个结点(即 G 的任意三个元素)a,b,c,取其中每两点间的测距线 α,β,γ,则 α,β,γ 中任一条上任一点到另两条的测距线中至少有一条的长度不大于某一正常数,于是,称 G 是双曲群. 例如,所有的有限群、自由群等均为双曲群;但秩为 2 的自由阿贝尔群则不是.

可梳群(combable group) 一类具有较好几何性质的群. 设 $P = \langle X;R\rangle$是群 G 的一个呈示,Γ 为基于 P 的 G 的凯莱图. 给 Γ 的每条边赋以单位长度使其成为度量空间. 对 Γ 中任意一点 a(即 G 的任一元素),选定一条从单位元结点到 a 的道路 σ_a,称 G 是可梳理的,是指对其中任意两点 a 和 b,相距至多一个单位长度,则对任意的正整数 t,从单位元结点沿 σ_a 和 σ_b 分别走 t 个单位长后到达 σ_a 上的 $\sigma_a(t)$点和 σ_b 上的 $\sigma_b(t)$点(若 t 大于 σ_a 或 σ_b 的长度,则 $\sigma_a(t) = a$ 或 $\sigma_b(t) = b$),于是,$\sigma_a(t)$与 $\sigma_b(t)$的距离不大于某常数 k,并称这些道路有 k 伴侣性质.

自动机群(automatic group) 一类具有较好的几何性质并可由有限状态自动机予以定义的群. 设 $P = \langle X;R\rangle$是群 G 的一个呈示,Γ 为其凯莱图并是一度量空间. 对 Γ 中每一结点,选取若干单位元结点到此结点的道路构成集合 L,L 也看做是 X 上某些字的集合. 若 L 作为 X 上的一个语言是一正则语言,并且作为 Γ 中的道路又具有 k 伴侣性质,则称 G 为自动机群.

呈示的邓函数(Dehn function of presentation) 一个数论函数. 它对群的分类、群的字问题的可解性与计算复杂性的讨论有着重要的作用. 设 $P = \langle X;R\rangle$是群 G 的呈示,w 是 X 上的字. 若 w 在 G 中代表单位元,则 w 与一形如

$$\prod_{i=1}^{t} u_i \gamma_i^{\varepsilon_i} u_i^{-1}$$

的乘积等价,其中 u_i 为 X 上的字,$\gamma_i \in R$,$\varepsilon_i = \pm 1$,i

$=1,2,\cdots,t$. 若 $A(w)$为所有 w 的如上的等价式中 t 的极小值,则呈示 P 的邓函数定义为(对任意自然数 n)$\delta_P(n)=\max(A(w))$,w 字长$\leqslant n$,并且 w 在 G 中为单位元. 同一群 G 的不同呈示的邓函数是等价的,这个等价类称为群 G 的邓函数. 一群是双曲群,当且仅当其邓函数等价于一线性(关于 n)函数. 自动机群的邓函数受囿于二次函数.

撰　稿　王晓峰
审　阅　石生明　施武杰

计算群论

计算群论(computational group theory)　群论与计算机科学相结合而产生的一个新兴数学分支. 它研究群论算法的设计、分析及有关的理论基础和软件实现等问题. 一个群论算法可定义为解决某个群论问题而设计的一系列操作. 算法分析要对执行算法所需的时间、存贮空间等资源进行估计. 在计算机上实现群论算法的关键是选择合适的数据结构,使之能够很好地代表要进行操作的各种数学对象.

在电子计算机出现之前,人们就已经产生了机械地进行群论计算的设想. 托德(Todd,J. A.)和考克斯特(Coxeter,H. S. M.)于 1936 年提出了利用陪集计数来求一个子群的指数,通常认为这是第一个群论算法. 这个算法于 1953 年首次在英国剑桥的 EDSAC1 计算机上得到实现. 诺布赛尔(Neubüser,J.)于 1960 年发表了借助计算机研究子群格的工作. 此后,计算机越来越多地被用于群论研究,产生了众多的算法,取得了许多重要成果. 例如,在全部 26 个零散单群中,有 9 个最初是借助计算机证明其存在性的. 20 世纪 90 年代初,人们又借助计算机得到了 2^8 阶群的完全分类. 近十几年,一批通用和专用的计算群论软件系统相继问世,推动了这个分支的发展. 同时,人们在群论算法的计算复杂度等理论领域也取得了新的进展.

群论算法的计算复杂度(computational complexity of group-theoretic algorithm)　对执行群论算法所需资源的度量. 对执行一个群论算法所要耗费的时间、存贮空间等资源的估计,通常是将其表示成算法输入量 n 的一个函数. 例如,对于置换群的算法,一般取 n 为置换群 G 的次数,而计算 G 的基和强生成集的施赖埃尔-西姆斯算法所需要的运行时间是 n 的一个 6 次多项式,记为 $O(n^6)$. 这类算法称为多项式时间算法. 一般认为只有多项式时间算法才具有现实的可计算性. 20 世纪 80 年代初完成的有限单群分类,为群论算法的计算复杂度研究提供了强有力的工具. 近年来已有一批重要的群论问题被证明具有多项式时间算法. 例如:给定 n 次置换群 G 的一组生成元,可以在 n 的多项式时间内求得 G 的阶,G 的导群列和合成群列;对于给定的素数 p 求 G 的西洛 p 子群 P,它的正规化子 $N_G(P)$以及极大正规 p 子群 $O_p(G)$等. 值得注意的是,理论上的计算复杂度与实际计算中的运行效率有时并不一致. 例如,现在通行的求两个子群之交的算法已被证明在最坏情形下是指数时间的,但它对实际中的多数情形都十分有效. 与此相反,有些多项式时间算法的实际运行效率却很低.

多项式时间算法(polynomial time algorithm)　见"群论算法的计算复杂度".

随机群论算法(random group-theoretic algorithm)　亦称概率算法. 含有若干随机操作的群论算法. 一个算法通常由很多个步骤构成,其中每个步骤都明确规定了所要完成的操作. 因此对于相同的输入,每次执行同一算法所得的结果总是相同的. 但有另外一类群论算法,其中某些步骤允许从事先确定的有限多个操作中随机地选取一个加以执行,这类算法称为随机群论算法. 通常随机算法的运行效率很高,但其输出只是所求问题的一个可能的解. 例如:给定有限群 G 中一组元素 $g_1,g_2,\cdots,g_m$,对于由它们生成的子群 $H=\langle g_1,g_2,\cdots,g_m\rangle$可以用一个随机算法判断 H 是否等于 G. 算法随机地从 G 中选取一个元素 x,检验 x 是否属于 H. 若 $x\notin H$,则显然 $H\neq G$;若 $x\in H$,则 $H\neq G$ 的可能性不超过 1/2. 这样反复独立地从 G 中随机选取 t 个元素,若它们全属于 H,则判定 $H=G$. 这时出错的可能性不超过 2^{-t}. 因此,当 t 足够大时,出错的可能性就很小了. 随机算法在其他数学分支中也有广泛的应用.

概率算法(probabilistic algorithm)　见"随机群论算法".

陪集表(coset table)　描述群 G 中某个有限指数子群 H 在 G 中的全部陪集的表. 设 G 由 $g_1,g_2,\cdots,g_r$ 生成,H 是 G 中一个指数为 m 的子群. H 在 G 中的陪集表 T 是一个 $m\times 2r$ 的矩阵. T 的每一行代表 H 的一个右陪集 Hx_i($1\leqslant i\leqslant m$),每一列代表集合 $X=\{g_1,g_2,\cdots,g_r,g_1^{-1},g_2^{-1},\cdots,g_r^{-1}\}$中的一个元素. 若第 j 列代表 $s\in X$,而 $Hx_is=Hx_k$,则 T 的第 i 行第 j 列位置上的元素 $T(i,j)=k$;若陪集 Hx_is 尚未知晓,则 $T(i,j)=0$. 当陪集表 T 中包含等于 0 的元素时,亦称 T 为一个部分陪集表,以区别于所有元素皆不为 0 的完全陪集表. 当 G 的某个生成元 g_j 是对合时,$g_j^{-1}=g_j$,便可在陪集表中省略代表 g_j^{-1} 的那一列. 因此,群的对合生成元对于在实际计算中减少存贮空间和运算量有着重要的意义. 例如:3 个文字的对称群 S_3 有一个表现

$$S_3 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle.$$

对其指数等于 3 的子群 $H=\langle b\rangle$，H 在 G 中的一个完全陪集表为

	a	$b=b^{-1}$	a^{-1}
1	2	1	3
2	3	3	1
3	1	2	2

由于 b 是一个对合生成元，该陪集表只有 3 列.

部分陪集表(partial coset table)　见“陪集表”.

陪集计数(coset enumeration)　亦称托德-考克斯特算法. 一种群论算法. 求有限表现群中子群指数的一种算法. 设

$$G = \langle g_1, g_2, \cdots, g_r \mid R_1(g_1, g_2, \cdots, g_r) = \cdots = R_s(g_1, g_2, \cdots, g_r) = 1 \rangle$$

是一个有限表现群. 对于由 $g_1, g_2, \cdots, g_r$ 的字 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 生成的 G 的子群 $H=\langle w_1, w_2, \cdots, w_t\rangle$，若 $|G:H|$ 有限，则算法通过系统地逐次试探修正，试图最终求出 H 在 G 的一个完全陪集表，进而得到指数 $|G:H|$ 以及 G 在 H 的全体右陪集上的一个传递置换表示. 在逐次试探的过程中，有时会错误地将 H 的同一陪集定义成不同的，称为陪集重合现象. 有例子说明陪集重合现象是不可避免的. 陪集计数算法的关键在于如何处理陪集重合.

托德-考克斯特算法(the Todd-Coxeter algorithm)　即“陪集计数”.

陪集重合现象(coset coincidence)　见“陪集计数”.

赖德迈斯特-施赖埃尔算法(the Reidemeister-Schreier algorithm)　一种群论算法. 求群 G 中某个有限指数子群 H 的表现的算法. 当已知 G 的生成元 $g_1, g_2, \cdots, g_r$ 在 H 的全体陪集上的作用时，算法求出 H 的一个表现，其中包含 $(r-1)|G:H|+1$ 个 H 的施赖埃尔生成元，并利用赖德迈斯特重写过程将原来用 $g_1, g_2, \cdots, g_r$ 的字表示的 H 的定义关系改写成施赖埃尔生成元的字.

施赖埃尔生成元(Schreier generators)　有限表现群的一类特殊的生成元. 设 $G=\langle g_1, g_2, \cdots, g_r\rangle$，$H$ 是 G 中一个有限指数的子群，取定 H 在 G 中的一个右陪集完全代表系 T. 对于任意 $x\in G$，记 $\bar{x}\in T$ 为陪集 Hx 的代表元. 根据施赖埃尔定理，H 可由全体形如 $tg_i\,\overline{tg_i}^{-1}(t\in T, 1\leqslant i\leqslant r)$ 的元素生成，称之为 H 的施赖埃尔生成元.

置换群的基(base of permutation group)　置换群计算的一个基本概念. 对于作用在有限集合 Ω 上的一个置换群 G，Ω 的一个有序子集 $B=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)$，若保持点 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 不动的稳定子群 $G_{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k}=1$，则称 B 为 G 的一个基，k 称为基 B 的长度. 基的意义在于，G 中每个元素都被其在 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 上的像惟一确定.

基的长度(length of the base)　见“置换群的基”.

强生成集(strong generating set)　置换群计算的一个基本概念. 设 G 是置换群，$B=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)$ 为 G 的一个基. G 中置换的一个子集 S 称为关于 B 的一个强生成集，若 G 可以由 S 生成，且稳定子群 $G_{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_i}(1\leqslant i\leqslant k)$ 皆可以由 $S\cap G_{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_i}$ 生成. 即一个强生成集包含了子群链 $G\geqslant G_{\beta_1}\geqslant G_{\beta_1\beta_2}\geqslant\cdots\geqslant G_{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{k-1}}\geqslant G_{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k}=1$ 中每一项的生成元.

施赖埃尔-西姆斯算法(the Schreier-Sims algorithm)　一种群论算法. 置换群计算的基本方法. 由西姆斯(Sims, C. C.)于 20 世纪 60 年代末提出. 对于由一组生成置换给出的 n 次置换群 G，该算法根据施赖埃尔(Schreier, O.)关于子群生成元的定理求出 G 的一个基以及相应的强生成集，同时给出了 G 中元素的一个结构. 利用这个结构可以方便地求出 G 的阶、计算 G 及其某些点稳定子群的轨道、判断一个置换是否属于 G 等. 在最坏情形下，该算法的计算复杂度为 $O(n^6)$. 利昂(Leon, J. S.)于 1980 年把陪集计数引入算法，使之在处理 n 较大的群时效率得以提高. 这一算法常被称为施赖埃尔-托德-考克斯特-西姆斯算法. 此后，杰伦(Jerrum, M.)提出 G 的既约表示的概念，进而设计了一个求 G 的基和强生成集的新算法，使其计算复杂度降至$O(n^5)$.

施赖埃尔-托德-考克斯特-西姆斯算法(the Schreier-Todd-Coxeter-Sims algorithm)　见“施赖埃尔-西姆斯算法”.

***AG* 生成序列**(*AG* generating sequence)　有限可解群的一类特殊的生成元. 若 G 是一个有限可解群，则 G 有一个合成群列 $G=G_0\triangleright G_1\triangleright G_2\triangleright\cdots\triangleright G_n=1$，其中 $G_{i-1}/G_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为 k_i 阶循环群. 若 $G_{i-1}=\langle G_i, g_i\rangle$，则序列 $S=(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ 称为 G 的一个 AG 生成序列. 这时 G 中任一元素皆可表成

$$g_1^{l_1}g_2^{l_2}\cdots g_n^{l_n}\quad(0\leqslant l_i < k_i)$$

的形式. 这种表示形式构成了对有限可解群进行计算的基础. 当 G 是幂零群时，还可以进一步要求 $G_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 在 G 中正规，且商群 G_{i-1}/G_i 包含在 G/G_i 的中心内. 这时序列 S 称为 G 的一个 NG 生成序列. 若 G 是一个无限多循环群，则 G 也有 AG 生成序列. 因此，有限可解群的一些算法也可用于无限多循环群.

低指数算法(low index algorithm)　枚举群的全部小指数子群的一种算法. 它是由西姆斯(Sims, C. C.)设计的,适用于用生成元和定义关系给出的群 G. 给定正整数 b,该算法求出 G 中所有指数小于 b 的子群,给出它们的生成元,并且分别求出 G 在各个子群的陪集上的传递置换表示. 由于算法所需的运算量和存贮空间都很大,b 一般不能超过 100,所以取名为低指数算法.

群论算法软件包(software package of group-theoretic algorithms)　为完成一般或者特定群论计算而设计的软件包. 自 20 世纪 80 年代以来,一批群论算法软件包先后面世. 其中应用较为广泛的有下列几种.

1. CAMAC2 系统,主要处理群在诸如码、阿达马矩阵、区组设计等各种组合结构上的作用.

2. CAS(character algorithm system),群指标表计算专用软件包.

3. CAYLEY,由澳大利亚悉尼大学坎农(Cannon, J.)等研制的一个庞大系统,包括为计算群论专门设计的一种程序语言和一个收集了目前已有的绝大多数群论算法的程序库.

4. GAP (groups, algorithms and programming),一个开放型的系统,支持对于抽象群、置换群、向量、矩阵、有限域、多项式等代数对象的各种运算,并允许用户自由修改、增删系统中的现有算法.

5. SOGOS(soluble groups' operating system),有限可解群计算专用软件包.

6. SPAS (subgroup presentation algorithms system),由若干子系统构成,专门处理以生成元和定义关系形式给出的抽象群.

撰稿　王　杰
审阅　石生明

半　群

半群(semigroup)　最简单、最自然的一类代数系统. 一个非空集合 S 连同定义在它上面的一个结合的(即满足结合律的)二元运算"·"的代数系统 $(S, \cdot)$ 称为一个半群. 半群 $(S, \cdot)$ 简记为 S.

半群是群的推广. 群自然是半群;反之显然未必. 半群也是环的推广. 环在只考虑它的乘法运算的时候是一个半群,称为环的乘半群;但任何一个带零半群却未必是某个环的乘半群. 半群代数理论的系统研究始于 20 世纪 50 年代(虽然,这方面的工作可追溯到 1904 年苏士凯维奇(Suschkwitz, A. K.)关于有限半群的论文). 在数学内部和外部的巨大推动下,半群理论已成为代数学的一个公认的分支学科,并早已以其特有的方法独立于群论和环论之外. 在 20 世纪 60 年代,苏联和美国率先出版了两本专著,利雅平(Ляпин, E. C.)的《半群》和克利福德(Clifford, A. H.)与普雷斯顿(Preston, G. B.)的两卷《半群代数理论》,这对半群代数理论的发展,在国际上起了巨大的推动作用. 由德国斯普林格出版社出版的《半群论坛》更是有关半群理论的一个重要的国际性专门刊物. 许多数学家在世界各地开展半群理论的研究和各层次高级人才的培养(直到博士后). 半群代数理论是半群理论中最基本、最活跃、也最富成果的一部分. 此外,尚有半群的分析、拓扑和序理论.

环的乘半群(multiplicative semigroup of a ring)　见"半群".

幺半群(monoid)　含幺元(即恒等元)的半群. 半群 M,若存在 $1\in M$,使得关于任意 $x\in M$,有 $x1=1x=x$,则称 M 为幺半群. 关于任意半群 S,常用 S^1 表示一个幺半群. 若 S 为幺半群,则 $S^1=S$;若 S 不是幺半群,则 $S^1=S\cup\{1\}$, $1\notin S$, S^1 的半群运算定义如下:在 S 上其运算与 S 的半群运算相同,而关于任意 $x\in S$ 有 $x1=1x=x$,且 $1\cdot 1=1$.

带零半群(semigroup with zero)　含零元的半群. 半群 S 中的元素 0,若关于任意 $x\in S$,有 $0x=x0=0$,则称 0 为 S 的零元. 关于任意半群 S,记

$$S^0=\begin{cases}S & (S\text{ 带零}),\\ S\cup\{0\} & (0\notin S, S\text{ 不带零}),\end{cases}$$

关于后者,对任意 $x\in S$,再定义 $0x=x0=0\cdot 0=0$ 时,也成一带零半群. 于是,S^0 总为带零半群.

半群的零元(zero of a semigroup)　见"带零半群".

半群的同态(homomorphism of semigroup)　用以比较两个半群的重要概念. 设 S, T 是两个半群,φ 是 S 到 T 的一个映射. 若关于任意 $s_1, s_2\in S$,有 $\varphi(s_1s_2)=\varphi(s_1)\varphi(s_2)$,则称 φ 是半群 S 到半群 T 的同态. 当 $\varphi(S)=T$ 时,称 φ 是 S 到 T 的满同态,而称 T 是 S 的一个同态像. 当 φ 是单射时,称 φ 是 S 到 T 的单同态. 当 φ 是双射时,称 φ 是 S 到 T 上的同构,此时,称半群 S 与 T 是同构的.

半群的满同态(surmorphism of semigroup)　见"半群的同态".

半群的同态像(image of homomorphism of a semigroup)　见"半群的同态".

半群的单同态(monomorphism of semigroup)　见"半群的同态".

半群的同构(isomorphism of semigroups)　见"半群的同态".

同构半群(isomorphic semigroups)　见"半群的同态".

子半群(subsemigroup)　与群的子群相平行的

概念. 设 S 是一半群, $\varnothing\neq U\subseteq S$, 若关于任意 $u,v\in U$, 有 $uv\in U$, 则称 U 是 S 的子半群. 用 $U\leqslant S$ 表示 U 是 S 的子半群.

半群理想(ideal of semigroup)　半群的一类特殊子半群. 设 S 是一个半群, $\varnothing\neq L(R)\subseteq S$. 若 $SL\subseteq L(RS\subseteq R)$, 则称 $L(R)$ 是 S 的一个左(右)理想, 若 I 同时是 S 的左理想和右理想, 则称 I 是 S 的理想. 当 $I(L,R)$ 是 S 的理想(左, 右理想)时, 常记为

$$I\lhd S(L\lhd_l S, R\lhd_r S).$$

半群的左(右)理想(left (right) ideal of semigroup)　见"半群的理想".

完全素理想(completely prime ideal of semigroup)　一类特殊的理想. 半群 S 的理想 I, 若对任意 $a,b\in S$, $ab\in I$ 蕴涵 $a\in I$ 或者 $b\in I$, 则称 I 为完全素的.

半群的完全半素理想(completely semiprime ideal of a semigroup)　比完全素理想弱的一个概念. 半群 S 的理想 I, 若关于任意 $a\in S$, $a^2\in I$ 蕴涵 $a\in I$, 则称 I 为完全半素理想.

伯克霍夫定理(Birkhoff theorem)　联系完全素理想和完全半素理想的一个结论. 将伯克霍夫(Birkhoff, G. D.)在其他代数领域的一个结论移植到半群中, 即: 半群的理想是完全半素的, 当且仅当它为一簇完全素理想的交.

半群的拟理想(quasi-ideal of semigroup)　一类较左、右理想更广义的理想. 设 S 是一半群, $\varnothing\neq Q\subseteq S$, 若 $QS\cap SQ\subseteq Q$, 则称 Q 是 S 的拟理想. 设 S 是一半群, $\varnothing\neq B\subseteq S$, 若 $BS^1B\subseteq B$, 则称 B 是 S 的双-理想. 又设 $\varnothing\neq C\subseteq S$, 若 $C^2\subseteq C$, 且 $C^mSC^n\subseteq C$, 其中 m,n 是自然数, 则称 C 是 S 的一个 (m,n) 理想.

(m,n) 理想((m,n)-ideal)　见"半群的拟理想".

双-理想(bi-ideal)　见"半群的拟理想".

单演半群(monogenic semigroup)　与群论中循环群相平行的概念. 若半群 S 是由一个元素 $a\in S$ 所生成的, 记为 $S=\langle a\rangle$, 则称 S 为单演的. 当 $m,n\in\mathbf{N}$, $m\neq n$ 而 $a^m\neq a^n$ 时, $\langle a\rangle$ 同构于半群 $(\mathbf{N},+)$. 否则, 存在 $m\in\mathbf{N}$(a 的指标)和 $r\in\mathbf{N}$(a 的周期)使得:

1. $|\langle a\rangle|=m+r-1$.

2. $a^m=a^{m+r}$.

3. 关于任意 $u,v\in\mathbf{N}$, $a^{m+u}=a^{m+v}$ 当且仅当

$$m+u=m+v \pmod r.$$

4. $\langle a\rangle=\{a,a^2,\cdots,a^{m+r-1}\}$.

5. $k_a\overset{d}{=}\{a^m,a^{m+1},\cdots,a^{m+r-1}\}$ 是 $\langle a\rangle$ 的循环子群.

半群上同余(congruence on a semigroup)　半群上相容于半群运算的等价关系. 设 S 是一半群, σ 是 S 上一等价关系. 若关于任意 $x,y,z\in S$, 有

$$x\sigma y\Rightarrow\begin{cases}zx\sigma zy,\\ xz\sigma yz,\end{cases}$$

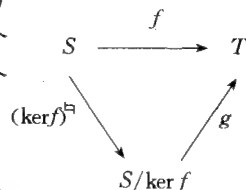
则称 σ 为 S 上的同余. 群(环)上的同余是且仅是由群(环)的正规子群(理想)确定的陪集(剩余类)分解所相应的等价关系, 但一般半群上的同余却并非如此简单. 因此, 关于半群, 必须应用泛代数的方法.

商半群(quotient semigroup)　借助已知半群及其上的同余作出的半群. 设 S 是一半群, σ 是其上一同余, 用 $x\sigma$ 表示 x 所在的 σ 类, 记 $S/\sigma=\{x\sigma\mid x\in S\}$, 则 $(x\sigma)(y\sigma)=(xy)\sigma$ 是 S/σ 上的一个二元运算, S/σ 关于这一运算成一半群, 称此半群 S/σ 是半群 S 关于其上同余 σ 的商半群.

半群的同态基本定理(fundamental theorem of homomorphisms of semigroups)　与群(环)的同态基本定理相平行的定理. 设 ρ 是半群 S 上的一个同余, 则 S 到 S/ρ 的自然映射 $\rho^{\natural}: x\to x\rho$ 是从 S 到 S/ρ 上的一个同态. 反之, 若 f 是半群 S 到半群 T 上的一个同态, 则 $\ker f$ 是 S 上的一个同余, 其中

$$x\ker f y\overset{d}{\leftrightarrow}xf=yf;$$

且存在 $S/\ker f$ 到 T 上的惟一同构 g, 使右图可换.



里斯同余(Rees congruence)　半群上的一类重要同余. 若 I 是半群 S 的一个理想, 做 S 上的二元关系

$$\rho_I\overset{d}{=}(I\times I)\cup I_S,$$

其中 I_S 是 S 上的相等关系, 则 ρ_I 是 S 上的同余, 称为 S 关于理想 I 的里斯同余. 这是里斯(Rees, D.)于 1940 年定义的. S/ρ_I 常记为 S/I, 称为半群 S 的里斯商半群. 设 S 是一半群, $A\subseteq S$. 若做 S 上的二元关系

$$P_A:\ xP_Ay\Leftrightarrow\forall\ u,v\in S^1, A\ni uxvA\leftrightarrow uyv\in A.$$

则 P_A 是 S 上的同余, 称 P_A 为 S 关于子集 A 的主同余. P_A 恰为使得 A 为若干个同余类的并的同余中最大的一个.

里斯商半群(Rees quotient semigroup)　见"里斯同余".

主同余(principle congruence)　见"里斯同余".

理想扩张(ideal extension)　显示半群间关系和半群粗构造的一个概念. 若半群 S 能嵌入半群 T 中, S 为 T 的理想, 且里斯商 T/S 同构于半群 U, 则称 T 是 S 的借助 U 的理想扩张.

诣零半群(nil-semigroup)　一类特殊的半群. 若 S 含有零元 0, 且关于任意 $a\in S$, 存在 $n_a\in\mathbf{N}$ 使得 $a^{n_a}=0$, 则称半群 S 是诣零的.

理想诣零扩张(ideal nil-extension) 一类理想扩张.若半群 T 为半群 S 的借助一诣零半群的理想扩张,即 S 能嵌入 T 中,S 为 T 的理想,且里斯商 T/S 为一诣零半群,则称半群 T 是半群 S 的理想诣零扩张.正则半群的理想诣零扩张构成拟正则半群概念的一个重要理论背景.

句法同余(syntactic congruence) 主同余的另一名称.在语言理论上,常把主同余称为句法同余.

完满同余(perfect congruence) 半群上类似于群上同余的同余.设 S 是一半群,ρ 是 S 上的同余,若关于任意 $x,y\in S$,常有集合论意义下的等式 $(x\rho)(y\rho)=(xy)\rho$ 成立,则称 ρ 是完满的.

右平移(right translation) 半群上的一类特殊变换.半群 S 上的一个变换 $\rho(\lambda)$,若对任意 $x,y\in S$,有 $x(y\rho)=(xy)\rho$,$(\lambda x)y=\lambda(xy)$,则称 $\rho(\lambda)$ 为 S 的右(左)平移.半群 S 上的一个右平移 ρ 与一个左平移 λ,若对任意 $x,y\in S$ 有 $x(\lambda y)=(x\rho)y$,则称 ρ 与 λ 是环结的;若 $a\in S$,则 S 上的变换 $\rho_a: x\to xa$($\lambda_a: x\to ax$)是右(左)平移,这类右(左)平移称为半群 S 的内右(左)平移.关于任意 $a\in S$,ρ_a 与 λ_a 是环结的.

左平移(left translation) 见"右平移".

内右(左)平移(inner right(left) translation) 见"右平移".

平移壳(translation hull) 相伴于给定半群的本质上是变换半群的一个半群.若 S 是一个半群,则$\Omega(S)=\{(\lambda,\rho)\mid\lambda(\rho)$是 S 的左(右)平移,λ 与 ρ 是环结的$\}$在下面的运算下成为半群:$(\lambda,\rho)(\lambda',\rho')=(\lambda\lambda',\rho\rho')$,称 $\Omega(S)$为 S 的平移壳.

格林关系(Green's relations) 半群上五个最重要的等价关系.设 S 是一半群,用 $\mathscr{L},\mathscr{R},\mathscr{H},\mathscr{D},\mathscr{J}$ 表示 S 上的下述五个关系:

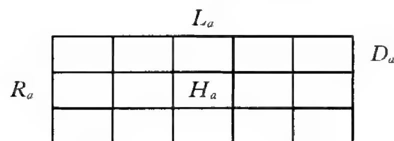
$$a\mathscr{L}b\overset{d}{\leftrightarrow}S^1a=S^1b;$$
$$a\mathscr{R}b\overset{d}{\leftrightarrow}aS^1=bS^1;$$
$$a\mathscr{J}b\overset{d}{\leftrightarrow}S^1aS^1=S^1bS^1;$$
$$\mathscr{H}\overset{d}{=}\mathscr{L}\cap\mathscr{R};$$
$$\mathscr{D}\overset{d}{=}\mathscr{L}\cup\mathscr{R}$$

生成的等价关系,统称为格林关系.S 的由 $a\in S$ 生成的主左理想(主右理想,主理想),即 S 的含 a 的最小左理想(右理想,理想),恰为 $S^1a(aS^1,S^1aS^1)$,因此,格林关系 $\mathscr{L},\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{J}$ 分别是用主左理想、主右理想和主理想通过上式定义起来的.关于格林关系 $\mathscr{H}$,有 $a\mathscr{H}b\leftrightarrow Q(a)=Q(b)$,其中$Q(a)$是由 a 生成的主拟理想.于是 $\mathscr{D}=\mathscr{L}\circ\mathscr{R}=\mathscr{R}\circ\mathscr{L}$.在交换半群上,$\mathscr{H}=\mathscr{L}=\mathscr{R}=\mathscr{D}=\mathscr{J}$.在群上,$\mathscr{H}=\mathscr{L}=\mathscr{R}=\mathscr{D}=\mathscr{J}=$全关系.

格林引理(Green's lemma) 涉及格林关系的一个最基本的结论.设 S 是一半群,$a,b\in S$.若 $a\mathscr{R}b$,且 $as=b$,$bs'=a$,其中 $s,s'\in S^1$,则右平移 $\rho_s|_{L_a}$ 与 $\rho_{s'}|_{L_b}$分别是从 L_a 到 L_b 上及从 L_b 到 L_a 上保持 $\mathscr{R}$ 类的互逆双射,其中 L_a 表示含 a 的 $\mathscr{L}$ 类,$\rho_s|_{L_a}$表示 ρ_s 在 L_a 上的限制.$s\in S$ 时,ρ_s 是 S 上的内右平移;$s=1$ 时,ρ_s 是 S 上的恒等变换.关于格林关系 $\mathscr{L}$ 的对偶格林引理从略.这是格林于 1951 年建立的.

格林定理(Green's theorem) 与格林关系有关的重要定理.该定理断言:若 H 是半群 S 的一个 $\mathscr{H}$ 类,则或者 $H^2\cap H=\varnothing$;或者 $H^2=H$,此时 H 是 S 的子群.由此可知,$\mathscr{H}$ 类 H 是一个子群,当且仅当 H 含幂等元.当 H 是群时,H 就是 S 的极大子群.这是格林(Green,J. A)于 1951 年建立的.

蛋箱图(eggbox diagram) 半群的 $\mathscr{D}$ 类的示意图.想象半群的一个 $\mathscr{D}$ 类 D 的元素被放置在一个矩形的方框内,像一个蛋箱,横条相应于 $\mathscr{R}$ 类,竖条相应于 $\mathscr{L}$ 类,横竖条相交的格子相应于 $\mathscr{H}$ 类,由 $\mathscr{D}=\mathscr{L}\circ\mathscr{R}=\mathscr{R}\circ\mathscr{L}$,每一格子($\mathscr{H}$ 类)都非空.例如,含 a 的 $\mathscr{D}$ 类 D_a 有如下的蛋箱图.



舒曾贝格群(Schützenberger group) 半群的 $\mathscr{D}$ 类的结构群.设 H 是半群 S 的一个 $\mathscr{H}$ 类,S^1 上的 H 不变内右平移在 H 上的限制形成 H 上的一个单可迁置换群 $\Gamma(H)$.$|\Gamma(H)|=|H|$,且当 H 成群时,$\Gamma(H)\cong H$.同时,关于同一 $\mathscr{D}$ 类中的任意 $\mathscr{H}$ 类 H 及 H',有 $\Gamma(H)\cong\Gamma(H')$.于是 $\Gamma(H)$称为含 H 的 $\mathscr{D}$ 类的舒曾贝格群.这是舒曾贝格(Schützenberger,M. P.)于 1957 年定义的.

关系半群(relation semigroup) 一类最具体的半群.若 X 是一集合,X 上所有二元关系的全体记为 $\mathscr{B}(X)$.则 $\mathscr{B}(X)$在如下运算下成一半群:

$$a(\rho\circ\sigma)b\overset{d}{\leftrightarrow}\text{存在 }c\in X\text{,使得 }a\rho c,c\sigma b.$$

称 $\mathscr{B}(X)$为 X 上的全关系半群.$\mathscr{B}(X)$的任意子半群称为 X 上的一个关系半群.

全关系半群(full relation semigroup) 见"关系半群".

变换半群(transformation semigroup) 一类子半群.设 X 是一集合,$p\in\mathscr{B}(X)$,若对任意 $x\in X$,存在惟一的 $y\in X$ 使得$(x,y)\in p$,则称 p 为 X 上一个变换.记 X 上变换的全体为 $\mathscr{T}(X)$,它是 $\mathscr{B}(X)$的子半群,称 $\mathscr{T}(X)$为 X 上的全变换半群.$\mathscr{T}(X)$的任意子半群称为 X 上的一个变换半群.X 上的置换的全体 $\mathscr{G}(X)$是 X 上的一个变换半群.

全变换半群(full transformation semigroup)　见"变换半群".

扩张的右正则表示(the extended right regular representation)　群的凯莱右正则表示在半群中的推广. 设 S 是一半群, $\mathscr{T}(S^1)$ 是 S^1 上的全变换半群. 关于任意 $a\in S$, 若 ρ_a 是 S^1 上的内右平移, 则 f: $a\to\rho_a$ 是 S 到 $\mathscr{T}(S^1)$ 内的单同态, 因此 $Sf(\leqslant\mathscr{T}(S^1))$ 是 S 的同构像. f 称为 S 的扩张的右正则表示.

部分一一变换半群(partial one-one transformation semigroup)　一类子半群. 设 X 是一集合, $\rho\in\mathscr{B}(X)$, 若关于任意 (x,y), $(u,v)\in\rho$, 有 $x=u\leftrightarrow y=v$, 则称 p 为 X 上的一个部分一一变换. X 上的部分一一变换的全体 $\mathscr{S}(X)$ 为 $\mathscr{B}(x)$ 的一个子半群, 称 $\mathscr{S}(X)$ 为 X 上的全部分一一变换半群. $\mathscr{S}(X)$ 的任意子半群称为 X 上的一个部分一一变换半群.

全部分一一变换半群(full partial one-one transformation semigroup)　见"部分一一变换半群".

部分变换半群(partial transformation semigroup)　一类子半群. 设 X 是一集合, $\rho\in\mathscr{B}(X)$, 若关于任意 (x,y), $(u,v)\in\rho$, 有 $x=u\to y=v$, 则称 ρ 为 X 上的一个部分变换. X 上的部分变换的全体 $\mathscr{PT}(X)$ 是 $\mathscr{B}(X)$ 的一个子半群, 称 $\mathscr{PT}(X)$ 为 X 上的全部分变换半群. $\mathscr{PT}(X)$ 的任意子半群称为 X 上的一个部分变换半群.

全部分变换半群(full partial transformation semigroup)　见"部分变换半群".

贝尔-列维半群(Baer-Levi semigroup　一类变换半群. 若 X 是一可数无限集合, 在 X 上定义映射集 $S=\{\alpha:X\to X\mid\alpha$ 是单的, 且 $|X\backslash X\alpha|=\infty\}$, 则 S 是 $\mathscr{T}(x)$ 的一个子半群, 称为贝尔-列维半群. 此半群有性质: 对任意 $\alpha\in S$, $|X\backslash X\alpha|=|X\alpha\backslash X\alpha^2|$. 因此, 此半群不含幂等元. 这类变换半群是贝尔(Baer, R.)和列维(Levi, F.)于 1932 年定义的.

有限半群(finite semigroup)　与群论中有限群相平行的概念. 半群 S 称为有限的, 若 $|S|<\infty$. 艾伦伯格(Eilenberg, S.)的《自动机, 语言与机器》的卷 B 实际上是有限半群论. 有限变换半群、有限半群的分解和分类等构成有限半群理论的重要课题.

带(band)　一类特殊的半群. 指仅有幂等元的半群. 半群 S, 若关于任意 $x\in S$ 有 $x^2=x$, 即 S 中的所有元均为幂等元, 则称 S 为一个带. 利用带的交换性可定义两类特殊的带, 即半格(交换带)和矩形带. 一个带 E, 若对任意 $x,y\in E$, 有 $xy=yx$, 则称 E 为一个半格. 一个带 E, 若对任意 $x,y\in E$, 有 $xy=yx\to x=y$, 则称 E 为一个矩形带. 一个半群是矩形带, 当且仅当它同构于集合 I 与 J 的笛卡儿积 $I\times J$ 上的如下半群

$$(i,j)(i',j')=(i,j')$$
$$(\forall\, i,i'\in I;j,j'\in J).$$

半格(semilattice)　见"带".

交换带(commutative band)　见"带".

矩形带(rectangular band)　见"带".

带关于矩形带的半格分解(the semilattice decomposition of a band to rectangular barns)　带的基本结构. 若 E 是一带, 则 E 的格林关系 $\mathscr{J}$ 是一半格同余(即 $\mathscr{J}$ 是 E 上的同余, $E/\mathscr{J}$ 是半格), 且每一 $\mathscr{J}$ 类均是矩形带. 若把半格 $E/\mathscr{J}$ 记为 Y, 则 E 的 $\mathscr{J}$ 类可用 Y 中的元素予以加标, 记为 E_α, $\alpha\in Y$, 于是,

$$E=\bigcup_{\alpha\in Y}E_\alpha,$$

称此式为带 E 关于矩形带的半格分解. 这种半格分解是克利福德(Clifford, A. H.)于 1941 年及麦克莱恩(Maclane, D.)于 1952 年得到的.

矩形带的平移壳(the translational hull of a rectangular band)　矩形带的一个基本结构. 若 $E=I\times J$ 是矩形带, $\Omega(I\times J)$ 为 E 的平移壳, 则 $\Phi:\Omega(I\times J)\to\mathscr{T}^*(I)\times\mathscr{T}(J)$, $(\lambda,\rho)\to(\varphi,\psi)$ 是同构, 其中, $\lambda(i,\zeta)=(i\varphi,\zeta)$, $(i,\zeta)\rho=(i,\zeta\psi)$, $\mathscr{T}^*(I)$ 是 $\mathscr{T}(I)$ 的互反半群.

彼特里奇定理(Petrich theorem)　刻画带的细微结构的一个定理. 设 Y 是一半格, $\{E_\alpha\mid\alpha\in Y\}$ 是用 Y 给予加标的一簇两两不相交的矩形带. 关于每一 α, 设 $E_\alpha=I_\alpha\times J_\alpha$. 对任意 $\alpha,\beta\in Y$, $\alpha\geqslant\beta$, 记 $\varphi_{\alpha,\beta}:E_\alpha\to\mathscr{T}^*(I_\beta)\times\mathscr{T}(J_\beta)(\cong\Omega(E_\beta))$, $a\to(\varphi_\beta^a,\psi_\beta^a)$ 是同态, 它满足:

1. 若 $a=(i,j)\in E_\alpha$, 则 φ_α^a, ψ_α^a 都是常值映射, 且 $\langle\varphi_\alpha^{(i,j)}\rangle=i$, $\langle\psi_\alpha^{(i,j)}\rangle=j$.

2. 若 $a\in E_\alpha$, $b\in E_\beta$, $\alpha\beta=\gamma$, 则 $\varphi_\gamma^a\varphi_\gamma^b$, $\psi_\gamma^a\psi_\gamma^b$ 都是常值映射.

3. 若 $\langle\varphi_\gamma^a\varphi_\gamma^b\rangle=i'$, $\langle\psi_\gamma^a\psi_\gamma^b\rangle=j'$, 那么对所有 $\delta\leqslant\gamma$, 有 $\varphi_\delta^{(i',j')}=\varphi_\delta^a\varphi_\delta^b$, $\psi_\delta^{(i',j')}=\psi_\delta^a\psi_\delta^b$.

若对 $\forall\, a\in E_\alpha$, $b\in E_\beta$, 规定 $a*b=(\langle\varphi_\nu^a\varphi_\nu^b\rangle,\langle\psi_\nu^a\psi_\nu^b\rangle)$, 其中 $\nu=\alpha\beta$, 则

$$B=\bigcup_{\alpha\in Y}E_\alpha$$

在运算 $*$ 下成带, 且它的 $\mathscr{J}$ 类恰为诸 E_α. 反过来, 每一带均同构于以上类型的某个带. 这一事实是彼特里奇(Petrich, M.)于 1967 年建立的.

正则半群(regular semigroup)　一类重要的半群. 它构成半群代数理论的主要研究领域之一. 设 S 是一半群, $a\in S$, 若存在 $x\in S$ 使得 $axa=a$, 则称 a 是 S 的正则元. 称

$$V(a)\overset{d}{=}\{y\mid aya=a,yay=y\}$$

中的元为 a 的逆元. $a\in S$ 是 S 的正则元, 当且仅当 $V(a)\neq\varnothing$; 也当且仅当 a 与一幂等元有 $\mathscr{D}$ 关系. 所

有元都是正则元的半群称为正则半群. 在变换半群中,$\mathscr{T}(X)$是正则的,而贝尔-莱维半群不含任何幂等元,因此不但不是正则的,而且不含任何正则元. 任何半群是某个正则半群的子半群. 半群 S 是正则的,当且仅当 S 的每一 $\mathscr{R}$ 类(等价地,每一 $\mathscr{L}$ 类)都含幂等元;也当且仅当 S 的每一元都与一幂等元有 $\mathscr{D}$ 关系. 正则元和正则半群分别是幂等元和带的推广. 它们由冯・诺伊曼(von Neumann, J.)于 1936 年首先在环中引入. 正则性在半群中比它在环中扮演着更加中心和重要的角色.

半群的逆元(inverse element of semigroup) 见"正则半群".

莱里蒙引理(Lallement's lemma) 涉及正则半群幂等元同态提升的一个基本结论. 若 S 是一正则半群,E 是 S 的幂等元集,ρ 是 S 上一同余,则 $a\rho$ 是 S/ρ 的幂等元,当且仅当 $a\rho\cap E\neq\varnothing$. 而当 $a\rho\cap E\neq\varnothing$时,存在 $e\in a\rho\cap E$ 使得 $eS\subseteq aS$, $Se\subseteq Sa$. 这是莱里蒙(Lallement, G.)于 1966 年建立的. 这一事实已被推广到拟正则半群上.

纯整半群(orthodox semigroup) 一类正则半群. 设 S 是一正则半群,E 是 S 中幂等元的全体. 若 $E\leqslant S$(即 E 是 S 的子半群),则称 S 是纯整的. 下面每一款都是描述正则半群是纯整的充分必要条件:

1. 任意 $x,y\in S$,有 $V(xy)\supseteq V(y)V(x)$.
2. 任意 $e\in E$,有 $V(e)\subseteq E$.
3. 任意 $x,y\in S$,有
 $V(x)\cap V(y)\neq\varnothing\rightarrow V(x)=V(y)$.

正则半群的若干重要的特殊情形都是纯整的.

逆半群(inverse semigroup) 一类特殊的纯整半群. 设 S 是一正则半群,E 是 S 的幂等元的全体,若关于任意 $e,f\in E$,有 $ef=fe$,则称 S 为逆的. $E\leqslant S$,因而逆半群是纯整的,且 E 是半格. 下述每一款都是描述正则半群 S 是逆半群的充分必要条件:

1. S 关于每一个 $x\in S$,有 $|V(x)|=1$.
2. S 的每一个 $\mathscr{L}$ 类和每一个 $\mathscr{R}$ 类都含惟一的幂等元.

关于任意集合 X,部分一一变换半群 $\mathscr{S}(X)$是逆半群,称为对称逆半群. 逆半群可表为基本逆半群和一 E 析取逆半群的子直积. 逆半群是与群最相近的一类半群,它的理论已相当丰富,彼特里奇(Petrich, M.)于 1984 年出版的专著《逆半群》系统地介绍了这一理论.

对称逆半群(symmetric semigroup) 见"逆半群".

最大幂等元分离同余(the maximum idempotent-separating congruence) 含幂等元的半群(特别地,正则半群)上的一类重要同余. 设 S 是一半群,E 是 S 的幂等元全体,ρ 是 S 上一同余,若 $\rho\cap(E\times E)=1_E$,即每一 ρ 类含幂等元的个数不超过 1,则称 ρ 为幂等元分离的. 若 S 是正则的,则 ρ 为幂等元分离的,当且仅当 $\rho\subseteq\mathscr{H}$(有例子说明 S 非正则时未必如此). 因此,正则半群上的最大幂等元分离同余是存在的,即 $\aleph^b \underset{d}{=} \{(x,y)\in S\times S\mid\forall\ u,v\in S^1[(uxv,uyv)\in\mathscr{H}]\}$. 正则半群上的最大幂等元分离同余,通常用 μ 表示. 在逆半群上,$\mu=\{(x,y)\in S\times S\mid\forall\ e\in E(x^{-1}ex=y^{-1}ey)\}$. 在纯整半群上,

$$\mu=\{(x,y)\in S\times S\ \mid\exists\ x'\in V(x),y'\in V(y);\ [\forall\ e\in E(x'ex=y'ey\ \&\ xex'=yey')]\}.$$

基本正则半群(fundamental regular semigroup) 一类正则半群. $\mu=1_S$ 的正则(纯整,逆)半群 S 称为基本正则(纯整,逆)半群. 关于任意正则(纯整,逆)半群 S, S/μ 是基本正则(纯整,逆)的,且在 S 纯整时,S/μ 的幂等元带与 S 的幂等元带同构.

基本纯整半群(fundamental orthodox semigroup) 见"基本正则半群".

基本逆半群(fundamental inverse semigroup) 见"基本正则半群".

E 析取正则半群(E-disjunctive regular semigroup) 一类较特殊的正则半群. 设 S 是一正则半群,E 是 S 中所有幂等元的集合. 若 E 所确定的主同余 $P_E=1_S$,则称 S 是 E 析取的.

矩形群(rectangular group) 一类特殊的纯整半群. 设 S 是一正则半群,E 是 S 的所有幂等元集合. 若 E 是一矩形带,则称 S 是矩形群. 半群 S 是矩形群,当且仅当 S 在同构意义下是一群与一矩形带的直接积. 一个半群是逆半群又是矩形群,当且仅当它是群.

完全正则半群(completely regular semigroup) 一类重要的正则半群. 它是群的无交并,即每一 $\mathscr{H}$ 类都是群. 设 S 是一半群. $a\in S$,若存在$a'\in V(a)$使得 $a'a=aa'$,则称 a 为 S 的完全正则元. 若半群 S 的每个元素都是完全正则的,则称 S 为完全正则的. 半群 S 是完全正则的,当且仅当 S 的每一元素均与一幂等元有 $\mathscr{H}$ 关系;或者当且仅当 S 是群的并.

双循环半群(bicyclic semigroup) 一类双单(即 $\mathscr{D}$ 为全关系)逆半群. 它是逆半群理论中的重要概念. 设 N 是非负整数集. 同构于半群($\mathsf{N}\times\mathsf{N}$, ・)的半群称为双循环的,其中

$$(m,n)\cdot(p,q)=(m-n+max(n,p),\ q-p+max(n,p))\quad(\forall\ m,n,p,q\in\mathsf{N})$$

双循环半群是双单(仅一 $\mathscr{D}$ 类)逆半群. 在全变换半群 $\mathscr{T}(\mathsf{N})$中,由

$$\alpha:\ n\rightarrow n+1,\quad\forall\ n\in\mathsf{N},$$

$$\beta:\ \begin{cases}0\rightarrow 0,\\ n\rightarrow n-1,\quad\forall\ n\in\mathsf{N}\setminus\{0\},\end{cases}$$

生成的子半群$\langle\alpha,\beta\rangle$是双循环的. 它的惟一的$\mathscr{D}$类的蛋箱图为

1	α	α^2	…
β	$\beta\alpha$	$\beta\alpha^2$	…
β^2	$\beta^2\alpha$	$\beta^2\alpha^2$	…
⋮	⋮	⋮	…

联系到后面提到的自由幺半群，双循环半群也可以如下定义：若$X=\{a,b\}$，则商半群$X^*/\langle(ab,1)\rangle$称为双循环半群，其中$\langle(ab,1)\rangle$为X^*上含关系$\{(ab,1)\}$的最小同余.

完全正则元(completely regular element)　见"完全正则半群".

克利福德半群(Clifford semigroup)　一类重要的完全正则半群. 它既是逆半群又是完全正则半群. 若半群S的所有幂等元均落在S的中心内，即对任意$x\in S$和$e\in E$，有$xe=ex$，则称S为克利福德半群. 设S是一半群，E是S的幂等元集. 克利福德定理给出判别S成为克利福德半群的充分必要条件. 半群S是克利福德半群，当且仅当下列条件之一成立：

1. S是正则的，且$\mathscr{D}\cap(E\times E)=1_E$.
2. S是群的半格.
3. S是群的强半格.

其中强半格分解的概念从略，这可在霍韦(Howie, J. M.)的《半群理论基础》中找到. 半群S是克利福德半群，当且仅当S是正则的，且关于任意$a\in S$，有$aS=Sa$.

克利福德定理(Clifford theorem)　见"克利福德半群".

瓦格涅-普雷斯顿表示(Vagner-Preston representation)　群的凯莱右正则表示在逆半群上的推广. 任意集合X上的全部分一一变换半群$\mathscr{I}(X)$是一个逆半群. 设S是一逆半群，对$a\in S$，记a的惟一逆元为a^{-1}. 从而$\alpha_a:Saa^{-1}\to Sa^{-1}a, x\to xa$是一双射，因此它是$S$上的一个部分一一变换$(\alpha_a\in\mathscr{I}(S))$. $\Phi:a\to\alpha_a$是S到$\mathscr{I}(S)$内的单同态. 称Φ是逆半群S的瓦格涅-普雷斯顿表示. 当S是群时，Φ恰为群S的凯莱右正则表示. 这一表示是瓦格涅(Vagner, V. V.)与普雷斯顿(Preston, G. B.)分别于1952年和1954年独立建立起来的.

莱里蒙表示(the Lallement representation)　半群的一种单同态. 用一个本质上的部分变换半群作出的正则半群的表示. 若S是一正则半群，关于每一$a\in S$，记

$$\gamma_a=\{(x,y)\in S\times S\mid y=ax, x\mathscr{L}y\},$$
$$\delta_a=\{(x,y)\in S\times S\mid y=xa, x\mathscr{R}y\}.$$

则$\alpha:a\to(\delta_a,\gamma_a)$是$S$到$\mathscr{PT}(S)\times\mathscr{PT}^*(S)$的单同态，其中$\mathscr{PT}^*(S)$是$\mathscr{PT}(S)$的互反半群. α称为正则半群S的莱里蒙表示. 这一表示是莱里蒙(Lallement, G.)于1967年建立的.

穆恩半群(Munn semigroup)　一种基本逆半群. 指用某个已给半格作为幂等元带的半群. 设E是一半格，在E上做等价关系如下：

$$\mathscr{U}=\{(e,f)\in E\times E\mid Ee\cong Ef\}.$$

又$T_{e,f}=\{\alpha:Ee\to Ef\mid\alpha$是同构$\}$. 从而

$$T_E=\bigcup_{(e,f)\in\mathscr{U}}T_{e,f}$$

是对称逆半群$\mathscr{I}(E)$的子半群，称它为半格E的穆恩半群. 它的幂等元半格同构于E.

穆恩表示(Munn representation)　逆半群的另一类部分一一变换表示. 若S是一逆半群，E是它的幂等元半格，则存在同态$\Phi:S\to T_E$，它的核是μ，它的同态像$S\Phi$是T_E的一个全逆子半群，即$S\Phi$是T_E的子半群，且含T_E的幂等元半格. 此Φ称为逆半群S的穆恩表示. 这一表示未必是忠实的，但有$S/\mu\cong S\Phi$. 穆恩表示是穆恩(Munn, W. D.)于1970年建立的.

霍尔半群(Hall semigroup)　逆半群中的穆恩半群在纯整半群中的推广. 它是霍尔(Hall, T. E.)于1971年建立的(参见"穆恩半群").

同余对(congruence pair)　用于刻画逆半群上同余的一个重要概念. 设S是一逆半群，E是它的幂等元半格，K是S的一个正规子半群，即K是S的逆子半群，且$E\subseteq K$，对任意$x\in S$，$x^{-1}Kx\subseteq K$；ρ是E上的一个正规同余(即ρ是E上的同余，且$e\rho f\to x^{-1}ex\rho x^{-1}fx, \forall x\in S$)，若$K$为$S$的正规子半群，满足下列条件，则称$(K,\rho)$为$S$的同余对：

1. 对任意$x\in S, e\in E, xe\in K \,\&\, e\rho x^{-1}x\to x\in K$.
2. 对任意$k\in S, k\in K\to kk^{-1}\rho k^{-1}k$.

逆半群上同余的第一特征(first characterization of congruence on an inverse semigroup)　对逆半群上同余的一种刻画. 设S是一逆半群，E是它的幂等元半格，且(K,ρ)是S的一个同余对. 若做S上一关系

$$\rho_{(K,\rho)}:\ x\rho_{(K,\rho)}y\overset{d}{\leftrightarrow}x^{-1}x\rho y^{-1}y,\quad xy^{-1}\in K,$$

则$\rho_{(K,\rho)}$是S上具下列性质的惟一同余：

$$\ker\rho_{(K,\rho)}\overset{d}{=}\{x\in S\mid x\rho_{(K,\rho)}\cap E\neq\varnothing\}=K,$$
$$\operatorname{tr}\rho_{(K,\rho)}\overset{d}{=}\rho_{(K,\rho)}|_E=\rho.$$

反之，若ρ是S上一同余，则$(\ker\rho,\operatorname{tr}\rho)$是$S$的一个同余对，且$\rho_{(\ker\rho,\operatorname{tr}\rho)}=\rho$. 有关同余的同余对刻画，在1986年已推广到任意正则半群上.

核正规系(kernel normal system)　用来刻画

逆半群上同余的另一重要概念. 设 S 是一逆半群, E 是它的幂等元半格, $\mathscr{K}$ 为 S 的两两不相交的逆子半群簇, 若:

1. $E \subseteq \bigcup_{K \in \mathscr{K}} K$;

2. 关于每一 $x \in S$ 和 $K \in \mathscr{K}$, 存在 $L \in \mathscr{K}$ 使得
$$x^{-1}Kx \subseteq L;$$

3. 若 $x, xy, yy^{-1} \in K, K \in \mathscr{K}$, 必有 $y \in K$;

则称 $\mathscr{K}$ 为 S 的核正规系.

逆半群上同余的第二特征(second characterization of congruence on an inverse semigroup) 对逆半群上同余的另一种刻画. 设 S 是一逆半群, E 是它的幂等元半格. 若 $\mathscr{K}$ 是 S 的一个核正规系, 则 $\zeta_{\mathscr{K}}$ 是 S 上具下列性质的惟一同余:

$$x\zeta_{\mathscr{K}}y \overset{d}{\leftrightarrow} xx^{-1}, \quad yy^{-1}, xy^{-1} \in K \in \mathscr{K},$$
$$\mathscr{K}(\zeta_{\mathscr{K}}) \overset{d}{=} \{e\zeta_{\mathscr{K}} \mid e \in E\} = \mathscr{K}.$$

反之, 若 ζ 是 S 上一同余, 则 $\mathscr{K}(\zeta)$ 是 S 的一个核正规系, 且 $\zeta_{\mathscr{K}(\zeta)} = \zeta$.

双序集理论(the theory of biordered sets) 关于半群的幂等元方法的一套新理论. 印度数学家南布里帕德(Nambooripad, K. S. S.)于 1975 年用半群的幂等元方法成功地解决了正则半群的整体结构问题, 并为整个半群理论的进一步发展开辟了新的方向. 20 世纪 70 年代后期, 不少人把这一理论和方法推广到含幂等元的较大半群类中, 方坦(Fountain, J. B.)关于本原富足半群和伊斯当(Easdown, D.)关于一般双序集的杰出工作, 是这方面的具有不同风格的两个代表作.

夹心集(sandwich set) 用于研究含幂等元半群(特别地, 正则半群)的一个新概念. 设 S 是一个含幂等元的半群, 关于任意 $e, f \in E$, 有 $fV(ef)e \subseteq V(ef) \cap E$, 称 $fV(ef)e$ 为幂等元有序对 (e, f) 的夹心集, 记为 $S(e, f)$. 它是南布里帕德(Nambooripad, K. S. S.)于 1975 年定义的. 帕斯廷(Pastijn, L.)于 1980 年将此概念推广到任意有限多个幂等元有序组的夹心集. 其后, 幂等元的有序组的夹心集又被推广到任意有限多个元的有序组的夹心集.

相对纯整半群(relatively orthodox semigroup) 一类特殊的正则半群. 山田深雪(Yamada, M.)和沈(Sen, M. K.)定义的一类相对纯整的正则半群. 设 S 是正则半群, $P \subseteq E$, 若:

1. $P^2 \subseteq E$;

2. $\forall q \in P[qPq \subseteq P]$;

3. $\forall a \in S[\exists a' \in V(a)(aP^1a', a'P^1a \subseteq P)]$;

则称 S 关于 $P \subseteq E$ 是相对纯整的(山田深雪和沈称为 $\mathscr{P}$ 正则的). 由条件 3 可知, S 的每个 $\mathscr{R}$ 类和每个 $\mathscr{L}$ 类都与 P 相交. 在每个交集都是单元集时, 即得特例(已知正则 * 半群). 相对纯整半群是纯整半群和正则 * 半群的推广, 而后两类半群是不同的.

正则半群的逆断面(the inverse transversal of regular semigroup) 正则半群的一类特殊的逆子半群. 设 S^0 是正则半群 S 的一个逆子半群, 若 S^0 含且仅含 S 的每个元的一个逆, 即对任意 $x \in S$, 有 $|S^0 \cap V(x)| = 1$, 则称 S^0 是 S 的一个逆断面. $\mathscr{P}$ 正则半群又称为相对纯整半群, 也可以称具逆断面的正则半群为相对逆半群. 它是在正则半群范围内对逆半群的推广.

相对逆半群(relatively inverse semigroup) 见"正则半群的逆断面".

拟正则半群(quasi-regular semigroup) 一类广义正则半群. 半群 S, 若关于每一 $a \in S$, 都存在 $n_a \in \mathrm{N}$ 使得 a^{n_a} 是 S 的正则元, 则称 S 为拟(或幂, 毕竟)正则的. 拟正则半群自 20 世纪 70 年代以来已逐渐形成为半群代数理论研究上的一个活跃的领域. 伯哥达诺维奇(Bogdanovic, S.)的《拟正则半群》(1985 年)一书基本上是讨论拟正则半群的.

毕竟正则半群(eventually regular semigroup) 即"拟正则半群".

幂正则半群(power regular semigroup) 即"拟正则半群".

半群的霍尔定理(Hall theorem of semigroup) 论及正则半群的完全拟正则性的一个结论. 半群 S, 若关于每一 $a \in S$, 都存在 n_a 使得 a^{n_a} 是 S 的完全正则元, 则称 S 为完全拟正则的. 霍尔定理: 若正则半群 S 的每一 $\mathscr{D}$ 类最多只含 m 个 $\mathscr{L}$ 类(m 为一固定自然数), 则关于每一 $a \in S$, a^m 为 S 的完全正则元, 从而 S 是完全拟正则的. 这是霍尔(Hall, T. E.)于 1973 年建立的.

完全拟正则半群(completely quasi-regular semigroup) 见"半群的霍尔定理".

半群的伯恩赛德问题(Burnside problem of semigroup) 涉及半群的一种特殊拟正则性的一个著名问题. 关于群的伯恩赛德问题是伯恩赛德(Burnside, W.)于 1902 年提出的. 半群中相应的问题因此被称为半群的伯恩赛德问题: 设 S 是一半群, 在 S 是有限生成的, 且 S 是挠的(即关于每一 $x \in S$, 都存在 $n_x \in \mathrm{N}$ 使得 x^{n_x} 为 S 的幂等元)条件下, 问 S 是否为有限, 即 $|S| < \infty$? 半群的伯恩赛德问题比群的伯恩赛德问题简单得多, 利用 20 世纪 40 年代的一个结果就可从反面回答它. 近年来, 半群的伯恩赛德问题已演变成对有限生成半群寻求其有限性的充分必要条件. 这方面的一个最新结果是罗斯蒂沃(Restivo, A.)与罗特诺耶(Reutenauer, C.)于 1984 年给出的: 若 S 是一有限生成半群, 则 S 是有限的, 当且仅当 S 是挠的, 且具置换性, 即存在 $n \in \mathrm{N}, n \geqslant 2$, 使得关于任意 $s_1, s_2, \cdots, s_n \in S$, 有 n 元置换

$\sigma,\sigma\neq\mathrm{id}$，满足：

$$\prod_{i=1}^{n} s_i = \prod_{i=1}^{n} s_{\sigma(i)}.$$

半群的半直积(semidirect product of semigroups)　直积概念在半群中的推广．若 S 与 T 是半群，End(T)是 T 的自同态半群，φ 是 S 到End(T)的半群同态，$\varphi: s\to\varphi_s$，则集合 $S\times T$ 在如下合成下构成一半群：$(s_1,t_1)(s_2,t_2)=(s_1s_2,t_1\varphi_{s_1}(t_2))$，称为 S 与 T 关于 φ 的半直积，记为 $S\times_\varphi T$．当 S 的每一元在 φ 下的像是 T 上的恒等自同态时，$S\times_\varphi T$ 恰为半群 S 与 T 的直积 $S\times T$．半群的半直积同半群子直积、织积和圈积(介绍从略)一样，是通过已知半群构作新半群的一些手段．

簇(variety)　涉及某特殊半群类的一个重要概念．对取同态像、直积(有限多个半群的直积)及子群均封闭的一个半群类称为一个簇(伪簇)．

伪簇(pseudo variety)　见"簇"．

左S系(left S-system)　半群中平行于环中左 R 模的概念．设 S 是一半群，M 是一非空集，若存在 $S\times M$ 到 M 的映射 $(s,x)\to sx$，使得对任意 $s,t\in S$，$x\in M$，$t(sx)=(ts)x$，当 $S=S^1$ 时，还要求 $1x=x$，$\forall\, x\in M$，则称 M 是左 S 系．对称地可定义右 S 系．设 S,T 是半群，若 M 同时是左 S 系又是右 T 系，且关于任意 $s\in S,t\in T,x\in M$，$(sx)t=s(xt)$，则称 M 是(S,T)双系．相对于环论研究中的 R 模方法，半群理论的研究中也有 S 系方法．

右S系(right S-system)　见"左 S 系"．

双系(bisystem)　见"左 S 系"．

富足半群(abundant semigroup)　一类广义正则半群．设 S 是一半群，定义 S 上的二元关系 $\mathscr{R}^*$，$\mathscr{L}^*$ 如下：

$$x\mathscr{R}^* y \overset{d}{\leftrightarrow} ax = bx \leftrightarrow ay = by \quad (\forall\, a,b\in S^1),$$

$$x\mathscr{L}^* y \overset{d}{\leftrightarrow} xa = xb \leftrightarrow ya = yb \quad (\forall\, a,b\in S^1),$$

使用 S 系的语言，$x\mathscr{R}^* y\leftrightarrow$ 存在左 S^1 系同构 $\Phi: S^1x\to S^1y$ 使得 $x\Phi=y$；$x\mathscr{L}^* y\leftrightarrow$ 存在右 S^1 系同构 $\Phi: xS^1\to yS^1$ 使得 $x\Phi=y$．$\mathscr{R}^*,\mathscr{L}^*$ 与格林关系 $\mathscr{R},\mathscr{L}$ 的关系为 $\mathscr{R}\subseteq\mathscr{R}^*,\mathscr{L}\subseteq\mathscr{L}^*$，且在正则半群上 $\mathscr{R}=\mathscr{R}^*,\mathscr{L}=\mathscr{L}^*$．若半群 S 的每一 $\mathscr{R}^*$ 类和每一 $\mathscr{L}^*$ 类都含幂等元，则称 S 为富足的．

主右投射半群(principle right projective semigroup)　比富足半群更宽广的一类半群．若半群的每一 $\mathscr{L}^*$ 类($\mathscr{R}^*$ 类)都含幂等元，则称 S 为主右(左)投射的(参见"富足半群")．

主左投射半群(principle left projective semigroup)　见"主右投射半群"．

单半群(simple semigroup)　类似于单群的半群．不含零的半群 S，若不含任何真理想，则称 S 为单的．不含零的半群 S，若不含任何真左(右)理想，则称 S 为左(右)单的．含零的半群，若$\{0\}$和 S 本身是它的仅有的理想，且 $S^2\neq\{0\}$，则称 S 为零-单的．

左(右)单半群(left (right) simple semigroup)　见"单半群"．

零-单半群(0-simple semigroup)　见"单半群"．

主因子定理(the principle factor theorem)　指出单半群和零-单半群在半群中的地位的定理．把半群 S 的最小理想(若存在)记为 $K(S)$，称为 S 的核．记 S 的含 $a\in S$ 的主理想为 $J(a)$，若

$$I(a) \overset{d}{=} \{b\in J(a)\,|\,J_b < J_a\}\neq\varnothing,$$

则 $I(a)\trianglelefteq J(a)$，其中 J_a 是含 a 的 $\mathscr{J}$ 类，$J_b<J_a$ 意味着 $S^1bS^1\subseteq S^1aS^1$．因此，当 $I(a)\neq\varnothing$ 时，里斯商半群 $J(a)/I(a)$ 是存在的．S 的主因子是指 $K(S)$(若存在)以及一切可能的 $J(a)/I(a)$，$a\in S$．主因子定理：若 J 是半群 S 的一个 $\mathscr{J}$ 类，则：

1. J 是 S 的核．

2. $I=\{x\in S\,|\,J_x<J\}\neq\varnothing$，$(J\cup I)/I$ 是零-单的，或零的(称 $S^2=\{0\}$ 的半群 S 为零半群)．

零半群(null semigroup)　见"主因子定理"．

阿基米德半群(Archimedean semigroup)　单半群的一种推广．半群 S，若对任意 $a,b\in S$，存在 n 使得 $a^n\in SbS$ ($a^n\in Sb$，$a^n\in bS$，$a^n\in bS\cap Sb$)，则称 S 为阿基米德的(左阿基米德的，右阿基米德的，t 阿基米德的)．它是单半群(左单半群，右单半群)的推广．阿基米德半群 S 是单半群的幂零扩张，当且仅当 S 含正则元．

左(右)阿基米德半群(left(right) Archimedean semigroup)　见"阿基米德半群"．

t 阿基米德半群(t-Archimedean semigroup)　见"阿基米德半群"．

完全单半群(completely simple semigroup)　一类正则的单半群．$S/\mathscr{R}(S/\mathscr{L})$上的下列关系是 $S/\mathscr{R}(S/\mathscr{L})$上的偏序

$$R_a\leqslant R_b \overset{d}{\leftrightarrow} aS^1\subseteq bS^1 \quad (L_a\leqslant L_b \overset{d}{\leftrightarrow} S^1a\subseteq S^1b).$$

若 $S/\mathscr{R}(S/\mathscr{L})$的任一非空子集关于上面的偏序都有极小元，则称 S 满足极小条件 $\min_R(\min_L)$．半群 S 的幂等元集 E 上的如下关系是 E 上的一个偏序：

$$e\leqslant f \overset{d}{\leftrightarrow} ef = fe = e.$$

若 $0\neq e\in E$ 且 e 在 $E\setminus\{0\}$ 中是极小的，则称 e 为本原的．单(零-单)半群 S，若 S 满足右极小和左极小条件，则称 S 为完全单(零-单)的．单(零-单)半群 S 为完全单(零-单)的，当且仅当 S 含本原幂等元(实际上每一非零幂等元都本原)．完全单(零-单)半群是正则的．

满足极小条件的半群(semigroup with minimal

conditon） 见“完全单半群”.

半群的本原幂等元(primitive idempotent of a semigroup） 见“完全单半群”.

完全零-单半群(completly 0-simple semigroup） 见“完全单半群”.

里斯矩阵半群(Rees matrix semigroup） 刻画出完全单(零-单)半群的结构的半群. 设 G 是一群，e 是它的恒等元，I,Λ 均为非空集，$P=(p_{\lambda i})$是一 $\Lambda\times I$ 矩阵，诸 $p_{\lambda i}\in G(G^0$，这里要求 P 是正则的，即关于所有 $i\in I$ 和 $\lambda\in\Lambda$，存在 $\lambda'\in\Lambda$ 和 $i'\in I$ 使得 $p_{\lambda' i\neq 0}$和 $p_{\lambda i'\neq 0})$. 做 $S=G\times I\times\Lambda[(G\times I\times\Lambda)\cup\{0\}]$，定义 S 上的运算如下：

$$(a,i,\lambda)(b,j,\mu)=(ap_{\lambda j}b,i,\mu),$$

$$(a,i,\lambda)(b,j,\mu)=\begin{cases}(ap_{\lambda j}b,i,\mu) & (p_{\lambda j}\neq 0),\\ 0 & (p_{\lambda}j=0),\end{cases}$$

$$(a,i,\lambda)0=0(a,i,\lambda)=0\cdot 0=0,$$

S 关于这一运算成半群，称为里斯矩阵半群(P 称为夹心阵)，记之为 $\mu[G;I,\Lambda;P](\mu^0[G;I,\Lambda;P])$. 里斯定理：任一里斯矩阵半群 $\mu[G;I,\Lambda;P](\mu^0[G;I,\Lambda;P])$是完全单(零-单)的. 反之，任一完全单(零-单)半群同构于某一里斯矩阵半群 $\mu[G;I,\Lambda;P]$ $(\mu^0,[G;I,\Lambda;P])$. 这是里斯(Rees，D.)于 1940 年建立的，其中，完全单的部分本质上属于苏士凯维奇(Sûskevic，A.)(1928 年).

夹心阵(sandwich matrix） 见“里斯矩阵半群”.

布让特半群(Brandt semigroup） 一类特殊的半群. 即完全零-单的逆半群. 带零半群 S，若满足：

1. 对任意 $a,b,c\in S$，若 $ac=bc\neq 0$，或 $ca=cb\neq 0$，则 $a=b$；

2. 对任意 $a,b,c\in S$，若 $ab\neq 0$ 且 $bc\neq 0$，则 $abc\neq 0$；

3. 对任意 $a\in S,a\neq 0$，有惟一的 $e\in S$ 使得 $ea=a$，惟一的 $f\in S$ 使得 $af=a$，以及惟一的 $a'\in S$ 使得 $a'a=f$；

4. 对 S 的任意非零幂等元 e,f，有 $eSf\neq 0$；

则称 S 为布让特半群. 带零半群 S 是布让特的充分必要条件是下列条件之一成立：

1. S 是一个完全零-单逆半群.

2. S 同构于一个 $I\times I$ 里斯矩阵半群 $\mu^0[G;I,I;\Delta]$，其中夹心阵 Δ 是 $I\times I$ 单位矩阵.

布若克-莱里扩张(Bruck-Reilly extension） 任一带恒等元的半群到一带恒等元的单半群的一种嵌入方法. 设 T 是一带恒等元 1 的半群，θ 是从 T 到 H_1(T 中 1 所在的 $\mathscr{H}$ 类，当然是一个群，即 T 的单位元素群)的同态. 于是，关于非负整数集 N^0，集合 $S=\mathsf{N}^0\times T\times\mathsf{N}^0$ 在下面的运算下成一半群：

$$(m,a,n)(p,b,q)=(m-n+t,a\theta^{t-n}b\theta^{t-p},q-p+t),$$

其中 $t=\max(n,p)$，θ^0 表示 T 上的恒等变换. 称这一半群 S 是 T 被 θ 确定的布若克-莱里扩张，记为 $S=\mathrm{BR}(T,\theta)$，它有如下性质：

1. S 是带恒等元(0,1,0)的单半群.

2. $(m,a,n)\mathscr{D}^S(p,b,q)$，当且仅当 $a\mathscr{D}^Tb$.

3. $(m,a,n)^2=(m,a,n)$，当且仅当 $m=n$ 且 $a^2=a$.

4. S 是逆半群，当且仅当 T 是逆半群.

$a\to(0,a,0)$是 T 到 S 的单同态，因此，每一带恒等元的半群，从而每一半群，都可嵌入一单半群中. 这表明，单半群尽管是理想平凡的一类半群，但它可以任意复杂. 布若克(Bruck，R. H.)于 1958 年和莱里(Reilly，N. R.)于 1966 年分别考虑了这一扩张的两个特殊情形，这正是这一扩张名称的由来.

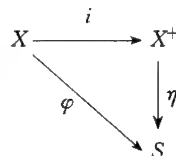
自由半群(free semigroup） 不附加任何其他条件的半群. 若 X 是一非空集合，做

$$S=\{x_1x_2\cdots x_n|x_i\in X,i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 1\},$$

则 S 用如下定义的运算做成一个半群

$$(x_1x_2\cdots x_n)(y_1y_2\cdots y_m)=x_1x_2\cdots x_ny_1y_2\cdots y_m.$$

称 S 是 X 上的自由半群，常记 $S=X^+$. 记$(X^+)^1=X^*$，称 X^* 为 X 上的自由幺半群. 自由半群无任何幂等元，因此是无任何正则元的半群. 它有如下的特征：设 X 是一集合，关于任意半群 S 和 X 到 S 的任意映射 φ，存在 X^+到 S 的惟一的同态 η 使得下图交换(即 $\eta i=\varphi$)，其中，i 为 X 到 X^+的包含映射. 反之，若用半群 T 和映射 $j:X\to T$ 分别代替上面的 X^+和 $i:X\to X^+$使上事实成立，则 T 同构于 X^+. 自由幺半群也有类似的特征.



自由幺半群(free monoid） 见“自由半群”.

代数码(algebra code） 近代半群理论中的重要概念. 设 X 是一有限非空集合(称为字母表). X 上的自由幺半群 X^* 的元素(子集)称为 X 的字(或语言). X 上的一个语言 C，若对任意 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m\in C,m,n\geqslant 1$ 有

$$\prod_{i=1}^{n}x_i=\prod_{j=1}^{m}y_j\Rightarrow m=n$$

且 $x_i=y_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则称 C 为 X 上的一个(代数)码. 在涉及以上诸概念时，X 也未必常假定有限. 语言的概念最初于 20 世纪 50 年代在计算机科学的形式语言中由乔姆斯基(Chomsky，N.)首先引入. 码的概念来自 20 世纪 50 年代仙农(Shannon，C. E.)的信息论，是应通讯上对译文惟一性的要求建立起来的. 语言理论和码论的中心课题是它的代数和组合结构以及二者的联系. 它们涉及字的组合，

研究方法通常是组合的与代数的并举，它们已构成半群近代理论的一个重要组成部分，与自动机理论和计算机科学有密切联系．艾伦伯格（Eilenberg，S.）的《自动机，语言与机器》（卷 A，卷 B），贝斯特尔（Berstel，J.）与佩林（Perrin，D.）的《码论》，劳瑟尔（Lothaire，M.）的《字的组合》以及石辉然的《自由幺半群与语言》等都是这方面的专著．

字母表（alphabet）　见“代数码”．

自动机（automaton）　一类 X^* 系．设 X 是一有限非空字母表，Q 是一有限非空集合，若 Q 是一 X^* 系，$i\in Q$，$T\subseteq Q$，则称 $(Q,i,T;X)$ 为一 X^* 自动机．X 上的语言 $L=\{\omega\in X^*\mid wi\in T\}$ 称为可被 X^* 自动机 $(Q,i,T;X)$ 识别的．

可识别语言（recognizable language）　见“自动机”．

正则语言（regular language）　兼具应用和理论背景的一类语言．X 的一个语言 L，若 $|X^*/P_L|<\infty(P_L=1_{X^*})$，则称 L 为正则的（析取的）．正则语言在计算机科学中有着很直接的应用背景，而析取语言则有着如下的理论背景：关于 X 上的任何语言 L，存在 X 上的析取语言 L_1,L_2，使得 $L=L_1\cap L_2$，或者 $L=L_1\dot{\cup}L_2$，其中 $\dot{\cup}$ 表示无交并．

析取语言（disjunctive language）　见“正则语言”．

稠密语言（dense language）　一类重要的语言．X 上的一个语言 D，若关于 X 上任何字 x，有

$$X^*xX^*\cap D\neq\varnothing,$$

则称 D 为稠密的．

克林恩定理（Kleene theorem）　语言理论中的一个重要定理．设 F 是 X 上所有有限语言所组成的语言族，$\mathrm{Rat}\,X^*$ 是由 F 经“$\cup$”，“$\cdot$”和“$*$”等运算而生成的语言族，称为 X 上的有理语言族，其中“$\cup$”是集合论的并，对任意 $L_1,L_2\subseteq X^*$，

$$L_1\cdot L_2=\{l_1l_2\mid l_1\in L_1,l_2\in L_2\},$$

$$L_1^*=\bigcup_{n=0}^{\infty}L_1^n,L_1^0=\{1\}.$$

克林恩定理：X 上一语言 L 是正则的，当且仅当 L 为某一 X^* 自动机所识别的，当且仅当 $L\in\mathrm{Rat}X^*$．

有理语言族（variety of rational language）　见“克林恩定理”．

泵引理（pumping lemma）　正则语言的一个重要性质．若 L 为 X 上一无限正则语言，则存在正整数 k，使得 $l_g(y)\geqslant k(l_g(y)$ 表示 y 中含 X 中字母的个数)，$y\in L$，总有分解 $y=uvw$，其中 $v\in X^+$，$l_g(uv)\leqslant k$，而关于任意 $i\geqslant0$，$uv^iw\in L$．

一致稠密语言（uniformly dense language）　一类特殊的稠密语言．X 上语言 D，若关于 X 上任意语言 L 和任一字 u，存在 X 上的字 v 使得 $|uP_L|\leqslant|vP_L\cap D|$，则称 D 为一致稠密的．一致稠密语言是稠密的．而且，D 为一致稠密语言时，满足条件：

（$*$）关于 X 上任意语言 L，如果任意 $u\in X^*$ 有 $|uP_L\cap D|<\infty$，则对任意 $u\in X^*$，有 $|uP_L|<\infty$．

满足（$*$）条件的 D 称为 fd 辖区．反过来如何？已知的许多 fd 辖区都是一致稠密的，至今尚未有反例．存在一个问题：fd 辖区都一致稠密吗？

埃伦托伊希特-罗曾贝格猜测（Ehrenfeucht-Rozenberg conjecture）　涉及有限生成自由幺半群间两个同态的许多问题中的一个猜测（其他，诸如 Post 对应问题，DoL 序列等价问题等）．对于有限字母表 X 上任意语言 L，常存在 L 的有限子集 F，使得对任意有限字母表 X_1 和同态 $f,g:X^*\to X_1^*$，若 $f(x)=g(x)$，$\forall\ x\in F$，则 $f(x)=g(x)$，$\forall\ x\in L$．该猜测等价于：$X^*(|X|<\infty)$ 上任意 n 变量方程组有等价的有限子方程组．这一猜测是于 1978 年提出来的，上述等价命题是于 1983 年提出来的．围绕这一猜测有一系列的工作．加拿大滑铁卢大学的两位代数学家阿尔贝特（Albert，M. H.）和劳伦斯（Lawrence，J.）于 1985 年从这一猜测的上述等价命题入手，使用有限生成亚阿贝尔群理论，从正面解决了这一猜测．

前缀码（prefix code）　性质最好的，也是最易构造的一类码．X 上的一个语言 $P(S)$，若 $PX^+\cap P=\varnothing(X^+S\cap S=\varnothing)$，则称 $P(S)$ 为前（后）缀码．前（后）缀码都是码．由于前（后）缀码的结构易于掌握，且前（后）缀码的许多性质往往可以推广到一般码上，所以前（后）缀码常被当作码的模型．既是前缀码又是后缀码的码称为双缀码．

后缀码（suffix code）　见“前缀码”．

双缀码（biprefix code）　见“前缀码”．

佩林-舒曾贝格猜测（Perrin-Schützenberger conjecture）　关于前缀码的一个猜想．鉴于前缀码的特殊地位，20 世纪 70 年代末，佩林（Perrin，D.）与舒曾贝格（Schützenberger，M. P.）提出猜测：每个码都可通过某种变换转化为前缀码．设 X 是字母表，字母 $a\in X$ 在字 $s\in X^*$ 中出现的次数记为 $\binom{s}{a}$．两个字 $s,t\in X^*$，若关于任意 $a\in X$，常有

$$\binom{s}{a}=\binom{t}{a},$$

则称 s,t 为交换等价的．对 X 上两个码 C_1,C_2，若存在双射 $\sigma:C_1\to C_2$，使得关于任意 $s\in C_1$，s 交换等价于 $\sigma(s)$，则称 C_1,C_2 为是交换等价的．佩林与舒曾贝格于 1977 年提出一个猜测：每个码都与一个前缀码交换等价．肖尔（Shor，P. W.）于 1983 年举出了一个反例，否定了这一猜测．但一切已知的有限极大码都交换等价于一个前缀码，从而有进一步的猜测：一

切有限极大码都和一前缀码交换等价. 这一猜测至今尚未解决.

交换等价字(commutative equivalent words) 见"佩林-舒曾贝格猜测".

交换等价码(commutative equivalent codes) 见"佩林-舒曾贝格猜测".

极大$\mathscr{X}$码(maximal $\mathscr{X}$-code) $\mathscr{X}$码类的极大元. 同一字母表上的某种类型的(用$\mathscr{X}$表示)码中,若有一个码不能包含于任何其他码中,则称此码为极大$\mathscr{X}$码. 设X是字母表,$\mathscr{C}$是X上$\mathscr{X}$码的全体. $C\in\mathscr{C}$,若对任意$C'\in\mathscr{C}$,$C'\supseteq C$蕴含$C'=C$,称C为极大$\mathscr{X}$码. 通常论及的极大$\mathscr{X}$码有极大码、极大前(后,双)缀码等. 具有极大性的码,在码论的研究中引起特别的关注,因为它不仅在理论上体现了各种不同概念之间的联系,而且有其作为通讯手段这一原始背景的兴趣,它反映了译码方法的某种最优性,即发挥了转换途径的全部可能性.

完全码(complete code) 从组合的角度刻画码的极大性. 若X上的码C生成的自由幺半群C^*是X上的稠密语言,则称C为X上的完全码. 若X上的码C是X上的非稠密语言,则称C为薄码. 在薄码这个宽广的码类中,完全性和极大性是等价的. 由此,一种极值性质转化成了一种组合性质.

薄码(thin code) 见"完全码".

码的完全化(the completion of codes) 一个码嵌入一个完全码的一种构造方法. 这种嵌入时常要求保持码的某种特性. 雷斯提沃(Restivo, A.)于1977年证明:有限码未必能嵌入一个有限完全码中. 埃伦托伊希特(Ehrenfeucht, A.)和罗曾贝格(Rozenberg, G.)于1983年给出了码到完全码的嵌入方法,且这一方法保持了正则性.

有界延迟码(codes with finite deciphering delay) 前缀码的推广. 设$C\subseteq X^+$,若存在整数$d\geqslant 0$,使得对任意$x,x'\in C$,任意$y\in C^d$和任意$u\in X^*$,有$xyu\in x'X^*\to x=x'$,则称C为一有界延迟码. 满足上述条件的最小的d称为C的延迟界. 这一概念来自译码过程,要对$s\in C^*$做C分解(每一因子在C中),需要自左至右读出C中的字. 一般地,只有当读完整个字s时,才能得到一个正确的分解,但是,若C是延迟界为d的有界延迟码,则只要读出$d+1$个字,便可确信这$d+1$个字中的第一个字是正确分解中的因子. 前缀码是延迟界为零的码.

延迟界(deciphering boundary) 见"延迟码".

有界延迟码的完全化(the completion of codes with finite deciphering delay) 有界延迟码到有界延迟完全码的一种扩充. 有界延迟码嵌入有界延迟完全码的方法常要考虑其能否保持有限性、正则性、薄性等. 舒曾贝格(Schützenberger, M. P.)于1966年证明了有限完全码的延迟界不是0(即前缀码)便是∞,从而有界延迟码的完全化未必能保持有限性. 布鲁耶尔(Bruyere, V.)于1989年给出了延迟界为d的有界延迟的有限码嵌入具有同一延迟界的正则完全延迟码的方法.

拓扑半群(topological semigroup) 既有代数结构又有拓扑结构的一种数学结构. 一个豪斯道夫空间,连同定义在其上的一个连续且可结合的二元运算所形成的数学系统称为拓扑半群. 任何半群,连同其上的离散拓扑,都是拓扑半群. 因此,半群是拓扑半群的特例,而有限半群则可看成是紧致半群. 拓扑半群的研究始于20世纪50年代,至今仍然活跃. 华莱士(Wallace, A. D.)被公认为拓扑半群的奠基者. 拓扑半群涉及幂等元的重要结果如下:

1. 任何紧致半群含幂等元,从而,有限半群必含幂等元.

2. 若紧致半群S只含一个幂等元,且$S^2=S$,则S是拓扑群.

3. 若局部紧致半群是群,则它是拓扑群.

4. (华莱士膨胀引理)设A是拓扑半群S的紧致子集,若存在$x\in S$使得$A\subset Ax$,且$\Gamma(x)=\overline{\{x^n\}_{n=1}^{\infty}}$是紧致的,则$A=Ax=Ae$,其中

$$e^2=e\in\Gamma(x).$$

拓扑半群的素理想(the prime ideal of a topological semigroup) 半群素理想的推广. 拓扑半群的素理想可用幂等元来刻画:设e是幂等元,$J_0(S\backslash e)$($J_0(S\backslash e)$实为$J_0(S\backslash H(e))$)是含于集合$S\backslash e$内的极大理想. 若S是紧致半群,则S中任一闭素理想P均可表成$J_0(S\backslash e)$的形式,其中e为不在S的极小理想$K(S)$中的幂等元;反之,若e为不在$K(S)$中的幂等元,则$J_0(S\backslash e)$必为S中某一闭素理想.

拓扑半素理想(topological semiprime ideal) 半群的半素理想的推广. 称拓扑半群的理想I为拓扑半素理想,是指$x\notin I$蕴涵$\overline{\{x^n\}_{n=1}^{\infty}}\cap I=\varnothing$. 在紧致半群中,拓扑半素理想可表为某簇闭素理想的交. 此结果可视为半群中伯克霍夫定理的推广.

群理想(group ideal) 拓扑半群的一类理想. 半群S的理想I,若$x\notin I$时,必存在$J(x)$中一群G,使得$G\cap I=\varnothing$,则称I为群理想. 紧致半群的闭完全素理想是拓扑半素理想,而拓扑半素理想是群理想. 但其逆不真. 又紧致半群的所有的闭完全素理想之交是群理想.

伙(bing) 紧致连通半群的简称.

团伙(clan) 一种特殊的伙. 指具有恒等元1的伙. 具普通乘法的区间[0,1]是一团伙. 复平面上的单位圆盘在复数乘法下也是团伙.

丝线(thread) 一种特殊的团伙. 20世纪50—60年代被广泛研究的一类团伙. 丝线分为三类:标

准丝线、诣零丝线和极小丝线. 与标准丝线拓扑同构的半群统称为I半群. 所有I半群均是交换半群.

I **半群**(I-semigroup)　见"丝线".

拓扑半群的里斯商(Rees quotient of toplogical semigroup)　涉及里斯商拓扑半群的结果. 若 I 是紧致半群 S 中的闭理想,则里斯商 S/I 是拓扑半群. S 的紧致性及 I 的闭性确保了商空间 S/I 仍为豪斯道夫空间,且乘法在 S/I 上连续.

拓扑半群的核(the kernel of a toplogical semigroup)　拓扑半群的特殊理想. 指拓扑半群 S 的极小理想 $K(S)$(若存在). 若半群 S 是紧致的,则 $K(S)$ 存在且亦是紧致的. 下面的定理描述了紧致半群的核的构造. 若 $\hat{L}$ 及 $\hat{R}$ 分别是紧致半群 S 中极小左理想簇及极小右理想簇,则核 $K(S)=\bigcup\hat{L}=\bigcup\hat{R}$. 又,若 $L\in\hat{L}$ 及 $R\in\hat{R}$,则 $LR=K(S)$ 及 $L\cap R=H_e$,其中 H_e 是 S 中包含 $e^2=e$ 的极大子群;因此,$K(S)$ 可表成一些互不相交而又拓扑同构的群的并.

里斯-苏士凯维奇定理(Rees-Suschkitz theorem)　描述紧致半群的核的结构的定理. 该定理断言:设紧致半群 S 的核是 $K(S)$,E 为其幂等元集. 若 $e\in E\cap K(S)$,则 $K(S)$ 拓扑同构于紧致半群

$$(Se\cap E)\times eSe\times(eS\cap E),$$

其乘法定义为 $(x,y,z)(x',y',z')=(x,yzx'y',z')$.

波肃剪贴(Borsuk paste up)　描述在某些条件下,半群中的子半群可被另一半群取代的一种方法. 设 A 是紧致半群 S 中的闭子半群,$f:A\to T$ 是 A 到半群 T 的满同态,$\Delta(S)=\{(x,x)\mid x\in S\}$ 为 S 的对角线. 若 $\zeta=\Delta(S)\cup\{(a_1,a_2)\in A\times A\mid f(a_1)=f(a_2)\}$ 是 S 上的闭同余,则 S/ζ 是半群. 换言之,根据映射 f 的法则,S/ζ 看起来就像把 A 从 S 中剪掉而把 T 贴上,故名为波肃剪贴.

单-参数半群(one-parameter semigroup)　一种特殊映射. 指丝线[0,1]到半群内的拓扑同态像. 设 σ 是丝线[0,1]到半群 S 内的一一连续函数. 若 σ 对[0,1]内的 $x,y,x+y$ 满足 $\sigma(x+y)=\sigma(x)\sigma(y)$,则称 σ 为 S 内的单-参数半群. 一般非正式地,称映像 $\sigma[0,1]$ 为 S 内的单-参数半群. 必须注意,半群 S 内的单-参数半群不必是 S 的子半群,因为丝线[0,1]对加法不是封闭的.

麦斯脱-希尔兹定理(theorem of Mostert and Shields)　关于单-参数半群的重要定理. 设 A 是半群 S 内的丝线,H_e 是 S 内包含幂等元 e 的极大子群. 称丝线 A 是由 e 引出的,当且仅当 $H_e\cap A=e$. 设 S 是具恒等元 1 的局部紧致半群,且群 H_1 中存在紧致子群 G,使得它在 H_1 中是闭的但在 S 中不闭. 该定理证明:若在 1 处有某邻域不含 S 的其他幂等元,则 S 包含某一从 1 处引出的单-参数半群. 该定理由麦斯脱(Mostert,P. S.)与希尔兹(Shields,A. L.)于 1960 年得到.

既约半群(irreducible semigroup)　一类重要的团伙. 较丝线更复杂. 具有单位元 1 的紧致半群 S,若它是连通的,且不含真子团伙 T 使得 $1\in T$,$T\cap K(S)\neq\varnothing$,则称 S 为既约的. 既约半群 S 的含幂等元 e 的极大子群是含 e 的 $\mathscr{H}$ 类 H_e,所以 S 中的群在 $S/\mathscr{H}$ 中就收缩成点,因此 $S/\mathscr{H}$ 不再含非退化的连通群. 换言之,$S/\mathscr{H}$ 把 S 扯直成I半群. 霍夫曼(Hofmann,K. H.)及麦斯脱(Mostert,P. S.)于 1966 年证明了既约半群均是可换半群.

李半群(Lie-semigroup)　结构与李群有关的半群. 设 S 是有边界流形上的团伙. 当流形边界恰为 S 的子伙时,称 S 为李半群,记为 L 半群. 若 S 含 0 元,则 S 拓扑同构于 $(J\times B)/K$,其中 K 是 $J\times B$ 的理想. 又 S 中乘法是可微的,当且仅当 S' 是标准丝线. 麦斯脱(Mostert,P. S.)与希尔兹(Shields,A. L.)证明:L 半群的边界 B 是紧致李群,且 B 以左平移作用于 S 上,其轨道空间 S' 是I半群. 又,在 S 中可找到I半群 J,使 J 恰为 S' 的横截面.

一维半群(one-dimensional semigroup)　一种特殊的团伙. 指上同调维数为 1 的团伙. 20 世纪 60 年代初期,亨特(Hunter,R. P.)曾对一维半群做了系统的研究. 他指出一维半群 S 的极小理想 $K(S)$ 必是下列两类型之一:

1. $K(S)$ 是一维紧致线圈群,且此群的特征群是有理数加群的子群.
2. $K(S)$ 是左-(或右-)零半群.

紧致零-单半群的结构(the structure of a compact 0-simple semigroup)　紧致零-单半群的一种基本结构. 若 S 是紧致零-单半群,则 $S\backslash\{0\}$ 拓扑同构于 $Y_1\times X\times Y_2$,其中 Y_1,Y_2 是紧致豪斯道夫空间,而 X 拓扑同构于 $S\backslash\{0\}$ 内的某极大子群. 此定理的逆亦成立. 若取紧致豪斯道夫空间 X_1,X_2 及任一紧致群 H,适当地定义连续映射 $f:X_2\times X_1\to H\cup\{0\}=H^0$,及在 $(X_1,H^0,X_2;f)$ 上适当地定义乘法,可得出 $(X_1,H^0,X_2;f)$ 是一紧致零-单半群.

概率测度半群(semigroup of probability measure)　一种特殊的半群. 指由定义在紧致半群上所有概率测度所构成的半群. 设 S 是紧致半群,$P(S)$ 是 S 上所有概率测度的集合. 若在 $P(S)$ 上赋予卷积及弱星拓扑,则 $P(S)$ 是一紧致仿射半群,称为概率测度半群. 若 Δ 是 $P(S)$ 中的群理想,则 Δ 在 $P(S)$ 中必稠密且是凸集.

撰　稿　岑嘉评　郑恒武　郭聿琦　章　亮
审　阅　刘耀军　岑嘉评　郭聿琦

李群与李代数

李群与李代数(Lie group and Lie algebra) 代数学的重要分支学科. 源于19世纪末叶,李(Lie, M. S.)在研究线性偏微分方程组解的积分曲线时,发现了无穷小变换群(这就是现代的局部李群)以及无穷小变换群的李代数. 此后,他的学生恩格尔(Engel,F.)等人致力于李代数的研究,到20世纪初,嘉当(Cartan,É. (-J.))解决了复半单李代数的分类. 随后,陆续解决了实半单李代数的分类,对称黎曼空间的分类,表示的分类等. 同时,外尔(Weyl,(C. H.)H.)详尽地讨论了紧李群,给出了紧李群分类和紧李群的表示的分类.

严格的李群概念,在流形概念形成后,才能给出确切的定义. 这已经是20世纪30年代以后的事,从此,李群及其李代数不仅本身理论(包括结构理论和表示理论)有着迅速的发展,而且不断地扩大应用范围,成功地渗透到理论物理学. 在爱因斯坦(Einstein, A.)的相对论中,运动群就是洛伦茨(Lorentz,G. G.)群,这是一个四维实单李群. 李群理论的深入发展,派生出代数群理论,它们对数学的许多分支,都有深刻的影响,而从复及实李代数,自然地推广到一般域上的李代数理论. 另一方面,无限维李代数也从20世纪60年代开始发展起来,最重要的是作为复半单李代数的推广而出现的卡茨-穆迪李代数,以及维拉索罗代数,它们从一开始就和理论物理有着密切联系,且与组合数学、代数数论、孤立子理论有着深刻的联系. 另一个重要发展,是考虑实半单李群在希尔伯特空间上的酉表示,它和非交换群上调和分析有着密切的关系,而和几何的联系则是变换群理论和齐性空间理论. 此外,李群的离散子群的研究,又和代数数论密切相关.

李 代 数

李代数(Lie algebra) 一类重要的非结合代数. 记 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的线性空间,若 $\mathscr{L}$ 中除了加法和纯量积,还有第三种代数运算:$\mathscr{L}\times\mathscr{L}\to\mathscr{L}$,记为 $[x,y]$,$\forall\ x,y\in\mathscr{L}$,它适合条件:

1. 反对称性 $[x,x]=0,\quad \forall\ x\in\mathscr{L}$.
2. 双线性性 $[\lambda x+\mu y,z]=\lambda[x,z]+\mu[y,z]$, $\forall\ \lambda,\mu\in F,x,y\in\mathscr{L}$.
3. Jacobi 恒等式

$$[[x,y],z]+[[z,x],y]+[[y,z],x]=0,\quad \forall\ x,y,z\in\mathscr{L}.$$

则 $[x,y]$ 称为 x 和 y 的换位运算,亦称"方括号运算". 这时 $\mathscr{L}$ 称为域 F 上李代数,简称李代数. 当 $\mathscr{L}$ 的维数有限时,称为有限维李代数;当 $\mathscr{L}$ 的维数无限时,称为无限维李代数. 例如,若 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的结合代数,满足结合律的乘法,记为 ab,$\forall\ a,b\in\mathscr{L}$,则运算 $[a,b]=ab-ba$, $\forall\ a,b\in\mathscr{L}$ 为换位运算. 在此运算下,$\mathscr{L}$ 为李代数. 特别地,若 $\mathscr{L}$ 为由所有 $n\times n$ 矩阵构成的结合代数,则在矩阵运算下定义

$$[A,B]=AB-BA$$

便构成一个 n^2 维李代数.

换位运算(commutator operation) 见"李代数".

方括号运算(bracket operation) 见"李代数".

有限维李代数(finite dimensional Lie algebra) 见"李代数".

无限维李代数(infinite dimensional Lie algebra) 见"李代数".

李代数的子代数(subalgebra of a Lie algebra) 与环中的子环平行的概念. 设 $\mathscr{L}$ 为李代数,对 $\mathscr{L}$ 中子集合 $\mathfrak{m},\mathfrak{n}$,定义 $[\mathfrak{m},\mathfrak{n}]$ 为由形如 $[a,b]$($\forall\ a\in\mathfrak{m},b\in\mathfrak{n}$)的元素生成的线性子空间. 若李代数 $\mathscr{L}$ 的子空间 $\mathscr{L}_1$ 满足 $[\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_1]\subset\mathscr{L}_1$,则称 $\mathscr{L}_1$ 为 $\mathscr{L}$ 的子代数.

李代数的理想(ideal of a Lie algebra) 亦称理想子代数. 简称理想. 类似于环中的双侧理想. 设 $\mathscr{L}$ 为李代数,若 $\mathscr{L}$ 中子空间 $\mathscr{L}_1$ 满足 $[\mathscr{L}_1,\mathscr{L}]\subset\mathscr{L}_1$,则称 $\mathscr{L}_1$ 为 $\mathscr{L}$ 的理想子代数. 若 $\mathscr{L}_1$ 为 $\mathscr{L}$ 的理想,记 $\mathscr{L}/\mathscr{L}_1$ 为 $\mathscr{L}$ 模 $\mathscr{L}_1$ 之商线性空间,对 $\mathscr{L}/\mathscr{L}_1$ 中元素

$$\tilde{a}=\{a+x\mid\forall\ x\in\mathscr{L}_1\},\quad \tilde{b}=\{b+y\mid\forall\ b\in\mathscr{L}_1\}$$

可以定义换位运算 $[\tilde{a},\tilde{b}]=\widetilde{[a,b]}$ 使 $\mathscr{L}/\mathscr{L}_1$ 为李代数,则称为 $\mathscr{L}$ 关于理想 $\mathscr{L}_1$ 的商代数.

理想子代数(ideal subalgebra) 见"李代数的理想".

李代数的商代数(quotient algebra of a Lie algebra) 见"李代数的理想".

构造常数(structure constants) 与基密切相关的决定有限维李代数结构的一组数. 若 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的李代数,在 $\mathscr{L}$ 中任取一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,则

$$[\alpha_i,\alpha_j]=\sum_{k=1}^{n}c_{ij}^{k}\alpha_k\quad(i,j=1,2,\cdots,n).$$

由李代数的定义条件,域 F 上 n^3 个常数 c_{ij}^{k} 适合条件:

1. $c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0$.

2. $\sum_{l=1}^{n}(c_{ij}^l c_{lk}^p + c_{ki}^l c_{lj}^p + c_{jk}^l c_{li}^p) = 0$.

这 n^3 个元素 c_{ij}^k 称为李代数 $\mathscr{L}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下之构造常数,它和基的选取有关. 反之,在域 F 中任取 n^3 个适合条件 1,2 之元素 c_{ij}^k,若在 n 维线性空间 $\mathscr{L}$ 中,任取一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,按

$$[\alpha_i,\alpha_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k \alpha_k$$

来定义 $\mathscr{L}$ 中的换位运算,则 $\mathscr{L}$ 为李代数,且以 c_{ij}^k 为构造常数.

线性李代数(linear Lie algebra) 由线性变换构成的李代数. 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathrm{gl}(V)$ 为 V 上所有线性变换构成的集合,它在运算 $[A,B]=AB-BA$ 下构成 n^2 维李代数,称为一般线性李代数,它的任一子代数称为线性李代数. 在 V 中取定基后,将 $\mathrm{gl}(V)$ 与 F 上所有 n 阶方阵的集合等同起来,并记为 $\mathrm{gl}(n,F)$,它的子代数称为矩阵代数.

一般线性李代数(general linear Lie algebra) 见"线性李代数".

矩阵李代数(matric Lie algebra) 见"线性李代数".

幂零李代数(nilpotent Lie algebra) 类似于一般代数中的幂零代数. 若 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的李代数,记

$$\mathscr{L}^1=\mathscr{L},\mathscr{L}^i=[\mathscr{L}^{i-1},\mathscr{L}] \ (i=2,3,\cdots),$$

则 $\mathscr{L}^1,\mathscr{L}^2,\cdots$ 都是 $\mathscr{L}$ 的理想,且有 $\mathscr{L}^1\supset\mathscr{L}^2\supset\mathscr{L}^3\supset\cdots$. 若存在自然数 N,使得 $\mathscr{L}^N=\{0\}$,则 $\mathscr{L}$ 称为幂零李代数. 例如,所有 n 阶对角元素都是零的上三角方阵的全体构成幂零李代数. 若李代数 $\mathscr{L}$ 的换位运算是平凡的,即 $[\mathscr{L},\mathscr{L}]=0$,则称 $\mathscr{L}$ 为交换李代数.

交换李代数(commutative Lie algebra) 见"幂零李代数".

可解李代数(solvable Lie algebras) 一类特殊的李代数. 若 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的李代数,记

$$\mathscr{L}^{(1)}=\mathscr{L},\mathscr{L}^{(j)}=[\mathscr{L}^{(j-1)},\mathscr{L}^{(j-1)}] \ (j=2,3,\cdots),$$

则 $\mathscr{L}^{(1)},\mathscr{L}^{(2)},\cdots$ 为 $\mathscr{L}$ 之理想,且有 $\mathscr{L}^{(1)}\supset\mathscr{L}^{(2)}\supset\mathscr{L}^{(3)}\supset\cdots$,又有 $\mathscr{L}^i\supset\mathscr{L}^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots)$. 若存在自然数 N,使得 $\mathscr{L}^{(N)}=\{0\}$,则 $\mathscr{L}$ 称为可解李代数. 幂零李代数为可解李代数,但反之不一定. 例如,所有域 F 上 n 阶上三角方阵全体,在换位运算 $[A,B]=AB-BA$ 下为可解李代数,但不是幂零李代数.

集合中心化子(centralizer of a set) 平行于环与代数中相应的概念. 若 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的李代数,$\mathfrak{S}$ 为 $\mathscr{L}$ 之子集合,则 $\mathscr{C}(\mathfrak{S})=\{x\in\mathscr{L}\mid[x,\mathfrak{S}]=0\}$ 为 $\mathscr{L}$ 的子代数,称为子集合 $\mathfrak{S}$ 的中心化子.

李代数的中心(center of a Lie algebra) 平行于环与代数的中心. 若 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的李代数,则

$$\mathscr{C}(\mathscr{L})=\{x\in\mathscr{L}\mid[x,\mathscr{L}]=0\}$$

为 $\mathscr{L}$ 的理想,称为 $\mathscr{L}$ 的中心.

集合正规化子(normalizer of a set) 环与代数中相平行的概念. 若 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的李代数,$\mathfrak{S}$ 为 $\mathscr{L}$ 之子集合,则 $\mathscr{N}(\mathfrak{S})=\{x\in\mathscr{L}\mid[x,\mathfrak{S}]\subset\mathfrak{S}\}$ 为 $\mathscr{L}$ 的子代数,称为子集合 $\mathfrak{S}$ 的正规化子.

李代数的根基(radical of a Lie algebra) 一种特殊的理想. 设 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的李代数,$\mathscr{L}$ 中最大的可解理想,称为李代数 $\mathscr{L}$ 的根基.

半单李代数(semi-simple Lie algebra) 一类重要的李代数. 设 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的李代数,$\mathscr{R}$ 为 $\mathscr{L}$ 的根基. 若 $\mathscr{R}=\{0\}$,则 $\mathscr{L}$ 称为半单李代数. 在 $\mathscr{L}$ 是复李代数时,若 $\mathscr{L}$ 为有限维李代数,则在 $\mathscr{L}$ 中必存在半单子代数 $\mathfrak{S}$,使得 $\mathscr{L}=\mathfrak{S}+\mathscr{R}$ 为空间直和,其中 $\mathscr{R}$ 为 $\mathscr{L}$ 的根基,这个分解称为列维分解,它不惟一. 列维分解指出,要弄清楚一般李代数的结构,必须弄清楚可解李代数和半单李代数的结构. 关于可解李代数,知道得甚少,但是复半单李代数的结构是非常清楚的.

单李代数(simple Lie algebra) 一类结构简单的李代数. 设 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的李代数,若 $\mathscr{L}$ 的非零理想只有 $\mathscr{L}$ 本身,且 $[\mathscr{L},\mathscr{L}]\neq 0$,则 $\mathscr{L}$ 称为单李代数. 单李代数必为半单李代数,反之,在实数及复数的情形,半单李代数必为单理想子代数的直和,因此,研究实及复半单李代数的问题化为研究实及复单李代数.

李代数的伴随表示(adjoint representation of Lie algebra) 李代数到自身的一种表示. 若 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的李代数,任取 $a\in\mathscr{L}$,则

$$\mathrm{ad}(a):\ x\to[a,x] \ (\forall\ x\in\mathscr{L})$$

为 $\mathscr{L}$ 上线性算子. 它有性质:

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}([a,b])&=[\mathrm{ad}(a),\mathrm{ad}(b)]\\&=\mathrm{ad}(a)\mathrm{ad}(b)-\mathrm{ad}(b)\mathrm{ad}(a),\\&\qquad\forall\ a,b\in\mathscr{L};\\\mathrm{ad}(\lambda a+\mu b)&=\lambda\mathrm{ad}(a)+\mu\mathrm{ad}(b),\\&\qquad\forall\ \lambda,\mu\in F,a,b\in\mathscr{L}.\end{aligned}$$

于是,把 a 映到 $\mathrm{ad}(a)$ 的映射 $\mathrm{ad}:\mathscr{L}\to\mathrm{ad}(\mathscr{L})$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个表示,称为 $\mathscr{L}$ 的伴随表示,其中

$$\mathrm{ad}(\mathscr{L})=\{\mathrm{ad}(a)\mid\forall\ a\in\mathscr{L}\}.$$

$\mathrm{ad}(a)$ 为零当且仅当 a 属于 $\mathscr{L}$ 的中心 $\mathscr{C}(\mathscr{L})$.

基灵型(Killing form) 定义在李代数上的一种双线性型. 设 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的李代数,则

$$(x,y)=\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y) \quad (\forall\ x,y\in\mathscr{L})$$

为 $\mathscr{L}$ 上对称双线性函数,称为 $\mathscr{L}$ 上基灵型. 它有性质 $([x,y],z)+(y,[x,z])=0,\forall\ x,y,z\in\mathscr{L}$. $\mathscr{L}$ 为复半单李代数当且仅当它的基灵型非退化.

李代数的同态(homomorphism of Lie alge-

bras) 与环论中的同态相平行的概念. 设 $\mathscr{L}$,$\mathscr{L}_1$ 为域 F 上的两个李代数,若 $\mathscr{L}$ 到 $\mathscr{L}_1$ 内的线性映射 σ 对所有的 $x,y\in\mathscr{L}$ 都有 $\sigma([x,y])=[\sigma(x),\sigma(y)]$,则称 σ 为李代数 $\mathscr{L}$ 到 $\mathscr{L}_1$ 内的同态. 这时,

$$\ker(\sigma)=\sigma^{-1}(0)=\{x\in\mathscr{L}\mid\sigma(x)=0\}$$

为李代数 $\mathscr{L}$ 的理想,称为同态核,而 $\mathrm{Im}(\sigma)=\sigma(\mathscr{L})$ 为李代数 $\mathscr{L}_1$ 的子代数,称为同态像. 若 σ 为李代数 $\mathscr{L}$ 到 $\mathscr{L}_1$ 上的同态,且 σ 为非异线性映射,则 σ^{-1} 也为李代数 $\mathscr{L}_1$ 到 $\mathscr{L}$ 上的非异线性映射,且为同态. 这时称 σ 为李代数 $\mathscr{L}$ 到 $\mathscr{L}_1$ 上的同构映射,且 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}_1$ 称为互相同构. 同构为等价关系,李代数在同构下的分类为李代数结构理论的根本问题之一.

李代数的同构映射(isomorphic mapping of Lie algebras) 见"李代数的同态".

李代数的同构(isomorphism of Lie algebras) 见"李代数的同态".

李代数的内自同构(inner automorphism of a Lie algebra) 一种特殊的自同构. 若 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的有限维李代数,则

$$\exp(\mathrm{ad}x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(\mathrm{ad}x)^j\quad(\forall\ x\in\mathscr{L})$$

为 $\mathscr{L}$ 上非异线性变换,且为 $\mathscr{L}$ 之自同构. 由

$$\{\exp(\mathrm{ad}x)\mid\forall\ x\in\mathscr{L}\}$$

生成之乘法群称为 $\mathscr{L}$ 的内自同构群,其中元素称为内自同构. 若一个李代数 $\mathscr{L}$ 的自同构不是内自同构,则称为外自同构.

内自同构群(inner automorphism group) 见"李代数的内自同构".

外自同构(outer-automorphism) 见"李代数的内自同构".

嘉当子代数(Cartan subalgebra) 研究李代数分解时常用的一类子代数. 设 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的李代数,若 $\mathscr{L}$ 的子代数 $\mathfrak{h}$ 是极大幂零子代数,且它的正规化子 $\mathscr{N}(\mathfrak{h})=\{x\in\mathscr{L}\mid[x,\mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}\}$ 等于 $\mathfrak{h}$ 自身,则称它为 $\mathscr{L}$ 的嘉当子代数. 当 $\mathscr{L}$ 为有限维复李代数时,嘉当子代数必存在,且对任意两个嘉当子代数 $\mathfrak{h}_1$ 和 $\mathfrak{h}_2$,必存在 $\mathscr{L}$ 的内自同构 σ,使得 $\sigma(\mathfrak{h}_1)=\mathfrak{h}_2$,即 $\mathfrak{h}_1$ 和 $\mathfrak{h}_2$ 是共轭的. 在实的情形下,这个性质不成立. 当 $\mathscr{L}$ 为有限维实或复半单李代数时,嘉当子代数必为极大交换子代数.

李代数的根(root of Lie algebra) 研究李代数分解时的一种工具. 若 $\mathscr{L}$ 为复半单李代数,$\mathfrak{h}$ 为 $\mathscr{L}$ 的嘉当子代数,则 $\mathscr{L}$ 关于 $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$ 分解为根子空间直和

$$\mathscr{L}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathscr{L}_\alpha,\qquad(*)$$

其中 Δ 为 $\mathfrak{h}$ 上非零线性函数构成的有限集,且有

$$-\Delta=\Delta,\quad \dim\mathscr{L}_\alpha=1\ (\forall\ \alpha\in\Delta),$$

这里 $\mathscr{L}_\alpha=\{x\in\mathscr{L}\mid[h,x]=\alpha(h)x,\forall\ h\in g\}$. 集合 Δ 的元素称为复半单李代数关于嘉当子代数 $\mathfrak{h}$ 的根. (*)式称为 $\mathscr{L}$ 的根子空间分解.

根子空间分解(root subspace decomposition) 见"李代数的根".

根系(root system) 根的集合. 复半单李代数 $\mathscr{L}$ 关于嘉当子代数 $\mathfrak{h}$ 的所有的根组成的集合 Δ 称为 $\mathscr{L}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的根系. 由于 $\mathscr{L}$ 上基灵型非退化,所以利用基灵型将 Δ 嵌入 $\mathfrak{h}$ 中,Δ 也可以看做 $\mathfrak{h}$ 中向量集,Δ 实线性生成 $\mathfrak{h}$ 中实线性空间,记为 $\mathfrak{h}_{\mathrm{R}}$,则 $\dim_{\mathrm{R}}\mathfrak{h}_{\mathrm{R}}=\dim_{\mathrm{C}}\mathfrak{h}$ 称为 $\mathscr{L}$ 的秩.

李代数的秩(rank of Lie algebra) 见"根系".

单根系(simple root system) 根系中有代数性质的一部分. 设 $\mathscr{L}$ 为秩 l 的复半单李代数,$\mathfrak{h}$ 为 $\mathscr{L}$ 的嘉当子代数,Δ 为根系,在 Δ 实线性生成之实线性空间 g_{R} 中取定次序如下:若 $e_1,e_2,\cdots,e_l$ 为 g_{R} 之基,

$$\alpha=\sum_{i=1}^{l}a_ie_i,\quad \beta=\sum_{i=1}^{l}b_ie_i,$$

若 $a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_{j-1}=b_{j-1},a_j>b_j$,则 $\alpha>\beta$. 在引进次序后,Δ 中正元素全体记为 Δ_+,负元素全体记为 Δ_-,则 Δ_+ 称为正根系,Δ_- 称为负根系,且有 $-\Delta_-=\Delta_+$. Δ_+ 中元素称为单根,是指它不是 Δ_+ 中两个元素之和. Δ_+ 中所有单根构成单根系,它恰有 l 个,且为 g_{R} 之一组基,记为 $\pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$.

正根系(positive root system) 见"单根系".

负根系(negative root system) 见"单根系".

单根(simple root) 见"单根系".

邓金图(Dynkin diagram) 用以研究李代数分类的一种图. 设 $\pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ 为秩 l 的复半单李代数 $\mathscr{L}$ 的单根系. 由于 $\mathscr{L}$ 上基灵型限制在 g_{R} 上为实正定对称双线性函数,所以可把 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$ 看成实欧氏空间 g_{R} 中的向量. 在平面上画出 l 个点,分别表示 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$. 当 α_i 和 α_j 互相正交时,点 i 和 j 间不联线;当 α_i 和 α_j 间夹角分别为 120°,135°或 150°时,则分别联 1 条线,2 条线或 3 条线. 这样得到的图称为考克斯特图. 当点 i 和 j 间出现 1 条线时 α_i 和 α_j 等长,当出现 2 条或 3 条时,加上一个箭头指向 α_i 和 α_j 较短的一个,这样得到的图称为邓金图(有限维复单李代数的邓金图(卡茨-穆迪代数的)表(Fin)). 复半单李代数的邓金图连通当且仅当它为复单李代数.

考克斯特图(Coxeter graph) 见"邓金图".

外尔群(Weyl group) 作用在根系上的一种变换群. 设 $\mathscr{L}$ 为复半单李代数,$\mathfrak{h}$ 为 $\mathscr{L}$ 的嘉当子代数,Δ 为根系,π 为单根系. 记 Δ 实线性生成 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间 $\mathfrak{h}^*$ 之实线性子空间 $\mathfrak{h}_{\mathrm{R}}$,$\mathfrak{h}_{\mathrm{R}}$ 中有反射

$$\omega_\alpha:\ x\rightarrow x-\frac{2(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\ (\forall\ x\in g_{\mathrm{R}}),$$

其中 $\alpha\in\Delta$，(x,y) 为 $\mathscr{L}$ 之基灵型. 于是 $\{\omega_\alpha|\alpha\in\Delta\}$ 生成之群称为 $\mathscr{L}$ 的外尔群. 它是有限群，且实际上由 $w_{\alpha_1},w_{\alpha_2},\cdots,w_{\alpha_l}$ 生成，其中 $\pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ 为 $\mathscr{L}$ 的单根系.

外尔基(Weyl basis) 复半单李代数作为向量空间的一种特殊基底. 设 $\mathscr{L}$ 为复半单李代数，$\mathfrak{h}$ 为嘉当子代数，Δ 为根系，

$$\mathscr{L}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}L_\alpha$$

为根子空间分解. 于是在 $\mathscr{L}$ 中存在基元素 $h_\alpha\in g$，$e_\alpha\in\mathscr{L}_\alpha$，$\forall\ \alpha\in\Delta$，使得

$$[h,h']=0\ (\forall\ h,h'\in\mathfrak{h}),$$
$$[h,e_\alpha]=\alpha(h)e_\alpha\ (\forall\ h\in\mathfrak{h},\alpha\in\Delta),$$
$$[e_\alpha,e_{-\alpha}]=h_\alpha\ (\forall\ \alpha\in\Delta),$$
$$[e_\alpha,e_\beta]=N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}\ (\forall\ \alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta),$$
$$[e_\alpha,e_\beta]=0\ (\forall\ \alpha,\beta\in\Delta,0\neq\alpha+\beta\overline{\in}\Delta).$$

这组基称为外尔基，其中 $N_{\alpha\beta}$ 为半整数.

谢瓦莱基(Chevalley basis) 复半单李代数的另一种基底. 设 $\mathscr{L}$ 为复半单李代数，$\mathfrak{h}$ 为嘉当子代数，Δ 为根系，

$$\mathscr{L}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathscr{L}_\alpha$$

为根子空间分解，于是在 $\mathscr{L}$ 中存在一组基元素：$h_\alpha\in\mathfrak{h}$，$e_\alpha\in\mathscr{L}_\alpha$，$\alpha\in\Delta$，使得

$$[h,h']=0\ (\forall\ h,h'\in\mathfrak{h}),$$
$$[h,e_\alpha]=\alpha(h)e_\alpha\ (\forall\ h\in\mathfrak{h},\alpha\in\Delta),$$
$$[e_\alpha,e_{-\alpha}]=\varepsilon(\alpha,-\alpha)h_\alpha\ (\forall\ \alpha\in\Delta),$$
$$[e_\alpha,e_\beta]=\varepsilon(\alpha,\beta)(p+1)e_{\alpha+\beta},\ (\forall\ \alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta),$$
$$[e_\alpha,e_\beta]=0\ (\forall\ \alpha,\beta\in\Delta,0\neq\alpha+\beta\overline{\in}\Delta).$$

其中乘法表中非负整数 p 由下面根链

$$\alpha-p\beta,\cdots,\alpha-\beta,\alpha,\alpha+\beta,\cdots,\alpha+q\beta$$

决定，而 $\alpha-(p+1)\beta,\alpha+(q+1)\beta\overline{\in}\Delta\cup\{0\}$. 这里 $\varepsilon(\alpha,\beta)$ 定义为：$\varepsilon:\Delta\times\Delta\to\{\pm1\}$，适合条件

$$\varepsilon(\alpha,\beta)\varepsilon(\alpha+\beta,\gamma)=\varepsilon(\beta,\gamma)\varepsilon(\alpha,\beta+\gamma),\ (\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in\Delta),$$
$$\varepsilon(\alpha,-\alpha)=\varepsilon(-\alpha,\alpha)\ (\forall\ \alpha\in\Delta),$$
$$\varepsilon(\beta,\alpha)=-\varepsilon(\alpha,\beta)\ (\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta),$$

上述这组基称为谢瓦莱基.

复单李代数(complex simple Lie algebra) 复数域上结构最简单的李代数. 复单李代数在同构下的标准形为四大类和五个特殊类. 四大类可以用矩阵李代数实现. 它们是：

1. $\mathrm{su}(l+1,\mathrm{C})=A_l=\{A\,|\,(l+1)\times(l+1)$ 复方阵且 $\mathrm{tr}A=0,A+A'=0\}$ $(l\geqslant1)$.

2. $\mathrm{so}(2l+1,\mathrm{C})=B_l=\{A\,|\,(2l+1)\times(2l+1)$ 复方阵且 $A+A'=0\}$ $(l\geqslant2)$.

3. $\mathrm{sp}(l,\mathrm{C})=\mathrm{C}_l=\{A\,|\,(2l)\times(2l)$ 复方阵且 $AJ+JA'=0\}$ $(l\geqslant3)$，其中

$$J=\begin{pmatrix}0&I\\-I&0\end{pmatrix}.$$

4. $\mathrm{so}(2l,\mathrm{C})=D_l=\{A\,|\,(2l)\times(2l)$ 复方阵且 $A+A'=0\}$ $(l\geqslant4)$.

另外五个特殊类分别有维数 14，52，78，133，248，它们的实现比较复杂.

紧李代数(compact Lie algebra) 一类简单而重要的实李代数. 若实李代数 $\mathscr{L}$ 上有内积(即正定对称双线性函数)(x,y) 适合不变性，即$([x,y],z)+(y,[x,z])=0$ $(\forall\ x,y,z\in L)$，则称 L 为紧李代数. 紧李代数必为中心及维数大于 1 的紧单李代数的理想直和，且复单李代数中在同构意义下，有且只有一个紧李代数. 因此紧单李代数在同构下的标准形也为四大类及五个特殊类，四大类可以用矩阵李代数实现. 它们是：

1. $\mathrm{su}(l+1,\mathrm{C})=A_l=\{A\,|\,(l+1)\times(l+1)$ 复矩阵且 $\mathrm{tr}A=0,A+\overline{A}'=0\}$ $(l\geqslant1)$.

2. $\mathrm{so}(2l+1,\mathrm{R})=B_l=\{A\,|\,(2l+1)\times(2l+1)$ 实矩阵且 $A+A'=0\}$ $(l\geqslant2)$.

3. $\mathrm{sp}(2l,\mathrm{C})=\mathrm{C}_l=\{A\,|\,(2l)\times(2l)$ 复矩阵且 $A+\overline{A}'=0,AJ+JA'=0\}$ $(l\geqslant3)$.

4. $\mathrm{so}=(2l,\mathrm{R})=D_l=\{A\,|\,(2l)\times(2l)$ 实矩阵且 $A+A'=0\}$ $(l\geqslant4)$.

五个特殊类的实现比较复杂.

复李代数的实形式(real form of complex Lie algebra) 与复李代数相关的一种实李代数. 设 $\mathscr{L}$ 为实李代数，$\mathscr{L}^c=\mathscr{L}+\mathscr{K}\sqrt{-1}\mathscr{L}$ 为 $\mathscr{L}$ 的复化，它是同维数复李代数. 反之，设 $\mathscr{J}$ 为复李代数，$\mathscr{L}$ 为 $\mathscr{J}$ 之子集合，若 $\mathscr{L}$ 为实李代数，且 $\mathscr{L}$ 之复化 $\mathscr{L}^c=\mathscr{J}$，则 $\mathscr{L}$ 称为 $\mathscr{J}$ 的实形式. 若复李代数 $\mathscr{J}$ 到自身上之一一映射 σ 满足：

$$\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y),\quad\forall\ x,y\in\mathscr{J};$$
$$\sigma(\lambda x)=\bar{\lambda}\sigma(x),\quad\forall\ \lambda\in\mathrm{C},x\in\mathscr{J};$$
$$\sigma([x,y])=[\sigma(x),\sigma(y)],\quad\forall\ x,y\in\mathscr{J};$$

则称 σ 为半对合. 这时 σ 在 $\mathscr{J}$ 中之不动点集 $\mathscr{L}=\{x\in\mathscr{J}\,|\,\sigma(x)=x\}$ 为 $\mathscr{J}$ 之实形式. 反之，若 $\mathscr{L}$ 为 $\mathscr{J}$ 之实形式，则由

$$\sigma(x+\sqrt{-1}y)=x-\sqrt{-1}y\ (\forall\ x,y\in\mathscr{L})$$

所定义的 $\mathscr{J}$ 到自身上之映射 σ 为 $\mathscr{J}$ 之半对合. 所以决定复李代数之实形式等价于决定复李代数之半对合.

半对合(semi-involution) 见“复李代数的实形式”.

实半单李代数的嘉当分解(Cartan decomposition of real semi-simple Lie algebra) 实半单李代数的一种子空间分解方式. 设 $\mathscr{L}$ 为实半单李代数，

即 $\mathscr{L}$ 的根基为零，则 $\mathscr{L}$ 的复化为复半单李代数 $\mathscr{J}$. $\mathscr{J}$ 中取定嘉当子代数 $\mathfrak{h}$，记 Δ 为 $\mathscr{J}$ 的根系，有

$$\mathscr{J} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta}\mathscr{J}_\alpha,$$

可取外尔基 $\{e_\alpha | \forall\ \alpha\in\Delta\}$ 使得 $\bar{e}_\alpha = e_{-\alpha}$，而

$$\mathscr{J}_0 = \sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\mathrm{R}} + \sum_{\alpha\in\Delta}\mathrm{R}(e_\alpha + e_{-\alpha}) + \sum_{\alpha\in\Delta}\mathrm{R}\sqrt{-1}(e_\alpha - e_{-\alpha})$$

为 $\mathscr{J}$ 的紧实形式，且在 $\mathscr{J}_0$ 中存在对合自同构 σ（即 $\sigma^2 = \mathrm{id}$），记

$$\mathscr{K} = \{x\in\mathscr{J}_0 | \sigma(x) = x\},$$
$$\mathscr{P} = \{x\in\mathscr{J}_0 | \sigma(x) = -x\},$$

从而 $\mathscr{J}_0 = \mathscr{K} + \mathscr{P}$，且 $\mathscr{L} = \mathscr{K} + \sqrt{-1}\mathscr{P}$ 称为 $\mathscr{L}$ 的嘉当分解，其中 $\mathscr{K}$ 为 $\mathscr{L}$ 之最大紧子代数. 嘉当分解是研究实半单李代数之重要工具.

博雷尔子代数（Borel subalgebra） 对研究李代数结构非常有用的一类子代数. 若 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的李代数，$\mathscr{L}$ 中极大可解子代数称为博雷尔子代数. 若 $\mathscr{L}$ 为复李代数，则它的任两博雷尔子代数 $\mathscr{L}_1$，$\mathscr{L}_2$ 互相共轭（即存在 $\mathscr{L}$ 的内自同构 σ 使得 $\sigma(\mathscr{L}_1) = \mathscr{L}_2$）. 在复李代数的情形下，可以构造如下的博雷尔子代数. 若 $\mathscr{R}$ 为复李代数 $\mathscr{L}$ 的根基，$\mathscr{L} = \mathscr{R} + \mathfrak{C}$ 为列维分解，

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta}J_\alpha$$

为复半单李代数 $\mathfrak{C}$ 关于嘉当子代数 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解，则

$$\mathscr{L}_+ = \mathscr{R} + \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta^+}J_\alpha$$

为 $\mathscr{L}$ 的一个博雷尔子代数. 李代数 $\mathscr{L}$ 中包含博雷尔子代数的子代数称为抛物子代数.

抛物子代数（parabolic subalgebra） 见"博雷尔子代数".

李代数的线性表示（linear representation of Lie algebra） 研究李代数表示的重要工具. 设 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的李代数，V 为域 F 上的线性空间. V 上所有线性变换构成的集合 $\mathscr{X}$，它也是 F 上线性空间. 若在 $\mathscr{X}$ 中引进换位运算 $[A,B] = AB - BA$，则 $\mathscr{X}$ 为域 F 上李代数. $\mathscr{L}$ 到 $\mathscr{X}$ 的同态 ρ 称为李代数 $\mathscr{L}$ 的线性表示，简称表示. 线性空间 V 称为表示空间. 当 V 为有限维线性空间时，称为有限维表示. 若 V 为无限维线性空间时，称为无限维表示. 当 V 为 Hilbert 空间，$\rho(\mathscr{L})$ 由酉算子构成，则称为酉表示. 线性表示有时也记为 (V,ρ). 设 (V,ρ) 和 (V_1,ρ_1) 都是李代数 $\mathscr{L}$ 的线性表示，若存在 V 到 V_1 上的线性同构 σ，使得 $\rho_1(a)\cdot\sigma = \sigma\cdot\rho(a)$，$\forall\ a\in\mathscr{L}$，则称 (V,ρ) 和 (V_1,ρ_1) 是等价的. 表示论的根本问题之一是表示的分类.

李代数的表示空间（representation space of Lie algebra） 见"李代数的线性表示".

李代数的有限维表示（finite dimensional representation of Lie algebra） 见"李代数的线性表示".

李代数的无限维表示（infinite dimensional representation of Lie algebra） 见"李代数的线性表示".

李代数的酉表示（unitary representation of Lie algebra） 见"李代数的线性表示".

李代数的等价表示（equivalent representation of Lie algebra） 见"李代数的线性表示".

李代数的矩阵表示（matrix representation of Lie algebra） 李代数线性表示的矩阵形式. 设 $\mathscr{L}$ 为域 F 上有限维李代数. 若域 F 上所有 n 阶方阵构成之李代数记为 $\mathscr{A}_0$，则 $\mathscr{L}$ 到 $\mathscr{A}_0$ 内之同态 ρ 称为李代数 $\mathscr{L}$ 的矩阵表示. 若 (V,ρ) 为 $\mathscr{L}$ 的线性表示，在 V 中取定基，则 $\mathscr{L}$ 中每个元 a 都对应一个矩阵 $\rho(a)$，从而诱导了矩阵表示. 反之，给定 $\mathscr{L}$ 的矩阵表示 $\tilde{\rho}$，设 $\tilde{\rho}(a)$，$\forall\ a\in\mathscr{L}$ 为 n 阶方阵. 若任取 n 维向量空间 V，在 V 中取定一组基，取出对应方阵 $\tilde{\rho}(a)$ 之线性变换 $\rho(a)$，$\forall\ a\in\mathscr{L}$，则得到 $\mathscr{L}$ 的线性表示 (V,ρ). 所以矩阵表示实际上是线性表示的矩阵表达形式.

李代数的子表示（subrepresentation of Lie algebra） 研究李代数表示的重要工具. 设 (V,ρ) 为李代数 $\mathscr{L}$ 的线性表示. 若 V 中子空间 V_1 满足 $\rho(a)V_1\subset V_1$（$\forall\ a\in\mathscr{L}$），则称 V_1 为不变子空间. 这时 $\rho(a)$ 限制在线性子空间 V_1 上仍为线性变换，改记为 $\rho_1(a)$，$\forall\ a\in\mathscr{L}$. (V_1,ρ_1) 仍为李代数 $\mathscr{L}$ 的线性表示，称为李代数 $\mathscr{L}$ 的表示 (V,ρ) 之子表示. 设 V_1 为李代数 $\mathscr{L}$ 的表示 (V,ρ) 之不变子空间，考虑商线性空间 V/V_1，于是可定义 $\bar{\rho}(a)(v+V_1) = \rho(a)v + V_1$，$\forall\ v\in V, a\in L$. 此定义和等价类 $v+V_1$ 中代表元素 v 之选取无关，且 $\bar{\rho}(a)$，$\forall\ a\in L$ 为商空间 V/V_1 上线性变换. 而且 $(V/V_1,\bar{\rho})$ 为李代数 $\mathscr{L}$ 的表示，称为表示 (V,ρ) 的商表示.

李代数的商表示（quotient representation of Lie algebra） 见"李代数的子表示".

李代数模（Lie algebraic module） 李代数表示的一种等价概念. 设 $\mathscr{L}$ 为域 F 上的李代数，V 为域 F 上的线性空间. 若运算 $\mathscr{L}\times V\to V((x,v)\to xv)$ 满足：

$$(ax+by)v = a(xv) + b(yv) \quad (\forall\ x,y\in\mathscr{L});$$
$$x(av+bw) = a(xv) + b(xw) \quad (v,w\in V);$$
$$[xy]v = xyv - yxv \quad (a,b\in F);$$

则称 V 为 $\mathscr{L}$ 模. 给出一个 $\mathscr{L}$ 模 V，$\rho(x)(v) = xv$，

$\forall\ x\in\mathscr{L},v\in V$，定义了一个表示$(V,\rho)$. 反之，若$(V,\rho)$是$\mathscr{L}$的表示，则$V$也可以看做一个$\mathscr{L}$模，且$(V,\rho)$的每个子表示都对应$\mathscr{L}$模$V$的一个子模.

李代数的不可约表示(irreducible representation of Lie algebra) 一类重要而基本的表示. 设(V,ρ)为李代数$\mathscr{L}$的表示，若表示空间V中真不变子空间等于零，则(V,ρ)称为李代数$\mathscr{L}$的不可约表示；否则，称为可约表示. 不可约表示所对应的模是不可约的. 关于有限维李代数表示的形式特征标的概念见"形式特征标"，有限维不可约表示的特征标公式见"外尔-卡茨特征标公式".

李代数的可约表示(reducible representation of Lie algebra) 见"李代数的不可约表示".

李代数的完全可约表示(completely reducible representation of Lie algebra) 一类重要的表示. 可归结为不可约表示. 设(V,ρ)为李代数$\mathscr{L}$的表示. 若对$\mathscr{L}$中任一不变子空间V_1，必存在另一不变子空间V_2，使得$V=V_1+V_2$为空间直和，则表示(V,ρ)称为完全可约的. 由定义，不可约表示完全可约. 若(V,ρ)为$\mathscr{L}$的有限维表示且完全可约，则V必可分解为不可约子模的直和$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$(分解的方法不一定惟一). 若李代数$\mathscr{L}$的任一有限维表示完全可约，则$\mathscr{L}$称为约化李代数. 约化李代数为中心及单理想之直和. 因此，紧李代数必为约化李代数.

约化李代数(reductive Lie algebra) 见"李代数的完全可约表示".

不变对称双线性函数(invariant symmetric bilinear function) 定义在李代数上的一种双线性函数. 设(V,ρ)为李代数$\mathscr{L}$之表示，若V上对称双线性函数(x,y)满足

$$(\rho(a)x,y)+(x,\rho(a)y)=0$$
$$(\forall\ a\in L,x,y\in V),$$

则称它为不变的. 李代数$\mathscr{L}$的基灵型为它的伴随表示$(\mathscr{L},\mathrm{ad})$的不变对称双线性函数.

权系(weight system) 研究表示空间结构的某些函数的集合. 若(ρ,V)为复半单李代数$\mathscr{L}$的有限维复表示，其中表示空间V为复线性空间，记$\mathfrak{h}$为$\mathscr{L}$的嘉当子代数，则V关于$\rho(\mathfrak{h})$分解为权空间之子空间直和

$$V=\sum_{\lambda\in\Phi}V_\lambda,$$

其中$V_\lambda=\{\alpha\in V\mid\rho(h)\alpha=\lambda(h)\alpha,\forall\ h\in\mathfrak{h}\}$. 这里$\lambda$为$\mathfrak{h}$上线性函数. 若$V_\lambda\neq0$，则称$\lambda$为$(\rho,V)$的权. 所有权构成集合$\Phi$，称为权系，它是$\mathfrak{h}_R^*$($\mathfrak{h}_R$的对偶空间)中子集合. 若在$\mathfrak{h}_R^*$中取定正方向，则$\mathscr{L}$有单根系$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$，$\Phi$中有最高权及最低权.

权(Weight) 见"权系".

表示的克罗内克乘积(Kronecker product of representations) 由两个或多个已知表示构成表示的一种方法. 设$\mathscr{L}$为李代数，(ρ,V)及(σ,W)为$\mathscr{L}$的两个表示，若任取$X\in\mathscr{L}$，任取张量积$V\otimes W$中向量$v\otimes w$，则可定义$V\otimes W$上线性变换

$$(\rho\otimes\sigma)(X)\ v\otimes w=(\rho(X)v)\otimes w+v\otimes(\sigma(X)w).$$

于是$X\to(\rho\otimes\sigma)(X)$定义了$\mathscr{L}$之表示，记为$\rho\otimes\sigma$，表示空间为$V\otimes W$，$\mathscr{L}$之表示$(\rho\otimes\sigma,V\otimes W)$称为表示$(\rho,V)$和$(\sigma,W)$之克罗内克乘积.

整权(integral weight) 一类特殊的权，它在单根上取值相关于一个整数. 设$\mathscr{L}$为复半单李代数，$\pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$为$\mathscr{L}$的单根系. 若$\lambda\in\mathfrak{h}_R^*$有

$$\frac{2(\lambda,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\in\mathbf{Z}\quad(1\leqslant i\leqslant l),$$

则λ称为整权；若$\lambda\in\mathfrak{h}_R^*$为整权，且

$$\frac{2(\lambda,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\geqslant0\quad(1\leqslant i\leqslant l),$$

则λ称为支配整权. 复半单李代数的有限维不可约表示的权系Φ由整权构成，最高权为支配整权. $\mathscr{L}$的不可约表示(ρ_k,V_k)称为第k个基本表示，若它的最高权为λ_k，有

$$\frac{2(\lambda_k,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=\delta_{i,k}\quad(1\leqslant i\leqslant l),$$

其中$k=1,2,\cdots,l$，则共有l个基本表示，且$\mathscr{L}$的任一有限维不可约表示必为某个克罗内克乘积

$$\rho_{i_1}\otimes\rho_{i_2}\otimes\cdots\otimes\rho_{i_s}\ (1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_s\leqslant l)$$

的某个不可约子表示.

通用包络代数(universal enveloping algebra) 由李代数作出的一种结合代数. 设$\mathscr{L}$为域F上的李代数. 作为线性空间，$\mathscr{L}$做m次张量积

$$\mathscr{L}^m=\overbrace{\mathscr{L}\otimes\cdots\otimes\mathscr{L}}^{m}\ (m=1,2,\cdots).$$

记$\mathscr{L}^0=F$. 若在结合代数

$$u(\mathscr{L})=\sum_{m=0}^{\infty}\mathscr{L}^m$$

中考虑由$[x,y]-(x\otimes y-y\otimes x)$ $(\forall\ x,y\in\mathscr{L})$生成之双边理想$J$，则结合代数$u(\mathscr{L})/J$称为$\mathscr{L}$的通用包络代数. 这时$\mathscr{L}$通过映射$i:x\to x+J,\forall\ x\in\mathscr{L}$嵌入$u(\mathscr{L})/J$.

模李代数(modular Lie algebra) 亦称素特征李代数. 又称特征p李代数. 李代数的一个分支. 特征数$p>0$的域上的李代数称为模李代数. 它的结构理论和表示理论与特征数为0的情形有很大的不同. 例如：李定理不再成立，半单李代数不一定可分解为单李代数的直和. 设$\mathscr{L}$是模李代数，若它还具有一个称为p运算的一元运算$x\to x^{[p]}$满足

$$(\alpha x)^{[p]}=\alpha^p x^{[p]},\quad \mathrm{ad}x^{[p]}=(\mathrm{ad}x)^p$$

以及一个关于$(x+y)^{[p]}$的展开式的恒等式，则$\mathscr{L}$

称为局限李代数.例如,代数群的李代数是局限李代数.布洛克(Block,R.)和威尔森(Wilson,R. L.)于1988年证明:当$p>7$时单局限李代数只有典型的和嘉当型的两类.斯特雷德(Strade,H.)和威尔森于1990年又证明:当$p>7$时单李代数只有典型的和广义嘉当型的两类.

素特征李代数(prime characteristic Lie algebra) 即“模李代数”.

特征p李代数(characteristic p-Lie algebra) 即“模李代数”.

局限李代数(restricted Lie algebra) 见“模李代数”.

撰 稿 许以超 邱 森 沈光宇
审 阅 王仰贤 张知学

拓 扑 群

拓扑群(topological group) 具有拓扑结构的群.设G既是群,又是拓扑空间,而且群的乘法及求逆运算都是连续映射,则称G为拓扑群.例如,实数集R和复数集C,以及由它们作出的向量空间R^n,C^n对于通常的加法和距离拓扑都是拓扑群.设G_1,G_2都是拓扑群,φ是G_1到G_2的映射,若它既是群同态又是连续映射,则称φ为连续同态,简称同态.全体拓扑群以及拓扑群间的同态,构成拓扑群范畴.拓扑群的概念来源于连续变换群.当同时考虑这种群中群的性质及取极限的运算时,就产生了拓扑群.李(Lie,M. S.)在讨论微分方程解的分类问题时,发现了一类连续群,李对其进行了系统的研究,得到了日后以他名字命名的李群.李是拓扑群论的先驱者.

连续同态(continuous homomorphism) 见“拓扑群”.

拓扑子群(topological subgroup) 类似于群论中的子群.设G为拓扑群,H是G作为抽象群的子群,H又可视为拓扑空间G的子空间,从而可在H中引入诱导拓扑.于是,H相对于这种拓扑构成拓扑群,称为拓扑群G的子群.

拓扑商群(topological quotient group) 类似于群论中的商群.若H是拓扑群G的正规子群,则G/H是群,又是拓扑空间G相对于H的商空间,从而有诱导拓扑.G/H对于此拓扑是一个拓扑群,称为拓扑群G相对于H的商群.

拓扑群的积(product of topological groups) 拓扑群中的乘积概念.若$\{G_i\}_{i\in I}$是一组拓扑群,则作为群有直积$G=\prod\limits_{i\in I}G_i$.在$G$内再用下述的基本邻域组引入拓扑:$\{A=\prod\limits_{i\in I}A_i\,|\,A_i$是$G_i$的开集,且除了有限个$i$以外,都有$A_i=G_i,\forall\, i\in I\}$.对于上述拓扑,$G$是一个拓扑群,称$G$为拓扑群$\{G_i\}_{i\in I}$的积.

拓扑同构(topological isomorphism) 拓扑群之间的同构概念.设G_1,G_2都是拓扑群,若$\varphi: G_1\to G_2$是群同构,而且φ和φ^{-1}都是连续函数,则称φ是拓扑同构,称两个群G_1和G_2是彼此拓扑同构的.

齐性空间(homogeneous space) 一种拓扑空间.设拓扑空间X,若对任意$a,b\in X$,都存在X的同胚将a映到b,则称X是齐性空间.

单位元开拓扑基(topological open basis of unit) 一种特殊的拓扑基.由于拓扑群是齐性空间,所以只须定出单位元的基本开邻域组,即可定出整个群的基本开邻域组.单位元的基本开邻域组称为单位元的开拓扑基,简称G的开基.G的一组非空开子集$\mathscr{F}$是G的开基当且仅当下列条件成立:

1. 对于$U,V\in\mathscr{F}$,必存在$W\in\mathscr{F}$,使得
$$W\subseteq U\cap V.$$
2. 若$a\in U,U\in\mathscr{F}$,则必存在$V\in\mathscr{F}$,使得
$$Va\subseteq U.$$
3. 若$U\in\mathscr{F}$,则必存在$V\in\mathscr{F}$,使得$V^{-1}V\subseteq V$.
4. 若$U\in\mathscr{F},x\in G$,则必存在$V\in\mathscr{F}$,使得
$$x^{-1}Vx\subseteq U.$$

特别地,当$\mathscr{F}$由G的开子群组成时,$\mathscr{F}$是G的开基当且仅当1和4两条成立就够了.

开基(open basis) 单位元的开拓扑基的简称.

紧群(compact group) 拓扑群的特殊类.即紧致拓扑群.若拓扑群G作为拓扑空间是紧空间,则称G为紧群.

局部紧群(locally compact group) 拓扑群的特殊类.若拓扑群G作为拓扑空间是局部紧空间,则称G为局部紧群.

豪斯多夫群(Hausdorff group) 拓扑群的特殊类.若拓扑群G作为拓扑空间是豪斯多夫空间,则称G为豪斯多夫群.

哈尔测度(Haar measure) 亦称哈尔积分.定义在拓扑群上的一种积分.从$C_c^+(G)$到C上的正线性函数μ满足$\mu(f)=\mu(gf),\forall\, g\in G,f\in C_c^+(G)$,其中$C_c^+(G)$指$G$上的具有紧支集的正值连续函数全体.人们约定,称复变量取正值,是指:若$z\in\mathsf{R}$,则$z>0$.gf的定义为$(gf)(x)=f(g^{-1}x)$.关于拓扑群的哈尔测度的基本定理是:一个局部紧、豪斯多夫拓扑群上一定存在一个非零的哈尔测度,而且除了差一个正实数因子外,该测度是惟一的,并常用积分符号表达

$$\mu(f)=\int_G f(x)\mathrm{d}x.$$

对任一G上的函数f,若$\mu(f)<\infty$,则称f在G上可积.

哈尔积分(Haar integral)　即"哈尔测度".

对偶群(dual group)　一种拓扑群. 设 G 是一局部紧交换群. 记 $S=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|=1\}$. 设 $\chi: G\to S$ 是拓扑群的同态,称 χ 为 G 的特征标,$\hat{G}$ 是 G 的全部特征标做成的群,它在紧开拓扑下成为局部紧交换群,称为 G 的对偶群.

对偶定理(duality theorem)　亦称庞特里亚金定理. 局部紧交换群与其对偶群间的同构定理. G 是局部紧交换群,$\hat{G}$ 是 G 的对偶群,$\hat{\hat{G}}$是 $\hat{G}$ 的对偶群. 对偶定理断言:G 与 $\hat{\hat{G}}$是拓扑同构的. 同构 δ 如下定义:对 $x\in G$,$\delta(x):\hat{G}\to S$,$\chi\to\chi(x)$.

庞特里亚金定理(Pontryagin theorem)　即"对偶定理".

紧开拓扑(compact-open topology)　一种拓扑结构. 设 $\hat{G}$ 是 G 的对偶群,在 $\hat{G}$ 中取开基如下:$\{U(K,\varepsilon)\mid K$ 为 G 的紧子集,$\varepsilon>0\}$,其中$U(K,\varepsilon)=\{\chi\in\hat{G}\mid |\chi(x)-1|<\varepsilon,\forall\ x\in K\}$,这样所成的拓扑称为紧开拓扑.

普兰切热尔定理(Plancherel's theorem)　局部紧交换群与对偶群的积分定理. 该定理断言:若 G 是局部紧交换群,$\hat{G}$ 是 G 的对偶群,则可以在 G,$\hat{G}$ 中各选取适当的哈尔测度,使得对于 $f\in C_c^+(G)$,有

$$\int_G \left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x = \int_{\hat{G}} \left|\hat{f}(\hat{x})\right|^2 \mathrm{d}\hat{x},$$

其中 $\hat{f}$ 为 f 的傅里叶变换:

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int_G f(x)\hat{x}(x)\mathrm{d}x.$$

拓扑群的表示(representation of topological group)　平行于群的表示. E 为局部凸线性拓扑空间,以 $\mathscr{L}(E)$记 E 到 E 的连续线性算子全体. G 是局部紧、豪斯多夫群. G 在 E 上的表示是一个映射 $\pi: G\to\mathscr{L}(E)$,它满足:

1. $\pi(xy)=\pi(x)\pi(y)$.

2. $\pi(e)$是 E 的恒等算子(e 是 G 的单位元).

3. $G\times E\to E$:$(x,v)\to\pi(x)v$ 是连续映射.

记这个表示为(π,E). 当 E 是有限维空间,称 $\dim V$ 为表示的维数. 当 G 是紧群时,几乎所有关于普通有限群表示论中的结果都可推广过来.

拓扑群表示的维数(dimension of a representation of topological group)　见"拓扑群的表示".

拓扑群的酉表示(unitary representation of topological group)　拓扑群的一类重要表示. 局部紧、豪斯多夫群 G 的酉表示是 G 有一个希尔伯特空间 H 上的表示 π,而且满足:对任意 $x\in G$,$\pi(x)$是 H 的酉算子. 当 G 为紧群时,对 G 的任一有限维表示(π,V)都可以在 V 中引入新内积

$$\langle u,v\rangle = \int_G (\pi(x)u,\pi(x)v)\mathrm{d}x$$

使 π 成为酉表示,其中$(*,*)$可取 V 中任一个埃尔米特内积. 因此,紧群的表示可以归结为酉表示.

循环表示(cyclic representation)　一类简单的酉表示. 设(π,H)是局部紧群 G 的一个酉表示. 若存在 $v\in H$,使得$\{\pi(x)v\mid x\in G\}$生成的子空间在 H 中是稠密的,则称 π 为循环表示,v 称为 π 的循环向量. 于是,任一酉表示是循环表示的直和.

循环向量(cyclic vector)　见"循环表示".

表示的矩阵系数(matrix coefficient of representation)　紧拓扑群有限维酉表示的一种表达形式. 设(π,V)是紧群 G 的有限维的酉表示,对任意 $u,v\in V$,称函数 $x\to(\pi(x)u,v)$为 π 的矩阵系数. 矩阵系数是 G 上平方可积函数. 若取定 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 为 V 中标准正交基,$\pi_{ij}(x)=(\pi(x)u_i,u_j)$为 $n\times n$ 矩阵,则$(\pi_{ij}(x))$是表示 π 的矩阵形式.

表示的特征标(character of representation)　刻画拓扑群表示的一种函数. 若(π,V)是紧群 G 的有限维酉表示,$u_1,u_2,\cdots,u_n$ 是 V 的标准正交基,则称

$$\chi_\pi(x) = \mathrm{tr}(\pi(x)) = \sum_{i=1}^{d_\pi}(\pi(x)u_i,u_i)$$

为表示 π 的特征标,其中 $d_\pi=\dim V$.

舒尔正交性定理(Schur's theorem of orthogonality)　描述紧拓扑群两个不等价有限维不可约酉表示相互关系的定律. 紧群的酉表示理论中的一个重要定理,主要内容有两点:

1. 若(π,V)和(π',V')是紧群 G 的两个互不等价的有限维不可约酉表示,则对 $u,v\in V$,$u',v'\in V'$,有

$$\int_G (\pi(x)u,v)(\overline{\pi'(x)u',v'})\mathrm{d}x = 0.$$

2. 若(π,V)是紧群 G 的有限维不可约酉表示,则对 $u_1,v_1,u_2,v_2\in V$,有

$$\int_G (\pi(x)u_1,v_1)(\overline{\pi(x)u_2,v_2})\mathrm{d}x = (u_1,u_2)(v_1,v_2)/\dim V.$$

彼得-外尔定理(Peter-Weyl's theorem)　紧群表示论中的重要定理. 它的主要内容是:

1. 若以 $L^2(G)$表示 G 上平方可积函数组成的空间,则$L^2(G)$为希尔伯特空间. G 的所有有限维不可约酉表示的矩阵系数生成 $L^2(G)$的稠密子空间.

2. G 的互不等价的酉表示互相正交,标准正交基$\{(d_\pi)^{\frac{1}{2}}\pi_{ij}(x)\}$(参见"表示的矩阵系数")是 $L^2(G)$的标准正交基,d_π 为表示 π 的维数.

3. 若 $f\in L^2(G)$,则 f 有傅里叶展开

$$f = \sum_{\pi\in\Gamma} d_\pi\chi_\pi * f,$$

其中 Γ 是 G 上互不等价的有限维不可约酉表示的

代表系，χ_π 为 π 的特征标，* 表卷积，它定义为

$$(f*g)(x)=\int_G f(y)g(y^{-1}x)\mathrm{d}y\quad(\forall\ x\in G).$$

又，普兰切热尔公式成立

$$\int_G|f(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{\pi\in\Gamma}d_\pi\sum_{i,j}\int_G|f(x)\overline{\pi_{ij}(x)}|^2\mathrm{d}x.$$

撰　稿　冯绪宁

审　阅　张知学　邱　森

李　群

李群(Lie group)　具有拓扑结构和微分结构的群. 若 G 为实(或复)拓扑流形，且关于此拓扑为拓扑群，则 G 称为实(或复)李群. 这时流形之实(或复)维数称为此实(或复)李群的维数. 希尔伯特第五问题是问：若 G 为按上述条件定义之实或复李群，则 G 的流形结构是否必为实或复解析流形，且 $G\times G$ 到 G 之映射 $f:(x,y)\to xy^{-1}$ 为实或复解析映射？这个问题已得到肯定的回答. 所以今后凡群皆指：

1. 流形结构解析.

2. 映射 $(x,y)\to xy^{-1}$ 解析.

于是，n 维复李群为 $2n$ 维实李群，反之不一定.

李群维数(dimension of Lie group)　见“李群”.

李群李代数(Lie algebra of Lie group)　由李群产生的相应的李代数. 若 G 为李群(实或复)，则任取 $g\in G$，$L_g:x\to gx$，$\forall\ x\in G$ 为 G 之双解析同胚，称为 G 的左平移. 任取 $g\in G$，$R_g:x\to xg$，$\forall\ x\in G$ 为 G 之双解析同胚，称为 G 的右平移. 若 G 上向量场 X 满足 $\mathrm{d}L_g(X)=X(\mathrm{d}R_g(X)=X)$，$\forall\ g\in G$($\mathrm{d}L_g$ 和 $\mathrm{d}R_g$ 分别是 L_g 和 R_g 的微分)，则称 X 为左(右)不变的. G 上所有左(右)不变向量场构成 $\dim G$ 维李代数. G 上所有左不变向量场构成的李代数称为李群 G 的李代数.

左平移(left translation)　见“李群李代数”.

右平移(right translation)　见“李群李代数”.

左(右)不变向量场(left invariant vector field)　见“李群李代数”.

李的基本定理(Lie's fundamental theorems)　李群论中的经典定理. 设 G 为连通李群，e 为 G 的单位邻域，(v,φ) 为 e 的一个标架，使得 $\varphi(e)=0$. 设 ξ，η，$\zeta=\xi\eta\in U$，用坐标表达有乘法函数 $z=f(x,y)$，记

$$l_i^j(x)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y_i}\Big|_{y=0}\quad(1\leqslant i,j\leqslant n),$$

$$L(x)=(l_i^j(x)).$$

于是，存在 $\varepsilon>0$，使得三个基本定理成立：

1. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=L(f(x,y))L(y)^{-1}$

$$(\|x\|,\|y\|<\varepsilon).$$

2. $$\sum_k\left(l_i^k(x)\frac{\partial l_j^q(x)}{\partial x_k}-l_j^k(x)\frac{\partial l_i^q(x)}{\partial x_k}\right)=\sum C_{ij}^k l_k^q(x)$$

$$(i,j,q=1,2,\cdots,n,\ \|x\|<\varepsilon).$$

3. c_{ij}^k 为常数，有

$$c_{ij}^k+c_{ji}^k=0(i,j,k,q=1,2,\cdots,n),$$

$$\sum_l(c_{ij}^l c_{lk}^q+c_{jk}^l c_{li}^q+c_{ki}^l c_{lj}^q)=0$$

$$(i,j,k=1,2,\cdots,n).$$

反之，若任给 n^3 个常数 c_{ij}^k 适合定理 3，则存在 $\varepsilon>0$，当 $\|x\|<\varepsilon$ 时，定理 2 有适合初值 $l_i^j(0)=\delta_{ij}$ 之解析解，此 δ_{ij} 为克罗内克符号，由 $l_i^j(x)$ 构造之 $L(x)$ 在 $\|x\|<\varepsilon$ 非异，且定理 1 有适合的初值 $f(x,0)=x$ 的解析解. 上述结论的实质含义为：局部地，李群的乘法函数决定了李群的李代数的构造常数；反之，李群的李代数决定了李群在单位邻域中的乘法函数.

局部李群(local Lie groups)　局部具有李群结构的解析流形. 给定实欧几里得空间 R^n 中立方体

$$V=\{x\in\mathrm{R}^n\,|\,|x_1|<\varepsilon,\cdots,|x_n|<\varepsilon\},$$

设存在 $V\times V$ 上解析函数 $f(x,y)$ 使得当 $x,y\in V$ 时，有 $z=f(x,y)\in V$. 定义乘法 $z=xy$，若称 V 为局部李群，则乘法应满足：

1. 当 $x,y,z,xy,yz,(xy)z,x(yz)\in V$ 时有

$$(xy)z=x(yz).$$

2. V 中原点 O 记为 e，它有

$$ex=xe=x\quad(\forall\ x\in V).$$

3. V 中存在原点邻域 V_0，使得任取 $v\in V_0$，存在 $w\in V$，有 $wv=vw=e$，这时记 w 为 v^{-1}.

4. 若 $a,b,ab^{-1}\in V$，存在 a,b 之邻域 V_a,V_b，使得 $V_aV_b^{-1}\subset V$，且 $V\times V\to V$ 之映射 $(a,b)\to ab^{-1}$ 解析.

连通李群的单位坐标邻域 必为局部李群，且它由此李群之李代数完全决定，换言之，李群的李代数刻画了李群的局部性质.

李子群(Lie subgroup)　与抽象群的子群相平行的概念. 若 G 为李群，H 为 G 之普通子群，且 H 为 G 之子流形，则 H 称为李群 G 的李子群. 若 H 作为 G 之普通子群为正规子群，则 H 称为正规李子群. 李群 G 之子群 H 为闭子群当且仅当 H 为 G 之正则子流形，即 H 之拓扑为 G 之诱导拓扑. 若 G 之普通子群 H 为 G 之闭子集，则 H 为闭李子群. 一维李子群称为单参数李子群.

正规李子群(normal Lie subgroup)　见“李子群”.

闭子群(closed subgroup)　见“李子群”.

单参数子群(1-parameter subgroup)　见“李子群”.

指数映射(exponential mapping)　由李群的李代数到李群的一种解析映射. 若 G 为李群, e 为单位元素, $T_e(G)$ 为 G 中点 e 的切空间, 任取 $X_e \in T_e(G)$, 则惟一存在左不变向量场 X, 使得 $X_g = \mathrm{d}L_g(X_e)$, $\forall\, g \in G$. 任给左不变向量场 X, 构作算子

$$\exp(tX) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k t \in (-\infty, \infty).$$

任意取定单位坐标邻域 U, 点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 记

$$\sigma_j(t) = \exp(tX) x_j |_{x=0},$$

当 $|t| < \varepsilon$, $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ 为 U 中点. 于是, 在 U 中有一条单参数解析曲线

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), \cdots, \sigma_n(t)), \quad |t| < \varepsilon,$$

记 $\exp(tX) = \sigma(t)$, $|t| < \varepsilon$. 它可开拓到 $t \in (-\infty, \infty)$, 使得

$$\begin{aligned}\exp(tX)\exp(sX) &= \exp(sX)\exp(tX) \\ &= \exp(t+s)X,\end{aligned}$$

且 $\exp(tX)$, $\forall\, t \in (-\infty, \infty)$ 为 G 之一维连通李子群. 反之, 任意一维连通李子群惟一决定左不变向量场 X, 使得此李子群为 $\exp(tX)$. 于是, 有映射 $\exp$: $\mathscr{g} \to G$, 称为指数映射, 这里 $\mathscr{g}$ 为李群 G 的李代数. 指数映射是建立李群和它的李代数间的关系的重要工具, 在李群理论中占有重要的地位.

李子群的李子代数(Lie subalgebra of Lie subgroup)　由李子群产生的相应的李子代数. 若 G 为李群, $\mathscr{g}$ 为 G 的李代数, 则 G 之连通李子群 H 和 $\mathscr{g}$ 之李子代数 $\mathfrak{h}$ 间按如下方式一一对应: H 由 $\exp \mathfrak{h}$ 生成. 这时 H 之李代数 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{h}$ 间有一个自然的同构. H 为正规李子群当且仅当它对应的李子代数 $\mathfrak{h}$ 为理想.

李群的商群(quotient group of Lie group)　由李群的闭正规子群引出的一种新的李群. 设 G 为李群, H 为 G 的闭子群. 在商集空间 G/H 中可自然地引进流形结构, 使得自然映射 $\pi: G \to G/H$ 为解析映射, G/H 称为群 G 模 H 的齐性空间. 当 H 为紧子群时, G/H 为齐性黎曼流形. 反之, 若 M 为齐性黎曼流形, $\mathrm{Aut}(M)$ 为 M 上所有自同构组成的拓扑变换群, 则 $\mathrm{Aut}(M)$ 为实李群, 迷向子群 $\mathrm{iso}(M)$ 紧, 且 M 同构于 $\mathrm{Aut}(M)/\mathrm{iso}(M)$. 若 H 为闭正规子群, 则齐性空间 G/H 为李群, 称为 G 模闭正规子群的商群. 若记 G 之李代数为 $\mathscr{g}$, H 对应 $\mathscr{g}$ 之理想 $\mathfrak{h}$, 则商群 G/H 之李代数和 $\mathscr{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 之商代数 $\mathscr{g}/\mathfrak{h}$ 间有一个自然的同构.

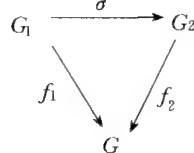
李群的同态(homomorphism of Lie groups)　类似于群、拓扑群中相应的概念. 李群到李群的同态映射. 若 ρ 为李群 G_1 到李群 G_2 内的普通群同态, 且为连续映射, 则称 ρ 为 G_1 到 G_2 内的李群的同态. 若李群 G_1 到 G_2 上之李群同态 ρ 为一一对应, 则称 ρ 为李群的同构, 这时 ρ^{-1} 为 G_2 到 G_1 上之李群的同构. 李群的同构为解析映射, 且同态像 $\rho(G_1)$ 为 G_2 中李子群, 同态核 $\ker(\rho)$ 为 G_1 中闭正规子群. 若 ρ 为 G_1 到 G_2 上的李群的同态, 记 π 为 G_1 到 $G_1/\ker(\rho)$ 上的自然映射, 则 π 仍为李群的到上的同态, 且存在李群 $G_1/\ker(\rho)$ 到李群 G_2 上之李群的同构 σ 使得右图为交换图, 即 $\rho = \sigma \cdot \pi$. 这就是李群的同态基本定理. 设 ρ 为李群 G_1 到 G_2 内的同态, 记 $\mathscr{g}_1$ 及 $\mathscr{g}_2$ 分别为 G_1 及 G_2 的李代数, 于是 ρ 的微分 $\mathrm{d}\rho$ 为 $\mathscr{g}_1$ 到 $\mathscr{g}_2$ 内之李代数的同态, 且有重要公式:

$$\rho(\exp X) = \exp \mathrm{d}\rho(X), \quad \forall\, X \in \mathscr{g}.$$

所以李群的同态诱导了李代数的同态. 反之, 若李群 G_i 的李代数为 $\mathscr{g}_i$, $i = 1, 2$, 且存在 $\mathscr{g}_1$ 到 $\mathscr{g}_2$ 上之同态 σ, 一般来说, 不一定存在李群 G_1 到 G_2 上之同态 ρ, 使得 $\mathrm{d}\rho = \sigma$, 只有当 G_1 为连通且单连通李群时, 才必定存在.

李群的同构(isomorphism of Lie groups)　见“李群的同态”.

通用覆盖群(universal covering group)　相关于给定李群的一种李群. 设 G 和 G_1 为连通李群. 若存在 G_1 到 G 上之同态映射 f, 使任取 $g \in G$, $f^{-1}(g)$ 为 G 中离散子集; 且任取 $g_1 \in f^{-1}(g)$, 存在 g_1 在 G_1 中之邻域 U_1 以及 g 在 G 中之邻域 U, 使得 $f: U_1 \to U$ 为到上之同胚, 则 G_1 称为 G 的覆盖群, f 称为 G_1 到 G 上之覆盖映射. 记 (G, f) 为 G 之覆盖群, 若 $\mathscr{g}_1$ 及 $\mathscr{g}$ 分别为 G_1 及 G 之李代数, 则 f 的微分 $\mathrm{d}f$ 为 $\mathscr{g}_1$ 到 $\mathscr{g}$ 上之李代数同构. 设 G 为连通李群, (G_1, f_1), (G_2, f_2) 为 G 的覆盖群. 若存在连通李群 G_1 到 G_2 上的同构 σ, 可得交换图(右图), 即 $f_2 \circ \sigma = f_1$, 则称 (G_1, f_1) 和 (G_2, f_2) 是等价的. 互相等价的覆盖群的性质完全相同. 若给定连通李群 G, 则在等价意义下惟一存在一个覆盖群 $(\hat{G}, \hat{f})$, 使得 $\hat{G}$ 为连通且单连通李群, 此时称 $(\hat{G}, \hat{f})$ 为 G 的通用覆盖群. 因此, 若任意给定李代数 $\mathscr{L}$, 则在群之同构意义下惟一存在一个连通且单连通李群 $\hat{G}$, 使得 $\hat{G}$ 之李代数和给定的李代数 $\mathscr{L}$ 同构, 且任一连通李群 G, 只要 G 的李代数和 $\mathscr{L}$ 同构, 则必存在 $\hat{G}$ 到 G 上之覆盖映射 $\hat{f}$, 使得 $(\hat{G}, \hat{f})$ 为 G 之通用覆盖群, 这时同态核 $\hat{f}^{-1}(e) = \hat{\Gamma}$ 为 $\hat{G}$ 之离散正规子群, 所以包含在 $\hat{G}$ 之中心 $\mathrm{C}(\hat{G})$ 中, 且连通李群 G 和商群 $\hat{G}/\hat{\Gamma}$ 同构, $\hat{\Gamma}$ 称为连通李群 G 之庞加莱(Poincaré, (J.-)H.)群, 也就是 G 的一阶同伦群.



李群的覆盖群(covering group of Lie group) 见"通用覆盖群".

覆盖映射(covering mapping) 见"通用覆盖群".

庞加莱群((Poincaré group) 见"通用覆盖群".

李群的分类(classification of Lie groups) 李群研究的重要问题.指李群在同构意义下的分类.若 ρ 为李群 G_1 到 G_2 上之同构,则 G_1 和 G_2 之李群结构完全相同,称 G_1 和 G_2 等价.李群的结构理论就是李群在同构下的分类理论.连通李群的分类,实际上变成李代数的分类(此即连通且单连通李群的分类)以及连通且单连通李群 G 的中心中的离散子群在 G 的自同构下的分类.在紧连通李群(实及复)及连通半单李群(实及复)具有有限中心的情形,分类问题已完全解决.

线性李群(linear Lie group) 一种重要的李群.由可逆线性变换构成的李群.设 F 为实数域或复数域,$\mathrm{gl}(n,F)$ 为域 F 上所有 n 阶方阵构成的集合,$\mathrm{gl}(n,F)=F^{n^2}$ 为欧几里得空间.$\mathrm{gl}(n,F)$ 中所有 n 阶非异方阵构成之子集合是 $\mathrm{gl}(n,F)$ 中开子集,且在方阵乘法下构成一个 n^2 维李群,记为 $\mathrm{GL}(n,F)$,称为一般线性群.$\mathrm{GL}(n,F)$ 中任一李子群称为矩阵李群.设 $G\subset \mathrm{GL}(n,F)$ 为矩阵李群,$\mathscr{G}$ 为 G 的李代数,则可取 $\mathscr{G}\subset \mathrm{gl}(n,F)$.于是,若任取 $X\in\mathscr{G}$,则

$$e^{tX}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}X^k\quad(-\infty<t<+\infty)$$

为 G 中单参数子群.且对任一单参数子群 $\sigma(t)$,都存在 $X\in\mathscr{G}$,使得 $e^{tX}=\sigma(t)$,$\forall\ t\in\mathbb{R}$.若 F 为实数域或复数域,则 $\mathrm{gl}(V)$ 中所有非异线性变换构成之集合 $\mathrm{GL}(V)$ 在线性变换之乘法下构成一个李群.将 $\mathrm{GL}(V)$ 之任一李子群称为线性李群.在 V 中取定基后,V 上线性变换惟一对应 n 阶方阵.于是,矩阵李群为线性李群的矩阵表示.

一般线性群(general linear group) 见"线性李群".

矩阵李群(matrix Lie group) 见"线性李群".

李群的线性表示(linear representation of Lie group) 李群的一类重要表示.设 G 为实李群,V 为 n 维实或复线性空间,$\mathrm{GL}_n(V)$ 为 V 上所有非异线性变换构成之李群.G 到 $\mathrm{GL}_n(V)$ 内之同态 ρ 称为李群 G 的线性表示,V 称为表示空间.当 V 为实线性空间时,表示 (V,ρ) 称为李群 G 的实表示.当 V 为复线性空间时,表示 (V,ρ) 称为李群 G 的复表示.若 V 中子空间 V_1 满足 $\rho(g)V_1\subset V_1$,$\forall\ g\in G$,则称 V_1 为表示 (V,ρ) 的不变子空间.若 G 为连通李群,$\mathscr{G}$ 为 G 的李代数,对 G 的表示 (V,ρ),则 $(V,\mathrm{d}\rho)$ 为 $\mathscr{G}$ 的表示;反之,对 $\mathscr{G}$ 的表示 (V,τ),不一定存在 G 的表示 (V,ρ),使得 ρ 的微分 $\mathrm{d}\rho=\tau$.与李代数的表示论的基本概念相同,在李群表示论中,仍可定义不可约表示、完全可约表示、子表示和商表示等,同样可以定义李群 G 的矩阵表示.若 G 为实李群,(ρ,V) 为 G 的线性表示,其中 V 为希尔伯特空间,$\rho(G)$ 由 V 上酉算子构成,则表示 (ρ,V) 称为酉表示.当 G 为紧实李群时,任一有限维复表示为酉表示;当 G 为非紧实李群时,酉表示必为无限维表示.设 (ρ_1,V_1) 和 (ρ_2,V_2) 为李群 G 的两个表示,若存在 V_1 到 V_2 上的线性同构 σ,使得

$$\rho_2(g)\circ\sigma=\sigma\circ\rho_1(g)\quad(\forall\ g\in G),$$

则称这两个表示是等价的.李群的表示论主要内容之一就是研究李群的表示在等价意义下的分类.

李群的表示空间(representation space of Lie group) 见"李群的线性表示".

李群的实表示(real representation of Lie group) 见"李群的线性表示".

李群的复表示(complex representation of Lie group) 见"李群的线性表示".

表示的不变子空间(invariant subspace of representation) 见"李群的线性表示".

李群的酉表示(unitary representation of Lie group) 见"李群的线性表示".

李群的等价表示(equivalent representations of Lie group) 见"李群的线性表示".

李群的不可约表示(irreducible representation of Lie group) 见"李群的线性表示".

李群的完全可约表示(completely reducible representation of Lie group) 见"李群的线性表示".

李群的子表示(subrepresentation of Lie group) 见"李群的线性表示".

李群的矩阵表示(matrix representation of Lie group) 见"李群的线性表示".

李变换群(Lie transformation group) 一种特殊的李群.指流形上某些变换构成的李群.设 $\mathfrak{m}$ 为实(复)解析流形,$\mathfrak{m}$ 上所有解析自同胚构成的集合,若它有一个子集合 G 为实(复)李群,且使 $G\times\mathfrak{m}$ 到 $\mathfrak{m}$ 内之映射 $(g,x)\to g(x)$ $(\forall\ x\in\mathfrak{m},g\in\mathfrak{m})$ 为解析映射,则 G 称为 $\mathfrak{m}$ 上的李变换群.当 G 在 $\mathfrak{m}$ 上可递时,称 $\mathfrak{m}$ 为齐性空间.设 G 为 n 维流形 $\mathfrak{m}$ 上 r 维李变换群,对 G 之单位坐标邻域 V 及 $\mathfrak{m}$ 中一点 p 之坐标邻域 U,记 $g(x)$ 之坐标为 $y=F(g,x)$,$\forall\ x\in U,g\in V$.若

$$\xi_i^{\alpha}(x)=\frac{\partial F_{\alpha}(g,x)}{\partial g_i}\Big|_{g=e}\ (1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant\alpha\leqslant n),$$

则偏微分算子

$$X_i = \sum_{a=1}^{n} \xi_i^a(x) \frac{\partial}{\partial x_a} \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

线性无关.以它们为基之 r 维线性空间 $\mathscr{L}$ 在泊松括号下构成李代数,与 G 之李代数同构. $\mathscr{L}$ 中元称为李变换群 G 的"无穷小变换", $\mathscr{L}$ 称为无穷小变换群.若 $\mathfrak{m}$ 为黎曼流形, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{m})$ 为 $\mathfrak{m}$ 上所有等度量变换构成之集合,则在连续作用为乘法下构成普通的群,又在紧开拓扑下构成有限维实李群,是 $\mathfrak{m}$ 上李变换群.若 D 为 C^n 中有界域,则 D 上所有全纯自同构构成之集合 $\mathrm{Aut}(D)$ 也是 D 上李变换群.

无穷小变换(infinitesimal transformation)　见"李变换群".

李群的自同构群(automorphism group of Lie group)　平行于李代数的相应概念.设 G 为连通李群, G 上所有自同构组成的李群 $\mathrm{Aut}(G)$ 称为 G 的自同构群.任取 $a \in G$,则 $\mathrm{ad}(a): x \to axa^{-1}$ 为 G 的自同构,它们全体构成的集合 $\mathrm{ad}G$ 是 $\mathrm{Aut}(G)$ 的李子群,称为内自同构群.设 $\mathscr{L}$ 为 G 的李代数,若 $\mathscr{L}$ 上线性算子 D 满足:

$\mathrm{D}([x,y]) = [\mathrm{D}(x), y] + [x, \mathrm{D}(y)]$ $(\forall\ x, y \in L)$,

则称 D 为微分.所有微分构成李代数 $\mathscr{D}$,它是自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 的李代数,它有子代数 $\mathrm{ad}L = \{\mathrm{ad}X \mid \forall\ X \in \mathscr{L}\}$, $\mathrm{ad}L$ 惟一决定 $\mathrm{Aut}(G)$ 中子群 $\mathrm{ad}G$,所以 $\mathrm{ad}L$ 是 $\mathrm{ad}G$ 之李代数,且有公式

$$\exp\mathrm{ad}\ X = \mathrm{ad}\exp X, \quad \forall\ X \in L.$$

其中 $\mathrm{ad}(a)$ 为 $\mathrm{ad}\ (a)$ 之微分,即 $\mathrm{d}(\mathrm{ad}a) = \mathrm{ad}(a)$, $\forall\ a \in G$.

李群的内自同构群(inner automorphism group of Lie group)　见"李群的自同构群".

幂零李群(nilpotent Lie group)　与幂零李代数相应的李群.设 G 为李群, N, M 为 G 之子集合.记 (N,M) 为所有形如 $aba^{-1}b^{-1}, a \in N, b \in M$ 之元素生成的普通子群.若对李子群序列

$$G^1 = G,\ G^2 = (G,G),\ \cdots,\ G^k = (G, G^{k-1})$$

组成之李子群序列 $G = G^1 \supset G^2 \supset \cdots \supset G^k \supset \cdots$,存在自然数 N,使得 $G^N = \{e\}$,则称 G 为幂零李群.连通李群幂零当且仅当它的李代数幂零.

可解李群(solvable Lie group)　与可解李代数相应的李群.设 G 为李群,如果对李子群 $G^{(1)} = G$, $G^{(2)} = (G,G), \cdots, G^{(k)} = (G^{(k-1)}, G^{(k-1)}), \cdots$ 构成之序列 $G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \cdots \supset G^{(k)} \supset \cdots$,存在自然数 N,使得 $G^{(N)} = \{e\}$,则 G 称为可解李群.连通李群可解当且仅当它的李代数可解.幂零李群为可解李群,而可解李群不一定为幂零李群.

半单李群(semi-simple Lie group)　与半单李代数相应的李群.设 G 为连通李群,若它的李代数为半单李代数,则 G 称为半单李群.连通李群 G 必为最大可解正规子群 R 和一个半单子群 S 的半直乘积 $G = R \cdot S$,即 $R \cap S$ 为 G 的中心内的离散子群,且 R 及 S 为 G 的闭子群.但是,分解不惟一,于是连通李群的结构问题,化为可解李群及半单李群的结构问题.

单李群(simple Lie group)　与单李代数相应的李群.设 G 为连通李群,若它的李代数为单李代数,则 G 称为单李群.若 G 为单李群,且 G_1 为 G 之真正规李子群,则 G_1 为 G 之中心中离散子群.特别地,单李群之中心由有限或可数个元素构成.若 G 为半单李群,则 G 有单正规子群 $G_1, G_2, \cdots, G_s$,使得 G_i 为闭子群,且 $G = G_1 G_2 \cdots G_s$ 为半直乘积,即 $G_i \cap G_j \subset \mathrm{C}(G)$,且 G_i 中元素和 G_j 中元素可交换.于是,半单李群的结构问题化为单李群的结构问题.

紧李群(compact Lie group)　拓扑结构为紧的李群.设 G 为李群,作为流形它有拓扑结构,若这个拓扑为紧拓扑,则 G 称为紧李群.紧李群只有有限多个连通分支.紧李群的李代数为紧李代数,且连通李群紧当且仅当它的李代数为紧李代数.复紧李群必可交换,它就是复环面.实紧李群 G 为中心 $\mathrm{C}(G)$ 及半单正规李子群 $\mathfrak{S}$ 之半直乘积 $G = \mathrm{C}(G)\mathfrak{S}$,且 $\mathrm{C}(G) \cap \mathfrak{S}$ 为有限群.实半单李群 G 为紧半单李群当且仅当它的李代数为紧半单李代数,所以 G 为有限个紧单李群的半直乘积.

紧李群的极大环面(maximal tours of compact Lie group)　亦称嘉当子群.紧李群的一种重要子群.若 G 为紧连通李群,则 G 作为普通子群,它的极大交换子群 H 必为闭子群,从而为紧李子群,且它为环面(实李群情形为实环面 $T_{\mathbf{R}}^m$),其中 $T_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$;复李群情形,必有 $H = G$,它是复环面 $T_{\mathbf{C}}^m$,其中

$$T_{\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{C}}{z + \sqrt{-1}z},$$

称为紧李群 G 的极大环面.连通紧李群的任两极大环面互相共轭.连通紧李群 G 的李代数记为 $\mathfrak{g}$,则 G 的极大环面 H 之李代数 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的嘉当子代数.

嘉当子群(Cartan subgroup)　即"紧李群的极大环面".

不变测度(invariant measure)　李群上的积分元素.设 G 为连通李群, $L_g: x \to gx, \forall\ x \in G$,称为 G 中元 g 决定的左平移,一次外微分式 ω 称为左不变的,若 $L_g^*(\omega) = \omega, \forall\ g \in G$.所有一次左不变外微分式构成 $r = \dim G$ 维线性空间,它有一组基 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r$,称为毛瑞尔-嘉当形式.若 $\Omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_r$,它在 G 上恒正,称为 G 上积分元素,则它为左不变测度,且由此可以定义不变积分

$$\int_G f(g)\Omega(g),$$

其中 f 为具有紧支柱的连续函数.若 G 为紧连通李群,则 $\Omega(g)$ 必为右不变的,这时称为哈尔测度.

毛瑞尔-嘉当形式(Maurer-Cartan form)　见“不变测度”.

线性紧李群的不变内积(the invariant inner product of a linear compact Lie group)　线性空间上的一种双线性型,在线性李群作用下保持不变.设 G 为紧李群,且 $G\subset GL(V)$,其中 V 为有限维线性空间,若 V 上内积 (x,y) 满足

$$(g(x),g(y))=(x,y)\quad(\forall\ x,y\in V,g\in G),$$

则称它为 G 不变内积.由于 G 有测度 Ω,所以对 V 中任一内积 (x,y),

$$(x,y)=\int_G\langle g(x),g(y)\rangle\Omega(g)$$

为 G 不变内积.由于线性连通紧李群 G 有 G 不变内积,所以 G 的任一线性表示完全可约,且任一表示为酉表示.

紧李群表示的特征(character of the representation of compact Lie group)　刻画紧李群表示的一种函数.设 G 为连通紧李群,(V,ρ) 为 G 的表示,若 V 为 n 维线性空间,则 $\chi_\rho(g)=\mathrm{tr}\rho(g),\forall\ g\in G$ 为 G 上解析函数,称为表示 (ρ,V) 的特征.连通紧李群 G 的任两表示 (ρ,V),(ρ_1,V_1) 等价的必要充分条件为它们的特征相同,所以,特征为表示在等价意义下的全系不变量.

撰　稿　冯绪宁

审　阅　张知学　邱　森　赵开明

卡茨-穆迪代数

卡茨-穆迪代数(Kac-Moody algebra)　李代数的一个新分支.卡茨-穆迪代数是卡茨(Kac,V.)和穆迪(Moody,R.)分别于1967,1968年独立引入的,它是有限维复半单李代数的推广.进入20世纪80年代以来,数学家们对卡茨-穆迪代数及其表示进行了深入广泛的研究,很多有限维复半单李代数的结果(如结构理论中的根链、实根重数;外尔群中元素的长度等;表示理论中,费马模的特征标分式,不可约最高权模的特征标分式等)都推广到了卡茨-穆迪代数上.另外还得到了更丰富的结果.例如,结构理论中,关于非有限维卡茨-穆迪代数的根系的刻画,仿射李代数的实现;表示理论中,仿射李代数的可积表示的刻画及其实现,顶点算子等.并且发展了一些与之相关的理论.例如,卡茨-穆迪群,维拉索罗代数及其表示理论,李超代数,量子群等.此外还发现它对偏微分方程、组合数学、理论物理等学科具有重要的应用.

矩阵 A 的实现(realization of a matrix A)　由给定矩阵 A 作出的一个三元组.任意给定一个 $n\times n$ 复矩阵 $A=(a_{ij})$,它的秩设为 l;设 $\mathfrak{h}$ 是一个 $2n-l$ 维复空间,$\mathfrak{h}^*$ 为其对偶空间,若 $\pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\subset\mathfrak{h}^*$,$\pi^V=\{\alpha_1^V,\alpha_2^V,\cdots,\alpha_n^V\}\subset\mathfrak{h}$,并且它们满足:

1. π,π^V 均线性无关.
2. $\langle\alpha_j,\alpha_i^V\rangle=a_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$,

则三元组 $(\mathfrak{h},\pi,\pi^V)$ 称为矩阵 A 的一个实现.矩阵 A 的实现总是存在的,且在同构意义下是惟一的.

矩阵 A 关联的李代数 $\mathfrak{g}(A)$(Lie algebra $\mathfrak{g}(A)$ associated to matrix A)　由给定矩阵 A 经若干步骤所确定的一个李代数.设 A 是一个 $n\times n$ 复矩阵,$(\mathfrak{h},\pi,\pi^V)$ 是 A 的一个实现,$\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 是由 $e_i,f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $\mathfrak{h}$ 生成的李代数,其定义关系如下:

1. $[h,h']=0\quad(h,h'\in\mathfrak{h})$.
2. $[h,e_i]=\langle\alpha_i,h\rangle e_i$,
   $[h,f_i]=-\langle\alpha_i,h\rangle f_i\quad(i=1,2,\cdots,n;h\in\mathfrak{h})$.
3. $[e_i,f_j]=\delta_{ij}\alpha_i^V\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$.

$\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ 有惟一的一个与 $\mathfrak{h}$ 具有平凡交的最大理想 τ,商代数 $\tilde{\mathfrak{g}}(A)=\tilde{\mathfrak{g}}(A)/\tau$ 称为关联于 A 的李代数,此时 A 称为 $\mathfrak{g}(A)$ 的嘉当矩阵,$e_i,f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为 $\mathfrak{g}(A)$ 的谢瓦莱生成元.$\mathfrak{h}$ 称为 $\mathfrak{g}(A)$ 的嘉当子代数.π 称为 $\mathfrak{g}(A)$ 的根基,π^V 称为 $\mathfrak{g}(A)$ 的余根基;π 中元素称为单根,π^V 中元素称为单余根;

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{Z}\alpha_i$$

称为根格;记

$$Q_+=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{Z}_+\alpha_i.$$

对于

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i\in Q,\quad \mathrm{ht}\alpha=\sum_{i=1}^{n}k_i$$

称为 α 的高度.当 A 为 $n\times n$ 零矩阵时,若

$$C_1=\sum C(\alpha_i^V-\alpha_j^V),$$

则 C_1 包在 $\mathfrak{g}(0)$ 的中心中,李代数 $\mathfrak{g}(0)/C_1$ 为 n 阶海森伯(Heisenberg,W.K.)李代数,它有基 $e_i,f_i(i=1,2,\cdots,n)$,z 使 $[e_i,f_j]=\delta_{ij}z(i,j=1,2,\cdots,n)$,其他换位运算均为0.

$\mathfrak{g}(A)$ 的根基(root basis of $\mathfrak{g}(A)$)　见“矩阵 A 关联的李代数 $\mathfrak{g}(A)$”.

$\mathfrak{g}(A)$ 的余根基(coroot basis $\mathfrak{g}(A)$)　见“矩阵 A 关联的李代数 $\mathfrak{g}(A)$”.

$\mathfrak{g}(A)$ 的嘉当矩阵(Cartan matrix of $\mathfrak{g}(A)$)　见“矩阵 A 关联的李代数 $\mathfrak{g}(A)$”.

$\mathfrak{g}(A)$ 的嘉当子代数(Cartan subalgebra of $\mathfrak{g}(A)$)　见“矩阵 A 关联的李代数 $\mathfrak{g}(A)$”.

$\mathfrak{g}(A)$ 的谢瓦莱生成元(Chevalley generators of $\mathfrak{g}(A)$)　见“矩阵 A 关联的李代数 $\mathfrak{g}(A)$”.

卡茨-穆迪代数 $\mathfrak{g}(A)$(Kac-Moody algebra

$\mathfrak{g}(A)$) 整数矩阵 A 所关联的李代数. 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $n\times n$ 整数矩阵,它满足以下条件:

1. $a_{ii}=2$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

2. $a_{ij}\leqslant 0$ $(i\neq j)$.

3. $a_{ij}=0$, 当且仅当 $a_{ji}=0$.

此时 A 称为广义嘉当矩阵. 广义嘉当矩阵 A 关联的李代数 $\mathfrak{g}(A)$称为卡茨-穆迪代数.

广义嘉当矩阵(generalized Cartan matrix) 见"卡茨-穆迪代数 $\mathfrak{g}(A)$".

卡茨-穆迪代数的根(root of Kac-Moody algebra) 复半单李代数同一概念的推广. 设 $\mathfrak{g}(A)$是关联于矩阵 A 的李代数,对 $\alpha\in Q\backslash\{0\}$,称

$$g_\alpha=\{x\in g(A)\mid[h,x]=\alpha(h)x,h\in\mathfrak{h}\}$$

为根空间,$\mathrm{mult}\,\alpha=\dim g_\alpha$ 称为 α 的重数;若 $\mathrm{mult}\alpha\neq 0$,则称 α 为根,此时 α 或 $-\alpha$ 一定属于 Q_+,$\alpha\in Q_+$时称 α 为正根,反之称为负根.

卡茨-穆迪代数的根空间(root space of Kac-Moody algebra) 见"卡茨-穆迪代数的根".

卡茨-穆迪代数的根的重数(multiplicity of root of Kac-Moody algebra) 见"卡茨-穆迪代数的根".

卡茨-穆迪代数的正根(positive root of Kac-Moody algebra) 见"卡茨-穆迪代数的根".

卡茨-穆迪代数的负根(negative root of Kac-Moody algebra) 见"卡茨-穆迪代数的根".

卡茨-穆迪代数的根系(root system of Kac-Moody algebra) 根的集合. 设 $\mathfrak{g}(A)$是关联于矩阵 A 的李代数. 所有的根组成的集合 Δ 称为根系,其中正(或负)根全体的集合 Δ_+(或 Δ_-)称为正根系(或负根系). $\mathfrak{g}(A)$有根空间分解

$$\mathfrak{g}(A)=(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha)\oplus\mathfrak{h}\oplus(\bigoplus_{\alpha\in\Delta_-}\mathfrak{g}_\alpha)$$

及三角分解$\mathfrak{g}(A)=\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_-$,其中

$$\mathfrak{n}_+=\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha,\quad \mathfrak{n}_-=\bigoplus_{\alpha\in\Delta_-}\mathfrak{g}_\alpha,$$

$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}(A)$的嘉当子代数.

$\mathfrak{g}(A)$的S 型分次(gradation of type S of $\mathfrak{g}(A)$) $\mathfrak{g}(A)$的一种特殊的分次. 设 $\mathfrak{g}(A)$为关联于 $n\times n$ 复矩阵 A 的李代数,$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$为 n 元整数组,若 $\deg e_i=-\deg f_i=s_i(i=1,2,\cdots,n)$,$\deg\mathfrak{h}=0$,则 $\mathbf{Z}$ 一分次

$$\mathfrak{g}(A)=\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}}\mathfrak{g}_j(s),$$

称为 $\mathfrak{g}(A)$的 S 型分次,其中

$$\mathfrak{g}_j(s)=\bigoplus_{\substack{\alpha=\sum_i k_i\alpha_i\in Q\\ \sum k_is_i=j}}\mathfrak{g}_\alpha.$$

特别地,$\mathfrak{g}(A)$的 $\mathbf{1}=(1,1,\cdots,1)$型分次称为 $\mathfrak{g}(A)$的主分次.

$\mathfrak{g}(A)$的主分次(principal gradation of $\mathfrak{g}(A)$) 见"$\mathfrak{g}(A)$的 S 型分次".

$\mathfrak{g}(A)$的不变对称双线性型$(\cdot\mid\cdot)$(invariant symmetric bilinear form $(\cdot\mid\cdot)$ of $\mathfrak{g}(A)$) 类似于有限维复半单李代数基灵型. 设 $A=(a_{ij})$为 $n\times n$ 复矩阵,并且 A 为可对称化的,即存在可逆的对角矩阵 $D=\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$和一个对称矩阵 B 使 $A=DB$. 若 $\mathfrak{g}(A)$是关联于 A 的李代数,则存在一个 $\mathfrak{g}(A)$的 $\mathbf{C}$ 值非退化、对称双线性型$(\cdot\mid\cdot)$,它有以下性质:

1. $(\cdot\mid\cdot)$是不变的,即

$([x,y]\mid z)=(x\mid[y,z])$ $(x,y,z\in\mathfrak{g}(A))$.

2. $(\cdot\mid\cdot)_\mathfrak{h}$ 非退化且有$(\alpha_i^V\mid h)=\langle\alpha_i,h\rangle\varepsilon_i,h\in\mathfrak{h}$ $(i=1,2,\cdots,n)$;$(h'\mid h'')=0,h',h''\in\mathfrak{h}''$,其中 $\mathfrak{h}''$是

$$\mathfrak{h}'=\sum_i\mathbf{C}\alpha_i^V$$

在 $\mathfrak{h}$ 中某个固定补子空间.

3. $(\mathfrak{g}_\alpha\mid\mathfrak{g}_\beta)=0$ $(\alpha+\beta\neq0)$.

4. $(\cdot\mid\cdot)_{g_\alpha+g_{-\alpha}}$非退化.

$(\cdot\mid\cdot)$一般称为 $\mathfrak{g}(A)$的一个不变对称双线性型. $(\cdot\mid\cdot)$是研究可对称化矩阵关联的李代数的结构及其表示的重要工具. 另外,由$(\cdot\mid\cdot)|_\mathfrak{h}$ 的非退化性,可引入一个重要的同构映射 $v:\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}^*$:

$$\langle v(h),h'\rangle=(h\mid h'),\quad h,h'\in\mathfrak{h},$$

及 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间 $\mathfrak{h}^*$ 上双线性型$(\cdot\mid\cdot)$:

$$(\lambda\mid\mu)=(v^{-1}(\lambda)\mid v^{-1}(\mu)),\quad \lambda,\mu\in\mathfrak{h}^*.$$

卡茨-穆迪代数的标准型(standard form of Kac-Moody algebras) 一种特殊的不变对称双线性型. 设 A 是可对称化的广义嘉当矩阵(参见"$\mathfrak{g}(A)$的不变对称双线性型$(\cdot\mid\cdot)$"),$\mathfrak{g}(A)$是关联于 A 的李代数,$\mathfrak{g}(A)$一定存在满足以下条件的不变对称双线性型$(\cdot\mid\cdot)$:$(\alpha_i^V\mid\alpha_i^V)>0(i=1,2,\cdots,n)$. 此不变对称双线性型称为 $\mathfrak{g}(A)$的一个标准型.

广义卡西默算子(generalized Casimir operator) 复半单李代数卡西默算子在卡茨-穆迪代数中的推广. 设 V 是一个 $\mathfrak{g}(A)$模,若对任意的 $v\in V$,除有限个正根外均有 $\mathfrak{g}_\alpha(v)=0$,则称 V 为限制模. 设 A 是秩为 l 的 n 阶可对称化的复矩阵,$\mathfrak{g}(A)$是关联 A 的李代数. 取 $\rho\in\mathfrak{h}^*$ 满足$\langle\rho,\alpha_i^V\rangle=1/2a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$;再对每个正根 α,取定 $\mathfrak{g}_\alpha$ 的一个基$\{e_\alpha^{(i)}\}$$(i=1,2,\cdots,\mathrm{mult}\,\alpha)$,并设$\{e_{-\alpha}^{(i)}\}$是 $\mathfrak{g}_{-\alpha}$的对偶基;然后定义线性算子

$$\Omega_0=2\sum_{\alpha\in\Delta_+}\sum_i e_{-\alpha}^{(i)}e_\alpha^{(i)}.$$

再设 $u_1,u_2,\cdots,u_{2n-l}$和 $u^1,u^2,\cdots,u^{2n-l}$是 $\mathfrak{h}$ 关于$(\cdot\mid\cdot)$的对偶基,广义卡西默算子 Ω 就定义为

$$\Omega=2v^{-1}(\rho)+\sum_{i=1}^{2n-l}u^iu_i+\Omega_0.$$

广义卡西默算子是卡茨(Kac,V.)借鉴了物理学中

的思想引入的. 卡茨和彼得森(Peterson, D. H.)于1984年证明了Ω和$\mathfrak{g}(A)$在限制模V上的作用可交换. 广义卡西默算子对研究卡茨-穆迪代数的结构及其表示具有重要意义.

$\mathfrak{g}(A)$模的限制模(restricted module of $\mathfrak{g}(A)$-module)　见"广义卡西默算子".

卡茨-穆迪代数的定义关系(defining relations of Kac-Moody algebras)　利用一组关系式直接定义卡茨-穆迪代数的方法. 若$\mathfrak{g}(A)$是关联于可对称化广义嘉当矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的李代数,$(\mathfrak{h},\pi,\pi^V)$是A的一个实现,则$\mathfrak{g}(A)$是由生成元$e_i, f_i (i=1,2,\cdots,n)$和$\mathfrak{h}$及如下定义关系定义的:

$$[h,h']=0,\qquad [e_i,f_j]=\delta_{ij}\alpha_i^V,$$
$$[h,e_i]=\langle\alpha_i,h\rangle e_i,\ [h,f_i]=-\langle\alpha_i,h\rangle f_i,$$
$$(\mathrm{ad}e_i)^{1-a_{ij}}e_j=0,\quad (\mathrm{ad}f_i)^{1-a_{ij}}f_j=0\ (i\neq j),$$

其中$h,h'\in\mathfrak{h}; i,j=1,2,\cdots,n$. 可对称化条件下卡茨-穆迪代数的定义关系是加伯(Gabber, O.)和卡茨(Kac, V.)于1981年证明的,不可对称化条件下的定义关系,至今尚未解决.

$\mathfrak{g}(A)$的外尔群(Weyl group of $\mathfrak{g}(A)$)　复半单李代数同一概念的推广. 设$\mathfrak{g}(A)$是关联于n阶广义嘉当矩阵的李代数. 对每个$i=1,2,\cdots,n$,定义$\mathfrak{h}^*$($\mathfrak{h}$的对偶空间)的基础反射r_i:

$$r_i(\lambda)=\lambda-\langle\lambda,\alpha_i^V\rangle\alpha_i\quad(\lambda\in\mathfrak{h}^*).$$

由所有的r_i生成的$\mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$的子群称为$\mathfrak{g}(A)$的外尔群,记为$W$或$W(A)$. 它是考克斯特群,同有限情形一样可定义其每个元素的长度,记为

$$l(w)\quad(w\in W).$$

$\mathfrak{g}(A)$的紧对合(compact involution of $\mathfrak{g}(A)$)　$\mathfrak{g}(A)$的一个特殊的半线性自同构. 它是复半单李代数同一概念的推广. 若$\mathfrak{g}(A)$是关联于n阶实矩阵的李代数,$\mathfrak{g}(A)$的紧对合w_0由它在$\mathfrak{g}(A)$的谢瓦莱生成元上的作用决定:

$$w_0(e_j)=-f_j,\quad w_0(f_j)=-e_j\quad(j=1,2,\cdots,n),$$
$$w_0(h)=-h,\quad h\in\mathfrak{h}_{\mathbb{R}},\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$$

是实向量空间,维数同$\mathfrak{h}$的一样,$\mathfrak{h}=\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{h}$,当$A$是可对称化的实矩阵时,则$w_0$及$\mathfrak{g}(A)$上的不变双线性型$(\cdot|\cdot)$可定义$\mathfrak{g}(A)$的一个重要的埃尔米特型$(\cdot|\cdot)_0$,

$$(x|y)_0=(x|w_0(y))\quad(x,y\in\mathfrak{g}(A)).$$

埃尔米特型$(\cdot|\cdot)_0$在卡茨-穆迪代数的每个根空间$\mathfrak{g}$上的限制是正定的.

$\mathfrak{g}(A)$的紧形式(compact form of $\mathfrak{g}(A)$)　类似于有限维复半单代数的同一概念. 设$\mathfrak{g}(A)$是关联于实矩阵A的李代数,w_0是$\mathfrak{g}(A)$的紧对合,$\mathfrak{g}(A)$在w_0下的固定点集$K(A)$称为$\mathfrak{g}(A)$的紧形式.

广义嘉当矩阵的分类(classification of generalized Cartan matrices)　用以研究卡茨-穆迪代数的分类. 此分类可对更一般的实矩阵

$$A=(a_{ij})_{n\times n}$$

进行,其中A满足:

1. A不可分解,即不存在置换方阵P使PAP'是准对角形方阵.

2. $a_{ij}\leqslant 0\ (i\neq j)$.

3. $a_{ij}=0\Leftrightarrow a_{ji}=0$.

这时A可以分成三大类:

1. (有限型)$\det A\neq 0$,存在$u>0$使$Au>0$,$Av\geqslant 0$推出$v>0$或$v=0$.

2. (仿射型)$\mathrm{corank}\,A=1$,存在$u>0$使$Au=0$,$Av\geqslant 0$推出$Av=0$.

3. (不定型)存在$u>0$使$Au<0$;$Av\geqslant 0, v\geqslant 0$推出$v=0$.

当A是广义嘉当矩阵时,根据A的类型,$\mathfrak{g}(A)$分别称为有限型的、仿射型的、不定型的,其中有限型的即为有限复单李代数. 仿射型卡茨-穆迪代数(简称仿射李代数)是一类重要的李代数,人们对它的结构、外尔群、表示均进行了深入的研究,并发现了它大量的应用.

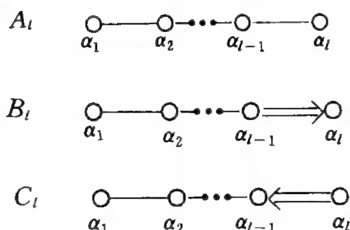
有限型卡茨-穆迪代数(Kac-Moody algebra of finite type)　见"广义嘉当矩阵的分类".

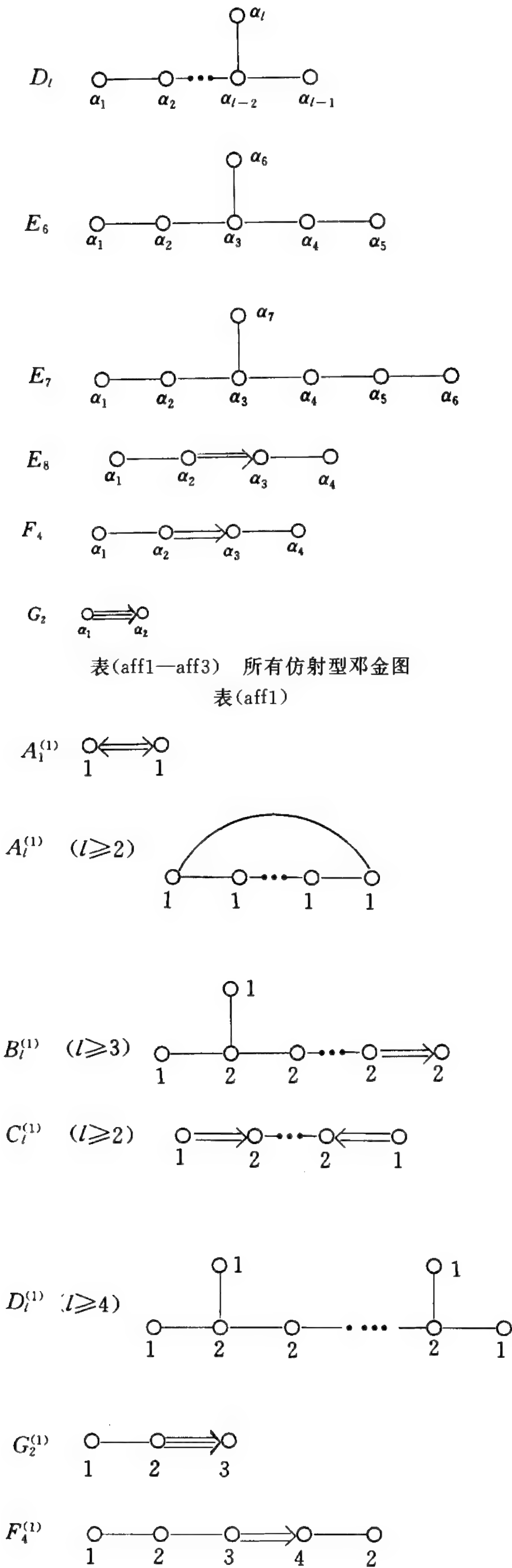
仿射型卡茨-穆迪代数(Kac-Moody algebra of affine type)　见"广义嘉当矩阵的分类".

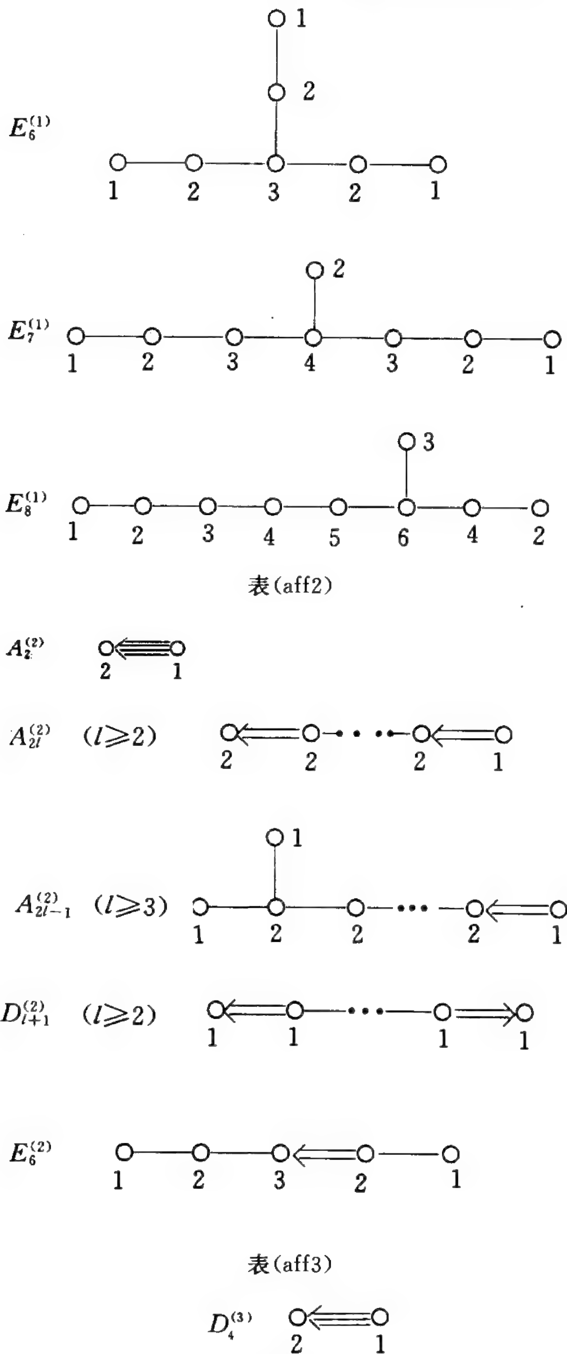
不定型卡茨-穆迪代数(Kac-Moody algebra of indefinite type)　见"广义嘉当矩阵的分类".

邓金图(Dynkin diagram)　复半单李代数同一概念在卡茨-穆迪代数中的推广. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为广义嘉当矩阵,如下引入A的一个图$S(A)$称为A的邓金图:$S(A)$有n个顶点,记为$1,2,\cdots,n$;对于顶点$i\neq j$,如下用边连结,当$a_{ij}a_{ji}\leqslant 4$且$|a_{ij}|\geqslant|a_{ji}|$时,将顶点$i$与$j$用$|a_{ij}|$条边连结,且当$|a_{ij}|>1$时在这$|a_{ij}|$条边上附上从$j$指向$i$的箭头,反之则不附;若$a_{ij}a_{ji}>4$,则用粗边连结顶点$i$与$j$,并附以整数对$|a_{ij}|,|a_{ji}|$. 按照$A$的不同类型,$S(A)$分为有限型的、仿射型的、不定型的. 所有有限型邓金图参见"表(fin)",所有仿射型邓金图参见"表(aff1—aff3)".

表(fin)　所有有限型邓金图







表(aff1)中，邓金图对应的卡茨-穆迪代数称为无扭仿射李代数. 表(aff2—aff3)中邓金图对应的卡茨-穆迪代数称为扭仿射李代数.

无扭仿射李代数(non-twisted affine Lie algebra) 见“邓金图”.

扭仿射李代数(twisted affine Lie algebra) 见“邓金图”.

双曲型卡茨-穆迪代数(Kac-Moody algebra of hyperbolic type) 一种特殊的不定型卡茨-穆迪代数. 若广义嘉当矩阵 A 是不定型的且 $S(A)$的任一个真连通子图是有限型或仿射型的，则称 A 为双曲

型的.双曲型广义嘉当矩阵对应的李代数 $\mathfrak{g}(A)$ 称为双曲型卡茨-穆迪代数.

双曲型广义嘉当矩阵(generalized Cartan matrix of hyperbolic type) 见“双曲型卡茨-穆迪代数”.

卡茨-穆迪代数的实根(real root of Kac-Moody algebra) 卡茨-穆迪代数的一类性质较简单的根.设 $\mathfrak{g}(A)$ 是卡茨-穆迪代数,$\alpha\in\Delta$,若存在 $w\in W$ 使 $w(\alpha)$ 是一个单根,则称 α 为实根.用 Δ^{re},Δ_+^{re} 分别表示实根系和正实根系,显然 $\Delta^{re}=W\pi$.

卡茨-穆迪代数的虚根(imaginary root of Kac-Moody algebra) 不是实根的根.设 $\mathfrak{g}(A)$ 是卡茨-穆迪代数,$\Delta\backslash\Delta^{re}$ 中的根称为虚根.用 Δ^{im},Δ_+^{im} 分别表示虚根系和正虚根系.若对

$$\alpha=\sum_i k_i\alpha_i\in Q,$$

定义 α 的支承(记为 $\operatorname{supp}\alpha$)为 $S(A)$ 的子图,它由所有 $k_i\neq 0$ 所对应的顶点及其间连线组成 $K=\{\alpha\in Q_+\backslash\{0\}\mid\operatorname{supp}\alpha$ 连通且 $\langle\alpha,\alpha_i^V\rangle\leqslant 0,i=1,2,\cdots,n\}$,则

$$\Delta_+^{im}=\bigcup_{w\in W}w(K).$$

设 A 是不可分解的广义嘉当矩阵,有:

1. 若 A 为有限型的,则 $\Delta^{im}=\varnothing$.

2. 若 A 为仿射型的,则 $\Delta_+^{im}=\{n\delta\mid n=1,2,\cdots\}$,这里 $\delta=\sum_i a_i\alpha_i$,$a_i$ 为表(aff1—aff3)中 $S(A)$ 的顶点上所标的数.

3. 若 A 是不定型的,则存在正虚根 $\alpha=\sum_i k_i\alpha_i$,使 $k_i>0$ 且 $\langle\alpha,\alpha_i^V\rangle<0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

正规化标准型(normalized standard form) 仿射李代数的一种特殊的标准型.设 $A=(a_{ij})_{i,j=0}^l$ 是仿射型广义嘉当矩阵,设 $a_0,a_1,\cdots,a_l$ 为 $S(A)$ 顶点对应的数值,其编号是最左边的顶点为 0;$S(A)\backslash\{0\}$ 是有限型邓金图,$S(A)\backslash\{0\}$ 的顶点如同表(fin)一样;但对 $E_6^{(2)}$,$D_4^{(3)}$ 则是从左到右编号为 $0,1,\cdots$ 用 $a_0^V,a_1^V,\cdots,a_l^V$ 表示 $S(A^t)$(还是仿射型邓金图)的顶点上对应的数值,于是,数值

$$h=\sum_{i=0}^l a_i\quad\text{和}\quad g=\sum_{i=0}^l a_i^V$$

分别称为考克斯特数和对偶考克斯特数.元素

$$c=\sum_{i=0}^l a_i^V\alpha_i^V$$

是 $\mathfrak{g}(A)$ 的中心元,称为典型中心元.满足 $\langle\alpha_i,d\rangle=0$ $(i=1,2,\cdots,l)$,$\langle\alpha_0,d\rangle=1$ 的元素 $d\in\mathfrak{h}$ 称为标量元素.在 $\mathfrak{g}(A)$ 上存在惟一的不变对称双线性型$(\cdot\mid\cdot)$满足:

$$(\alpha_i^V\mid\alpha_j^V)=a_ja_j^{V-1}a_{ij}\quad(i,j=0,1,\cdots,l);$$
$$(\alpha_i^V\mid d)=0\qquad(i=1,2,\cdots,l);$$
$$(\alpha_0^V\mid d)=a_0\qquad(d\mid d)=0.$$

称它为仿射李代数的正规化标准型.正规化标准型在研究仿射李代数的结构和表示论时经常用到.

考克斯特数(Coxeter number) 见“正规化标准型”.

对偶考克斯特数(dual Coxeter number) 见“正规化标准型”.

典型中心元(canonical central element) 见“正规化标准型”.

标量元素(scaling element) 见“正规化标准型”.

平移群(translation group) 仿射李代数的外尔群的子群.设 $\mathfrak{g}(A)$ 是仿射李代数,$A=(a_{ij})_{i,j=0}^l$,设 $\mathring{W}$ 是由 $r_i(i=1,2,\cdots,l)$ 生成的 W 的子群,$\theta=\delta-a_0\alpha_0$,$v$ 是 $\mathfrak{g}(A)$ 的正规化标准型决定的 $\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}^*$ 的同构(见“不变双线性型”),$M=a_0^{-1}\mathbf{Z}\,(\mathring{W}\cdot\theta)$,对任意的 $\alpha\in M$,引入如下 $\mathfrak{h}^*$ 的自同态 t_α:

$$t_\alpha(\lambda)=\lambda+\langle\lambda,c\rangle\alpha-((\lambda\mid\alpha)+1/2|\alpha|^2\langle\lambda,c\rangle)\delta,\quad\lambda\in\mathfrak{h}^*$$

其中 c 是 $\mathfrak{g}(A)$ 典型中心元.$T=\{t_\alpha\mid\alpha\in M\}$ 是 $\mathfrak{g}(A)$ 的外尔群的子群称为平移群.仿射李代数的外尔群 $W=\mathring{W}\propto T$.

仿射李代数的第一实现定理(first realization theorem of an affine Lie algebra) 无扭仿射李代数的结构定理.设 $A=(a_{ij})_{i,j=0}^l$ 是 $X_l^{(1)}$ 型($X=A,B,\cdots,G$)广义嘉当矩阵,$\mathring{A}$ 为 A 去掉第 0 行第 0 列后所得的矩阵,$\mathring{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}(\mathring{A})$ 是有限维单李代数,设 $L=\mathbf{C}[t,t^{-1}]$ 为 t 的洛朗多项式代数,$L(\mathring{\mathfrak{g}})=L\otimes_{\mathbf{C}}\mathring{\mathfrak{g}}$,定义复李代数 $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}})=L(\mathring{\mathfrak{g}})\oplus\mathbf{C}c\oplus\mathbf{C}d$,其方括号运算为

$$\begin{aligned}&[t^k\otimes x\oplus\lambda c\oplus\mu d;t^{k_1}\otimes y\oplus\lambda_1c\oplus\mu_1d]\\&=(t^{k+k_1}\otimes[x,y]+\mu k_1t^{k_1}\otimes y\\&\quad-\mu_1kt^k\otimes x)\oplus k\delta_{k,-k_1}(x\mid y)c,\end{aligned}$$

其中 $k_1,k\in\mathbf{Z},\lambda,\mu,\lambda_1,\mu_1\in\mathbf{C},x,y\in\mathring{\mathfrak{g}}$,$(\cdot\mid\cdot)$是 $\mathfrak{g}(\mathring{A})$ 的标准不变双线性型,且满足 $(\theta\mid\theta)=2$,θ 是 $\mathfrak{g}(\mathring{A})$ 的最高根.李代数 $\hat{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$ 就是关联于 A 的仿射李代数.

仿射李代数的第二实现定理(second realization theorem of an affine Lie algebra) 扭仿射李代数的结构定理.设 $\mathfrak{g}$ 是关联于有限型广义嘉当矩阵 $X_N(=A_{2l},A_{2l-1},D_{l+1},E_6,D_4)$ 的有限维单李代数,分别设 $k=2,2,2,2,3$;v 是 $\mathfrak{g}$ 的 k 阶图自同构,$\mathfrak{g}$ 有向量空间分解:

$$\mathfrak{g}=\bigoplus_{j\in\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}}\mathfrak{g}_j,$$

其中 $\mathfrak{g}_j$ 是 v 的特征值为

$$\varepsilon^j=\exp\frac{2\pi ji}{k}$$

的特征子空间. 若

$$L(\mathfrak{g},v)=\bigoplus_{j\in \mathbf{Z}}(t^j\otimes \mathfrak{g}_j \bmod k),$$

则 $\hat{L}(\mathfrak{g},v)=L(\mathfrak{g},v)\oplus \mathbf{C}c\oplus \mathbf{C}d$,其方括号运算为

$$[t^{k_1}\otimes x\oplus \lambda_1 c\oplus \mu_1 d, t^{k_2}\otimes y\oplus \lambda_2 c\oplus \mu_2 d]$$
$$=(t^{k_1+k_2}\otimes [x,y]+\mu_1 k_2 t^{k_2}\otimes y-\mu_2 k_1 t^{k_1}\otimes x)$$
$$\oplus k_1\delta_{k_1,-k_2}(x|y)c,$$

其中 $k_1,k_2\in \mathbf{Z},\lambda_1,\mu_1,\lambda_2,\mu_2\in \mathbf{C},x\in \mathfrak{g}_{k_1}\bmod k,y\in \mathfrak{g}_{k_2}\bmod k$,$(\cdot|\cdot)$为 $\mathfrak{g}$ 的标准不变双线性型,分别为关联 $X_N^{(k)}=(A_{2l}^{(2)},A_{2l-1}^{(2)},D_{l+1}^{(2)},E_6^{(2)},D_4^{(3)})$型的仿射矩阵 A 的扭仿射李代数.

$\mathfrak{g}(A)$的$\mathfrak{h}$ 可对角化模($\mathfrak{h}$-diagonalizable module of $\mathfrak{g}(A)$) 一种具有直和分解的特殊模. 设 $\mathfrak{g}(A)$是关联于 n 阶复矩阵 A 的李代数,若 $\mathfrak{g}(A)$模 V 有权空间分解

$$V=\bigoplus_{\lambda\in \mathfrak{h}^*}V_\lambda$$

(其中 $V_\lambda=\{v\in V|h\cdot v=\lambda(h),h\in \mathfrak{h}\}$),则称 V 为 $\mathfrak{h}$ 可对角化的. 当 $V_\lambda\neq 0$ 时,V_λ 称为权空间,λ 称为权,$\dim V_\lambda$ 称为 λ 的权重数,记为 $\mathrm{mult}_V\lambda$. V 的所有权的集合称为权系,记为$P(V)$.

权空间(weight space) 见"$\mathfrak{g}(A)$的 $\mathfrak{h}$ 可对角化模".

权重数(multiplicity of weight) 见"$\mathfrak{g}(A)$的 $\mathfrak{h}$ 可对角化模".

$\mathfrak{g}(A)$的可积模(integrable module of $\mathfrak{g}(A)$) $\mathfrak{g}(A)$的 $\mathfrak{h}$ 对角化模的子类. 设$\mathfrak{g}(A)$是关联于 $n\times n$ 复矩阵 A 的李代数,V 是$\mathfrak{g}(A)$的一个 $\mathfrak{h}$ 可对角化模,若生成元 $e_i,f_i(i=1,2,\cdots,n)$在 V 上的作用是局部幂零的,则称 V 为 $\mathfrak{g}(A)$的可积模.

范畴$\mathscr{O}$(category $\mathscr{O}$) $\mathfrak{g}(A)$的一类模. 设 $\mathfrak{g}(A)$是关联于一个 n 阶复矩阵的李代数,V 是 $\mathfrak{g}(A)$的一个 $\mathfrak{h}$ 可对角化模;另对 $\lambda\in \mathfrak{h}^*$ 定义 $D(\lambda)=\{\mu\in \mathfrak{h}^*|\lambda-\mu\in Q_+\}$. 范畴 $\mathscr{O}$ 的定义如下,它的对象是具有以下性质的 $\mathfrak{g}(A)$模 V:V 是 $\mathfrak{h}$ 可对角化的,权空间维数有限,且存在有限个 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s\in \mathfrak{h}^*$ 使得

$$P(V)\subset \bigcup_{i=1}^{s}D(\lambda_i);$$

$\mathscr{O}$ 中的态射是 $\mathfrak{g}(A)$的模同态. 范畴 $\mathscr{O}$ 中模的任意子模、商模及 $\mathscr{O}$ 中有限个模的和或张量积也在 $\mathscr{O}$ 中;范畴 $\mathscr{O}$ 中模是限制模.

最高权模(highest weight module) 范畴 $\mathscr{O}$ 中模的重要例子. 它推广了有限维复半单李代数的同一概念. 设 $\mathfrak{g}(A)$是关联于复矩阵 A 的李代数,V 是 $\mathfrak{g}(A)$模. 若存在一个非零向量 $v\in V$,使得$n_+(v)=0,h(v)=\Lambda(h)v\ (h\in \mathfrak{h}),U(\mathfrak{g}(A))(v)=V$,其中 $\Lambda\in \mathfrak{h}^*$,$U(\mathfrak{g}(A))$为 $\mathfrak{g}(A)$的通用包络代数,则 Λ 称为最高权,称 V 为最高权 Λ 的最高权模,v 称为最高权向量.

最高权向量(highest weight vector) 见"最高权模".

最高权(highest weight) 见"最高权模".

费马模(Verma module) 一类重要的最高权模. 设 $\mathfrak{g}(A)$是关联于复矩阵 A 的李代数,$M(\Lambda)$是以 Λ 为最高权的 $\mathfrak{g}(A)$模,若每个以 Λ 为最高权的 $\mathfrak{g}(A)$模都是(同构于)$M(\Lambda)$的一个商模,则称$M(\Lambda)$为费马模. 对任意的 $\Lambda\in \mathfrak{h}^*$ 均存在惟一的一个费马模 $M(\Lambda)$. 若 $U(\mathfrak{g}(A))$是 $\mathfrak{g}(A)$的普遍包络代数,$J(\Lambda)$是由 n_+及 $h-\Lambda(h)\ (h\in \mathfrak{h})$生成的$U(\mathfrak{g}(A))$的左理想,若 $M(\Lambda)=U(\mathfrak{g}(A))/J(\Lambda)$,则 $U(\mathfrak{g}(A))$的左乘运算就可在 $M(\Lambda)$上导出 $\mathfrak{g}(A)$模结构,它就是 $\mathfrak{g}(A)$的一个费马模.

不可约最高权模(irreducible highest weight module) 亦称标准模. 它推广了有限维复半单李代数的同一概念. 设 $\mathfrak{g}(A)$是关联于复矩阵 A 的李代数,以 Λ 为最高权的 $\mathfrak{g}(A)$的最高权模中存在惟一的一个不可约模,即 $L(\Lambda)=M(\Lambda)/M'(\Lambda)$,称$L(\Lambda)$为不可约最高权模,其中 $M'(\Lambda)$是费马模$M(\Lambda)$的惟一的极大真子模. 不可约最高权模$L(\Lambda)(\Lambda\in \mathfrak{h}^*)$穷尽了范畴 $\mathscr{O}$ 中的全体不可约模. 设 c 是$\mathfrak{g}(A)$的典型中心元,数值$\langle \Lambda,c\rangle$称为 $L(\Lambda)$的水平,记为 $\mathrm{level}(\Lambda)$.

标准模(standard module) 即"不可约最高权模".

不可约最高权模的水平(level of irreducible highest weight module) 见"不可约最高权模".

整权(integral weights) 复半单李代数同一概念的推广. 设 $\mathfrak{g}(A)$是关联于 n 阶广义嘉当矩阵 A 的卡茨-穆迪代数. 若:

$$P=\{\lambda\in \mathfrak{h}^*|\langle \lambda,\alpha_i^\vee\rangle\in \mathbf{Z},i=1,2,\cdots,n\};$$
$$P_+=\{\lambda\in P|\langle \lambda,\alpha_i^\vee\rangle\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n\};$$
$$P_{++}=\{\lambda\in P|\langle \lambda,\alpha_i^\vee\rangle> 0,i=1,2,\cdots,n\};$$

则称 P 为权格,P,P_+,P_{++}中的元分别称为整权、支配整权、正则支配整权.

权格(weight lattice) 见"整权".

支配整权(dominant integral weight) 见"整权".

正则支配整权(regular dominant integral weight) 见"整权".

完全可约性定理(complete reducibility theorem) 有限维半单李代数表示论中外尔完全可约性定理的推广. 若 A 是可对称化的广义嘉当矩阵,则范畴 $\mathscr{O}$ 中的每一个可积 $\mathfrak{g}(A)$模 V 同构于一些 $L(\Lambda)(\Lambda\in P_+)$的直和.

基本权(fundamental weight) 一种特殊的权. 仿射李代数 $\mathfrak{g}(A)$(其中 $A=(a_{ij})_{i,j=0}^{l}$)满足$\langle \Lambda_i,\alpha_j^\vee\rangle=\delta_{i,j},j=0,1,\cdots,l$ 及$\langle \Lambda_i,d\rangle=0$ 的权 $\Lambda_i\in \mathfrak{h}^*(i=0,$

1,…,L)称为基本权. 仿射李代数 $\mathfrak{g}(A)$的不可约最高权模$L(\Lambda_i)$ $(i=0,1,\cdots,l)$称为基本模.

基本模(fundamental module) 见"基本权".

极大权(maximal weight) 仿射李代数的不可约最高权模中的一些特殊的权. 设 $L(\Lambda)$是仿射李代数 $\mathfrak{g}(A)$的不可约最高权模. 若 λ 是 $L(\Lambda)$的权, 而 $\lambda+\delta$ 不是权, 则 λ 称为极大权. $L(\Lambda)$中全体极大权的集合记为 $\max(\Lambda)$. 极大权对研究仿射李代数的可积不可约模的权系具有重要意义.

形式特征标(formal character) 复半单李代数表示特征标概念的推广. 设 $\mathfrak{g}(A)$是关联于复矩阵 A 的李代数, V 是范畴 $\mathscr{O}$ 中的 $\mathfrak{g}(A)$模, V_λ 是 V 的权空间, V 的形式特征标为

$$\operatorname{ch}V=\sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*}(\dim V_\lambda)e(\lambda),$$

其中 $e(\lambda)$为 λ 的形式指数, $\operatorname{ch}V\in\mathscr{E}$, 其中 $\mathscr{E}$ 是由所有形如

$$\sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*}c_\lambda e(\lambda)$$

的级数做成的 C 上的代数, 其运算由 $e(\lambda)e(\mu)=e(\lambda+\mu)$及其线性扩充决定.

外尔-卡茨特征标公式(Weyl- Kac character formula) 有限维情形外尔特征标公式的推广, 是表示论的基本公式. 若 A 是可对称化的广义嘉当矩阵, $L(\Lambda)$是 $\mathfrak{g}(A)$的具有最高权 $\Lambda(\Lambda\in P_+)$的不可约最高权模, 则有外尔-卡茨特征标公式

$$\operatorname{ch}L(\Lambda)=\frac{\sum\limits_{w\in W}\varepsilon(w)e(w(\Lambda+\rho)-\rho)}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_+}(1-e(-\alpha))^{\operatorname{mult}\alpha}},$$

其中 $\varepsilon(w)=\det_{\mathfrak{h}^*}w$($\rho$ 参见"广义卡西默算子"). 它的一个特例是

$$\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-e(-\alpha))^{\operatorname{mult}\alpha}=\sum_{w\in W}\varepsilon(w)e(w(\rho))-\rho),$$

称为分母恒等式. 当 $\mathfrak{g}(A)$是仿射李代数时, 由分母恒等式可得麦克唐纳恒等式.

分母恒等式(denominator identity) 见"外尔-卡茨特征标公式".

特征标函数(function of character) 对特征标采用一种函数形式的表述. 设 $\mathfrak{g}(A)$是关联于矩阵 A 的李代数, 将形式指数 $e(\lambda)$用 $\mathfrak{h}$ 上如下定义的函数 e^λ 来代替 $e^\lambda(h)=e^{\langle\lambda,h\rangle}$, $\forall\, h\in\mathfrak{h}$. 范畴 $\mathscr{O}$ 中的$\mathfrak{g}(A)$模 V 的特征标函数定义如下:

$$h\to\operatorname{ch}_V(h)=\sum_{\lambda\in P(V)}\operatorname{mult}_V\lambda e^{\langle\lambda,h\rangle}.$$

重数公式(multiplicity formula) 有限维情形科斯滕特(Kostant)公式的推广. 设 $L(\Lambda)$是卡茨-穆迪代数 $\mathfrak{g}(A)$的不可约最高权模, $\Lambda\in P_+$, A 是可对称化的. K 是 $\mathfrak{h}^*$ 上的一个函数 $K(\beta)=0,\beta\notin Q_+$; $K(0)=1$. 对 $\beta\in Q_+$, $K(\beta)$表示 β 分拆成正根之和的分拆数, 从而有重数公式

$$\operatorname{mult}_{L(\Lambda)}\lambda=\sum_{w\in W}\varepsilon(w)K(w(\Lambda+\rho)-(\lambda+\rho)).$$

函数$b_\lambda^\Lambda,\theta_\lambda,c_\lambda^\Lambda$ (functions $b_\lambda^\Lambda,\theta_\lambda,c_\lambda^\Lambda$) 表示论的三个重要函数. 设$\mathfrak{g}(A)$是仿射李代数, $L(\Lambda)$是$\mathfrak{g}(A)$的不可约最高权模. 对于$L(\Lambda)$的极大权 λ, b_λ^Λ 为如下生成函数

$$b_\lambda^\Lambda=\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{mult}_{L(\Lambda)}(\lambda-n\delta)e^{-n\delta}.$$

设 T 是 $\mathfrak{g}(A)$的平移群, 设 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$, $\langle\lambda,c\rangle=m>0$, θ_λ 是如下 theta 函数

$$\theta_\lambda=e^{-\frac{|\lambda|^2}{2m}\delta}\sum_{t\in T}e^{t(\lambda)},$$

g 是对偶考克斯特数, d 为标量元素(ρ 参见"广义卡西默算子"), 满足$\langle\rho,d\rangle=0$, 设

$$S_\Lambda=\frac{|\Lambda+\rho|^2}{2(m+g)}-\frac{|\rho|^2}{2g},$$

对 $L(\Lambda)$的每个权 λ, 引入数值 $S_{\Lambda,\lambda}=S_\Lambda-|\lambda|^2/2m$, 称为 λ 的特征. 对于 $\lambda\in\max(\Lambda)$, 记

$$c_\lambda^\Lambda=e^{-S_{\Lambda,\lambda}\delta}\sum_{n\geqslant0}\operatorname{mult}_{L(\Lambda)}(\lambda-n\delta)\cdot e^{-n\delta}.$$

函数 c_λ^Λ 称为 λ 的弦函数, 它是一个模形式.

弦函数(string function) 见"函数 $b_\lambda^\Lambda,\theta_\lambda,c_\lambda^\Lambda$".

基本表示(basic representation) 一种特殊表示. 指由仿射李代数$\mathfrak{g}(A)$的不可约最高权模 $L(\Lambda_0)$所定义的表示, 其中 Λ_0 是第 0 个基本权. 基本表示是卡茨(Kac, V.)于 1978 年首先注意的. 利用无限多个不定元的微分算子构造仿射李代数的基本表示称为基本表示的主实现. 卡茨、莱彼斯基(Lepowsky, J.)、威尔森(Wilson, R. L.)、戴特(Date, E.)等人均在此理论上有过重要工作, 并发现它在解偏微分方程中著名的 KdV 方程和 K_P 方程时有重要应用.

基本表示的主实现(principal realization of basic representation) 见"基本表示".

顶点算子(Vertex operator) 一种微分算子. 设 $R=\mathrm{C}[x_1,x_2,\cdots]$是无限多个可交换不定元 x_i 的多项式代数, $\hat{R}=\mathrm{C}[x_1,x_2,\cdots]$是这些 x_i 的形式幂级数. 顶点算子是 $R\to\hat{R}$ 的一个线性映射, 即

$$\left(\exp\sum_i\mu_ix_i\right)\left(\exp\left(-\sum_i\lambda_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right),$$

这里 $\lambda_i,\mu_i\in\mathrm{C}$, $i=1,2,\cdots$顶点算子是构造仿射李代数的基本表示的重要工具.

撰稿 王仰贤 贾雨亭
审阅 张知学 邱森

环 与 代 数

环 论

环论(ring theory)　抽象代数学的主要分支之一.它是具有两个运算的代数系.在非空集合 R 中定义加法"+"和乘法"·"运算,使得 R 中任意元 a, b,c 适合条件:

1. R 对加法为交换群,称为 R 的加法群,记为 $(R,+)$;

2. R 对乘法适合结合律,即 $(R,\cdot)$ 是半群,称为 R 的乘法半群;

3. 乘法对加法的左、右分配律成立,即

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ (左分配律),

$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$ (右分配律);

则称 R 为结合环,简称环(通常 $a\cdot b$ 写为 ab).它是环论研究的主要对象.环论起源于 19 世纪关于实数域的扩张与分类,以及戴德金(Dedekind,J. W. R.)、哈密顿(Hamilton,W. R.)等人对超复数系的建立和研究.韦德伯恩(Wedderburn,J. H. M.)于 1907 年给出的结构定理给出代数研究的模式,也成为环结构研究的模式.20 世纪 20—30 年代,诺特(Noether,E.)建立了环的理想理论,阿廷(Artin,E.)又将代数结构定理推广到有极小条件的环.同时,对非极小条件的环,冯·诺伊曼(von Nenmann,H.)建立了正则环理论,相继盖尔范德(Гельфанд,И. М.)创立了赋值环,克鲁尔(Krull,W.)建立了局部环理论,以及哥尔迪(Goldie,A. W.)完善了极大条件环理论.

20 世纪 40 年代,根论迅速发展,尤其是雅各布森(Jacobson,N.)于 1945 年引入的被称为雅各布森根的概念后,建立了本原环理论、半本原环的结构定理与本原环的稠密性定理,完善和深化了不带附加条件环的理论.20 世纪 50 年代中期,阿密苏(Amitsur,S. A.)、库洛什(Kurosh,A.)创立了根的一般理论,环论已趋完善.

另一方面,由群表示研究的影响,产生模、群环与分次环的理论.20 世纪 20 年代初,诺特引入了模的概念,并研究模对有限群表示的作用与环结构之间的关系,用模的语言去刻画环,特别是 20 世纪 50 年代以后,同调代数的迅速发展,使环的理论进入更高层次虽然,早在 1854 年,凯莱(Cayley,A.)就引入了群代数,然而,它的研究是从 20 世纪 30 年代开始直到 60—70 年代,受群表示论与环的理论的推动才蓬勃发展起来的.20 世纪 70 年代后,由于分次代数的推动,群代数进入新的阶段——交叉积的研究.分次环与模发展的另一动力是交换代数几何中射影代数簇,20 世纪 70 年代以来,由于非交换代数几何及群表示论的推动,环论已进入一个新的阶段.

若环 R 的乘法适合交换律,则称 R 为交换环.乘法半群的左(右)单位元,称为环 R 的左(右)单位元.乘法半群的单位元称为环 R 的单位元.$(R,+)$ 的零元称为环 R 的零元.在一个元构成的环中,零元是单位元,但两个以上的元构成的环中,零元一定不是单位元.环 R 的一个非空子集合 S,若对 R 的加法、乘法也构成环,则称 S 是 R 的子环.S 是 R 的子环当且仅当对任意 $a,b\in S$ 恒有 $a-b\in S,ab\in S$.

比结合环条件较弱的是非结合环,非结合环与代数受量子力学的刺激发展起来,但其研究的方法和思路基本上沿着结合环的格式,并早已趋完整.比结合环更弱的环类是拟环与半环,虽然早在 20 世纪 40 年代,就分别由扎森豪斯(Zassenhaus,H.)和范迪维尔(Vandiver,H. S.)提出,但它们的发展是 20 世纪 60 年代以来,受自然科学和数学其他分支(如非线性同调代数、非线性几何、泛函分析、组合数学、动力系统和计算机科学)的推动而迅速成熟起来的,现已成为环论的独立分支.

结合环(associative ring)　见"环论".

交换环(commutative ring)　见"环论".

环的单位元(identity element or unit element of ring)　见"环论".

环的零元(null element of ring)　见"环论".

子环(subring)　见"环论".

数环(number ring)　由数组成的环,是环的最基本的例子和模型.非空数集对数的加法、乘法所构成的环,称为数环.如全体整数的集合 Z,全体有理数的集合 Q,全体实数的集合 R 和全体复数的集合 C,对数的加法、乘法均构成环,分别称为整数环、有理数环、实数环和复数环.

整数环(ring of integer numbers)　见"数环".

有理数环(ring of rational numbers)　见"数环".

实数环(ring of real numbers)　见"数环".

复数环(ring of complex numbers)　见"数环".

函数环(function ring)　环的一类具体模型.定义在集合 L 上,取值于某数域 K 中的全体(具有

某种给定性质的)函数的集合 K^L,关于函数的加法、乘法运算做成的环,称为定义在 L 上的(具有某种性质的)函数环. 例如,若 $K=\mathbf{R}$,L 是区间,则 L 上全体实连续函数的集合 $C^0(L)$ 是 L 上实连续函数环;全体 r 次连续可微函数的集合 $C^r(L)$ 称为 r 次可微函数环.

实连续函数环(ring of real continuous functions) 见"函数环".

可微函数环(ring of differentiable functions) 见"函数环".

全矩阵环(full matrix ring) 一类具体且重要的环. 即由矩阵构成的一类有零因子的非交换环. 环 R 上一切 n 阶矩阵的集合 $\{[a_{ij}]_{n\times n}\mid a_{ij}\in R\}$ 对矩阵的加法和乘法构成的环,称为 R 上全矩阵环. 也称它为 R 上 n 阶矩阵环,记为 R_n 或 $M_n(R)$. 全矩阵环的子环称为矩阵环. 域 F 上全矩阵环 F_n 是单环,且是 F 上矩阵代数,从而也是 F 上单代数. 矩阵环在表示论中有重要意义,F 上有限维代数常可用相应的矩阵代数来刻画.

矩阵环(matrix ring) 见"全矩阵环".

多项式环(polynomial ring) 环的重要类型. 设 R 是有单位元的交换环,x 是 R 上的未定元(或称 x 是变量),R 上一切多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n, n\in\mathbf{N}, a_i\in R(i=0,1,\cdots,n)$ 的集合记为 $R[x]$,规定 $R[x]$ 的加法是同次项的系数相加,乘法是分配相乘,即

$$f(x)g(x)=\sum_{l=0}^{m+n}\Big(\sum_{i+j=l}a_ib_jx^l\Big),$$

其中 $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m, m\in\mathbf{N}$,$R[x]$ 对多项式的加法和乘法构成一个环,称为环 R 上一元多项式环. 若 $R=F$ 是域,则 $F[x]$ 是主理想整环. 多项式环也可在非交换环 R 上定义,此时 $R[x]$ 是非交换环. F 上 n 个未定元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的多项式环 $F[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 是代数几何研究的基础.

自同态环(endomorphism ring) 一类特殊而重要的环. 它在环论中的作用类似于对称群在群论中的作用. 加群 G 的自同态是指映射 $f:a\to f(a)\in G, \forall\, a\in G$,适合:

$$f(a+b)=f(a)+f(b),\quad \forall\, a,b\in G.$$

若 End^lG 为 G 的一切自同态的集合,对任意 $f,g\in\mathrm{End}^lG$ 规定:

$$(f+g)(a)=f(a)+g(a),$$
$$(fg)(a)=f(g(a))\ (\forall\, a\in G),$$

则 End^lG 为有单位元(恒等映射)的结合环,称为加群 G 的自同态环,简称自同态环. 若 G 的自同态映射 f 的像用 $(a)f$ 表示,则类似地有自同态环 End^rG,两者反同构. 即 $\mathrm{End}^lG\cong(\mathrm{End}^rG)^{\mathrm{op}}$(反环). 因此,常用 $\mathrm{End}G$ 表示 G 的自同态环. 与群中凯莱定理类似,若环 R 有 1,则 R 同构于 $\mathrm{End}(R,+)$ 的子环 R_L(由 R 中元左乘所定义的自同态构成的环).

形式幂级数环(formal power series ring) 一类特殊而重要的具体环. 它由形式幂级数为元素构成. 设 R 是有单位元的交换环,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个可交换变量(未定元),R_d 是 R 上 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 d 次齐次多项式的集合. 形如

$$\sum_{d=0}^{\infty}a_d=a_0+a_1+\cdots,$$

称为 n 个变量 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 的形式幂级数,其中 $0\neq a_d\in R_d$ 称为 d 次齐次分量,a_0 为常数项. 若定义:

$$\sum_d a_d+\sum_d b_d=\sum_d(a_d+b_d),$$
$$\Big(\sum_d a_d\Big)\Big(\sum_d b_d\Big)=\sum_d\Big(\sum_{i+j=d}a_ib_j\Big),$$

则 R 上变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一切形式幂级数的集合 $R\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$(或记为 $R[[x_1,x_2,\cdots,x_n]]$)构成有单位元的交换环,称为形式幂级数环. 当 d 大于某自然数 N,有 $a_d=0$ 时,则 $f=a_0+a_1+\cdots+a_N$ 是 R 上 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的多项式,因此,

$$R[x_1,x_2,\cdots,x_n]\subset R\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}.$$

域 F 上单变量的形式幂级数环 $F\{x\}$ 是整环,它的商域称为单变量形式幂级数域,记为 $F((x))$. 形式幂级数环是研究代数簇局部特性的工具,形成代数几何的解析方法. 若 R 为下列类型的环,则 $R\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 也是相应类型的环:即诺特环、局部环、半局部环、正则局部环、诺特正则环.

单变量形式幂级数域(formal power series field in one variable) 见"形式幂级数环".

收敛幂级数环(convergent power series ring) 形式幂级数环的子环. 设 v 为域 F 的乘法赋值,对于 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum c_{i_1i_2\cdots i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}\in F\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,若存在正实数 $r_1,r_2,\cdots,r_n,M$,使得对一切 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 皆有

$$v(c_{i_1i_2\cdots i_n})r_1^{i_1}r_2^{i_2}\cdots r_n^{i_n}\leqslant M,$$

则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为收敛幂级数. 若 $F\langle\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle\rangle$ 为 $F\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 中全体收敛幂级数构成的环,则称它为收敛幂级数环. 它是克鲁尔维数为 n 的正则局部环.

模 m 的剩余类环(residue class ring modulo m) 有限环的重要例子,由整数除以 m,按余数分类所构成的环. 两个整数 a,b 称为同属一类,当且仅当 $a-b=km, k\in\mathbf{Z}$. 若 $\mathbf{Z}_m=\{\overline{0},\overline{1},\cdots,\overline{m-1}\}$,其中 $\overline{i}=\{km+i\mid k\in\mathbf{Z}\}$,对 $\mathbf{Z}_m$ 中任意 $\overline{a},\overline{b}$,当 $a+b=km+i$, $ab=lm+j$,就规定:$\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}=\overline{i}$, $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{ab}=\overline{j}$ $(i,j=0,1,\cdots,m-1)$,则 $\mathbf{Z}_m$ 对此剩余类的加法和乘法做成一个环,称为模 m 的剩余类环. 当 m 是合

数时，$\mathbf{Z}_m$ 是有零因子、有单位元的交换环；当 $m=p$ 是素数时，$\mathbf{Z}_p$ 是域，称为模 p 的剩余类域.

模 p 的剩余类域(residue calss field modulo p)　见"模 m 的剩余类环".

反环(opposite ring)　由给定环构造的一个新环. 若 R 是环，R^{op} 所含元素和加法"+"与 R 相同，而 R^{op} 的乘法"$*$"定义为 $a*b=b\cdot a$，"$\cdot$"是 R 的乘法，则 R^{op} 对"+"，"$*$"构成一个环，称为 R 的反环或逆环. R 与 R^{op} 反同构.

逆环(inverse ring)　即"反环".

零因子(zero divisor)　亦称零除元. 环的一种特殊的非零元. 环 R 中一个元 $a\neq 0$，若有 $0\neq b\in R$ 使得 $ab=0$ 或 $ba=0$，称 a 是环 R 的零因子. 在非交换环中有左、右零因子之分，如上 $ab=0$ 时，a 称左零因子；$ba=0$ 时，a 称右零因子. 若环 R 有零因子，则消去律不成立. 与零因子意义完全相反的元，即不是零因子的非零元，称为正则元.

零除元(zero divisor)　即"零因子".

正则元(regular element)　见"零因子".

零化子(annihilator)　起源于零因子的概念. 设 S 是环 R 的子集，R 中一切左乘 S 中每一个元都等于零的元素的集合，称为 S 的左零化子，通常记为 $l(S)$ 或 $\mathrm{ann}\,S_l$，即 $\mathrm{ann}\,S_l=\{r\in R\mid rs=0$，对任意 $s\in S\}$. $\mathrm{ann}\,S_l$ 是 R 的一个左理想. 同样地，S 在 R 中的右零化子 $r(S)=\mathrm{ann}\,S_r=\{r\in R\mid sr=0$ 对任意 $s\in S\}$ 是 R 的右理想. $\mathrm{ann}\,S_l\cap\mathrm{ann}\,S_r$ 称为 S 在 R 中的零化子，它是 R 的理想.

左(右)零化子(left(right) annihilator)　见"零化子".

整区(integral domain)　重要而广泛的环类. 没有零因子的非零环称为整区. 环 R 是整区当且仅当 $R\neq\{0\}$ 且消去律成立. 交换整区称为整环，它是交换代数研究的重要对象.

整环(integral ring)　见"整区".

环的单位群(unit group of a ring)　环中可逆元构成的群. 环 R 有单位元 1，a 是 R 中非零元，若存在 R 中元 b 有 $ab=1$(或 $ba=1$)，则称 b 是 a 的一个右逆元(或左逆元). 若 $ab=1=ba$，则 b 称为 a 的逆元，记为 $b=a^{-1}$. 环中有逆元的元，称为可逆元，也称为环 R 的单位. 环 R 中一切单位的集合，对 R 的乘法构成一个群，称为 R 的单位群，常用 $U(R)$ 表示.

逆元(inverse element)　见"环的单位群".

可逆元(invertible element)　见"环的单位群".

单位(unit)　见"环的单位群".

除环(division ring)　亦称体或斜域. 接近于域的一类条件很强的环. 设 R 是一个有单位元的环. 若 R 中至少含有一个非零元，且每个非零元都是可逆元，则称 R 为除环. 交换的除环是域.

体(sfield)　即"除环".

斜域(skew field)　即"除环".

商域(quotient field)　一类特殊且重要的域. 包含给定整环的最小域. 从整环构作商域的方法类似于由整数环构作有理数域. 设 R 是整环，$R^{\circ}=R\backslash\{0\}$，在卡氏积 $R\times R^{\circ}$ 中定义等价关系：

$$(a,b)\sim(c,d)\Leftrightarrow ad=bc.$$

将 $R\times R^{\circ}$ 中元素按等价关系分类，用 a/b 表示 (a,b) 所在的等价类. 若 F 是全体等价类的集合，并在 F 中规定加法和乘法运算

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

则 F 构成一个域. 而 $a\to aq/q$，$q\in R^{\circ}$ 是 R 到 F 的一个同构嵌入映射. 因此，R 可视作 F 的子环. 如此所构造的域 F 称为 R 的商域，或称为 R 的分式域. R 中非零元皆为 F 中可逆元. 商域的重要性在于常可通过商域 F 去研究环 R.

分式域(fractional domain)　即"商域".

嘉当-布饶尔-华罗庚定理(Cartan-Brauer-Hua theorem)　关于除环的一个著名定理. 该定理断言：除环 D 在它的所有内自同构下不变的子除环仅有 D 本身和 D 的中心 Φ. 嘉当(Cartan, H.)于 1947 年用伽罗瓦群证明 $[D:\Phi]$ 有限情况；布饶尔(Brauer, R. (D.))于 1949 年证明此定理；同年，华罗庚独立地给出了另一证明. 当 D 的特征 $\neq 2$ 时，这一定理对求导也成立.

环的特征(数)(characteristic (number) of a ring)　域特征的推广. 设 R 为任意环. 使 $na=0$ $(\forall\, a\in R)$ 的最小正整数 n 称为 R 的特征(数)；若这样的 n 不存在，则称 R 的特征(数)为零或无限. 环 R 的特征(数)常记为 $\mathrm{ch}R$. 有 1 整环的特征(数)是素数或零.

n 无挠环(n-torsion free ring)　一类特殊环. 指环的加群 $(R,+)$ 不含周期为 n 的元. 即对任意 $x\in R$，若 $nx=0$，恒有 $x=0$，则称 R 是 n 无挠环. n 无挠常是对无单位元的环而言，因为，若 R 有单位元，且 R 的特征数为 m，则对任意整数 n，只要 m 不能整除 n，$nx=0$ 恒有 $x=0$.

环的理想(ideal of ring)　环论的基本概念之一. 环 R 的非空子集 I，若 $(I,+)$ 是 $(R,+)$ 的子加群，并且对任意 $a\in I$，$r\in R$ 恒有 $ra\in I$ $(ar\in I)$，则 I 称为 R 的左理想(右理想). 环的左理想与右理想统称为单侧理想. 若 I 既是 R 的左理想又是右理想，则 I 称为环 (R) 的理想. 理想这一概念在环论中的作用，类似于不变子群概念在群论中的作用.

单侧理想(one-sided ideal)　见"环的理想".

极大理想(maximal ideal)　一类特殊理想. 设 $\mathfrak{a}$ 是环 R 的左(右)理想,若 $\mathfrak{a}\neq R$ 且 R 中没有真正包含 $\mathfrak{a}$ 的左(右)理想,则称 $\mathfrak{a}$ 为 R 的一个极大左(右)理想. 类似地,可定义极大理想. 任意有单位元的环一定有极大理想. $\mathfrak{a}$ 是 R 的极大理想当且仅当 $R/\mathfrak{a}$ 是单纯环. 若 R 是有 1 的交换环,则 $\mathfrak{a}$ 是 R 的极大理想当且仅当 $R/\mathfrak{a}$ 是域. 极大理想在局部环的研究中尤为重要.

极大左(右)理想(maximal left (right) ideal)　见"极大理想".

极小理想(minimal ideal)　一类特殊理想. 与极大理想相对偶的概念. 环 R 的一个左(右)理想 $\mathfrak{a}$,若 $\mathfrak{a}$ 不真含 R 的非零左(右)理想,则称 $\mathfrak{a}$ 为 R 的极小左(右)理想. 类似地,可定义极小理想. 极小理想在本原环理论中有重要作用.

极小左(右)理想(minimal left (right) ideal)　见"极小理想".

子集生成的理想(ideal generated by a subset)　一类具体的理想. 指由环的一个子集生成的理想. 设 S 是环 R 的非空子集,R 中含 S 的一切理想(左、右理想)$\{A_\alpha\}$ 的交是 R 中含 S 的最小理想(左、右理想),记为

$$(S)=\bigcap_\alpha A_\alpha,\ ((S)_l=\bigcap_\alpha A_{\alpha,l},\quad (S)_r=\bigcap_\alpha A_{\alpha,r}),$$

称为由 S 生成的理想(左、右理想). 当 $S=\{a\}$ 时,

$$(a)=\left\{ax+ya+\sum x_iay_i + na\,|\,x,y,x_i,y_i\in R,n\text{ 为整数}\right\};$$

$$(a)_l=\{xa+na\};$$

$$(a)_r=\{ax+na\},$$

其中 $x\in R$,n 为整数. 分别称为由 a 生成的主理想(主左、主右理想). 当 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 时,

$$(S)=\left\{\sum x_i\,|\,x_i\in(a_i),a_i\in S\right\}.$$

若整环 R 的每个理想恒为主理想,则称 R 为主理想环. 例如,整数环、域上一元多项式环、欧氏环皆为主理想环.

主理想(principal ideal)　见"子集生成的理想".

主理想环(principal ideal ring)　见"子集生成的理想".

商环(factor ring)　一类重要的环. 环 R 的元素对给定理想 I 定义一种等价关系:元素 a,b 等价当且仅当 $a-b\in I$(或 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,I)$),按此等价关系将 R 中元分为等价类,a 所在的类记为 $\bar{a}=a+I$. 若 $R/I=\{\bar{a}\,|\,a\in R\}$,规定:

$$\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b},\quad \bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{ab},$$

则 R/I 构成一个环,称为 R 关于 I 的商环或称 R 模 I 的剩余类环. 例如,整数环 Z 模 m 的剩余类环,就是 Z 关于理想 (m) 的商环,即 $\mathrm{Z}_m=\mathrm{Z}/(m)=\mathrm{Z}/m\mathrm{Z}$. 而 $a\to a+I=\bar{a}$ 是 $R\to R/I$ 的自然同态.

剩余类环(residue class ring)　见"商环".

幂零理想(nilpotent ideal)　一类特殊理想. 任意 n 个元素的乘积恒为零的理想. 环(代数)R 的理想 I,若有正整数 n 使得 $I^n=0$,即 I 中任意 n 个元素的乘积恒为零,则称 I 为幂零理想. 若 n 是使 $I^n=0$ 的最小正整数,则 n 称为 I 的幂零指数. 当 R 自身为幂零时,R 称为幂零环(代数).

幂零环(代数)(nilpotent ring (algebra))　见"幂零理想".

幂零指数(nilpotent index)　见"幂零理想".

诣零理想(nil ideal)　亦称诣零子环. 比幂零理想更广的一类理想. 它是描述克德(Köthe,*G.*)根的基础. 环 R 中元 a,若有正整数 n 使 $a^n=0$,则称 a 为幂零元. 适合 $a^n=0$ 的最小正整数称为 a 的幂零指数. 零元的幂零指数为 1. 若 A 是环 R 的理想(或子环),A 中任一元皆为幂零元,则称 A 为 R 的诣零理想. 若 R 中每个元是幂零元,则 R 称为诣零环. 谢邦杰于 1955 年证明:左、右零化子各满足极大条件的环的诣零子环是幂零的. 八年后,林文茨基(Levitzki,N.)、赫尔司亭(Herstein,I. N.)也相继证明这一结论.

诣零子环(nil subring)　即"诣零理想".

幂零元(nilpotent element)　见"诣零理想".

素理想(prime ideal)　一类特殊理想. 它是整数环中素数生成理想的推广. 设 P 是环 R 的理想,对 R 中任意理想 A,B,若 $AB\subseteq P$ 必有 $A\subseteq P$ 或 $B\subseteq P$,则称 P 为 R 的素理想. 它等价于对 $\forall\ x,y\in R$,若 $xRy\subseteq P$ 则 $x\in P$ 或 $y\in P$. 当 R 是交换环时,P 是 R 的素理想当且仅当对 R 中任意元素 a,b,若 $ab\in P$,则 $a\in P$ 或 $b\in P$. 素理想在交换环的理想理论中有重要作用. 若对任意环 R,$a,b\in R$,由 $ab\in P$ 得出 $a\in P$ 或 $b\in P$,则称 P 为 R 的完全素理想. 因此,对交换环来说,素与完全素概念是一致的.

完全素理想(completely prime ideal)　见"素理想".

素环(prime ring)　一类重要的环. 若环 R 的零理想是素理想,则称 R 为素环. 环 R 是素环当且仅当下列等价条件之一成立:

1. 设 A,B 是 R 的理想,若 $AB=(0)$,则 $A=(0)$或 $B=(0)$.

2. R 中任意非零左(右)理想的左(右)零化子为零.

3. 对任意 $x\in R$,若 $RxR=(0)$,则 $x=0$.

例如,整环、单环、本原环都是素环. 素环与素理想有如下关系:P 是 R 的素理想当且仅当 R/P 是素环.

环的秩(rank of a ring)　素理想的秩在环中的扩展. 设 Spec(R)代表环 R 的一切素理想的集合. 任意 $P\in\mathrm{Spec}(R)$, P 的秩是指在素谱 Spec(R)中链

$$P_0\subset P_1\subset\cdots\subset P_{m-1}\subset P_m=P$$

的最大正整数 m, 记为 $\mathrm{rank}(P)=m$. 而环 R 的秩定义为

$$\mathrm{rank}(R)=\max\{\mathrm{rank}(P)\mid P\in\mathrm{Spec}(R)\}.$$

幂等元(idempotent element)　环中的一类特殊元. 环或代数 A 中非零元 e, 若 $e^2=e$, 则称 e 为幂等元. 两个幂等元 e_1,e_2, 若 $e_1e_2=e_2e_1=0$, 则 e_1,e_2 称为正交的. 若 A 有幂等元 e, 则 A 有皮尔斯分解:

$$A=R_e+eA(A=L_e+Ae)$$

称为 A 关于幂等元 e 的左(右)皮尔斯分解, 其中,

$$R_e=\{a-ea\mid a\in A\}(L_e=\{a-ae\mid a\in A\})$$

是 e 的右(左)零化子. 幂等元可分为下列类型:

1. 若 A 中没有与 e 正交的幂等元, 则称 e 为主幂等元, 非幂零的有限维代数必有主幂等元.

2. 若 e 不能表成两个正交幂等元之和, 则称 e 为本原幂等元. 幂等元对研究阿廷环与有限维代数的结构起重要作用. 例如, 若 A 是有限维单代数, 则 eAe 是可除代数当且仅当幂等元 e 是本原的.

正交幂等元(orthogonal idempotent elements)　见"幂等元".

主幂等元(principal idempotent element)　见"幂等元".

本原幂等元(primitive idempotent element)　见"幂等元".

环的块(blocks of a ring)　一种特殊理想. 由环的本原幂等元所决定的理想. 设 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是有单位元 1 的环 R 的正交本原幂等元集, 且 $1=e_1+e_2+\cdots+e_n$. 在 E 中定义关系"$\sim$": $e_i\sim e_j$ 当且仅当存在 $1\leqslant k\leqslant n$ 使得 $e_kRe_i\neq0$ 和 $e_kRe_j\neq0$. 由关系$\sim$可得出对 E 的等价关系"$\approx$": $e_i\approx e_j$ 当且仅当存在 $1\leqslant i_1,\cdots,i_j\leqslant n$ 使得 $e_i\sim e_{i_1}\sim\cdots\sim e_{i_j}\sim e_j$. 将 E 中元按$\approx$分为等价类: $E_1,E_2,\cdots,E_r$, 若

$$u_i=\sum_{e_{i_k}\in E_i}e_{i_k},$$

则 $u_1,u_2,\cdots,u_r$ 是两两正交的幂等元, 其和为 1. 这些 u_i 称为环 R 的块幂等元, 相应的 u_iRu_i 称为 R 的块, 它是不可分解环. 于是

$$R=\bigoplus_{i=1}^{r}u_iRu_i,$$

即 R 分解为不可分解环的直和. 这种块分解与 R 的幂等元集 E 的选择无关, 由 R 惟一决定.

块幂等元(block idempotents)　见"环的块".

环的同态(homomorphism of rings)　两个环之间的一种映射. 设 φ 是环 R 到 R'的一个映射, 若它保持环的加法和乘法运算, 即对任意 $a,b\in R$ 有

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b);\quad \varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b),$$

则称 φ 为 R 到 R'的同态. 在 φ 下 R 在 R'中的像集记为 $\mathrm{Im}\varphi$, 称为 φ 的同态像. R 中一切在 φ 下的像等于零的元素的集合, 记为 $\ker\varphi=\{x\in R\mid\varphi(x)=0\}$, 称为 φ 的同态核. 若 $\mathrm{Im}\varphi=R'$, 即对 R'中任意元 a'恒存在 R 中元 a 使得 $\varphi(a)=a'$, 则称 φ 为 R 到 R'的满同态, 或称为 R 到 R'上的同态, 简称 R 同态于 R', 记为 $R\sim R'$. 设 φ 是 R 到 R'的同态, 若 R 中不同元素在 φ 下的像也不同, 则称 φ 为单同态. φ 为单同态当且仅当 $\ker\varphi=0$. 当 $R'=R$ 时 φ 称为 R 的自同态.

环的同态像(homomorphic image of a ring)　见"环的同态".

环的同态核(homomorphic kernel of a ring)　见"环的同态".

环的单同态(monomorphism of rings)　见"环的同态".

环的满同态(epimorphism of rings)　见"环的同态".

环的自同态(endomorphism of ring)　见"环的同态".

环的同构(isomorphism of rings)　一类特殊的同态. 即既单且满的环同态. 设 R,R'是两个环, φ 是 R 到 R'的满同态且是单同态, 称 φ 为 R 到 R'上的同构, 常称 R 与 R'同构, 记为 $R\cong R'$. 当 $R'=R$ 时, 称 φ 为 R 的自同构. 若 $\mathrm{Aut}\,R$ 是环 R 的一切自同构的集合, 则 $\mathrm{Aut}\,R$ 关于映射的乘法构成一个群, 称为环 R 的自同构群. 若 φ 是加群$(R,+)$到$(R',+)$的同构, 且$\varphi(ab)=\varphi(b)\varphi(a)$, 对任意 $a,b\in R$, 则称 φ 为 R 到 R'上的反(逆)同构. 若 R 与 R'反同构, 则 R 与 R'的反环同构.

环的自同构(automorphism of a ring)　见"环的同构".

环的反(逆)同构(anti(inverse)-isomorphism of rings)　见"环的同构".

环的自同构群(automorphism group of a ring)　见"环的同构".

环的同态基本定理(fundamental theorem of homomorphism of rings)　环论的基本定理之一. 若 φ 是环 R 到 R'的满同态, 则 φ 的核 $\ker\varphi$ 是 R 的理想, 并且 R 模以 $\ker\varphi$ 的商环与 R'同构, 即$R/\ker\varphi\cong R'$. 这一定理在某些文献中也称为第一同构定理. 许多代数系都有相应的定理.

第一同构定理(first isomorphism theorem)　见"环的同态基本定理".

环的同构定理(isomorphism theorem for rings)　环论的重要定理. 许多代数系都有相应的定理. 若 R 是环, S 是 R 的子环, I 是 R 的理想, 则 I 是 $S+I$ 的理想, 且在映射 $s+I\rightarrow s+(S\cap I)$(任 $s\in$

S）下，恒有 $S+I/I \cong S/S\cap I$.

特征理想(characteristic ideal)　与特征子群相类似的概念. 设 I 是环 R 的理想，若对 R 的任何自同态 φ，恒有 $\varphi(I)\subseteq I$，则称 I 为 R 的特征理想. 设 R 是有单位元的交换环，I 是 R 代数 A 的理想，若对 A 的一切代数自同态 φ，恒有 $\varphi(I)\subseteq I$，则称 I 为代数 A 的特征理想.

环的半同态(semi-homomorphism of rings)　较同态为弱的映射. 设 R 与 R' 是任意结合环，φ 是 R 到 R' 的映射，若 φ 适合：

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b),$$
$$\varphi(a^2)=\varphi(a)^2,$$
$$\varphi(aba)=\varphi(a)\varphi(b)\varphi(a),$$

则称 φ 为 R 到 R' 的半同态. 当 φ 又是 R 到 R' 的满、单映射时，称 φ 为 R 到 R' 上的半同构或称 R 与 R' 半同构. 关于半同态(半同构)在什么条件下是同态(同构)的问题，中国数学家华罗庚于 1949 年得出：当环 R' 无零因子时，半同态(半同构)必为同态(同构)或反同态(反同构).

环的半同构(semi-isomorphism of rings)　见“环的半同态”.

环的对合(involution of a ring)　环的一个特殊的反自同构. 设 $*$ 是环 R 自身的一个映射，若对任意 $a,b\in R$，映射 $*$ 都满足：

$$(a^*)^*=a;$$
$$(a+b)^*=a^*+b^*;$$
$$(ab)^*=b^*a^*,$$

则 $*$ 称为 R 的对合. 有对合的环具有一些特殊的性质，例如，含极小右理想的本原环 R，若 R 有对合，则 R 同构于除环 D 上全矩阵环 D_m(对某自然数 m)；或者对每一个自然数 n，存在 R 的子环，记为 $R(n)$，有 $R(n)\cong D_n$ 或 $R(n)\cong D_{2n}$. 对合对研究结合环上李结构与若尔当结构有重要意义. 任何群环 $R[G]$ 都是有对合的环. 事实上，若

$$\left(\sum a_x x\right)^* = \sum a_x x^{-1}\quad (a_x\in R, x\in G),$$

则 $*$ 就是 $R[G]$ 的一个对合.

全直和(full direct sum)　代数系的一种广义(无限)分解形式. 设 Ω 是指标集，$\{R_\alpha\mid\alpha\in\Omega\}$ 是环族. 设 $\prod\limits_{\alpha\in\Omega}R_\alpha$ 是对每个 $\alpha\in\Omega$ 取值于 R_α 的一切 Ω 上的函数的集合，即

$$\prod_{\alpha\in\Omega}R_\alpha=\{f:\Omega\to\bigcup_{\alpha\in\Omega}R_\alpha\mid f(\alpha)\in R_\alpha,\alpha\in\Omega\}.$$

对 $\prod\limits_{\alpha\in\Omega}R_\alpha$ 中任意元素 f,g 规定加法与乘法：

$$(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha);$$
$$(fg)(\alpha)=f(\alpha)\cdot g(\alpha)\quad(\alpha\in\Omega)$$

(这相当于卡氏集中的元素按坐标运算)，$\prod R_\alpha$ 关于上述运算做成环，称为 $R_\alpha(\alpha\in\Omega)$ 的全直和，也称直积. 若记

$$\overline{R}_\alpha=\{f\in\prod_{\alpha\in\Omega}R_\alpha\mid f(\beta)=0,\forall\,\beta\neq\alpha\},$$

则 $\overline{R}_\alpha$ 是 $\prod R_\alpha$ 的理想，且在映射 $f\to f(\alpha)$ $(\forall\, f\in\overline{R}_\alpha)$ 下 $\overline{R}_\alpha\simeq R_\alpha$. 若 R_α 是结合代数，则 $\prod\limits_{\alpha\in\Omega}R_\alpha$ 也为结合代数，称为代数 $R_\alpha(\alpha\in\Omega)$ 的全直和.

直积(direct product)　即“全直和”.

直和(direct sum)　环的直积的对偶概念. 设 Ω 是指标集，$\{R_\alpha\mid\alpha\in\Omega\}$ 是环族. 若 R 为对任意 $\alpha\in\Omega$ 取值于 R_α 而仅有限个 $f(\alpha)\neq0$ 的 Ω 上函数 f 的全体，即 $R=\{f:\Omega\to\bigcup\limits_{\alpha\in\Omega}R_\alpha\mid f(\alpha)\in R_\alpha,\alpha\in\Omega$ 且仅有限个 $f(\alpha)\neq0\}$，则 R 是 $\prod\limits_{\alpha\in\Omega}R_\alpha$ 的子环，称为 $\{R_\alpha\mid\alpha\in\Omega\}$ 的外直和，记为

$$R=\bigoplus_{\alpha\in\Omega}R_\alpha,$$

$f(\alpha)$ 称为 f 的 α 分量. 若 $\overline{R}_\alpha=\{f\in R\mid f(\beta)=0,\forall\,\beta\neq\alpha\}$，$f\to a_\alpha$ 当且仅当

$$f(\alpha)=a_\alpha\in R_\alpha,\ f(\beta)=0,\quad \beta\neq\alpha,\ \forall\,\beta\in\Omega,$$

则 $\overline{R}_\alpha\simeq R_\alpha$. $\overline{R}_\alpha$ 为 R 的理想，且

$$R\cong\sum_{\alpha\in\Omega}\overline{R}_\alpha,\quad \overline{R}_\alpha\cap\sum_{\substack{\beta\neq\alpha\\ \beta\in\Omega}}\overline{R}_\beta=(0)\quad(\forall\,\alpha\in\Omega).$$

反之，设 $\{A_\alpha\mid\alpha\in\Omega\}$ 是环 R 的理想族，若

$$R=\sum_{\alpha\in\Omega}A_\alpha \text{ 且 } A_\alpha\cap\sum_{\substack{\beta\neq\alpha\\ \beta\in\Omega}}A_\beta=(0)\quad(\forall\,\alpha\in\Omega),$$

则称 R 是 $\{A_\alpha\mid\alpha\in\Omega\}$ 的内直和. 它等价于 R 中任一元 x 可惟一表示为有限个 A_α 中元的和. 若 $\overline{A}_\alpha$ 表示 R 到 A_α 的射影，即 $\overline{A}_\alpha=\{f:\alpha\to\bigcup A_\alpha\mid f(\alpha)=a_\alpha\in A_\alpha, f(\beta)=0\ \forall\,\beta\neq\alpha\}$，则 $\overline{A}_\alpha$ 是环且 $\overline{A}_\alpha\simeq A_\alpha$. 于是

$$R\cong\bigoplus_{\alpha\in A}\overline{A}_\alpha,$$

R 也为 $\overline{A}_\alpha$ 的外直和. 因此，内、外直和是互相转化的，而统称直和. 当 Ω 是有限集时，直积与直和一致. 关于结合代数(李代数)的直和概念与环的直和概念是完全类似的.

外直和(external direct sum)　见“直和”.

内直和(inner direct sum)　见“直和”.

亚直和(subdirect sum)　亦称亚直积. 全直和的一类特殊子环. 设 $\{R_\alpha\mid\alpha\in\Omega\}$ 是环族，R 是全直和 $\prod\limits_{\alpha\in\Omega}R_\alpha$ 的子环，φ_α 是 $\prod\limits_{\alpha\in\Omega}R_\alpha$ 到 R_α 的投射. 若对每个 $\alpha\in\Omega$，φ_α 在 R 上的限制 $\varphi_\alpha|_R$ 是 R 到 R_α 的满同态(即 $\varphi_\alpha(R)=R_\alpha$)，则称 R 是 $\{R_\alpha\mid\alpha\in\Omega\}$ 的亚直和，记为 $R=\sum_s\oplus R_\alpha$. 若 $A_\alpha=\ker\varphi_\alpha|_R$，则 $R_\alpha\cong R/A_\alpha$ 且

$$\bigcap_{\alpha\in\Omega}A_\alpha=0.$$

因此，若 $\{A_\alpha\mid\alpha\in\Omega\}$ 是 R 的理想族，则 R 是 $\{R/A_\alpha\mid\alpha\in\Omega\}$ 的亚直和当且仅当 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Omega}A_\alpha=0$.

亚直积(subdirect product)　即“亚直和”.

亚直既约环(subdirectly irreducible ring)　一类特殊环. 即在亚直分解观点下的既约环. 若环 R

有极小非零理想 I，它含于 R 的任意非零理想中，则称 R 是亚直既约环，I 称为环 R 的心. 从亚直分解观点，环 R 是亚直既约环当且仅当 R 的一切非零理想的交非零(即环 R 有心). 任何单环皆为亚直既约环. 亚直既约的右本原环是左本原环. 伯克霍夫(Birkhoff,G.)证明：任何环都是亚直既约环的亚直和.

环的心(heart of a ring) 见“亚直既约环”.

中心化扩张(centralizing extension) 环扩张的一种类型. 设 R 是环 S 的子环，它们有相同的单位元. 若存在 R 在 S 的中心化子 $C_S(R)$ 的子集 T，使得 $S=RT=\{\sum a_ir_i(\text{有限和})|a_i\in T, r_i\in R\}$，则称 S 是 R 的中心化扩张. 当 T 是有限集时，称 S 为 R 的 Lib 扩张. 若 S 是 R 的 Lib 扩张，R,S 中有一个是下列环类之一，则另一个也是阿廷环、诺特环、雅各布森环、希尔伯特环.

Lib 扩张(liberal extension) 见“中心化扩张”.

环的正规扩张(normal extension of a ring) 应用较广的有限扩张. 设 R 是环 S 的子环，它们有相同的单位元 1，若存在 S 中元 $a_1,a_2,\cdots,a_n(a_1=1)$ 使得

$$S=\sum_{i=1}^{n}Ra_i$$

且 $Ra_i=a_iR$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则称 S 为 R 的正规扩张. 例如，若 H 是群 G 的正规子群，且 $[G:H]<\infty$，则群环 $R[G]$ 是 $R[H]$ 的正规扩张. 正规扩张 S 与基环 R 有许多相关性质，例如，S 是诺特环(阿廷环)当且仅当 R 也是，并且关于雅各布森根与贝尔根有如下关系：$J(R)=R\cap J(S)$；$\beta(R)=R\cap\beta(S)$.

雅各布森环(Jacobson ring) 一类特殊环. 它是希尔伯特环的拓广. 若环 R 的每个素理想都是 R 的若干个本原理想的交，则称 R 为雅各布森环. 它等价于 R 的每一个真同态像的贝尔根与雅各布森根一致；或 R 的每一个素同态像是雅各布森半单. 雅各布森环的多项式扩张、正规扩张也是雅各布森环. 若环 R 是交换的，则此雅各布森环称为希尔伯特环. 它源于希尔伯特零点定理的原始陈述.

希尔伯特环(Hilbert ring) 见“雅各布森环”.

布朗-麦柯环(Brown-McCoy ring) 简称 BM 环. 与雅各布森环相类似的环类. 一个环 R 称为布朗-麦柯环，是指 R 的每一个同态像的贝尔根等于布朗-麦柯根. 它等价于 R 的素理想是若干个极大理想的交；也等价于 R 的每个素同态像是布朗-麦柯半单环. BM 环的多项式扩张、正规扩张仍是 BM 环. 当 R 是交换环时，BM 环就是希尔伯特环.

单环(simple ring) 与群论中单群类相对应的基本环类. 一个环(代数)R，若只有平凡理想(即除 R 和零理想外不含其他理想)，则称 R 为弱单环或单纯环(弱单代数). 弱单环(弱单代数)可分两类：一类是 $R^2\neq 0$，此类环(代数)称为单环(单代数)，它的幂零根为零；另一类是 $R^2=0$，R 称为零乘环，它的幂零根是 R 本身. 域 F 上的全矩阵环是单环，也是 F 上的单代数. F 上有限维单代数必含单位元.

弱单环(weak simple ring) 见“单环”.

单纯环(simplicial ring) 见“单环”.

零乘环(zero multiplication ring) 见“单环”.

单代数(simple algebra) 见“单环”.

弱单代数(weak simple algebra) 见“单环”.

环的降链条件(descending chain condition for rings) 刻画环的一种有限条件. 环 R 中给定适合某种条件 δ 的子环，简称 δ 子环(常指左(或右)理想、理想、零化子单侧理想). 若环 R 对 δ 子环的任一降链

$$A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_n\supseteq\cdots$$

都存在自然数 N 使 $A_N=A_{N+1}=\cdots$；或者说，R 对 δ 子环的任一降链序列都终止于有限项，则称环 R 对 δ 子环满足降链条件. 它等价于环 R 对 δ 子环的极小条件：环 R 中 δ 子环的任意非空集合 Φ，必有极小元，即存在 δ 子环 $A\in\Phi$，A 除本身外不含 Φ 中任一 δ 子环.

环的极小条件(minimum condition for rings) 见“环的降链条件”.

左(右)阿廷环(lift (right) Artinian ring) 一类具有降链条件的环. 它是阿廷(Artin,E.)引入的. 对左(右)理想满足降链条件(或说对左(右)理想满足极小条件)的环称为左(右)阿廷环. 左阿廷环未必是右阿廷环. 阿廷环 R 的一切幂零(单侧和双侧)理想的和，记为 N，称为 R 的幂零根. N 是 R 的最大幂零理想，且 R/N 不含非零的幂零单侧理想. 但对一般环(或代数)不成立. 幂零根也称古典根，对域上有限维代数，可同样定义幂零根. 阿廷对类域论、实数域理论、代数数论及拓扑学的辫子理论都有重要贡献. 他于 1927 年创立的阿廷环理论推动了抽象代数学的发展.

阿廷环的幂零根(nilpotent radical of Artinian ring) 见“左(右)阿廷环”.

阿廷环的古典根(classic radical of Artinian ring) 见“左(右)阿廷环”.

半单阿廷环(semisimple Artinian ring) 一种特殊的阿廷环. 即幂零根为零的阿廷环. 环 R 是半单阿廷环当且仅当左(右)正则模是半单模. 常简称半单环. 著名的韦德伯恩-阿廷定理给出：R 是半单环的充分必要条件是 R 为有限个单阿廷环的直和，若不计顺序则是惟一的. 并且，单阿廷环同构于一个除环 D 上有限维向量空间的线性变换环. 换言之，

单阿廷环同构于某除环 D 上全矩阵环 D_n，其中 n 是单阿廷环表为极小左理想的直和的长度. 这一定理是对有限维半单代数结构定理的完美推广.

半单环(semisimple ring) 见"半单阿廷环".

半极小条件(semi-minimun condition) 极小条件的推广. 若环 R 的任意真同态像(即同态核不为零)对 δ 子环(即具有某种性质的子环)满足极小条件，则称 R 对 δ 子环有半极小条件. 例如，整数环、整数环上矩阵环、多项式环、一元多项式环上的矩阵环对左理想都适合半极小条件而不适合极小条件. 科恩(Cohen, I. S.)于 1950 年对交换环引入有限制的极小条件，即半极小条件. 谢邦杰于 1963 年对一般环引入半极小条件，并刻画了理想(左理想)满足半极小条件的半本原环、半素环与诣零半单纯环，推广了韦德伯恩-阿廷定理.

核环(kernel ring) 一类特殊环. 谢邦杰研究理想适合半极小条件的环时，作为一个重要工具于 1963 年提出的环类. 设 R 是环，若：

1. R 含非零本原理想且其全部非零本原理想之交 K 非零；

2. R 为不含非零本原理想的本原环；

则称 R 为有本原核的环. 当 R 满足条件 1 时，称 R 有本原核 K；当 R 满足条件 2 时，称 R 有本原核 R，并称 R 为本原核环. 类似地，可定义质核、克德质核、质核环与克德质核环. 除了用以刻画理想满足半极小条件的环，有核环本身也有许多有趣的性质.

环的升链条件(ascending chain condition for rings) 与降链条件相平行的有限条件. 若环 R 中任意 δ 子环(具有某性质的子环，如左(右)理想、理想、零化子理想)的升链

$$R_1 \subseteq R_2 \subseteq \cdots \subseteq R_n \subseteq \cdots$$

都终止于有限项，即存在正整数 N，使得对任意自然数 l，皆有

$$R_N = R_{N+1} = \cdots = R_{N+l} = \cdots,$$

则称 R 对 δ 子环适合升链条件. 它等价于环 R 对任意非空 δ 子环的集合 Φ 有极大元(即存在 δ 子环 $T \in \Phi$，对任意 δ 子环 $X \in \Phi$，恒有 $T \not\subseteq X$)，此条件称为环 R 对 δ 子环满足极大条件. 环 R 对(左)理想满足极大条件当且仅当 R 的每一(左)理想是有限生成.

环的极大条件(maximum condition for rings) 刻画环的一种有限条件(参见"环的升链条件"). 许永华于 1977 年给出极大条件等于极小条件的充分必要条件. 设 R 是结合环，N 是诣零根，则 A 的左理想极小条件等价于左理想极大条件加上 N 是有限多个极大左理想之交，当且仅当存在正整数 k_i，使 $k_iN^i \subseteq RN^i$，其中 $k_iN^i = \{k_ia \mid a \in N^i\}$，$i = 1, 2, \cdots, m$，而 m 适合 $N^m = 0$.

左(右)诺特环(left (right) Noetherian ring) 与阿廷环相对偶的具有有限条件的重要环类. 若环 R 对左理想满足极大条件(等价地，R 对左理想有升链条件)，则称 R 为左诺特环. 同样可定义右诺特环. 霍普金(Hopkins, C.)、林文茨基(Levitzki, J.)于 1939 年各自独立证明了有单位元的左(右)阿廷环是左(右)诺特环. 更精确刻画它与阿廷环的关系是许永华-富永定理：一个阿廷环 R 是诺特环当且仅当分式模 $J(R)/RJ(R)$ 是有限的，$J(R)$ 是 R 的雅各布森根.

阿廷-里斯性质(Artin-Rees property) 对诺特环的一种刻画. 指诺特环的某些理想所具有的特殊性质. 诺特环 R 的理想 I，若对每个有限生成 R 模和它的子模 U，恒有正整数 m，使得对任意整数 $n \geqslant m$ 适合

$$MI^n \cap U = (MI^m \cap U)^{n-m},$$

则称 I 有(强)阿廷-里斯性质，简称 AR 性质. 当 $n = m+1$，有 $MI^n \cap U = UI$ 时，称 I 有弱 AR 性质. 阿廷-里斯引理证明：诺特环的任意有限个中心元素生成的理想有 AR 性质(1956 年). 从而交换诺特环有 AR 性质. 诺特环的多中心理想有弱 AR 性质.

强AR 性质(strong Artin-Rees-property) 见"阿廷-里斯性质".

弱 AR 性质(weak Artin-Rees property) 见"阿廷-里斯性质".

科恩环(Cohen ring) 以科恩(Cohen)命名的特殊环. 若对环 R 的每一个素理想 P，R/P 都是半单环，或者说，R/P 是右阿廷环，则 R 称为科恩环.

半极大条件(Semi-maximum condition) 较极大条件为弱的有限条件. 若环 R 的任意真同态像对 δ 子环(即满足给定条件的子环)适合极大条件，则称 R 对 δ 子环有半极大条件. 例如，除环上矩阵环适合左理想半极大条件及右理想的半极大条件. 但对环 R 的理想而言，半极大条件与极大条件是一回事.

左分母集(left denominator set) 环的一种特殊的乘法闭子集. 设 S 是环 R 的乘法闭子集. 若 S 满足条件：若 $s \in S$，$a \in R$，则存在 $t \in S$，$b \in R$ 使得 $bs = ta$，即 $Rs \cap Sa \neq \varnothing$；若 $as = 0$ 对某 $s \in S$ 恒有 $ta = 0$ 对某 $t \in S$，则称 S 是左分母集. 类似地，可定义右分母集. 若在卡氏积 $R \times S$ 中规定关系：$(a, s) \sim (b, t)$ 当且仅当存在 c, d 使得 $ca = db$，$cs = dt$，则此等价关系将 $R \times S$ 中元分为等价类. 若 a/s 表示 (a, s) 所在的等价类，则 $S^{-1}R = \{a/s \mid a \in R, s \in S\}$ 对等价类的加法和乘法：

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{t_1a + s_1b}{s_1t} \quad (t_1s = s_1t, t_1, s_1 \in S),$$

$$\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}=\frac{a_1b}{t_1s}\ (t_1a=a_1t,t_1\in S,a_1=R),$$

构成一个环,称为 R 的左分式环,也称左商环.同样可构造右分式环 RS^{-1}. $R\to S^{-1}R$ 的自然同态 λ 的核

$$\ker\lambda=\{a\in R\mid 存在\ t\in S\ 有\ ta=0\}.$$

右分母集(right denominator set)　见"左分母集".

左(右)分式环(left (right) fractional ring)　见"左分母集".

左(右)商环(left (right) quotient ring)　见"左分母集".

左(右)全分式环(total left (right) ring of fractions)　整环的分式域概念的推广.设 S 是环 R 的一切正则元的集合,Q 是 R 的扩环含单位元.若满足:S中任一元在 Q 中有逆元;Q 中任一元 x 恒可表示为 $x=a^{-1}b,b\in R,a\in S$,则称 Q 为 R 的左全分式环,称 R 为 Q 的左次环.此时 S 为左分母集,且 $Q=S^{-1}R$.同理可定义右全分式环、右次环.环 R 有左全分式环当且仅当 R 是左奥尔环.此时 $R\to S^{-1}R$ 的自然同态 λ 的核为零,从而 R 可同构嵌入 $Q=S^{-1}R$ 中.

左(右)次环(left (right) order ring)　见"左(右)全分式环".

奥尔环(Ore ring)　一类特殊环.它是可构造分式环的非交换环.一个环 R 称为满足左奥尔条件,是指对环 R 中任意元素 a,b,其中 b 是正则元,一定存在 R 中元 c,d,d 是正则元,使得 $da=cb$.即存在 R 的正则元的集合 S,使得 $Sa\cap Rb\neq\varnothing$ 成立.这是奥尔(Ore,O.)于 1931 年提出的.同样可定义右奥尔条件.左、右奥尔条件统称为奥尔条件.含正则元的环 R,若满足左(右)奥尔条件,则称为左(右)奥尔环,统称奥尔环.左(右)奥尔环必有左(右)分式环.

奥尔条件(Ore condition)　见"奥尔环".

哥尔迪环(Goldie ring)　较诺特环更广的环类.环 R 的左理想集合 $\{A_i\mid i\in I\}$,若其中每个 A_i 都是非零的,且

$$\sum_{i\in I}A_i=\bigoplus_{i\in I}A_i$$

为左 R 模的直和,则称左理想集 $\{A_i\mid i\in I\}$ 是无关的.若环 R 的左理想组成的任意无关集都是有限的,且 R 对左零化子有极大条件,则称 R 为左哥尔迪环.同样可定义右哥尔迪环.左诺特环是左哥尔迪环.左、右哥尔迪环统称哥尔迪环.

哥尔迪定理(Goldie theorem)　非交换环论中的重要定理.关于素、半素哥尔迪环的结构定理.R 是哥尔迪半素(或素)环的充分必要条件为 R 是半单(或单)阿廷环 Q 的左次环.哥尔迪定理在诺特环中的作用类似于阿廷环中的韦德伯恩-阿廷定理.这是继韦德伯恩(Wedderburn,J. H. M.)、阿廷(Artin,E.)、雅各布森(Jacobson,N.)的环理论后又一类重要结构定理.

稠密左(右)理想(dense left (right) ideal)　环的一类特殊的左(右)理想.它可用于构作极大商环.环 R 的左理想 D,若对任一 $a\in R$,左理想$(D:a)=\{r\in R\mid ra\in D\}$的右零化子 $\Omega(D:a)$等于零,则称 D 为 R 的稠密左理想.类似地可定义稠密右理想.两个稠密左理想的交是稠密的,环 R 中含稠密左理想的任一左理想也是稠密的.若 D,D'是 R 的稠密左理想,$\sigma:D\to D'$是 R 模同态,则 D' 的原像集 $\sigma^{-1}D'$ 也是稠密的.若环 R 有单位元,I 是 R 的两侧理想,则 I 是稠密的充分必要条件是 I 的右零化子 $\Omega(I)=0$.

极大商环(maximal ring of quotients)　一种特殊的商环.约翰逊(Johnson,R. E.)和内海(Utumi,Y.)从环的稠密左理想到环自身的模同态出发构造的一种分式(商)环.设 R 是有 1 环,Φ 是含一切序对(D,σ)的集合,其中,D 是 R 的稠密左理想,$\sigma:D\to R$ 是 R 模同态.在 Φ 中规定:$(D,\sigma)\sim(D',\sigma')$当且仅当存在稠密左理想 $D''\subseteq D\cap D'$,使得 σ,σ'在 D'' 上一致.于是,"$\sim$"是 Φ 的等价关系,从而决定 Φ 的一个分类.若$[D,\sigma]$表示(D,σ)所在的等价类,$Q_m(R)$是一切等价类的集合,规定

$$[D,\sigma]+[D',\sigma']=[D\cap D',\sigma+\sigma'];$$
$$[D,\sigma][D',\sigma']=[\sigma^{-1}D,\sigma\sigma'],$$

则 $Q_m(R)$构成一个以$[R,1]$为单位元的环,称为 R 的极大商环.对任意 $r\in R$,若 $\tau_r:R\to R$ 为右乘映射,则 $r\to[R,\tau_r]$为 R 到 $Q_m(R)$的同构嵌入,即$Q_m(R)$含 R 为子环.上述方法是内海于 1956 年构造的.若 R 是奥尔环,则由 R 所构造的左全分式环

$$Q_0(R)\subseteq Q_m(R).$$

环的表示(representation of a ring)　环到一个加群自同态环的映射.环 R 到一个加群 M 的自同态环 $\mathrm{End}^r(M)$的一个环同态映射

$$\rho:\ a\to\rho_a\ (\rho_a\in\mathrm{End}^r(M),\forall\ a\in R)$$

称为环 R 的一个表示.若 ρ 是环 R 的一个表示,规定 $ma=m\rho_a$,则 M 是右 R 模.反之,若 M 是右 R 模,$\rho_a:m\to ma\ (\forall\ m\in M)$,则 ρ_a 是加群 M 的自同态,且 $\rho:a\to\rho_a$ 是 R 到自同态环$\mathrm{End}^r(M)$的同态,从而 ρ 是 R 的一个表示.环的表示与右 R 模之间的这种转化关系,可将模的一些概念和性质平移到环的表示上.例如,ρ 是环 R 的忠实表示、可约表示,即 ρ 所相应的右 R 模分别是忠实的、可约的.其他类似.

环的忠实表示(faithful representation of a ring)　环表示的一种类型.设 ρ 是环 R 的表示,若

ρ 相应的右 R 模 M 是忠实的，则称 ρ 是忠实的. 环 R 的表示 ρ 是忠实的当且仅当 $\ker\rho=0$.

环的既约表示(irreducible representation of a ring) 环表示中最简单的一种类型. 设 ρ 是环 R 的表示，若 ρ 相应的右 R 模 M 是既约的(在 R 有单位元时，即单模)，则称 ρ 是既约的.

本原环(primitive ring) 一类重要的环. 研究雅各布森根时引入的，其后被广泛讨论与应用. 若环 R 有一个忠实右(左)R 单模(即忠实既约右(左)R 模)，则称 R 为右(左)本原环. 通常将右本原环简称本原环. 一般说来，左本原环未必是本原环，但当 R 有极小单侧理想时，左本原性与本原性一致. 任何本原环皆为素环. 雅各布森(Jacobson, N.)引入本原环来代替有限条件下的单环，从而得出在没有有限条件限制下的一般半单环的结构定理，这是环论的重大发展.

右本原环(right primitive ring) 见"本原环".

左本原环(left primitive ring) 见"本原环".

既约环(irreducible ring) 一类特殊的环. 加群自同态环的特殊子环. 设 $E=\mathrm{End}^r(M)$ 是加群 M 的自同态环，若 R 是 $\mathrm{End}^r(M)$ 的子环，且 M 是既约右 R 模时，则称 R 为既约环. R 是既约环当且仅当 R 是本原环.

舒尔引理(Schur lemma) 环论中的著名引理. 它在环表示理论中起重要作用. 设 R 是环，M_1, M_2 是既约(右)R 模. 若 f 是 M_1 到 M_2 的 R 同态，则 $f=0$ 或 f 是 M_1 到 M_2 上的同构. 由此引理可知：既约 R 模的自同态环是除环.

n 重可迁环(n-fold transitive ring) 亦称 n 重传递环. 用以刻画稠密环的概念. 除环 D 上右向量空间的线性变换完全环(简称全线性变换环)的一个子集 M，若对任意 $k(\leqslant n)$，D 无关向量 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 与任意 k 个向量 $y_1,y_2,\cdots,y_k$，均存在 $a\in M$ 使得 $x_ia=y_i, i=1,2,\cdots,k$，则称 M 为 n 重可迁集. 当 M 是全线性变换环的子环时，M 称为 n 重可迁环. 一重可迁环是既约的自同态环，从而是本原环. 除环 D 上右向量空间 V 的任何二重可迁环是 V 的全线性变换环的稠密子环；反之，稠密环对任意正整数 n 都是 n 重可迁的.

n 重传递环(n-fold transmission ring) 即"n 重可迁环".

n 重可迁集(n-fold transitive set) 见"n 重可迁环".

稠密环(dense ring) 一类特殊环. 它是除环上右向量空间的全线性变换环的一个子环，在雅各布森拓扑下，它的闭集等于全线性变换环. 其代数定义是：设 R 是除环 D 上向量空间 V 的全线性变换环的一个子环，若对任意自然数 n，V 中任意 D 无关向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 及任意 n 个向量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，恒有 $a\in R$ 使得 $x_ia=y_i, i=1,2,\cdots,n$，则 R 称为 V 的稠密线性变换环，简称稠密环. 当 V 是 D 上有限维向量空间时，V 仅有惟一的稠密环，即 V 的全线性变换环.

稠密线性变换环(dense ring of linear transformations) 见"稠密环".

雅各布森-谢瓦莱稠密定理(Jacobson-Chevalley density theorem) 本原环的结构定理. 它是韦德伯恩(Wedderburn, J. H. M.)关于单阿廷环结构定理的推广. 若 R 是本原环，有忠实既约右 R 模 M，则 M 的自同态环 $D=\mathrm{End}^r(M_R)$ 是一个除环且 M 是 D 上的向量空间. 该定理断定：R 同构于除环 D 上向量空间的全线性变换环 $\mathrm{End}({}_DM)$ 的一个稠密子环. 换言之，R 是本原环当且仅当存在除环 D 和双模 ${}_DM_R$ 有 M_R 是忠实单模，使得对 M 中每一组有限 D 无关元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 及任意给定元 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 都存在 $a\in R$，满足 $x_ia=y_i\ (i=1,2,\cdots,n)$.

模右(左)理想(modular right(left) ideal) 从环的内部去刻画雅各布森根而引入的一个概念. 对环 R 的一个右(左)理想 $\mathscr{J}$，若存在 $e\in R$ 使得对 R 中任意元 a 恒有

$$a-ea\in\mathscr{J}\ (a-ae\in\mathscr{J}),$$

则称 $\mathscr{J}$ 为 R 的模右(左)理想，而 e 称为模 $\mathscr{J}$ 的左(右)单位元. 有单位元环的任意右(左)理想恒为模右(左)理想. 一般说来，环 R 的一个右理想 $\mathscr{J}$ 是模右理想，当且仅当 $\mathscr{J}$ 是某循环右 R 模 M 的生成元 u(即 $M=uR$)的阶理想，即 $\mathscr{J}=(0:u)=\{x\in R\mid ux=0\}$. 任意真模右理想可嵌入到 R 的极大(必然是模)右理想.

本原理想(primitive ideal) 与(右)本原环密切相关的一类理想. 它可刻画环的雅各布森根. 设 $\mathfrak{a}$ 是环 R 的理想，若 $R/\mathfrak{a}$ 是本原环(左本原环)，则称 $\mathfrak{a}$ 是 R 的本原理想(左本原理想). 本原理想也可由下面条件刻画：环 R 的理想 $\mathfrak{a}$ 是本原理想的充分必要条件是 $\mathfrak{a}$ 为某既约右 R 模的零化子. 另一个充分必要条件是对 R 的某极大模右理想 I，$\mathfrak{a}=(I:R)=\{x\in R\mid Rx\subseteq I\}$. 任何本原理想都是素理想.

左本原理想(left primitive ideal) 见"本原理想".

弱本原环(weakly primitive ring) 比本原环更广而又具有一定的稠密性的环类. 一个右 R 模 M，若它不能嵌入 M 的任意真商模，则称 M 是临界的. 若 M 能嵌入 M 的任意非零真子模中，则称右 R 模是可缩的. 若右 R 模是临界的也是可缩的，则称 M 为临界可缩右 R 模. 对于环 R，若存在一个忠实的临界可缩右 R 模，则称 R 为右弱本原环. 类似地，可定义左弱本原环. 右弱本原环简称弱本原环. 本原

环、素右哥尔迪环是弱本原环. 弱本原环是查尔马洛维茨(Zelmanowitz, J.)于 1981 年定义的，并建立了相应的稠密性定理.

临界可缩模(critically compressible module) 见“弱本原环”.

右(左)弱本原环(right (left) weakly primitive ring) 见“弱本原环”.

环的基座(socle of a ring) 环论的一个重要概念. 对研究有极小单侧理想的本原环有重要作用. 环 R 的一切极小右理想的和(即右 R 正则模 R 的一切极小子模的和)$\mathfrak{S}$ 称为 R 的右基座，也称右基层. 当 R 无极小右理想，规定 R 的右基座为零. 类似地，可定义环 R 的左基座 $\mathfrak{S}'$. $\mathfrak{S}$ 与 $\mathfrak{S}'$ 均为 R 的理想. 一般 $\mathfrak{S}\neq\mathfrak{S}'$，当 R 无非零的幂零单侧理想时，有 $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}'$，称为 R 的基座. 当 R 是有极小单侧理想的本原环时，R 的基座 $\mathfrak{S}$ 是 R 的最小理想且为单环. 基座由迪厄多内(Dieudonné, J.)首先引入.

右(左)基层(right (left) socle) 见“环的基座”.

基座的齐次分量(homogeneous component of a socle) 环论的一个重要概念. 基座的特殊直和项. 同构于一个环 R 中给定极小右理想的一切极小右理想的和 $\mathscr{T}$ 是环 R 的理想，且为 R 的基座 $\mathfrak{S}$ 的直和项. $\mathscr{T}$ 称为基座 $\mathfrak{S}$ 的齐次分量.

半线性变换(semi-linear transformation) 线性变换的推广. 设 V_i 是除环 D_i 上的左向量空间，记为 ${}_{D_i}V_i$，$i=1,2$. 若 φ 是加群 $(V_1,+)$ 到 $(V_2,+)$ 的同态，且存在 D_1 到 D_2 上的同构对应 τ，使得

$$\varphi(dx)=\tau(d)\varphi(x)\quad(\forall\, d\in D_1; x\in V_1),$$

则称 φ 为 ${}_{D_1}V_1$ 到 ${}_{D_2}V_2$ 的半线性变换. 它对刻画含极小单侧理想本原环表示成稠密环的惟一性有重要作用.

$\mathscr{X}_\nu$ 重可迁环($\mathscr{X}_\nu$-fold transitive ring) 有限重可迁环的推广. 它是刻画 ν 基座本原环的结构的重要概念. 设 R 是除环 D 上的向量空间 $\mathfrak{m}$ 的全线性变换环 Ω 的子环，$\mathscr{X}_\nu$ 为无限基数. 若对 $\mathfrak{m}$ 中任意线性无关的向量集 $\{x_i \mid i\in I\}$ 与任一相对应的向量集 $\{y_i \mid i\in I\}$，I 的基数 $<\mathscr{X}_\nu$，存在 $r\in R$ 使得 $x_ir=y_i$，$i\in I$，则称环 R 为 $\mathscr{X}_\nu$ 重可迁环，也称 $\mathscr{X}_\nu$ 重传递环. 当 $\mathscr{X}_\nu=\mathscr{X}_0$(即无限可数基数)时为有限重可迁环. 此概念是约翰逊(Johnson, R. E.)于 1948 年引入的.

$\mathscr{X}_\nu$ 重传递环($\mathscr{X}_\nu$-fold transmission ring) 即“$\mathscr{X}_\nu$ 重可迁环”.

几乎零矩阵环(almost zero matrix ring) 矩阵环的推广. 它对刻画规范本原环结构有重要作用. 设 I 为基数 $\mathscr{X}$ 的足码集，除环 F 上 $\mathscr{X}$ 阶矩阵 $(f_{ij})_{I\times I}$ 称为几乎零矩阵，是指它的元素除有限多个外皆为零. 一个矩阵环，若它的每个元皆为除环 F 上 $\mathscr{X}$ 阶几乎零矩阵，则称此矩阵环为 $\mathscr{X}$ 阶几乎零矩阵环. F 上一切 $\mathscr{X}$ 阶几乎零矩阵构成的环，称为 F 上 $\mathscr{X}$ 阶几乎零矩阵环.

规范本原环(normalizable primitive ring) 有附加条件的特殊本原环. 它有相应于单阿廷环的结构定理. 设 R 是本原环且含非零基座 $\mathfrak{S}$，若存在 R 的正交幂等元子集合 $\{E_i\}_{i\in\Gamma}$，使得

$$\mathfrak{S}=\sum RE_i=\sum E_iR,$$

其中 $E_iR(RE_i)$ 为 R 的极小右(左)理想，则称 R 为规范本原环. 若 Γ 的基数为 $\mathscr{X}$，则称 R 为秩 $\mathscr{X}$ 的规范的本原环. 对任一基数 $\mathscr{X}$ 来说，必存在秩 $\mathscr{X}$ 的规范本原环. 这是许永华于 1983 年引入的，并证明了下面的广义韦德伯恩-阿廷定理：秩为 $\mathscr{X}$ 的任一单纯规范本原环 R 必同构于除环 F 上 $\mathscr{X}$ 阶几乎零矩阵环，并且，若 R 同构于除环 F' 上 $\mathscr{X}'$ 阶几乎零矩阵环，则 $\mathscr{X}=\mathscr{X}'$ 且 $F\cong F'$. 反之，除环上 $\mathscr{X}$ 秩全几乎零矩阵环是单纯规范本原环.

对应基(correspondent base) 与基相关联的一组特定的线性变换. 设

$$V=\sum_{i\in\Gamma}Dx_i$$

为除环 D 上的向量空间，R 为全线性变换环 $\Omega=\mathrm{End}({}_DV)$ 的一个子环，$\{E_i\}_{i\in I}(I\subset\Gamma)$ 为 R 的一个子集，若存在 V 的一组基 $\{u_i\}_{i\in I}$，对任意 $i,j\in I$，满足 $u_iE_i=u_i$；$u_jE_i=0$，$i\neq j$，则称 $\{E_i\}_{i\in I}$ 为 R 的一组对应基. 若对环 R 中元素 l，存在 Γ 的子集 I，使得对任意 $j\in\Gamma\setminus I$ 有 $E_il=lE_i=E_i$；$E_jl=lE_j=0$ $(\forall\, i\in I)$，则称 l 为 R 的 $\{E_i\}_{i\in\Gamma}$ 幂等元.

$\{E_i\}_{i\in\Gamma}$ 幂等元($\{E_i\}_{i\in\Gamma}$-idempotent element) 见“对应基”.

ν 规范本原环(ν-normalizable primitive ring) 规范本原环的推广. 设 R 是含 ν 基座 $\mathfrak{S}_\nu$ 的本原环，若存在 R 的一组对应基 $\{E_i\}_{i\in\Gamma}$，其中 $|\Gamma|=\mathscr{X}$，使得

$$\mathfrak{S}_\nu=\sum_{l\in L_\nu}lR=\sum_{l\in L_\nu}Rl,$$

其中 L_ν 是 R 中秩为 $\mathscr{X}$ 的 $\{E_i\}_{i\in\Gamma}$ 幂等元集，则称 R 为 ν 规范本原环. 当 $\nu=0$ 时，R 是规范本原环.

对偶模(dual module) 推广本原环结构定理而引入的一种模类. 设 M 是除环 D 上的向量空间，$\Omega=\mathrm{End}({}_DM)$，$l$ 为 Ω 中秩为 $\mathscr{X}_\nu$ 的幂等元. 若 $A_\nu=l\Omega$，$A_\nu^*=\Omega l$，$K_\nu=l\Omega l$，A_ν' 为 A_ν^* 的 K_ν 子模，则模对 (A_ν,A_ν') 称为对偶的当且仅当在 $\omega A_\nu'=0$ 时，必有 $\omega=0$，对任意 $\omega\in A_\nu$ 成立. 对偶模对 (A_ν,A_ν') 称为 $\mathscr{X}_\nu$ 型，当且仅当对除环 $K=E\Omega E$ 上的向量空间 $A=ER$ 上任意势小于 $\mathscr{X}_\nu$ 的线性无关子集 $\{x_i\}_{i\in I}$

($|I|<\mathscr{K}_\nu$)和 K 的子集$\{k_i\}_{i\in I}$,有 $a'\in A'_\nu$,使得对任意 $i\in I$ 有 $x_i a'=k_i$. 这是许永华于 1983 年引入的.

ν **基座**(ν-socle) 基座概念的推广. 设 V 是除环 D 上向量空间,R 是 V 的全线性变换环 Ω 的子环,若 $\Gamma_\nu=\{\sigma\in\Omega\,|\,\mathrm{rank}\,\sigma<\mathscr{K}_\nu\}$,$\mathfrak{S}_\nu=\Gamma_\nu\cap R$,则 $\mathfrak{S}_\nu$ 称为 R 的 ν 基座,当且仅当 $\mathfrak{S}_\nu$ 满足:

1. $\mathfrak{S}_\nu\Omega\leqslant\mathfrak{S}_\nu$.
2. $\mathfrak{S}_\nu$ 是 $\mathscr{K}_\nu$ 重可迁的.
3. 若 $\sigma\in\Gamma_\nu$ 且 $\sigma\mathfrak{S}_\nu\leqslant\mathfrak{S}_\nu$,则必有 $\sigma\in\mathfrak{S}_\nu$.

o 基座 $\mathfrak{S}_0$ 是通常的基座. 若 R 是 $\mathscr{K}_\nu$ 重可迁本原环,则 $\mathfrak{S}_\nu$ 是 R 的 ν 基座当且仅当 $\mathfrak{S}_\nu$ 是 $\mathscr{K}_\nu$ 重可迁环,R 有零基座当且仅当 $\mathfrak{S}_\nu=0$. ν 基座是许永华为发展本原环理论于 1979 年引入的.

有ν 基座的本原环的结构定理(structure theorem for primitive ring with ν-socle) 本原环结构定理的推广. 此定理包含通常本原环结构定理. 当 ν 是极限数时,R 是有 ν 基座的本原环当且仅当 R 是 $\mathscr{K}_\nu$ 重可迁的,且对任意非极限数 $\mu<\nu$,R 含有一个秩为 $\mathscr{K}_\mu$ 的元素;当且仅当存在 $\mathscr{K}_\mu$ 型对偶模对(M_μ,M'_μ),使得对每一个非极限数 $\mu<\nu$ 有

$$(M'_\mu:M'_\mu)_\Omega=\{w\in\Omega=\mathrm{End}(M_\mu)\,|\,wM'_\mu\subseteq M'_\mu\}\supseteq R\supseteq G_\mu M_\mu,$$

其中 G_μ 是$(M'_\mu,M'_\mu)_\Omega$ 有一切秩$<\mathscr{K}_\nu$ 的元素的集合. 当 ν 不是极限数时,R 是有 ν 基座 $\mathfrak{S}_\nu$ 的本原环当且仅当 R 是除环 D 上向量空间线性变换环的一个 $\mathscr{K}_\nu$ 重可迁环,且含有一个秩$<\mathscr{K}_{\nu-1}$ 的非零元素;当且仅当存在对偶模对(M,M')使得 R 是$(M':M')_\Omega$ 的子环且含 $G_\gamma M$,其中 $\Omega=\mathrm{End}(M)$. 它是许永华于 1983 年证明的.

p **环**(p-ring) 布尔环的推广. 若对素数 p 而言,环 R 的每一个元 x 都适合 $x^p=x$ 且 $px=0$,则称 R 是 p 环. 布尔环是 2 环. 任意 p 环都是交换环. 含 p^k 个元素的环 R 是 p 环当且仅当 R 是 k 个域 Z_p 的直和. 无限环 R 是 p 环当而且仅当 R 是 Z_p 的亚直和.

提升幂等元(lifting idempotent element) 环论的基本概念之一. 指剩余类环 $R/\mathfrak{a}$ 的幂等元转化为 R 的幂等元. 设 $\mathfrak{a}$ 是 R 的理想,$\varepsilon=x+\mathfrak{a}$ 是 $R/\mathfrak{a}$ 的幂等元,若存在 R 的幂等元 e,在自然同态 υ 下有 $\upsilon(e)=\varepsilon$,则称 ε 提升到 e. 若对 $R/\mathfrak{a}$ 的正交幂等元集$\{\varepsilon_i\,|\,i\in I\}$,存在 R 的正交幂等元集$\{e_i\,|\,i\in I\}$,使得 $\upsilon(e_i)=\varepsilon_i$,则称 $R/\mathfrak{a}$ 的正交幂等元集$\{\varepsilon_i\,|\,i\in I\}$可提升为 R 的正交幂等元集. 若 $\mathfrak{a}$ 是 R 的诣零理想,则 $R/\mathfrak{a}$的任意有限或可数正交幂等元集均可提升为 R 的正交幂等元集. 若对 R 的每个理想 $\mathfrak{a}$ 而言,$R/\mathfrak{a}$ 的幂等元皆可提升为 R 的幂等元,则称 R 为提升环. 若 N 为 R 的一个根,R/N 的幂等元可提升为 R 的幂等元,则称 R 对根 N 是提升的.

提升环(lifting ring) 见"提升幂等元".

局部环(local ring) 它和半局部环分别是完全准素环和半准素环概念的推广. 环 $R(\neq 0)$中,若不可逆元(即非单位)集 A 对于加法是封闭的,则 R 称为局部环. 以下性质是等价的:

1. R 是局部环.
2. R 中不可逆元的集 A 是(双边)理想.
3. A 是极大左(右)理想.
4. 对于任意 $r\in R$,r 或 $1-r$ 必是左(右)可逆元.
5. R 的雅各布森根 $J(R)$是极大左(右)理想.
6. $R/J(R)$是除环.
7. $J(R)=A=\{x\in R\,|\,Rx\neq R\}$($x$ 称为非生成子).

若 $R/R(J)$是半单的,则称 R 是半局部的. 局部环的概念对于模的分解性质十分重要. 对于任意 R 模 M,若 M 的自同态环 $\mathrm{End}(M)$是局部的,则 M 是不可分解的. 反之,若 M 是不可分解且是内射的,则 $\mathrm{End}(M)$是局部环. 东屋五郎(Azumaya,G.)曾利用局部环的概念,把古典的克鲁尔-锐玛克-施密特定理推广为项数可以是无穷的情形. 局部环也具有特殊的同调性质. 卡普兰斯基(Kaplansky,I.)于 1958 年证明:对于局部环 R,任意 R 投射模是 R 自由的.

半局部环(semi-local ring) 见"局部环".

完全环(perfect ring) 一类具有同调性质的环. 设 R 是环,若任意左 R 模有投射包,则称 R 为左完全的. 以下性质是等价的:

1. R 是左完全环.
2. $R/J(R)$是半单的且 $J(R)$是 T 幂零的.
3. 任意平坦左 R 模是投射的.
4. R 的任意右主理想链满足极小条件.

完全环的概念是巴斯(Bass,H.)于 1960 年研究模范畴的同调性质时引进的. 上面的结果也就是著名的巴斯定理.

半完全环(semiperfect ring) 介于完全环与半局部环之间的一类环. 设 $J(R)$是环 R 的雅各布森根,若 $R/J(R)$是半单环,且 $R/J(R)$的幂等元可提升为 R 的幂等元,则称 R 为半完全环. 例如,左、右阿廷环、局部环都是半完全环. 半完全环是左、右对称的,从同调论的观点看,R 是半完全环意味着${}_RR$ 或 R_R 是半完全模,即它们的任意同态像有投射包. 半完全模和完全模是马雷斯(Mares,E. A.)在研究完全环的推广时引进的. 半完全环还有以下的等价刻画:

1. 任意有限生成 R 左(右)模有投射包.
2. 任意单 R 左(右)模有投射包.

3. 存在 R 的完全正交幂等元集$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$使得 e_iRe_i 是局部环.

环的基环(basic ring of a ring)　在同构意义下可由环的基本幂等元决定的一类环. 设 S,R 都是环,若存在 R 的一个基本幂等元 e 使 $S\cong eRe$,则称 S 是 R 的一个基本环,简称基环. 幂等元 $e\in R$ 称为基本的,是指存在 R 的一组正交、本原幂等元 $e_1,e_2,\cdots,e_m$,使 $e=e_1+e_2+\cdots+e_m$ 且 $Re_1,Re_2,\cdots,Re_m$ 是本原左 R 模的完全代表系. 对于半完全环 R,R 的基本环存在且在同构的意义下是惟一决定的. 任意半完全环莫锐塔(Morita)等价于它的基本环. 若半完全环 R 的单位元 1 是基本幂等元,则 R 是自己的基本环,后者的一个充分必要条件是 $R/J(R)$是除环的直和.

基本环(basic ring)　见"环的基环".

基本幂等元(basic idempotent element)　见"环的基环".

半准素环(semiprimary ring)　有幂零根的特殊环类. 若 $J(R)$是环 R 的雅各布森根,且 $J(R)$是幂零的,则当 $R/J(R)$是(阿廷)半单环时,称 R 是半准素环;当 $R/J(R)$是(阿廷)单环时,称 R 是准素环;当 $R/J(R)$是除环时,称 R 是完全准素环. 准素环是完全准素环上的全矩阵环. 若 R 是半准素环,则 R 是右阿廷环当且仅当 R 是右诺特环.

准素环(primary ring)　见"半准素环".

完全准素环(completely primary ring)　见"半准素环".

戴德金有限环(Dedekind finite ring)　一类特殊环. 它的左逆元也是右逆元. 一个环 R,对任意 $x,y\in R$,若 $xy=1$ 则 $yx=1$,就称 R 为戴德金有限环. 例如半局部环、左(右)自内射环都是戴德金有限环.

完全戴德金有限环(completely Dedekind finite ring)　一类特殊的有限环. 若环 R 的每个剩余类环 R/I 皆为戴德金有限环,则称 R 为完全戴德金有限环. 在此类环中,任意两个互素的循环右理想 $A=aR,B=bR$ 是可交换的,即 $AB=BA$.

右(左)双环(right(left) duo rings)　用以推广交换环理论中理想的准素分解定理和克鲁尔交定理到非交换环中而引入的环类. 若环 R 的任意右(左)理想皆为双侧理想,则称 R 为右(左)双环. 若环 R 是右也是左双环,则称 R 为双环. 右双环 R 的理想 Q 称为右准素的,是指对任意 $a,b\in R$,若 $ab\in Q$,$b\notin Q$,则

$$a\in\sqrt{Q}=\{x\in R\mid 存在正整数\ n,使得\ x^n\in Q\}.$$

$\sqrt{Q}$是 R 的素理想. 在一般非交换诺特环中,不能保证每个理想均有(有限)准素分解,也不能保证克鲁尔交定理成立. 但对于右(左)双环来说相应定理成立. 诺特右双环 R(理想有升链条件)中每个理想 A 皆可分解为有限个不可短缩的右准素理想的交: $A=Q_1\cap Q_2\cap\cdots\cap Q_r$. 并且,若 A 有另一不可短缩的准素理想之交 $A=Q'_1\cap Q'_2\cap\cdots\cap Q'_s$,则 $r=s$,且适当排列次序有

$$\sqrt{Q_i}=\sqrt{Q'_i}\quad(i=1,2,\cdots,s).$$

若 R 是有 1 的左诺特右双环,A 是 R 的理想,则

$$\bigcap_{n=1}^{n}A^n=0,$$

当且仅当 $1-A=\{1-z\mid z\in A\}$皆不是 R 的零因子. 哈比卜(Habeb,J. M.)于 1987 年证明:阿廷双环是局部子环的直和. 他同时研究了阿廷双环的正合性和单列性. 薛卫民于 1989 年证明了哈比卜提出的一个猜想:阿廷双环上极小余生成子的自同态环仍是阿廷双环.

右(左)准素理想(right(left) primary ideal)　见"右(左)双环".

双环(duo ring)　见"右(左)双环".

I 环(I-ring)　比 Ⅱ 正则环更为广泛的环类. 环 R 称为 I 环$\Leftrightarrow R$ 的每个非诣零的右(左)理想含一个非零的幂等元. I 环的根是诣零的. 但 I 环的同态像未必为 I 环(参见"Ⅱ 正则环").

Ⅱ 正则环(Ⅱ-regular ring)　一类特殊环. 正则环的推广. 若对环 R 的每个元素 a,都有正整数 n 与 $x\in R$,使得 $a^nxa^n=x$,则称 R 是 Ⅱ 正则环. 每个代数的代数是 Ⅱ 正则环.

双正则环(biregular ring)　一类特殊环. 指每个主理想皆为直和项的环类. 若环 R 的每个主理想都可由一个中心幂等元生成,则称 R 为双正则环. 有 1 的双正则环的所有主理想构成布尔代数. 双正则环是半本原环,它是本原环当且仅当它是有单位元的单环. 不含非零幂零元的 Ⅱ 正则环是双正则环;而不含非平凡幂等元且不是除环的有 1 单环是双正则的,但不是 Ⅱ 正则环.

双正则理想(biregular ideal)　一类特殊理想. 若环 R 中元素 a 所生成的主理想有单位,则 a 称为 R 的双正则元. 环 R 的一个理想称为双正则理想,是指该理想中每个非零元都是双正则元. 双正则理想是双正则环. 若 A 是 R 的双正则理想,B 是 A 的双正则理想,则 B 是 R 的双正则理想. 环 R 的双正则理想的和也是双正则的,且 R 含惟一极大双正则理想,记为$\mathscr{B}(R)$. 但至今不知,$R/\mathscr{B}(R)$是否不含双正则理想.

双正则元(biregular element)　见"双正则理想".

冯·诺伊曼正则环(von Neumann regular ring)　一类重要正则环. 若对环 R 的任意元 x 都有

R 中元 a 使得 $xax=x$,则称 R 为冯·诺伊曼正则环. 环 R 是冯·诺伊曼正则的当且仅当 R 的每个有限生成右(左)理想可由一个幂等元生成;又当且仅当每个右(左)R 模是平坦模. 正则环起源于冯·诺伊曼连续几何的坐标环,是由冯·诺伊曼(von Neumann,H.)于 1936 年引入的. 有极小单侧理想而不满足极小条件的单环是正则环而非双正则环. 正则环的每个左(右)主理想都是投射的,因此半单环是正则的,正则环是左和右半遗传的.

遗传幂等环(hereditarily idempotent ring)　对一般根的研究有重要价值的环类. 若环 R 的每个理想都是幂等的,则称 R 为遗传幂等环. 一个环 R 是遗传幂等的当且仅当对 R 的任意理想 B,C,恒有 $B\cap C=BC$. 例如,一个环 R 的反单根的补根是遗传幂等的.

弱正则环(weakly regular ring)　介于正则环类与遗传幂等环类之间的一类环. 环 R 称为弱正则的,若对 R 中每一个元 a,都有 $b\in(a)$,使得 $a=ab$,其中(a)是由 a 生成的主理想;它等价于 R 的每个右理想 I 是幂等的,即 $I^2=I$. 若对环 R 中每一个元 a,都有 $x\in R$ 使得 $a=a^2x$,则称 R 为强正则环. 每个强正则环都是冯·诺伊曼正则环.

强正则环(strongly regular ring)　见“弱正则环”.

SBI 环(ring suitable for building idempotent elements)　幂等元对雅各布森根可提升的环类. 设 $J(R)$是环 R 的雅各布森根,若 $x^2-x=z\in J(R)$在 R 中有解 $x=z_1$,使得 z 在 R 的中心化子 $C_R(z)$与 z_1 在 R 的中心化子 $C_R(z_1)$相等,则称 R 是 SBI 环. 这个概念是卡普兰斯基(Kaplansky,I.)引入的. 例如,根为诣零理想的环是 SBI 环. 在 SBI 环中,若$\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\cdots,\bar{u}_n\}$是 $\bar{R}=R/J(R)$的正交幂等元,则存在 R 的正交幂等元$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,使得 $\bar{u}_i=\bar{e}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

算术环(arithmetical ring)　比交换遗传环更广的环类. 一个交换环 R 称为算术环,若对 R 中任两个元素 a,b,恒有

$$(a:b)+(b:a)=R,$$

其中

$$(a:b)_R=\{r\in R\mid ar\subset bR\}.$$

这是富克斯(Fuchs,L.)于 1949 引入的. 卡米罗(Camillo,V. P.)于 1975 年证明:R 是算术环当且仅当 R 作为 R 模是分配的(即对任意 RZ 模 A,B,C 适合 $A\cap(B+C)=A\cap B+A\cap C$). 詹森(Jenson,C. U.)于 1966 年证明:环 R 是算术环,当且仅当它对于任意极大理想 $\mathfrak{m}$ 的局部化 $R_{\mathfrak{m}}$ 是赋值环. 同时,他把这样的环与弱整体同调维数$\leqslant1$ 的环联系起来,从这里可看到这类环密切联系到戴德金环. 贝伦斯(Behrens,E. A.)把算术环的概念推广到非交换的情形,他在扎里斯基(Zariski,O.)及沙欧尔(Samuel,P.)工作的基础上,把这类环刻画为在其中孙子定理成立的环.

一致环(uniform ring)　一类特殊环. 在一定条件下,任意 n 个元有相同零化子的环类. 在环 R 的左或右零因子生成的理想 A 中,若对任意有限个元 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,皆存在 R 中元素 c,使得 $a_1c=a_2c=\cdots=a_nc=0$ 或 $ca_1=ca_2=\cdots=ca_n=0$,则称 R 为一致环. 例如,任意有两侧零化子的环以及每个无零因子的环都为一致环. 一致环 R 上全矩阵环的零伪根 F 恒有 $F(R_n)=F(R)_n$.

n-fir 环(n-fir ring)　亦称 n 自由理想环. 一类特殊环. 若环 R 中任意 n 个元生成的右理想皆为有相同秩的自由 R 模,则称环 R 为 n 自由理想环,简称 n-fir 环. 环 R 是 1-fir 环的充分必要条件是 R 无真零因子. 这种环与研究群代数有无真零因子有密切关系.

n 自由理想环(n-free ideal ring)　即“n-fir 环”.

序列环(serial ring)　一类特殊环. 指可表为其单侧理想有线性序的(单侧)理想的有限直和的环类. 一个模 M,若它的子模对包含关系($A\subseteq B$ 或 $B\subseteq A$)是线性序,则称 M 是单列模. 环 R 当看做左正则模${}_RR$ 是有限个单列模的直和时,称 R 是左序列环. 同样地,可定义右序列环,但 R 是左序列环未必为右序列环. 若环 R 是左序列环也是右序列环,则称 R 是序列环. 任何阿廷主理想环皆为序列环. 若 R 是左遗传环且任意左 R 模的内射包是平坦的,则 R 的任意左阿廷商环是左序列环. 克德(Köthe,G.)于 1935 年首先引入了阿廷序列环并称之为单列环. 中山正(Nakayama,T.)于 1940 年称之为广义单列环. 在有些文献中,单列环一词通常用来指准素可分解的阿廷序列环. 浅野启三(Asano,K.)于 1949 年曾刻画阿廷序列环为任意单侧理想都是主理想的环. 阿廷序列环是特殊的 QF 环,它也具有良好的同调性质. 毕尔德(Byrd,K. A.)于 1970 年证明:环 R 是序列环当且仅当任意 R 模是拟内射的;又当且仅当它是拟投射的.

单列模(uniserial module)　见“序列环”.

左(右)序列环(left(right) serial ring)　见“序列环”.

单列环(uniserial ring)　见“序列环”.

广义单列环(generalized uniserial ring)　见“序列环”.

凝聚环(coherent ring)　一种与理想的有限生成相关的环类. 若环 R 的任意有限个有限生成左理想的交,以及有限生成左理想的左零化子均为有限

生成的，则称 R 为左凝聚环．从模的观点来说，R 是左凝聚环当且仅当 R 的每个有限生成左理想是有限表示的（作为左 R 模），又当且仅当平坦右 R 模的每一个直积是平坦的．设 X 是基数为 α 的未定元集，若 $R[X]$ 是左凝聚环，则称 R 为左 α 稳定凝聚环．于是，对于基数 $\alpha<\beta$，若 R 是左 β 稳定凝聚环，则 R 也是左 α 稳定凝聚环．若对任意自然数 n，R 是左 n 稳定凝聚的，则对任意基数 α，R 也为左 α 稳定凝聚的．

α 稳定凝聚环（α-stably coherenting）　见"凝聚环"．

遗传环（hereditary ring）　对投射性具有遗传性的环类．任意环 R 作为正则模都是投射的．若 R 的任意左（右）理想都是 R 投射的，则称 R 为左（右）遗传环．它等价于：任意投射左（右）R 模 P 的任意子模都是投射的；也等价于：任意内射左（右）R 模 Q 的任意商模是内射的．遗传环的概念在讨论模的自由性与投射性向子模传递的可能性时是重要的．这也是它命名的由来．从同调论的角度看，遗传环就是整体同调维数（及余维数）$\leqslant 1$ 的环．因此主左理想整环是左遗传环．但 $\mathbf{Z}(\sqrt{-5})$ 是戴德金环（即遗传环）而非主理想环．若 R 是左遗传环，则任意自由左 R 模的子模同构于 R 的左理想的直和．因此，若 R 是左主理想环，则任意自由左 R 模的子模是自由的．环 R 称为左半遗传环，若 R 的任意有限生成左理想都是投射模．半遗传交换整环称为普吕费尔（Prüfer，H.）环．戴德金环是普吕费尔环．赋值环和非紧致黎曼面上的解析函数环也是普吕费尔环．后者是霍尔（Helmer，O.）于 1940 年就得出的结果．斯马尔（Small，L.）曾得到一些关于半遗传环左、右对称的条件（参见"PP 环"）．环 R 称左次遗传环，若 R 的任意有限生成左理想都是平坦左 R 模．R 是左半遗传的当且仅当 R 是左次遗传的和左凝聚的．

左（右）遗传环（left (right) hereditary ring）见"遗传环"．

半遗传环（semi-hereditary ring）　见"遗传环"．

次遗传环（subhereditary ring）　见"遗传环"．

普吕费尔环（Prüfer ring）　见"遗传环"．

PP 环（PP-ring）　半遗传环的推广．若环 R 的任意左主理想都是投射模，则称 R 为左 PP 环．右 PP 环可以相应地定义．R 是左半遗传的，当且仅当对于任意正整数 $n\geqslant 1$，R 的 n 阶全矩阵环 R_n 是左 PP 环．交换 PP 环 R 的商环 $Q(R)$ 是有限个域的积当且仅当 R 是有限个整环的积（莱维（Levy，L. S.），1963 年）．

自内射环（self-injective ring）　一类特殊环．即正则模是内射模的环．一个环 R，若 ${}_RR$（R_R）是内射模，则 R 称为左（右）自内射环．环的自投射性是平凡的，然而它的自内射性却是决定其模范畴的对偶性的重要因素，因此，可用它来刻画一些重要环类，如拟弗罗贝尼乌斯环等．在交换环的情形，R 的商环的自内射性与 R 上模的分解性有密切联系，即任意 R 模是循环模的直和当且仅当 R 是阿廷主理想环；当且仅当 R 是诺特环且对于任意理想 I，R/I 是自内射的．

完全对偶环（ring with perfect duality）　亦称广义 QF 环．具有近似于（有限维）向量空间那样的良好的对偶性质的特殊环类．它介于 PF 环与 QF 环之间．若环 R 上任意有限生成的（左或右）R 模是反射的，即对于任意有限生成 R 模 M，

$$M^{**}\cong M,M^{*}=\mathrm{Hom}_R(M,R),$$

则称 R 为完全对偶环．R 是完全对偶环当且仅当 ${}_RR$ 和 R_R 是余生成子；又当且仅当 ${}_RR$ 是余生成子且 R_R 是内射的；又当且仅当 R_R 是余生成子且 ${}_RR$ 是内射的；又当且仅当 ${}_RR$ 和 R_R 是内射的且任意单 R 模同构于 R 的一个理想．完全对偶环 R 是半完全的且 ${}_RR$ 和 R_R 是有限余生成的（即 $\mathrm{Soc}({}_RR)$ 和 $\mathrm{Soc}(R_R)$ 是有限生成本质子模）．最早对这一类环进行研究的有迪厄多内（Dieudonné，J.，1958 年）、森田纪一（Morita，K.，1958 年）和大万川弘辛（Tachikawa，H.，1958 年）等人．

对偶环（ring with duality）　介于 QF 环和半完全环之间的环类．若对环 R 存在环 T 和 $R-T$ 双模 ${}_RE_T$，使得 ${}_RE$ 和 E_T 是内射余生成子且存在自然的环同构 $\mathrm{End}_R(E)\cong T^{\mathrm{op}}$，$\mathrm{End}(E_T)\cong R$（$T^{\mathrm{op}}$ 是 T 的反环），则环 R 称为对偶环．若 $R=T$，则称 R 为自对偶环．若 $R=E=T$，则称 R 为完全对偶环或广义 QF 环．左（或右）诺特完全对偶环是 QF 环．对偶环是森田纪一（Morita，K.）于 1958 年首先提出并研究的．它是半完全环（奥索夫茨克（Osofsky，B. L.，1966 年）证明的），并且交换对偶环是局部环的有限直和．缪勒（Müller，B. J.）证明：环 R 是对偶环当且仅当 ${}_RR$ 和左 R 模范畴的极小余生成子都是线性紧致的且对于对偶环，线性紧致模和反射模是等价的．

自对偶环（ring with self-duality）　见"对偶环"．

线性紧致模（linearly compact module）　一类具有某种有限性的特殊模．设 M 是左 R 模，若任意有限可解同余方程组

$$x\equiv x_i(\mathrm{mod}\ N_i)\ (N_i\subseteq M,i\in I)$$

是可解的，则称 M 是线性紧致的（对离散拓扑）．线性紧致模的概念和环的对偶性有密切的关系．事实上，对于对偶环，模的线性紧致性和模的反射性是等

价的.察林斯基(Zelinsky,D.)和缪勒(Müller,B.J.)等对线性紧致模做了深入的研究.

拟弗罗贝尼乌斯环(quasi-Frobenius ring) 具有对偶性质的重要环类.若环 R 是(左或右)诺特的且满足以下等价条件之一:

1. ${}_RR$ 或 R_R 是内射的;

2. ${}_RR$ 或 R_R 是内射余生成子;

3. R 具有对偶零化子性质,即对 R 的任意左理想 A 和任意右理想 B,$lr(A)=A$ 且 $rl(B)=B$,其中

$$r(A)=\{x\in R\mid Ax=0\},$$

$$l(B)=\{x\in R\mid xB=0\};$$

则称 R 为拟弗罗贝尼乌斯环(简称 QF 环).QF 环是中山正(Nakayama,T.)于 1939 年引入的,它是左右对称的且是左和右阿廷的.阿尔门翠尼(Armendriaz,E.P.)于 1980 年把诺特条件减弱为本质左(或右)理想满足降链条件.胡恩(Huynh,D.)和韦斯宝尔(Wisbauer,R.)于 1989 年进一步把上述降链条件减弱为升链条件.QF 环的一个重要同调性质是:R 是 QF 环当且仅当任意 R 投射模是内射的,又当且仅当任意内射 R 模是投射的.若 QF 环 R 满足以下条件之一:

1. $\mathrm{Soc}({}_RR)\cong_R(R/\mathrm{rad}(R))$;

2. $\mathrm{Soc}(R_R)\cong(R/\mathrm{rad}(R))_R$;

则称 R 为弗罗贝尼乌斯环.

QF 环(QF ring) 即"拟弗罗贝尼乌斯环".

弗罗贝尼乌斯环(Frobenius ring) 见"拟弗罗贝尼乌斯环".

QF-1 环(代数)(QF-1 ring (algebra)) 拟弗罗贝尼乌斯环(代数)的一系列推广.它是思罗尔(Thrall,R.M.)于 1948 年提出的.即 QF-1,QF-2 和 QF-3 环(代数).若环(代数)R 的任意忠实左 R 模 M 是平衡的,即规范同态 $\lambda:R\to\mathrm{Biend}({}_RM)$ 是满的,其中 $\mathrm{Biend}({}_RM)=\mathrm{End}(M_T)$,而 $T=\mathrm{End}({}_RM)$,则称 R 为左 QF-1 的;若环(代数)R 是半完全的且任意不可分解投射左 R 模和右 R 模都有单和本质的基座,则称 R 为 QF-2 的;若 R 有一个极小忠实左 R 模(模 M 称为极小忠实的,若它是任意忠实模 T 的直和项),则称 R 是 QF-3 的.例如 QF 代数是 QF-1 代数.中心为阿廷的有限生成代数 R 的商环是 QF-1 的当且仅当 R 是准素可分解序列环,而诺特交换 QF-1 环是 QF 环.

QF-2 环(代数)(QF-2 ring (algebra)) 见"QF-1 环(代数)".

QF-3 环(代数)(QF-3 ring (algebra)) 见"QF-1 环(代数)".

伪弗罗贝尼乌斯环(pseudo-Frobenius ring) 简称左 PF 环.比完全对偶环(即广义 QF 环)更一般的环.环 R 称为伪弗罗贝尼乌斯环,若 R 满足以下等价条件之一:

1. ${}_RR$ 是内射模且基座 $\mathrm{Soc}({}_RR)$ 是有限生成本质的.

2. R 是左半完全的、左自内射的且 $\mathrm{Soc}({}_RR)$ 是本质的.

3. ${}_RR$ 是左余生成子且单左 R 模同构类是有限的.

4. ${}_RR$ 是左余生成子且任意单左 R 模同构于 R 的某个左理想.

5. 任意忠实左 R 模是生成子.

6. 任意余生成子是生成子.

PF 环的概念是东屋五郎(Azumaya,G.)于 1959 年在讨论内射模的对偶性质时提出的,他提出了左 PF 环是否是右 PF 环的问题.狄斯勤格(Dischinger,F.)和缪勒(Müller,W.)于 1986 年证明了答案是否定的.

PF 环(PF ring) 见"伪弗罗贝尼乌斯环".

局部可分解环(local-decomposable ring) 局部环的推广.若环 R 是局部环的有限积,则称环 R 为局部可分解的.若 R 是摩锐塔等价于一个局部可分解环,则称 R 为准素可分解的.一般地,环 R 是摩锐塔等价于局部环的有限积,当且仅当$R/J(R)$是半局部的且 R 的基本环是局部环的积;又当且仅当 R 是局部环上全阵环的有限积.对于半准素环 R,R 是准素可分解的当且仅当 R 的素理想是交换的.

准素可分解环(primary-decomposable ring) 见"局部可分解环".

B 环(B-ring) 以引入者巴斯(Bass,H.)第一个字母命名的一种特殊环.设 R 是环,若任意非零左 R 模 M 有极大子模(或等价地,对于 M 的任意子模 N,$\mathrm{rad}(M/N)\neq M/N$),则称 R 是左 B 环.若任意非零循环左 R 模有极小子模(或等价地,对于任意非零左 R 模 M,$\mathrm{Soc}(M)\neq 0$),则 R 称为左基座环.完全环和 V 环都是 B 环.半准素环是左和右 B 环.B 环和基座环是巴斯为了研究环 R 的雅各布森(Jacobson,N.)根 $J(R)$的 T 幂零性于 1960 年引入的.事实上,若 R 是左 B 环或右基座环,则 $J(R)$是 T 幂零的.

基座环(primitive ring) 见"B 环".

QI 环(QI-ring) 半单环的推广.QI 即拟内射(quasi-injective)之意.设 R 是环,若任意拟内射 R 模是内射的,则称 R 是左 QI 环.任意左 QI 环是左诺特环.由拟内射模的定义可知左 QI 环是左 V 环.喀赫勒(Koehler,A.)于 1970 年曾给出下面的刻画:R 是左 QI 环当且仅当任意两个拟内射左 R 模的直和是拟内射的.

FP 内射环(FP-injective ring) 自内射环和正则环的推广.设 R 是个环,若从 R 的任意有限生成

左理想 I 到 R 的同态 $f:I\to R$ 可以扩充为 R 的自同态 $g:R\to R$，则称 R 是左 FP 内射环. R 是左 FP 内射的当且仅当任意有限表示左 R 模 M 是无扭的.

PS 环(PS-ring)　一类特殊的环. PS 是投射的基座英文缩写. 若基座 $\mathrm{Soc}({}_RR)$是投射模，则环 R 称为左 PS 环. PS 环的概念是尼柯尔孙(Nicholson, W. K.)和瓦特斯(Watters, J. F.)于 1988 年引入的，他们证明：环簇$\{R_i\}_{i\in I}$的直积 $\prod_{i\in R}R_i$ 是 PS 环当且仅当每一个 R_i 是 PS 环；并提出命题对于亚直和是否成立. 薛卫民于 1990 年证明答案是否定的.

V 环(V-ring)　亦称余半单环. 半单环的推广. 若环 R 满足以下的等价条件之一：

1. 任意单左 R 模是内射的；
2. 任意左 R 模是余半单模(即它的任意子模是极大子模的交)；
3. 任意左理想是极大左理想的交，即${}_RR$ 是余半单模；
4. 对任意左 R 模 M，$\mathrm{rad}(M)=0$；

则称 R 为左 V 环.

V 环的概念是维拉玛约(Villamayor, O. E.)提出的. 左 QI 环是左 V 环而左 V 环是半素的. 当 R 是交换环时，R 是 V 环当且仅当 R 是冯·诺伊曼正则环；当且仅当对于 R 的任意理想 I，$I^2=I$. 科真斯(Cozzens, J. H.)证明：非交换 V 环未必是正则环. 卡普兰斯基(Kaplansky, I.)、奥恩斯坦(Ornstein, A.)证明：任意半素诺特 V 环是单 V 环的直和.

余半单环(co-semisimple ring)　即“V 环”.

余诺特环(co-Noetherian ring)　诺特环的对偶. 称环 R 是左余诺特(阿廷)的，若环 R 满足以下等价条件之一：

1. R-mod 有阿廷(诺特)余生成子.
2. 任意有限余生成左 R 模是诺特(阿廷)的.
3. 任意有限余生成左 R 模的子(商)模是有限余生成的.
4. 任意单左 R 模 S 的内射包$E(S)$是阿廷(诺特)的.

余阿廷环是阿廷环的对偶. R 是余阿廷环当且仅当任意有限余生成左 R 模是有限生成的. 例如，Z 是诺特的和余诺特的，但不是阿廷的，也不是余阿廷的. 而对于交换环而言：余阿廷环是余诺特的；诺特环是余诺特的；阿廷环是余阿廷的；余诺特(阿廷)环对于任意极大理想的局部化是诺特(阿廷)的.

余阿廷环(co-Artinian ring)　见“余诺特环”.

投射替换环(projective-exchange ring)　其环上模是投射且有可替换性质的特殊环类. 环 R 上的左 R 模 M，若对于任意左 R 模 A，当

$$A=M'\oplus N=\bigoplus_{i\in I}A_i\quad(\text{其中 } M'\cong M)$$

时，存在 $A_i'\leqslant A_i(i\in I)$使得

$$A=M'\bigoplus_{i\in I}A_i',$$

则称 M 是可替换的. 若任意投射左 R 模是可替换的，则 R 称为左投射替换环. 若正则模${}_RR$ 是可替换的，则称 R 是左替换环. 相应地，右替换环的定义可类似地给出. 模的可替换性是克莱伍利(Crawley, P.)和杰恩森(Jonsson, B.)于 1964 年为研究代数系统，特别是阿贝尔群的(无限)直和分解的加细性而引入的，在模的分解理论上占有重要地位. 沃菲尔德(Warfield, R. B.)于 1967 年证明了具有局部自同态的模是可替换的，从而改进了著名的克鲁尔-雷马特-施密特-东屋五郎定理，并且内射模和拟内射模是可替换的，而投射模的替换性不成立. 但完全环上的任意投射模是可替换的. 苏特斯(Shutters, W.)于 1974 年和斯托克(Stock, J.)于 1982 年引进了投射替换环的概念并证明：冯·诺伊曼正则环是左和右投射替换环.

替换环(exchange ring)　见“投射替换环”.

可替换模(module with exchange property)　见“投射替换环”.

Σ-C 环(σ-C 环)(Σ-C ring (σ-C ring))　其环上模有直和分解的环类. 设 R 是环，C 是左 R 模类，若任意(有限生成)左 R 模可以写成 C 中成员的直和，则 R 称为 Σ-C 环(σ-C 环). 例如，若把 C 取为循环模类，则 σ-C 环就称为 σ 循环环. 一般地，设 $\mathfrak{m}$ 是另一个左 R 模类，若 $\mathfrak{m}$ 中任意(有限生成)R 模可以写成 C 中成员的直和，则称 R 为 $\mathfrak{m}\Sigma$-C 环. 环(上模范畴)的 Σ-C 和 σ-C 性质为环的分类提供了重要的刻画. 例如，R 是左诺特环，当且仅当任意内射左 R 模是不可分解模的直和；R 是 QF 环时，任意内射模是循环模的直和；R 是局部环时，R 是 σ 循环环，当且仅当 R 是几乎极大赋值环.

σ 循环环(σ-cyclic ring)　见“Σ-C 环(σ-C 环)”.

正合环(exact ring)　一类特殊环. 对于一个双模，若它有一个合成列且其中的合成因子都是平衡双模，则称它是正合的. 若对环 R 而言，${}_RR_R$ 是平衡双模，则称环 R 为正合环.

正合模的概念是东屋五郎(Azumaya, G.)为了研究序列环于 1983 年提出的. 卡米罗(Camillo, V. P.)、富勒(Fuller, K. R.)和哈克(Haack, J. K.)在这基础上引进了正合环的概念. 阿廷序列环是正合的，哈比卜(Habeb, J. M.)于 1987 年证明了阿廷双环是正合的. 东屋五郎曾提出猜想：正合阿廷环是自对偶环. 狄斯勤格(Dischinger, F.)和缪勒(Müller, W.)于 1984 年以及瓦什标什(Waschbüsch, J.)于 1986 年证明了对于阿廷序列环，薛卫民于 1989 年

证明了对于雅各布森根的平方为 0 的阿廷双环猜想是成立的.

良好环(good ring)　其根具有良好性质的环类. 设 R 是环, J 是 R 的雅各布森根. 若它满足以下等价条件之一:

1. 对任意左 R 模 M, $JM=\text{rad}(M)$;

2. 对任意左 R 模 M,N, 任意 R 同态 $\varphi:M\to N$, 有 $\varphi(\text{rad}\,M)=\text{rad}(\varphi(M))$;

3. 对任意左 R 模 M, 任意 $U\leqslant M$,

$$(\text{rad}\,M+U)/U=\text{rad}(M/U);$$

则称 R 是左良好环. 右良好环可以相应地定义. 同时是左良好与右良好的环称为良好环. R/J 为半单环的环 R 和单边阿廷环都是良好环. 但是, 存在着良好环 R 而 R/J 不是半单的. 良好环的概念是卡什(Kasch, F.)在研究环的根性质时提出的. 事实上, 对于任意环 R 和其上的任意左模 M, 恒有

$$JM\subseteq \text{rad}\ M.$$

有限模型环(ring of finite module type)　简称 FBG 环. 具有某种有限条件的环类. 设 R 是环, 若不可分解左 R 模的同构类是有限的, 则 R 称为左有限模型环(FM 环). 若不可分解有限生成 R 模的同构类是有限的, 则 R 称为有限的有限模型环(FFM 环)或有限表示型环. 对于环 R, 若存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得任意有限生成 R 模都有一个生成系 B, 有 $|B|\leqslant n$, 则称 R 为有限有界生成的. 关于 FFM 环和 FBG 环有重要的布饶尔-思罗尔猜想: 左 FBG⇒左 FFM. 罗伊特尔(Roiter, A. V.)于 1968 年、奥斯兰德(Auslander, M.)于 1974 年分别证明了猜想对域 K 上有限维代数和阿廷代数成立.

有限有限模型环(ring of finite finite module type)　见"有限模型环".

有限表示型环(ring of finite representation type)　见"有限模型环".

有限有界生成环(ring of finite bounded generators ring)　见"有限模型环".

半完全模(semi-perfect module)　与半完全环相平行的概念. 半完全环看做自身的模, 即为半完全模. 若投射左 R 模 P 的任意同态像有投射包, 则 P 称为半完全的. 以下性质是等价的:

1. P 是左半完全模.

2. JP 在 P 中是多余的, P/JP 是半单的且它的任意直和分解可以提升为 P 的直和分解.

3. JP 在 P 中是多余的, 且 P 是局部模的直和(${}_RL$ 是局部模, 当且仅当 L 是某个单模的投射包, 当且仅当 $L\cong Re$, e 是局部幂等元).

4. P 的任意真子模包含于一个极大子模中且 P 的任意单同态像有投射包.

若投射左 R 模 P 的同构像的任意(有限)直和是半完全的, P 称为左完全的, 则 P 是左完全模当且仅当 P 的任意真子模包含于一个极大子模中且 P 的单同态像的任意直和有投射包. 半完全模和完全模的概念是马雷斯(Mares, E. A.)于 1963 年在研究完全环的推广时引进的. 肯宁汉(Cunningham, R. S.)和鲁特(Rutter, A. Jr.)于 1974 年证明: 半完全模是完全的当且仅当它的不可分解直和项是完全的.

完全模(perfect module)　见"半完全模".

局部模(local module)　见"半完全模".

赋值环(valuation ring)　一种特殊的局部环. 也是重要的交换环类. 交换环 R 称为赋值环, 是指它满足以下等价条件之一:

1. 对任意 $a,b\in R$, 恒有 $a\in Rb$ 或 $b\in Ra$, 换言之, 必有 a 整除 b 或 b 整除 a.

2. R 的所有理想(对于包含关系)组成线性序集.

3. R 是局部环且任意有限生成理想是主理想.

满足条件 3 的环也称为贝祖特环.

赋值环是交换的特殊序列环. 它与戴德金环有密切的关系. 事实上, 交换诺特局部整环是赋值环当且仅当它是戴德金环. 赋值环上的模具有良好的分解性质, 马特利斯(Matlis, E.)于 1957 年证明: 赋值环 R 上任意有限生成模 M 的内射包 $E(M)$ 是有限个不可分解内射模的直和, 或等价于 M 有有限哥尔迪维数. 赋值环 R 上任意有限表示模是循环表示模的直和, 从而推广了卡普兰斯基(Kaplansky, I.)的工作.

贝祖环(Bézout ring)　见"赋值环".

极大赋值环(maximal valuation ring)　一类特殊的赋值环. 赋值环 R, 若任意两两可解同余组 $x\equiv x_\alpha(\text{mod}\,I_\alpha)$($\alpha\in A$, $x_\alpha\in R$, I_α 是 R 的理想, A 是任意足码集)有同解, 则称 R 为极大的. 若以上同余组在 $\bigcap_{\alpha\in A} I_\alpha\neq 0$ 时有同解, 则称 R 为几乎极大的. 这两个概念是卡普兰斯基(Kaplansky, I.)在研究赋值环上扭自由模和有限生成模的分解性质时引入的.

几乎极大赋值环(almost maximal valuation ring)　见"极大赋值环".

Γ 环(gamma ring)　比结合环更广的环类. 设 $R=\{x,y,z,\cdots\}$ 和 $\Gamma=\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\}$ 是阿贝尔群, 规定 $R\times\Gamma\times R\to R$ 的乘法: 对任意 $x,y\in R$, $\alpha\in\Gamma$ 皆有 $x\alpha y\in R$. 若适合下列条件:

1. $(x+y)\alpha z=x\alpha z+y\alpha z$,
   $x(\alpha+\beta)z=x\alpha z+x\beta z$,
   $x\alpha(y+z)=x\alpha y+x\alpha z$;

2. $(x\alpha y)\beta z=x\alpha(y\beta z)$,

对任意 $x,y,z\in R$, $\alpha,\beta\in\Gamma$ 成立; 则称 R 为 Γ 环. Γ

环是诺布萨窪(Nobusawa,N.)于1964年引入的.Γ环的概念和理论与结合环有许多是平行的.例如,若S是R的子加群,且对任意$x,y\in S,\alpha\in\Gamma$恒有$x\alpha y\in S$,则S称为R的Γ子环.R的子加群I,若$I\Gamma R\subseteq I(R\Gamma I\subseteq I)$,则称$I$是$\Gamma$环$R$的左(右)理想.若$I$是$\Gamma$环$R$的右理想也是左理想,则称$I$是$R$的理想,简称$\Gamma$理想.若$I$是$\Gamma$环$R$的理想,记$R/I=\{x+I|x\in R\}$,规定:

$$(x+I)\alpha(y+I)=x\alpha y+I,$$

则R/I也为Γ环,称为R对I的Γ剩余类环.由上,Γ环的概念与结合环相类似,因此,仅列出几个主要的名词.

Γ子环(gamma subring)　见"Γ环".

Γ理想(gamma ideal)　见"Γ环".

Γ剩余类环(gamma residue elassring)　见"Γ环".

Γ同态(gamma homomorphism)　类似于环的同态.设R_i为Γ_i环$(i=1,2)$,θ是$(R_1,+)$到$(R_2,+)$的同态,φ是Γ_1到Γ_2的同构.若对任意$x,y\in R_1,\gamma\in\Gamma_1$满足:

$$(x\gamma y)\theta=(x\theta)(\gamma\varphi)(y\theta),$$

则称序对(θ,φ)是Γ_1环R_1到Γ_2环R_2的同态.设同态(θ,φ)的核$K=\{x\in R_1|x\theta=0\}=0$,即$\theta$是$R_1$到$R_2$的单同态,若$\theta$也为满同态,则称$(\theta,\varphi)$是$\Gamma_1$环$R_1$到$\Gamma_2$环$R_2$的同构.若$I$是$\Gamma$环$R$的理想,$\tau$是$\Gamma$的同构映射,则$R\to R/I$的自然同态$(\rho,\tau)$是指$x\rho=x+I$,任意$x\in R$.对$\Gamma$同态、$\Gamma$同构具有完全类似于环的同态、同构基本定理.

Γ同构(gamma isomorphism)　见"Γ同态".

素Γ环(prime Gamma ring)　平行于素环的一类Γ环.Γ环R的理想P,若对任意理想A,B,当$A\Gamma B\subseteq P$时有$A\subseteq P$或$B\subseteq P$,则称P为Γ素理想.若Γ环R的零理想是Γ素理想,则R称为素Γ环.其判别条件是:R为素Γ环当且仅当对任意$a,b\in R$,若$a\Gamma R\Gamma b=0$,则$a=0$或$b=0$;又当且仅当A,B为右理想(或左理想),若$A\Gamma B=0$,则$A=0$或$B=0$.同素环类似,P是Γ环R的素理想的充分必要条件是R/P是素Γ环.这些是久野升司(Shoji Kyuno)于1978年证明的.

Γ素理想(gamma prime ideal)　见"素Γ环".

Γ素根(gamma prime radical)　与贝尔根平行的概念.Γ环R的素根是R的一切Γ素理想的交,记为$\mathscr{P}(R)$.设S是Γ环R的子集,若$S=\varnothing$或对任意$a,b\in S$皆有$(a)\Gamma(b)\cap S\neq\varnothing$,则称$S$为$m$-$\Gamma$系.设$A$是$\Gamma$环$R$的理想,$\mathscr{P}(A)=\{x\in R|$含$x$的任意$m$-$\Gamma$系与$A$相交$\}$称为$A$的$\Gamma$素根.$\mathscr{P}(A)\supset A$.若$P$是包含$A$的$\Gamma$素理想,则$P\supset\mathscr{P}(A)$,因此,$\mathscr{P}(A)$是包含$A$的一切极小$\Gamma$素理想的交.从而$\mathscr{P}(R)=\mathscr{P}(0)$.

m-Γ系(m-Γ system)　见"Γ素根".

半素Γ环(semiprime gamma ring)　平行于半素环的概念.设Q是Γ环R的理想,U是Γ环R的任意理想.若$U\Gamma U\subseteq Q\Rightarrow U\subseteq Q$,则称$Q$为$\Gamma$半素理想.它等价于:若$a\in U$使得$a\Gamma R\Gamma a\subseteq Q$,则$a\in Q$.若$\Gamma$环$R$的零理想是$\Gamma$半素理想,则$R$称为半素$\Gamma$环.$R$是半素$\Gamma$环当且仅当$R$的$\Gamma$素根$\mathscr{P}(R)=0$;又当且仅当$R$不含非零的强幂零右(左)理想(即$I$是$R$的右(左)理想,若存在正整数$n$使得$(I\Gamma)^nI=0$,则$I$称为强幂零的).与半素环类似,半素$\Gamma$环是素$\Gamma$环的亚直和;$Q$是$\Gamma$半素理想当且仅当$R/Q$是半素$\Gamma$环.这是久野升司(Shoji kyuno)于1978年得出的.

Γ半素理想(gamma semiprime ideal)　见"半素Γ环".

$R\Gamma$模(gamma module over ring)　环R模的推广.设M是加群,R是Γ环,规定$M\times\Gamma\times R\to M$的运算:任意$m\in M,\alpha\in\Gamma,x\in R$有$m\alpha x\in M$,若满足条件:

1. $(m+n)\alpha x=m\alpha x+n\alpha x$.
2. $m\alpha(x+y)=m\alpha x+m\alpha y$.
3. $m\beta(x\alpha y)=(m\beta x)\alpha y$,

对任意$x,y\in R,\alpha,\beta\in\Gamma,m,n\in M$成立,则称$M$是$R\Gamma$模.若$R\Gamma$模$M$中任意$m\neq0$恒有$m\Gamma R=M$,则$M$称为既约$R\Gamma$模;它等价于,对每个$0\neq m\in M$,存在$\alpha\in\Gamma$使得$m\alpha R=M$.若对任意$x\in R$,当$M\Gamma x=0$恒有$x=0$,则称$R\Gamma$模$M$是忠实的,它等价于,$M$的零化理想为零,即

$$A(M)=\{x\in R|M\Gamma x=0\}=0.$$

既约$R\Gamma$模(irreducible $R\Gamma$-module)　见"$R\Gamma$模".

忠实$R\Gamma$模(faithful $R\Gamma$-module)　见"$R\Gamma$模".

本原Γ环(primitive gamma ring)　与本原环类似的概念,也是它的推广.一个Γ环R,若存在忠实既约$R\Gamma$模,则R称为本原Γ环.Γ环R的理想I称为Γ本原理想,是指R/I是本原Γ环.

Γ本原理想(gammaprimitive ideal)　见"本原Γ环".

半本原Γ环(semiprimitive gamma ring)　半本原环在Γ环上的推广.设R是Γ环,$J_\Gamma(R)$表示R的雅各布森根.若不存在既约$R\Gamma$模,称$J_\Gamma(R)=R$为Γ根环;若存在既约$R\Gamma$模,定义$J_\Gamma(R)=\cap A(M)$为一切既约$R\Gamma$模M的零化子的交,或者说,$J_\Gamma(R)=\cap\{I|I$跑遍R的一切极大正则Γ右理想$\}$(即存在$e\in R,\alpha\in\Gamma$,使得对一切$x\in R$皆有$x-e\alpha x\in I$).$J_\Gamma(R)$也可用拟正则性描述.当R是阿廷

环，$J_\Gamma(R)$是幂零的. 若 $J_\Gamma(R)=0$，则 R 称为雅各布森半单 Γ 环，简称 J 半单 Γ 环，或半本原 Γ 环. 例如，$R/J_\Gamma(R)$是半本原 Γ 环. 同样地，半本原 Γ 环是本原 Γ 环的一个亚直和.

雅各布森半单 Γ 环(Jacobson semisimple Γ-ring)　即"半本原 Γ 环".

弱 Γ_N 环(weak Γ_N-ring)　亦称二群结合环. 设 $R=\{x,y,z,\cdots\}$，$\Gamma=\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\}$是两个阿贝尔加群，对一切 $x,y,z\in R$；$\alpha,\beta,\delta\in\Gamma$，若满足条件：

1. $x\alpha y\in R$，$\alpha x\beta\in\Gamma$；
2. $(x+y)\alpha z=x\alpha z+y\alpha z$，
   $x(\alpha+\beta)y=x\alpha y+x\beta y$，
   $x\alpha(y+z)=x\alpha y+x\alpha z$，
   $(\alpha+\beta)x\delta=\alpha x\delta+\beta x\delta$，
   $\alpha(x+y)\beta=\alpha x\beta+\alpha y\beta$，
   $\alpha x(\beta+\delta)=\alpha x\beta+\alpha x\delta$；
3. $(x\alpha y)\beta z=x(\alpha y\beta)z=x\alpha(y\beta z)$，
   $(\alpha x\beta)y\delta=\alpha(x\beta y)\delta=\alpha x(\beta y\delta)$；

则称 R 是弱 Γ_N 环. 若 R 是弱 Γ_N 环，则 Γ 也是弱 R_N 环. 弱 Γ_N 环 R，若还满足：

4. 对一切 $x,y\in R$，$\alpha\in\Gamma$，若 $x\alpha y=0$ 则 $\alpha=0$，

则 R 称为 Γ_N 环. 结合环 R 是 Γ 环(取 $R=\Gamma$)，但它一般不是 Γ_N 环，然而它是弱 Γ_N 环.

Γ_N 环(Γ_N-ring)　见"弱 Γ_N 环".

Γ 代数(gamma algebra)　结合代数的推广. 设 $R=\{a,b,c,\cdots\}$是有单位元的交换环，$\Gamma=\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\}$为阿贝尔群，$E=\{x,y,z,\cdots\}$为单式右 R 模，若 E 是 Γ 环且适合

$$(x\alpha y)a=x\alpha(ya)=x(\alpha a)y=(xa)\alpha y,$$

则称 E 为 R 上 Γ 代数. 例如，每个 Γ 环 R 都可视作整数环 **Z** 上的 Γ 代数. 若 $R=\Gamma$，则 Γ 环 R 恒为 Γ 代数.

撰　稿　朱元森　陈家鼐
审　阅　牛凤文　刘绍学　许永华　吴品三

根　论

一般根论(general theory of radicals)　用公理化方法研究根概念的一般理论. 20 世纪 50 年代初，由阿密苏(Amitsur, S. A.)和库洛什(Kurosh, A.)同时独立建立的理论，其目的是对环构造理论中的不同的根进行概括和抽象，研究它们的本质属性.

根的概念的引入基于下述企图：对所有的环进行分类，并对这种由抽象的代数系统所成的类有所阐明. 这是一个十分困难的问题. 韦德伯恩(Wedderburn, J. H. M)于 1908 年提供了一个巧妙的方法：舍弃结构中的某一指定部分，保留其中具有良好性质的部分，从而把研究一般环的结构归结为较容易研究的"保留"部分的环结构，舍弃的那一部分就称为根. 此后，人们对许多不同的根进行探讨与研究，获得许多深刻的结果. 特别是雅各布森(Jacobson, N.)于 1945 年的工作，对环构造理论作出了杰出的贡献.

一般根论则离开了构造理论的本意，建立了根的公理化体系，拓广了根的概念，使得根的研究进入一个更高的层次.

根性质(radical property)　一般根论中的重要概念. 由阿密苏(Amitsur, S. A.)和库洛什(Kurosh, A.)以公理化的方式定义，是各种不同的根的抽象和概括. 在不区分互相同构的环的前提下，用字母 $\mathscr{R}$ 表示环可能具有的一个抽象的代数性质. 具有性质 $\mathscr{R}$ 的环记为 $\mathscr{R}$ 环. 若环 A 的理想 B(作为一个环)是 $\mathscr{R}$ 环，则称 B 是环 A 的 $\mathscr{R}$ 理想. 若性质 $\mathscr{R}$ 适合下述条件：

1. $\mathscr{R}$ 环的同态像仍是 $\mathscr{R}$ 环；
2. 任一环 A 都有一个 $\mathscr{R}$ 理想 N，它包含 A 的一切 $\mathscr{R}$ 理想；
3. 剩余类环 A/N 不含非零的 $\mathscr{R}$ 理想；

则 $\mathscr{R}$ 称为根性质.

$\mathscr{R}$ 理想($\mathscr{R}$-ideal)　见"根性质".

根(radical)　有两个不同的涵义：一个是根性质的简称；另一个是指环 A 在确定的根性质 $\mathscr{R}$ 下适合根性质中公理 2 的理想 N，称为环 A 的 $\mathscr{R}$ 根，记为$\mathscr{R}(A)$(参见"根性质").

$\mathscr{R}$ 根环($\mathscr{R}$-radical ring)　$\mathscr{R}$ 根是环自身的环类. 当 $\mathscr{R}$ 是一个根性质时，$\mathscr{R}$ 环也称为 $\mathscr{R}$ 根环. 对于 $\mathscr{R}$ 根环 A，$\mathscr{R}(A)=A$.

根类(radical class)　全体根环做成的环类. 一般根论中的重要环类，常和对应的根性质用同一个符号表示. 给定结合环类的一个子类 $\mathscr{R}$，称属于此子类中的环为 $\mathscr{R}$ 环，就得到一个性质 $\mathscr{R}$. 子类 $\mathscr{R}$ 成为根类的充分必要条件是：$\mathscr{R}$ 环的同态像仍是 $\mathscr{R}$ 环；若一个环 A，它的任意非零同态像都含有非零 $\mathscr{R}$ 理想，则 A 本身是 $\mathscr{R}$ 环. 上述条件也是根性质的另一定义方式.

$\mathscr{R}$ 半单环($\mathscr{R}$-semisimple ring)　$\mathscr{R}$ 根为零的环. 在给定的根性质 $\mathscr{R}$ 下，若环 A 没有非零的 $\mathscr{R}$ 理想，即 $\mathscr{R}(A)=(0)$，则称环 A 为 $\mathscr{R}$ 半单环. 任一环 A 关于$\mathscr{R}(A)$的剩余类环 $A/\mathscr{R}(A)$是 $\mathscr{R}$ 半单环. $\mathscr{R}$ 半单环的任一理想，作为一个环，也是 $\mathscr{R}$ 半单环. 环构造定理描述的是各种不同的半单环的结构，将它们表示为一些环的亚直和. 例如，贝尔半单环表示为素环的亚直和，雅各布森半单环表示为本原环的亚直和.

半单类(semisimple class)　一般根论中与根

类相对照的重要环类. 给定根性质 $\mathscr{R}$ 或根类 $\mathscr{R}$,由所有 $\mathscr{R}$ 半单环组成的环类称为根性质 $\mathscr{R}$ 的半单类. 它由根性质或根类惟一确定. 结合环类的子类 $\mathscr{K}$ 成为半单类的充分必要条件是:$\mathscr{K}$ 中环的理想仍在环类 $\mathscr{K}$ 中;若环 A 的每个非零理想都有一个非零同态像是 $\mathscr{K}$ 中的环,则环 A 也是 $\mathscr{K}$ 中的环. 给定半单类 $\mathscr{K}$,由所有没有非零同态像属于 $\mathscr{K}$ 的那些环组成的环类是一个根类,因此根性质也可由半单类惟一确定.

高根(upper radical)　一种根性质. 若 $\overline{\mathscr{K}}$ 是由 $\mathscr{K}$ 中环的所有次理想(环的理想的理想)组成的环类,$\mathscr{R}$ 是由所有不能同态满射到 $\overline{\mathscr{K}}$ 中非零环上的那些环组成的环类,则 $\mathscr{R}$ 是一个根类,对应于一个根性质 $\mathscr{R}$. 这个根性质就称为环类 $\mathscr{K}$ 确定的高根. 根性质的"高"、"低"是指,对于两个根性质 $\mathscr{R}_1$ 和 $\mathscr{R}_2$ 而言,若每个 $\mathscr{R}_1$ 根环都是 $\mathscr{R}_2$ 根环,或者等价地说,每个 $\mathscr{R}_2$ 半单环都是 $\mathscr{R}_1$ 半单环,则称 $\mathscr{R}_1$"低于"$\mathscr{R}_2$,或 $\mathscr{R}_2$"高于"$\mathscr{R}_1$,记为 $\mathscr{R}_1 \leqslant \mathscr{R}_2$. 按上述方法由环类 $\mathscr{K}$ 构造的根性质 $\mathscr{R}$ 满足下述条件:$\mathscr{K}$ 中环都是 $\mathscr{R}$ 半单环;若另有根性质 $\mathscr{S}$,使得 $\mathscr{K}$ 中环都是 $\mathscr{S}$ 半单环,则有 $\mathscr{S} \leqslant \mathscr{R}$. 正是在这个意义下,称根性质 $\mathscr{R}$ 为环类 $\mathscr{K}$ 确定的高根.

低根(lower radical)　与高根相对偶的根性质. 由环类 $\mathscr{K}$ 确定的低根是指下述意义下的根性质 $\mathscr{R}$:$\mathscr{K}$ 中环都是 $\mathscr{R}$ 根环;若另有根性质 $\mathscr{S}$,使得 $\mathscr{K}$ 中环都是 $\mathscr{S}$ 根环,则有 $\mathscr{R} \leqslant \mathscr{S}$. 由环类 $\mathscr{K}$ 确定的低根 $\mathscr{R}$ 通常由超穷归纳法构造:将 $\mathscr{K}$ 中环的同态像称为 $\mathscr{K}$ 上 1 次环,对任意序数 α,当 $\alpha-1$ 存在时,若环 A 的每个非零同态像都有一个非零理想是 $\mathscr{K}$ 上 $\alpha-1$ 次环,则称环 A 是 $\mathscr{K}$ 上 α 次环;当 α 是极限序数时,若存在某个序数 $\beta<\alpha$,使得环 A 是 $\mathscr{K}$ 上 β 次环,则称环 A 是 $\mathscr{K}$ 上 α 次环. 由所有在 $\mathscr{K}$ 上具有某个次数的环组成的环类恰好是一个根类,这就得到所要求的根性质 $\mathscr{R}$. 例如,由所有幂零环组成的环类确定的低根是贝尔根.

遗传根(hereditary radical)　对理想也保持的一种根性质. 设 $\mathscr{R}$ 是一个根性质,若 $\mathscr{R}$ 根环的每个理想作为一个环仍是 $\mathscr{R}$ 根环,即根类 $\mathscr{R}$ 是一个对理想的遗传类,则称根性质 $\mathscr{R}$ 是一个遗传根. 根性质 $\mathscr{R}$ 是遗传根的一个充分必要条件是,对任一环 A 的任一理想 B,均有 $\mathscr{R}(B)=B\cap\mathscr{R}(A)$. 遗传根的半单类是本质扩张闭的,即,若一个环在这个根性质下有一个本质理想是半单环,则这个环本身也是半单环. 反之,若一个根性质的半单类是本质扩张闭的,则这个根性质是遗传的.

超幂零根(supernilpotent radical)　一类重要的根性质. 一种根性质 $\mathscr{R}$,若适合下述条件:$\mathscr{R}$ 是遗传的,每个幂零环都是 $\mathscr{R}$ 根环,则称 $\mathscr{R}$ 为超幂零根. 超幂零根的半单类是本质扩张闭的,并且半单类中每个环都是半素环,即不含非零的幂零理想的环.

弱特殊类(weakly special class)　以超幂零根为半单类的重要环类. 环类 $\mathscr{K}$ 称为弱特殊类,若 $\mathscr{K}$ 满足下述条件:

1. $\mathscr{K}$ 中环都是半素环.

2. $\mathscr{K}$ 是遗传的,即 $\mathscr{K}$ 中环的理想作为一个环仍是 $\mathscr{K}$ 中的环.

3. $\mathscr{K}$ 是本质扩张闭的,即若环 A 有一个本质理想是 $\mathscr{K}$ 中的环,即环 A 本身也是 $\mathscr{K}$ 中的环.

弱特殊类的重要性在于超幂零根的半单类是弱特殊类,而弱特殊类确定的高根是超幂零根. 有这种高根性质的半单环,都可表示为这个弱特殊类中环的亚直和.

特殊类(special class)　一般根论中与特殊根相关连的一类重要的环类. 满足下述条件的环类 $\mathscr{K}$ 称为特殊类:

1. $\mathscr{K}$ 中环都是素环.

2. $\mathscr{K}$ 是遗传的.

3. $\mathscr{K}$ 是本质扩张闭的.

每个特殊类都是一个弱特殊类,因此由特殊类确定的高根是超幂零根. 特殊类概念的建立,是为了引入特殊根的概念,以概括环结构理论中给出的各种具体的根性质.

特殊根(special radical)　一类重要的根性质. 是环结构理论中各种具体根的概括与抽象. 由特殊类确定的高根,称为特殊根. 环的各种结构理论中的根性质都是特殊根. 对特殊根而言,每个半单环都可表示为相应的特殊类中素环的亚直和,这也正是环的结构定理所表述的.

反单根(antisimple radical)　一个具体的根性质. 亚直既约环 R 中一切非零理想的交 I 是 R 的非零极小理想,称为 R 的心. 若 $I^2=I$,则称 R 为带幂等心的亚直既约环. 由所有带幂等心的亚直既约环组成的环类是一个特殊类,这个环类确定的高根是一个特殊根,称为反单根.

亚直既约环的心(heart of subdirectly irreducible ring)　见"反单根".

带幂等心的亚直既约环(subdirectly irreducible ring with idempotent heart)　见"反单根".

反单环(antisimple ring)　一种特殊环. 反单根的根环称为反单环. 每个幂零环及局部幂零环都是反单环. 反单环的一个特征性质是,它的任一同态像都可表示为带幂零心的亚直既约环的亚直和.

亚幂等根(subidempotent radical)　一个特殊的根性质. 指满足下述条件的根性质 $\mathscr{R}$:$\mathscr{R}$ 是遗传的;每个 $\mathscr{R}$ 根环都是幂等环. 在环结构定理中,通常舍弃环的幂零性而适当保留其幂等性. 亚幂等根则

是与传统根完全不同的另一类根性质，它的出现不再是为了研究环的结构，而是根理论本身的需要，是公理化根性质中一种重要的类型.

补根(supplementing radical) 由一个根性质确定的性质相反的另一个根性质. 设 $\mathscr{R}$ 是一个根性质，$\mathscr{S}$ 是由 $\mathscr{R}$ 确定的另一根性质，若满足下述条件：对任一环 A，均有 $\mathscr{R}(A)\cap\mathscr{S}(A)=(0)$；对满足前者的任一根性质 $\mathscr{T}$，均有 $\mathscr{T}\leqslant\mathscr{S}$，则称 $\mathscr{S}$ 为根性质 $\mathscr{R}$ 的补根. 对每个根性质 $\mathscr{R}$，都存在惟一确定的补根 $\mathscr{S}$，并且 $\mathscr{S}$ 是由全体非 $\mathscr{R}$ 半单的亚直既约环组成的环类确定的高根.

超幂零根的补根是亚幂等根，而亚幂等根的补根是超幂零根.

对偶根(dual radical) 由补根导出的一个概念. 若 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 是两个根性质，其中每一个是另一个的补根，则称$(\mathscr{R},\mathscr{S})$是补根的一个对偶对，而称这两个根中的每一个为对偶根. 实际上，一个根性质，若是某个根性质的补根，则这个根性质与自身的补根就形成补根的一个对偶对，因而是一个对偶根. 对遗传根来说，只要它是由某个亚直既约环类确定的高根，它就是一个对偶根. 遗传对偶根仅有两类：超幂零对偶根(是特殊根)和亚幂等对偶根.

补根的对偶对(dual pair of supplementing radical) 见“对偶根”.

一般模类(general class of modules) 一般根论中的重要模类. 对每个环 A，给定非平凡右 A 模的一个类 $\mathscr{M}_A$. 定义 $\mathscr{M}_A$ 的核为 $\mathscr{M}_A$ 中全体 A 模的零化子的交集

$$\ker\mathscr{M}_A=\bigcap\{(0:M)_A\mid M\in\mathscr{M}_A\},$$

它是环 A 的一个理想. 若 $\mathscr{M}_A$ 为空类，则规定 $\ker\mathscr{M}_A=A$；若 $\ker\mathscr{M}_A=(0)$，则称 $\mathscr{M}_A$ 为忠实的. 设模类

$$\mathscr{M}=\bigcup_A\mathscr{M}_A,$$

称 $\mathscr{M}$ 为一般模类，若 $\mathscr{M}$ 满足条件：

1. $M\in\mathscr{M}_{A/B}$蕴涵 $M\in\mathscr{M}_A$，其中 B 是 A 的理想.

2. $M\in\mathscr{M}_A$，A 的理想 $B\subseteq(0:M)_A$ 蕴涵 $M\in\mathscr{M}_{A/B}$.

3. 若 $\mathscr{M}_A$ 忠实，则对 A 的每个非零理想 B，$\mathscr{M}_B$ 非空.

4. 若对环 A 的每个非零理想 B，$\mathscr{M}_B$ 非空，则 $\mathscr{M}_A$ 忠实.

一般模类 $\mathscr{M}$ 确定一个根性质，只要规定环 A 的根 $\mathscr{M}(A)$为模类 $\mathscr{M}_A$ 的核. 给定一个根性质 $\mathscr{R}$，也可构造一个一般模类 $\mathscr{M}$，使得对任意环 A，均有 $\mathscr{R}(A)=\mathscr{M}(A)$. 称这样的一般模类 $\mathscr{M}$ 为根性质 $\mathscr{R}$ 的模表示或模刻画.

忠实模类(faithful class of modules) 见“一般模类”.

根性质的模表示(modular representation of radical property) 见“一般模类”.

素模(prime module) 刻画素环而定义的一种模. 右 A 模 M 称为 A 素模，是指 M 满足条件：$MA\neq(0)$；若 $x\in M$，B 是环 A 的理想，则 $xB=(0)$蕴涵 $x=0$，或 $B\subseteq(0:M)_A$. 环 A 是素环的一个充分必要条件是存在一个忠实 A 素模 M.

特殊模类(special class of modules) 一般根论中与特殊根相关连的重要模类. 模类 $\mathscr{M}=\bigcup\mathscr{M}_A$，其中 A 为任意环，若适合下列条件：

1. 若 $M\in\mathscr{M}_A$，则 M 是 A 素模；

2. 若 B 是环 A 的理想，$M\in\mathscr{M}_B$，则 $MB\in\mathscr{M}_A$；

3. 若 $M\in\mathscr{M}_A$，B 是环 A 的理想，$MB\neq(0)$，则 $M\in\mathscr{M}_B$；

4. 一般模类中的条件 1，2 成立；

则称模类 $\mathscr{M}$ 为特殊模类. 每个特殊模类都是一般模类，特殊模类表示的根性质是特殊根，每个特殊根都可由特殊模类来表示. 例如，所有既约模组成的模类是特殊模类，表示的根性质是雅各布森根；所有素模组成的模类也是特殊模类，表示的根性质是贝尔根.

遗传类(hereditary class) 一种特殊环类. 一个环类，若其中每个环的每个理想作为一个环仍在该环类中，则称这个环类是一个遗传类. 一般根论中常见的许多环类，例如，每个半单类、遗传根的根类都是遗传类.

同态闭(homomorphically closed) 对环类的一种附加性质. 一个环类，若其中每个环的每个同态像仍在该环类中，则称该环类是同态闭的. 同态闭是一般根论中许多环类所具有的重要性质. 每个根类都是同态闭的.

扩张闭(closed under extensions) 对环类的一种附加性质. 环类 $\mathscr{K}$ 若满足：对任意环 A，A 的理想 I 及剩余类环 A/I 都是 $\mathscr{K}$ 中的环$\Rightarrow A$ 本身也是 $\mathscr{K}$ 中的环，则称环类 $\mathscr{K}$ 为扩张闭. 例如，根类和半单类都是扩张闭的环类.

本质扩张闭(closed under essential extensions) 对环类的一种附加性质. 一个环类 $\mathscr{K}$ 若具有下述性质：对任意环 A，A 有一个本质理想 I(即对 A 的任意非零理想 J，$I\cap J\neq0$)是 $\mathscr{K}$ 中的环$\Rightarrow A$ 本身也是 $\mathscr{K}$ 中的环，则称 $\mathscr{K}$ 为本质扩张闭. 遗传根的半单类是本质扩张闭的.

强$\mathscr{R}$半单环(strong $\mathscr{R}$-semisimple ring) 同态像保持半单性的特殊环类. 设 $\mathscr{R}$ 是一个根性质，A 是一个 $\mathscr{R}$ 半单环，若 A 的每个同态像也是 $\mathscr{R}$ 半

单环,则称 A 为强 $\mathscr{R}$ 半单环. 根性质 $\mathscr{R}$ 的补根的每个根环都是强 $\mathscr{R}$ 半单环;当 $\mathscr{R}$ 是遗传根时,每个强 $\mathscr{R}$ 半单环都是根性质 $\mathscr{R}$ 的补根的根环.

强半单性(strong semisimplicity)　对半单类的一种附加性质. 对根性质 $\mathscr{R}$,若每个 $\mathscr{R}$ 半单环都是强 $\mathscr{R}$ 半单环,即 $\mathscr{R}$ 半单类是同态闭的,则称根性质 $\mathscr{R}$ 所对应的 $\mathscr{R}$ 半单性质是强半单的. 若 $\mathscr{K}$ 是由全体布尔环(一个环称为布尔环,是指对环中每个元素 a,等式 $a^2=a$ 成立)组成的环类,$\mathscr{R}$ 是由环类 $\mathscr{K}$ 确定的高根,则 $\mathscr{R}$ 半单性质是强半单的. 实际上,环类 $\mathscr{K}$ 本身是一个半单类,并且是同态闭的.

强根(strong radical)　一类特殊的根性质. 一个根性质 $\mathscr{R}$,若每个 $\mathscr{R}$ 半单环的每个非零左(右)理想作为一个环都不是 $\mathscr{R}$ 根环(等价地,对任意环 A,若 A 的左(右)理想 I 作为一个环是 $\mathscr{R}$ 根环,则有 I 包含在环 A 的根 $\mathscr{R}(A)$内),则称 $\mathscr{R}$ 为左(右)强的. 若根性质 $\mathscr{R}$ 既是左强的,又是右强的,则称 $\mathscr{R}$ 是一个强根. 在常见的根性质中贝尔根、林文茨基根、雅各布森根都是强根.

正规根(normal radical)　刻画两个环的根的相互关系的一个概念. 设 $\mathscr{R}$ 是一个根性质,若对任意莫锐塔六元组(Morita context(A,V,W,B,τ,μ)均有

$$V\mathscr{R}(B)W\subseteq\mathscr{R}(A),$$

或等价地

$$W\mathscr{R}(A)V\subseteq\mathscr{R}(B),$$

则称 $\mathscr{R}$ 为一个正规根,其中 A,B 是环,V 是 A-B 双模,W 是 B-A 双模,$\tau:V\otimes_B W\to A$,$\mu:W\otimes_A V\to B$ 为双模同态. 若 R 是一个正规根,则 R 是一个强根,并且对任意环 A 和全矩阵环 A_n,有

$$\mathscr{R}(A_n)=\mathscr{R}(A)_n.$$

在常见的根性质中,贝尔根、林文茨基根、雅各布森根都是正规根,而布朗-麦柯根不是正规根.

交根(intersection radical)　由一组根性质构造的一个新根. 给定一组根性质,每个根性质对应一个根类,所有这些根类的交作为一个环类,也是一个根类,这个根类所对应的根性质就称为这组根性质的交根. 环 A 的交根 $\mathscr{D}(A)$是具有下述性质的最大的理想:对这组根性质中的每一个根性质 $\mathscr{P}$,$\mathscr{D}(A)$都是 $\mathscr{P}$ 根环. 交根 $\mathscr{D}(A)$可由超限归纳法构造:取 $V_1=A$,对任意序数 β,当 β 是极限序数时,规定

$$V_\beta=\bigcap_{\alpha<\beta}V_\alpha;$$

当序数 $\beta-1$ 存在时,若在这组根性质中存在某一个根性质 $\mathscr{P}$,使得 $\mathscr{P}(V_{\beta-1})\neq V_{\beta-1}$,则取 $V_\beta=\mathscr{P}(V_{\beta-1})$;否则,规定 $V_\beta=V_{\beta-1}$. 由此存在某个 V_γ,对于这组根性质中的每一个 V_γ 都是根环,则$\mathscr{D}(A)=V_\gamma$ 是环 A 的交根.

并根(union radical)　交根的对偶概念. 给定一组根性质,每个根性质对应一个根类,所有这些根类的并(一般来说,不是一个根类)确定的低根性质 $\mathscr{U}$ 称为这组根性质的并根. 环 A 的并根 $\mathscr{U}(A)$是 A 的具有下述性质的最小理想:在这组根性质中,对每个根性质 $\mathscr{P}$,剩余类环 $A/\mathscr{U}(A)$都是 $\mathscr{P}$ 半单环. 并根 $\mathscr{U}(A)$可由超限归纳法构造:取 $W_1=0$,对任意序数 β,当 β 是极限序数时,规定

$$W_\beta=\bigcup_{\alpha<\beta}W_\alpha;$$

当序数 $\beta-1$ 存在时,若在这组根性质中,存在一个根性质 $\mathscr{P}$,使得 $A/W_{\beta-1}$不是 $\mathscr{P}$ 半单环,则取环 A 的理想 $W_\beta\supset W_{\beta-1}$,使得$\mathscr{P}(A/W_{\beta-1})=W_\beta/W_{\beta-1}$;否则,规定 $W_\beta=W_{\beta-1}$. 由此存在某个 W_γ,使得在这组根性质中,对每个根性质 $\mathscr{P}$,A/W_γ 都是 $\mathscr{P}$ 半单环,则 $\mathscr{U}(A)=W_\gamma$ 是环 A 的并根. 在一组根性质中,每一个根性质对应一个半单类,这些半单类的交恰好与并根的半单类相重. 并根的一个应用是确定根性质 $\mathscr{R}$ 的补根,这个补根是所有满足下述条件的根性质 $\mathscr{P}$ 的并根:对任意环 A,等式 $\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{R}(A)=0$ 成立.

预根(preradical)　接近而弱于根性质的一种性质. 环类 $\mathscr{K}$ 上的预根 $\mathscr{F}$ 是定义在 $\mathscr{K}$ 上的一个函数,它将 $\mathscr{K}$ 中每个环 A 对应于 A 的一个理想 $\mathscr{F}A$,且对于任意环的满同态 $\alpha:A\to B,B\in\mathscr{K}$,都有 $\alpha(\mathscr{F}A)\subseteq\mathscr{F}B$. 设 $\mathscr{F}$ 是环类 $\mathscr{K}$ 上的预根,A 是 $\mathscr{K}$ 中的环,若 $\mathscr{F}A=A$,则称 A 为一个 $\mathscr{F}$ 环,也称为预根环;若环 A 的理想 I 是一个 $\mathscr{F}$ 环,则称 I 为环 A 的一个 $\mathscr{F}$ 理想. 一般地,$\mathscr{F}A$ 本身不是一个 $\mathscr{F}$ 环. 若对 $\mathscr{K}$ 中每个环 A,A 的含于 $\mathscr{F}A$ 的理想都是 $\mathscr{F}$ 理想,则称预根 $\mathscr{F}$ 是遗传的;若对 $\mathscr{K}$ 中每个环 A,A 的每个 $\mathscr{F}$ 理想都含于 $\mathscr{F}A$,则称预根 $\mathscr{F}$ 是完全的. 若 $\mathscr{R}$ 是一个根性质,对每个环 A,规定 $\mathscr{F}A=\mathscr{R}(A)$,则 $\mathscr{F}$ 是一个完全预根. 在这个意义下,每个根性质都是一个完全预根.

预根环(preradical ring)　见"预根".

遗传预根(hereditary preradical)　见"预根".

完全预根(complete preradical)　见"预根".

拟根(quasiradical)　介于预根和根性质之间的一个概念. 设 $\mathscr{F}$ 是环类 $\mathscr{K}$ 上的一个预根,若对 $\mathscr{K}$ 中每个环 A,均有 $\mathscr{F}(A/\mathscr{F}A)=0$,则称 $\mathscr{F}$ 为环类 $\mathscr{K}$ 上的一个拟根. 每个根性质都是一个完全的拟根. 若 $\mathscr{F}$ 是定义在由所有环组成的环类上的拟根,并且 $\mathscr{F}$ 既是遗传的,又是完全的,则 $\mathscr{F}$ 是一个遗传根.

零伪根(zeroid-pseudoradical)　对每个环所规定的与零因子理想有关的一个理想. 零伪根不是一

个根性质，甚至不是预根．设 I 是环 A 的一个理想，若 I 中每个元素都是环 A 的左（右）零因子，则称 I 为环 A 的左（右）零因子理想．环 A 的零伪根 $\mathscr{F}(A)$ 是 A 的满足下述条件的最大理想：对环 A 的任意左零因子理想 C，$\mathscr{F}(A)+C$ 仍是一个左零因子理想；对环 A 的任意右零因子理想 D，$\mathscr{F}(A)+D$ 仍是一个右零因子理想．环 A 的零伪根 $\mathscr{F}(A)$ 也是环 A 的所有极大左零因子理想与极大右零因子理想的交．由于这些零因子理想都是素理想，因此 $\mathscr{F}$ 是环 A 的一些素理想的交．对环 A 的全矩阵环 A_n，

$$\mathscr{F}(A_n)=\mathscr{F}(A)_n.$$

零因子理想(zero divisor ideal)　见"零伪根"．

正则根(regular radical)　亦称冯·诺伊曼正则根．它是亚幂等根的一个重要例子．全体冯·诺伊曼环组成的环类是一个根类，这个根类对应的根性质称为冯·诺伊曼正则根．这意味着每个环都含有一个最大的冯·诺伊曼正则理想．

冯·诺伊曼正则根(Von Neumann regular radical)　即"正则根"．

克德根(Köthe radical)　亦称诣零根．简称 K 根．它是对一般环引入的第一个具体根．诣零性质是根性质．环 R 的最大幂零元理想（即最大诣零理想）称为环的克德根，用 N_K 表示．N_K 包含 R 的一切诣零双侧理想．若 $N_K=0$，则称 R 为 K 半单环，也称克德半单环．王湘浩于 1955 年得出 K 半单环的结构定理：环 R 是 K 半单的充分必要条件是 R 为一些 K 半单素环的亚直和．

诣零根(nil radical)　即"克德根"．

克德半单环(Köthe semisimple ring)　见"克德根"．

近似诣零根(quasi-nil radical)　介于诣零根与雅各布森根之间的一种根性质．设 R 为一环，R 的理想（左、右或双边）A，若对 R 的任一双边理想 M，或有 $M\supseteq A$，或在 R/M 中 $(A+M)/M$ 含 R/M 的非零诣零单边理想，则称 A 为 R 的近似诣零理想．R 的全部近似诣零单边理想之和，称为 R 的近似诣零根，用 N_Q 表示．谢邦杰于 1956 年引进的这个根是遗传根．$N_Q=0$ 的环称为 Q 半单环，吴品三于 1988 年得出 Q 半单环的结构定理：环 R 是 Q 半单的充分必要条件是 R 为一些 Q 半单素环的亚直和．对环 R 的诣零根 N 而言，N 是否包含 R 的全部诣零单边理想，是个未解决的问题．而 R 的近似诣零根包含了 R 的全部诣零单边理想．

近似诣零理想(quasi-nil ideal)　见"近似诣零根"．

局部幂零环(local nilpotent ring)　亦称半幂零环．局部幂零性是介于幂零性与诣零性之间的一种性质．若环 R 的任意有限个元素生成的子环是幂零环，则 R 称为局部幂零环．环 R 的左（右）理想以及理想，若它们作为环是局部幂零的，则分别称为局部幂零左（右）理想和局部幂零理想．

半幂零环(seminilpotent ring)　即"局部幂零环"．

局部幂零理想(local nilpotent ideal)　见"局部幂零环"．

林文茨基根(Livitzki radical)　亦称局部幂零根．阿廷环（有极小条件环）的幂零根的自然推广．它是以局部幂零性为根性质的一种根．环 R 的惟一最大局部幂零理想称为 R 的林文茨基根，常用 N_L 表示．N_L 含 R 的一切局部幂零单侧理想，且 R/N_L 不含非零的局部幂零理想．局部幂零根 $N_L=0$ 的环，称为 L 半单环或林文茨基半单环．单环必为 L 半单环．环 R 为 L 半单的充分必要条件是 R 为 L 半单的素环的亚直和．

局部幂零根(local nilpotent radical)　即"林文茨基根"．

林文茨基半单环(Livitzki semisimple ring)　见"林文茨基根"．

超限幂零(transfinite nilpotent)　诣零性概念的扩展．简称 T 幂零．设 S 是环 R 的一个子集，若 S 中任意序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，都存在正整数 n，使得 $a_1a_2\cdots a_n=0$（或 $a_na_{n-1}\cdots a_1=0$），则称 S 是左（或右）T 幂零．T 幂零必为诣零．

T 幂零(T-nilpotent)　见"超限幂零"．

m 序列(m-sequence)　环的特殊子集．环 R 的一个子集 S，若 S 中任意元素 a,b，恒存在 $x\in R$ 使得 $axb\in S$，则称 S 是 R 的 m 系．比 m 系更强的概念是 m 序列：环 R 中元素序列 $b_1,b_2,\cdots,b_m,\cdots$，若存在 R 中元素 $c_1,c_2,\cdots,c_m,\cdots$，使得 $b_{i+1}=b_ic_ib_i$，则序列 $b_1,b_2,\cdots,b_m\cdots$ 称为 m 序列．

m 系(m-system)　见"m 序列"．

强幂零元(strongly nilpotent element)　幂零元概念的推广．它可以用来刻画贝尔根．环 R 中元素 a 称为强幂零的，是指以 a 为首的任一 m 序列

$$a=a_1,\ a_2=a_1b_1a_1,\ \cdots,\ a_{m+1}=a_mb_ma_m,\ \cdots,\ b_i\in R,$$

必在有限步终止于零．环 R 的贝尔根恰由 R 的一切强幂零元组成．

贝尔根(Bear radical)　一种常见的重要的根．它是具有阿密苏-库洛什意义下根性质的根．环 R 的一切素理想的交，称为 R 的贝尔根，用 $\mathscr{B}(R)$ 表示．贝尔根恰由 R 的一切强幂零元组成，它包含 R 的一切幂零单侧理想．贝尔根是由幂零环类所确定的低根．$R/\mathscr{B}(R)$ 的贝尔根为零．贝尔根为零的环称为贝尔半单环，通常用 $\mathscr{B}$ 半单表示．一个环是贝尔半单环的充分必要条件为它是素环的亚直和，从而刻画了贝尔半单环的结构．

贝尔半单环(Bear semisimple ring)　见"贝尔根".

半素理想(semiprime ideal)　与半素环密切相关的概念. 环 R 的理想 Q,若对 R 的任意理想 A 和某个自然数 n,有 $A^n\subseteq Q$,就恒有 $A\subseteq Q$,则称 Q 为 R 的半素理想. 它等价于,对 R 中任意元素 x,若 $xRx\subseteq Q$,则 $x\in Q$.

半素环(semiprime ring)　一类重要的环. 若环 R 的零理想是半素理想,则称 R 为半素环. 环 R 是半素的充分必要条件是 R 的贝尔根为零;或 R 无非零的幂零理想. 半素环恒为素环的亚直和. 半素环与半素理想有如下关系:Q 是环 R 的半素理想当且仅当 R/Q 是半素环.

右拟正则理想(right quasi-regular ideal)　一类重要的理想. 元素的拟正则性是元素幂零性的自然推广,是从元素刻画雅各布森根而引入的概念. 对环 R 的一个元 a 而言,若存在 R 中元 b 使得 $a+b+ab=0(a+b+ba=0)$,则称 a 为 R 的右(左)拟正则元,b 为 a 的右(左)拟逆元. 环 R 的一个理想 A,若 A 中每个元都是右(左)拟正则元,则称 A 为右(左)拟正则理想. 环 R 的一个右理想称为右拟正则右理想,若它的每个元皆为右拟正则元. 同样地,可定义左拟正则左理想. 任何诣零左(右)理想是左(右)拟正则左(右)理想. 有些文献采用 $a+b-ab=0(a+b-ba=0)$来定义拟正则元.

右拟正则右理想(right quasi-regular right ideal)　见"右拟正则理想".

右(左)拟正则元(right(left) quasi-regular elements)　见"右拟正则理想".

右(左)拟逆元(right(left) quasi-inverse)　见"右拟正则理想".

雅各布森根(Jacobson radical)　以右(左)拟正则性为根性质的一种重要的根. 设 R 是任意环,若 R 有本原理想,则环 R 的一切本原理想的交称为 R 的雅各布森根,用 $J(R)$表示. 当 R 无本原理想,规定 $J(R)=R$,此时 R 称为 J 根环(雅各布森环). 雅各布森根还可以从多种角度描述:$J(R)$等于 R 的一切左本原理想的交,又等于 R 的最大的右拟正则理想,它包含 R 的一切右拟正则右理想,还等于 R 的最大左拟正则理想,它包含 R 的一切左拟正则左理想,同时,亦等于 R 的一切模的极大右理想的交,也等于 R 的一切模的极大左理想的交,又等于$\{x\in R\mid xa$ 是右拟正则,对任意 $a\in R\}$. 雅各布森根是雅各布森(Jacobson,N.)于 1945 年引入的.

雅各布森根环(Jacobson radical ring)　见"雅各布森根".

半本原环(semi primitive ring)　亦称 J 半单环. 一类重要的环. 若环 R 的雅各布森根 $J(R)=0$,则 R 称为半本原环,又称雅各布森半单环. 环 R 是半本原的当且仅当对 R 中任意元素 $a\neq0$,存在一个既约表示 ρ,使得 $\rho(a)\neq0$,当且仅当 R 有一个忠实完全可约表示. 对任意环 R,$R/J(R)$都是半本原环. 一个环 R 是半本原的充分必要条件是 R 为本原环的亚直和.

J 半单环(J-semisimple ring)　即"半本原环".

雅各布森半单环(Jacobson semisimple ring)　见"半本原环".

g 正则元(g-regular elements)　拟正则元的推广. 它是为描述布朗-麦柯根而引入的概念. 环 R 的元素 a,若属于 R 的理想

$$G(a)=\{x+ax+\sum(x_iay_i+x_iy_i)\mid\forall\ x_i,x,y_i\in R\},$$

则称 a 是 R 的 g 正则元. 从而

$$J(a)=\{x+ax\mid\forall\ x\in R\}\subset G(a),$$

且 $a\in G(a)$当且仅当 $G(a)=R$.

g 正则理想(g-regular ideal)　g 正则元的推广. 即用 $G(a)$去代替 $J(a)$. 若环 R 的理想 $\mathfrak{a}$ 中每个元皆为 g 正则元,则称 $\mathfrak{a}$ 为 R 的 g 正则理想. g 正则理想之和仍为 g 正则理想.

布朗-麦柯模(Brown-Mccoy module)　刻画布朗-麦柯根而引入的一种模. 设 R 是环,M 是右 R 模,若对 R 的每一个理想 B,只要

$$B\nsubseteq(0:M)=\{r\in R\mid Mr=0\},$$

就存在 B 的一个元素 b,使得对任意 $m\in M$,恒有 $mb=m$,则称 M 为布朗-麦柯模. 布朗-麦柯模是素模,布朗-麦柯模类是模的特殊类.

布朗-麦柯根(Brown-Mccoy radical)　以 g 正则性为根性质的一种根. 环 R 的最大 g 正则理想(包含 R 的一切 g 正则理想)称为 R 的布朗-麦柯根,简称 BM 根,记为 N_{BM}. R 中元 $b\in N_{BM}$的充分必要条件是 RbR 中任意元 a 皆有 $a\in G(a)$. N_{BM}是由有单位元单环所确定的高根,且$N_{BM}(R)\supseteq J(R)$. 若 $\mathscr{M}_R$ 是 R 的一切布朗-麦柯模的集合,则

$$N_{BM}=\bigcap_{M\in\mathscr{M}_R}(0:M)_R.$$

推广雅各布森根到布朗-麦柯根的目的是用有单位元的单环去代替本原环,即 BM 半单环是有单位元单环的亚直和. 当 $N_{BM}=0$ 时,R 称为布朗-麦柯半单环;当 $N_{BM}(R)=R$ 时,R 称为布朗-麦柯根环.

布朗-麦柯根环(Brown-Mccoy radical ring)　见"布朗-麦柯根".

布朗-麦柯半单环(Brown-Mccoy semisimple ring)　见"布朗-麦柯根".

撰　稿　朱元森　蔡传仁
审　阅　刘绍学　许永华　吴品三

群　　环

群环(group ring)　环论与群论的交叉学科. 由群与环两个代数系结合而成的新代数系,也是环的基础模型之一. 设 R 是有 1 结合环,G 为群,令$R[G]$是一切形式和

$$\sum_{x\in G} a_x x \ (a_x \in R, \text{仅有限个 } a_x \text{ 不为零})$$

的集合. 规定:

$$\sum_{x\in G} a_x x + \sum_{x\in G} b_x x = \sum_{x\in G}(a_x + b_x)x,$$

$$\Big(\sum_{x\in G} a_x x\Big)\Big(\sum_{y\in G} b_y y\Big) = \sum_{x,y\in G} a_x b_y xy = \sum_{z\in G} c_z z,$$

其中

$$c_z = \sum_{xy=z} a_x b_y,$$

则 $R[G]$对上述加法和乘法构成有单位元的结合环,称为环 R 上群 G 的群环,有时也用 RG 或 $R(G)$ 表示. 特别地,$R=F$ 为域时,$F[G]$称为 F 上群 G 的群代数. 当 R 为交换环时,$R[G]$也称群代数. 若 S 是半群,则 $R[S]$对上面加法和乘法也构成环,称为 R 上半群 S 的半群环;R 为域时,$R[S]$也称半群代数.

群代数产生于群的表示论. 群 G 的一个表示决定了一个 $F[G]$模;反之,一个 $F[G]$模刻画了群的一个表示. 1898 年,著名的马施克定理:若域 F 的特征不能整除有限群 G 的阶,则 G 在 F 上的每一个表示是完全可约的. 另一方面群代数 $F[G]$半单的充要条件是 F 的特征不能整除 G 的阶. 这就将群表示的可约性转化为群代数 $F[G]$的半单性,等价表示又与群代数模的同构密切相关. 无限群的群代数的半单性的研究是从里卡特(Rickart,C.)于 1950 年证明复数域上群代数是半单开始的. 约 7 年后,阿密苏(Amitsur,S. A.)、卡普兰斯基(Kaplansky,I.)、帕斯曼(Passman,D. S.)等才逐渐扩展到其他域,然而群代数的蓬勃发展是从 20 世纪 60 年代中期开始的.

早在 1929 年,与群代数密切相关的交叉积,在诺特(Noether,E.)的讲义中已经出现. 1932 年,哈塞(Hasse,H.)的"代数数域上循环代数"给出交叉积的重要类型,随后,布饶尔(Brauer,R. (D.))将域 F 上中心单代数按相似分类,每一个等价类都有一个交叉积为代表元,从而建立了布饶尔群理论. 交叉积又是特殊的分次代数,利用分次代数来刻画交叉积推动了群表示论的发展,导出了群的投射表示,群到向量空间的半线性变换的正规表示,以及由群的同调所决定的投射交叉表示. 群代数以及相关的碎积与霍普夫代数密切相关,同时群代数又是对称巴拿赫代数,在泛函分析中有重要应用.

群代数(group algebra)　见"群环".

半群环(semigroup ring)　见"群环".

支集子群(support subgroup)　群环的基本概念之一. 它是利用局部去研究整体的工具. 设 $\alpha=\sum a_g g\in R[G]$,称

$$\text{supp}\alpha=\{g\in G \mid a_g\neq 0\}$$

为 α 的支集,由 α 的支集所生成的子群$\langle\text{supp}\alpha\rangle$称为 α 的支集子群.

截断映射(trunction mapping)　群环中由整体转化为局部的重要工具. 若 H 是群 G 的子群,则 $R[H]$是 $R[G]$的子群环. 从 $R[G]$到 $R[H]$的映射

$$\Pi_H: \sum_{x\in G} a_x x \to \sum_{x\in H} a_x x,$$

称为截断映射. Π_H 不仅是 R 线性映射,而且当 $R[G]$视作$R[H]$双模时,Π_H 是 $R[G]$到 $R[H]$的 $R[H]$双模同态. H 在 G 中左(右)陪集表现的集合 Y,称为 H 在 G 中的左(右)截断. 因此,$R[G]$中任一元 α 可惟一表示为

$$\alpha = \sum_{y\in Y} y\alpha_y,$$

其中 $\alpha_y = \Pi_H(y^{-1}\alpha) \in R[H]$. 于是,截断的重要性在于将 $R[G]$转化为以 y 为基的自由右 $R[H]$模.

左(右)截断(left(right) trunction)　见"截断映射".

迹映射(trace map)　群环 $R[G]$到基环 R 的一种映射. 设 R 是有 1 结合环,G 是群,将 $R[G]$中任意元

$$\alpha = \sum_{x\in G} a_x x$$

对应到 $x=1$ 的系数 a_1 的映射称为迹映射,记为 $\text{tr}(\alpha)$. 它是 $R[G]$到 R 的 R 线性映射,a_1 称为 α 的迹. 当 $R=F$ 是域,G 是有限群时,$F[G]$是 F 上有限维线性空间,以 G 中元 x 做右乘变换(以 G 的元为基),其矩阵 $\tau(x)$的迹是 $\tau(x)$的对角线上元素之和. 所以,$x\neq 1$ 时,迹 $\tau(x)=0$;$x=1$ 时,迹 $\tau(x)=|G|=n$. 从而对 $F[G]$中任意 α 来说,矩阵 $\tau(\alpha)$的迹与 α 的迹 $\text{tr}(\alpha)$恒有 $\text{tr}(\tau(\alpha))=\text{tr}(\alpha)\cdot|G|$.

群代数马施克定理(Maschke theorem for group algebra)　域上有限群代数半单性的判别定理. 域 F 上有限群 G 的群代数 $F[G]$为半单的充分必要条件是 F 的特征数不能整除$|G|$. 上述马施克定理在群表示论中有重要价值. 例如,群 G 的一个 F 表示是完全可约的充分必要条件是 F 的特征数不能整除$|G|$. 马施克定理已由朱元森于 1987 年推广为下面更普遍的定理:设 R 是有 1 结合环,G 是局部有限群,若 R 的特征数的因数不是 G 的子群的阶,则 $JR[G]=(JR)[G]$,即法拉哈特等式成立.

增广理想(augmentation ideal)　研究群环的

重要工具. 设 R 是有 1 结合环, G 是群, 由 $\{1-x \mid x \in G\}$ 在 $R[G]$ 中生成的理想, 称为 $R[G]$ 的增广理想, 记为 $\omega_R(G)$. 即

$$\omega_R(G) = \sum_{x \in G}(x-1)R[G] = \Big\{\sum_{x\in G} a_x x \in R[G] \,\Big|\, \sum_{x\in G} a_x = 0\Big\}.$$

设 $H \lhd G$, $R[G] \to R[G/H]$ 的自然同态 ρ_H:

$$\sum_{x\in G} a_x x \to \sum_{x\in G} a_x \bar{x} \ (\bar{x} = xH)$$

的核 $\ker \rho_H = \omega_R(H)R[G] = R[G]\omega_R(H)$. 当 $H=G$ 时, 称映射 ρ_G 为 $R[G]$ 的增广映射. 此时

$$\rho_G\Big(\sum_{x\in G} a_x x\Big) = \sum_{x\in G} a_x$$

是 $R[G]$ 到 R 的环同态, 且 $\ker \rho_G = \omega_R(G)$, 于是 $R[G]/\omega_R(G) \cong R$. 增广映射和增广理想在同调代数中也有重要应用.

增广映射(augmentation map)　见"增广理想".

增广理想的滤子(filtration of augmentation ideal)　滤子概念在群环中的应用. 它在群环中与维子群密切相关. 以 $R[G]$ 的增广理想 $\omega_R(G)$ 为首, $R[G]$ 的理想的降链序列

$$\omega_R(G) = E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots \supseteq E_n \supseteq \cdots \quad (1)$$

且满足 $E_iE_j \subseteq E_{i+j}$, $i,j \geqslant 1$, 称(1)为 $\omega_R(G)$ 的滤子. 若 $G_i = \{x \in G \mid x-1 \in E_i\} = G \cap (1+E_i)$, 则对应于降链序列(1), 群 G 的正规子群降链序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_n \supseteq \cdots \quad (2)$$

适合

$$(G_i, G_j) \subseteq G_{i+j}. \quad (3)$$

群 G 满足(3)的正规子群降链序列(2)称为 G 的 N 序列. 因此, $\omega_R(G)$ 的一个滤子决定了 G 的一个 N 序列; 反之, 群 G 的任意一个 N 序列(2), 用 $\gamma(g)$ 表示 $g \in G_m$ 的最小下标称为 g 的高, 则 $\gamma(1) = \infty$; 当 $g \neq 1$ 时, $\gamma(g) = m \Leftrightarrow g \in G_m \setminus G_{m+1}$. 若 E_i 是由一切乘积 $(g_1-1)(g_2-1)\cdots(g_k-1)$(对 k 有 $\gamma(g_1)+\gamma(g_2)+\cdots+\gamma(g_k) \geqslant i \geqslant 1$)的 R 线性组合, 则 E_i 是 $R[G]$ 的理想, 且序列

$$\omega_R(G) = E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots \supseteq E_n \supseteq \cdots$$

适合 $E_iE_j \subseteq E_{i+j}$, 从而 G 的任一 N 序列也决定了 $\omega_R(G)$ 的一个滤子. $\omega_R(G)$ 的滤子在幂零群的群环的研究中有重要作用.

N 序列(N-Sequence (N-series)　见"增广理想的滤子".

N_p 序列(N_p-series)　亦称关于 p 的限制 N 序列. N 序列的子类. 设 $G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_n \supseteq \cdots$ 是群 G 的 N 序列, 若对任意 $i \geqslant 1$, G_i/G_{i+1} 是无扭群, 对某自然数 p 则称此 N 序列为 N_0 序列. 若 N 序列中对每一个 G_i 中任意元 x, 恒有 $x^p \in G_{ip}$(对某自然数 p), 则称此 N 序列为 N_p 序列. N_p 序列在群环中有特殊意义: 当 R 有单位元且 $\mathrm{ch}R = p$(素数)时, 任意群 G 的增广理想 $\omega_R(G)$ 的滤子所对应的 N 序列必为 N_p 序列.

N_0 序列(N_0-series)　见"N_p 序列".

维子群(dimension subgroup)　由增广理想的特殊滤子所决定的子群. 群环 $R[G]$ 的增广理想 $\omega_R(G)$ 的滤子

$$\omega_R(G) \supseteq \omega_R^2(G) \supseteq \cdots \supseteq \omega_R^n(G) \supseteq \cdots$$

所对应的 N 序列

$$D_{1,R}(G) \supseteq D_{2,R}(G) \supseteq \cdots \supseteq D_{n,R}(G) \supseteq \cdots$$

称为维子群序列, 其中

$$D_{n,R}(G) = \{g \in G \mid g-1 \in \omega_R^n(G)\} = G \cap (1+\omega_R^n(G))$$

称为 n 维子群. 群 G 的 N 序列一般未必是维子群序列. 但 G 的任一有限 N 序列

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_{n+1} = (1),$$

若在 $\mathrm{ch}R = 0$ 时为 N_0 序列, 在 $\mathrm{ch}R = p$ 时为 N_p 序列, 则此序列必为维子群序列, 且

$$G_i = G \cap (1+\omega_R^i(G)).$$

维子群在研究幂零群及其群环的性质中起重要作用.

大子集(large subset)　群的一个特殊子集. 群 G 的子集 T 称为大子集, 是指 T 不含于 G 中有无限指数的若干子群的有限个陪集的并, 即

$$T \not\subset \bigcup_{i,j} H_i x_{ij} \ (\text{有限并}),$$

且 $[G:H_i] = \infty$. 群 G 的子集 T, 若对 G 的任意具有有限指数的子群 W 与 G 中任意元 x, $T \cap Wx$ 总是大子集, 则称 T 为充分大子集. 大子集是帕斯曼(Passman, D. S.)于 1962 年研究半素群环与其中心的关系时引入的一个概念.

群的子集指数(index of a subset of a group)　子群指数概念的推广. 它是研究 PI 群代数的基本概念. 设 T 是群 G 的子集, G 中适合

$$G = Tx_1 \cup Tx_2 \cup \cdots \cup Tx_k$$

的元 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的最小个数, 称为 T 在 G 中的右指数, 记为 $[G:T]_r$. 若这样的最小正整数不存在, 则记为 $[G:T]_r = \infty$. 同样地, 可定义左指数. 群的子集的左、右指数统称为群的子集指数. 一般地, 子集 T 的左、右指数不相等. 例如

$$G = \langle x, y \mid y^2 = 1, y^{-1}xy = x^{-1}\rangle$$

是无限二面体群, 若 $S = \{x^n, x^{-n}y \mid n \geqslant 0\}$, 则 S 的左指数为无限, 而右指数为 2.

群代数半单性定理(semisimplicity theorem of group algebra)　群代数的雅各布森半单性判别定理. 设 G 是群, K 是域且 K 不是它的素域上代数, 若 $\mathrm{ch}K = 0$ 或 $\mathrm{ch}K = p > 0$ 时, G 不含 p 阶元, 则 $K[G]$

是雅各布森半单(简称 J 半单). 自马施克(Maschke, H.)证明了对有限群的半单性后,对无限群的情况历经 25 年之久才得到完全解决. 于 1950 年里卡特(Rickart, C.)证明复数域上群代数 $\mathbb{C}[G]$是 J 半单的, 9 年后,阿密苏(Amitsur, S. A.)扩展到特征为零的任意域. 帕斯曼(Passman, D. S.)于 1962 年证明了域的特征为 p 的情况. 此定理是至今关于任意域上群代数最好的半单性判别定理.

正规化基(normalizing basis) 研究环与扩环的根之间关系的工具. 设 R 是环 S 的子环,有相同的 1. 若 S 中元 $1=x_1, x_2, \cdots, x_n$,使得 $S=Rx_1+Rx_2+\cdots+Rx_n$,且存在 R 的自同构 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$,对一切 $\beta\in R$ 恒有 $x_i\beta=\sigma_i(\beta)x_i$ 成立,则称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 S 在 R 上的正规化基,此时, S 也称为 R 的自由正规扩张. 若 $H\lhd G$, $[G:H]=n<\infty$,则 H 在 G 中截断$\{x_1=1, x_2, \cdots, x_n\}$是 $R[G]$在 $R[H]$上正规化基,其中 σ_{x_i}使得

$$\sigma_{x_i}(\beta)=x_i^{-1}\beta x_i=\beta^{x_i},\ \forall\ \beta\in R[H](i=1,2,\cdots,n)$$

为 $R[H]$的自同构. 由此,维拉玛约(Villamayor, O. E.)于 1958 年证明域 F 上群代数对雅各布森根有:

$$JF[G]=JF[H]\cdot F[G].$$

自由正规扩张(free normal extension) 见"正规化基".

R 投射(R-projective) 研究环与扩环上的群环的根之间关系的工具. 设 R 是环 S 的子环,有相同的 1,若 V 是右 S 模,记为 V_S,则 V 也是右 R 模,记为 V_R. 设 W 是 V_S 的子模,若 W 视作 R 模是 V_R 的直和项(即 $V_R=W_R\oplus U_R$),就蕴涵 W_S 是 V_S 的直和项,则称 S 是 R 投射的. 设 H 是 G 的子群,若$[G:H]=n$ 是 R 中单位,则 $R[G]$是 $R[H]$投射的.

优扩张(excellent extension) 具有投射性的正规扩张. 设 R 是环 S 的子环,有相同的 1,若满足条件:

1. S 是 R 的自由正规扩张,即存在 S 的有限子集$\{a_1=1, a_2, \cdots, a_n\}$,使得

$$S=\sum_{i=1}^{n}Ra_i, Ra_i=a_iR \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

且 S 做为左、右 R 模以 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为自由基;

2. S 是 R 投射的;

则称 S 为 R 的优扩张.

控制子(controller) 理想的最小控制子群. 设 K 是域, H 是群 G 的子群, I 为 $K[G]$的理想,若

$$I=\Pi_H(I)K[G],$$

则称 H 控制 I,或称 H 是 I 的控制子群. 它等价于 $I=(I\cap K[H])\cdot K[G]$,所以, H 控制 I 当且仅当

$$I\cap K[H]=\Pi_H(I),$$

其中 Π_H 为截断映射. G 的正规子群 $\mathscr{C}(I)$称为 I 的控制子,是指对任 $H\lhd G$ 来说,若 H 控制 I 当且仅当 $H\supseteq\mathscr{C}(I)$. $K[G]$的任一理想 I 的控制子 $\mathscr{C}(I)$存在且惟一,它是 I 的一切控制子群的交. 若 e 是 $K[G]$的幂等元,则 $I=eK[G]$的控制子

$$\mathscr{C}(I)=\langle\mathrm{Supp}\ e\rangle.$$

控制子群(controlling subgroup) 见"控制子".

F 完全群(F-complete group) 一种特殊的阿贝尔群. 它在研究群代数根的控制中有重要作用. 设 G 是群, F 是域, $\mathrm{Hom}(G, F_0)$是 G 到乘群 $F^\circ=F\backslash\{0\}$的同态集合,其中同态的乘法为

$$\lambda\mu(x)=\lambda(x)\mu(x),\ \forall\ \lambda,\mu\in\mathrm{Hom}(G,F_0), x\in G.$$

若群 G 中任意元 $x\neq1$,恒有 $\lambda\in\mathrm{Hom}(G, F^\circ)$,使得 $\lambda(x)\neq1$,则称 G 是 F 完全群. F 完全群的子群以及 F 完全群的直积都是 F 完全群. F 完全群 G 对 F 的任意扩域 K 是 K 完全群. 对代数闭域 F 来说,阿贝尔群必为 F 完全群.

$\Delta(G)$ 群代数中的常用符号. $\Delta(G)$是群 G 中仅有有限个共轭元的元组成的集合,即

$$\Delta(G)=\{x\in G\,|\,[G:C_G(x)]<\infty\},$$

它是 G 的特征子群.

$\Delta^+(G)$ 群环中的常用符号. 群 G 中一切有有限个共轭元的有限阶元的集合,即

$$\Delta^+(G)=\{x\in G\,|\,[G:C_G(x)]<\infty,\ \text{且}\ o(x)<\infty\},$$

它是 G 的特征子群,且

$$\Delta^+(G)\subset\Delta(G), \Delta(G)/\Delta^+(G)$$

是无扭群,它是冯·诺伊曼(von Neumann, H.)于 1951 年给出的.

$\Delta^p(G)$ 群环中的常用符号. $\Delta^p(G)$是群 G 中阶为 p 的幂且有有限个共轭元的元组成的集,即

$$\Delta^p(G)=\{g\in\Delta(G)\,|\,g\ \text{的阶是}\ p\ \text{的幂}\}.$$

它是 G 的特征子群,且 $\Delta^+(G)/\Delta^p(G)$是不含 p 阶元的局部有限群.

局部有限指数的子群(subgroup of locally finite index) 一种特殊的子群. 它在研究群代数根的控制中有重要意义. 设 H 是群 G 的子群,若对 G 的任意有限生成子群 L, $[L:L\cap H]<\infty$,则称 H 在 G 中有局部有限指数,记为$[G:H]=$l. f..

$\Lambda(G)$ 群环中的常用符号. 由群 G 内一切满足其中心化子 $C_G(x)$在 G 中有局部有限指数的元 x 组成的集合. 即

$$\Lambda(G)=\{x\in G\,|\,[G:C_G(x)]=\text{l. f.}\},$$

$\Lambda(G)$是 G 的特征子群. 若 G 是有限生成,则 $\Lambda(G)=\Delta(G)$,它是为研究群代数 N^* 根的控制而引入的概念. 帕斯曼(Passman, D. S.)于 1974 年证明: $\Lambda^+(G)J$ 控制 N^* 根,即

$$N^*F[G]=JF[\Lambda^+(G)]\cdot F[G]$$

其中 F 是特征为 p 的域.

$\Lambda^+(G)$　群环中的常用符号. $\Lambda^+(G)$是由 G 中一切适合其中心化子 $C_G(x)$在 G 内有局部有限指数的有限阶元 x 组成的集合,即

$$\Lambda^+(G)=\{x\in\Lambda(G)\mid x\text{ 是有限阶元}\},$$

它是 G 的特征子群、局部有限,且$\Lambda(G)/\Lambda^+(G)$为无扭阿贝尔群.

N^* **根**(N^*-radical)　一种特殊根. 帕斯曼(Passman,D. S.)为研究群代数根的控制,于 1974 年引入的一种新根. 设 R 是有单位元环,对 R 中一切有限生成子环 S,使得 αS 是幂零的 R 中元 α 的集合,称为 R 的 N^* 根,即 $N^*R=\{\alpha\in R\mid\alpha S$ 是幂零,对 R 的一切有限生成子环 $S\}$. 同样地,可定义 R 代数 A 的 N^* 根 $N^*A=\{\alpha\in A\mid\alpha S$ 是幂零,对 A 的一切有限生成子代数 $S\}$. N^*R 是 R 的特征幂零理想,且 $JR\supset N^*R\supset NR$,其中 J 是雅各布森根,N 是幂零根(一切幂零理想之和),但 N^* 根不是库洛什、阿密苏根性质的根,因为存在域 F 上代数 E,有 $N^*(E/N^*E)\neq0$,但对群代数而言,当 $\mathrm{ch}F=p$ 时,对任意群 G 恒有 $N^*(F[G]/N^*F[G])=0$ 成立.

正规化单位(normalized units)　群环中的一种特殊单位. 群环 $R[G]$中平凡单位的一般形式为 rg,r 是 R 中单位,$g\in G$. $R[G]$中单位 $\alpha=\sum a_g g$,若 $\sum a_g=1$,则称 α 为正规化单位. $R[G]$中一切正规化单位所构成的群称为 $R[G]$的正规化单位群,记为 $V(R[G])$. 当 R 是有 1 交换环,G 是阿贝尔群时,$R[G]$的单位群$\cup(R[G])$与正规化单位群满足

$$\cup(R[G])=\cup(R)\times V(R[G]).$$

正规化单位群(normalized unital group)　见"正规化单位".

正规化群基(normalized group basis)　群代数的一种特殊基. 对简化群环同构问题的研究有重要意义. 设 $R[G]$是有单位元的交换环 R 上的群代数,若单位群$\cup(R[G])$的一个子群 V 是 $R[G]$的 R 基,则称 V 为$R[G]$的群基. 若 $R[G]$的群基 V 仅由 $R[G]$的正规化单位组成,则 V 称为 $R[G]$的正规化群基. 若$R[G]\cong R[H]$,则 H 同构于 $R[G]$的一个正规化群基.

多重中心理想(polycentral ideal)　具有特殊降链序列的理想. 设 I 是环 R 的理想,若存在有限序列 $I=I_0\supseteq I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots\supseteq I_t=(0)$ $(I_i\lhd R)$,使得 I_j/I_{j+1}是 R/I_{j+1}的中心生成的理想,其中 $0\leqslant j\leqslant t-1$,则称 I 是重为 t 的多中心理想. 每个理想皆为多重中心理想的环,称为多重中心环. 多重中心环的任意同态像是多重中心环. 多重中心理想对刻画多循环、有限群的群环 $F[G]$(F 是域)的理想有 AR(即阿廷-里斯)性质起重要作用.

多重中心环(polycentral ring)　见"多重中心理想".

p **中心**(p-central)[*]　中心概念的推广. 群 G 中元 x,若存在 G 的正规子群 C,使得 G/C 是有限 p 群且 C 中心化 x,则称 x 为 G 的 p 中心元. 群 G 的一切 p 中心元的集合记为 $p\&G$,称为 G 的 p 中心. G 的 p 中心是 G 的特征子群. 设 $N\lhd G$,若 N 中元均为 G 的 p 中心元,则称 N 为 G 的 p 中心子群. 即,N 是 p 中心的当且仅当 $N\subseteq p\&G$.

p **中心子群**(p-central subgroup)　见"p 中心".

超$\mathscr{X}$ **群**(hyper-$\mathscr{X}$ group)　同态像保持同一性质的群类. 设 $\mathscr{X}$ 是群 G 关于正规子群 N 具有的某一性质(如 $\mathscr{X}$ 是 p 中心性质、有限性)记为 $N\mathscr{X}G$. 若群 G 的每一个非单位同态像 $\overline{G}$ 都有一个非单位的正规子群 $\overline{N}$ 使得 $\overline{N}\mathscr{X}\overline{G}$(即 $\overline{N}$ 也是 $\overline{G}$ 的具性质 $\mathscr{X}$ 的子群),则称 G 为超 $\mathscr{X}$ 群. 超 $\mathscr{X}$ 群的同态像也为超 $\mathscr{X}$ 群. 若 G 是超 p 中心群,则存在 $\overline{N}\neq(1)$是 $\overline{G}$ 的 p 中心子群.

超中心环(hypercentral ring)　较多重中心环广泛的环类. 若环 R 对它的任意理想 X,Y,只要 $X\supset Y$,就存在 $x\in X\setminus Y$ 使得 $x+Y$ 属于 R/Y 的中心,则称 R 为超中心环. 多重中心环是超中心的;反之,若环的所有理想是有限生成,则超中心环是多中心环. 1976 年,诺塞伯第德-史密斯(Rosseblade-Smith)完全解决了超中心群代数的分类问题:$K[G]$是超中心环,当且仅当:$\mathrm{ch}K=0$ 且 G 是超(中心或有限)的或 $\mathrm{ch}K=p>0$ 且 G 是超(p 中心或有限 p' 群)的.

殆中心化子(almost centralizer)　有限共轭性的推广. 设 $\mathfrak{A}$,G 是群,且 $\mathfrak{A}$ 作用于 G 是 G 的自同构. G 中一切仅有有限个 $\mathfrak{A}$ 共轭元的元组成的集合,称为 $\mathfrak{A}$ 在 G 中的殆中心化子. 若对 $\alpha\in\mathfrak{A}$ 作用于 G 记为:${}^{\alpha}x$,$x\in G$ 且 $C_{\mathfrak{A}}(x)=\{\alpha\in\mathfrak{A}\mid{}^{\alpha}x=x\}$,则 $\mathfrak{A}$ 在 G 中的殆中心化子为

$$D_G(\mathfrak{A})=\{x\in G\mid[\mathfrak{A}:C_{\mathfrak{A}}(x)]<\infty\}.$$

$D_G(\mathfrak{A})$是 G 的 $\mathfrak{A}$ 不变子群. 若 $D_G(\mathfrak{A})=G$,称 $\mathfrak{A}$ 殆中心化 G. 若 $H<G$,H 依共轭作用于 G,则 $D_G(H)<G$;若 $H\lhd G$,则 $D_G(H)\lhd G$. 特别地,

$$D_G(G)=\Delta(G)=\{x\in G\mid[G:C_G(x)]<\infty\}.$$

零化子自由理想(annihilator free ideal)　零化子概念的一种引申. 设 L 是域 F 上群代数 $F[G]$的一个理想. 对群 G 的每一个无限子群 X,若 $\omega_F(X)+L$在 $F[G]/L$ 中左零化子为零,其中 $\omega_F(X)$是 X 的增广理想,则称 L 是零化子自由理想.

$F[G]$的理想 L 是零化子自由理想当且仅当 G 的每个无限子群 X 和 $F[G]$的每个元 α,若 $\alpha\omega_F(X)$

$\subseteq L$，则 $\alpha\in L$；又当且仅当对 G 的每一个无限子群 X，作用在右 $F[G]$ 模 $F[G]/L$ 上无不动点．所谓 $\alpha+L$ 是对 X 的不动点是指，对任 $x\in X$，恒有 $\alpha x\equiv\alpha(\mathrm{mod}\,L)$．例如 G 是 FC 群，$\mathrm{ch}F=p$，若 G 的极大 p 子群是有限，则 $JF[G]$ 是零化子自由理想．

多重$\mathscr{X}$群(poly-$\mathscr{X}$ group)　群代数中常用的一些群类．设 $\mathscr{X}$ 是具有某种性质的群簇，若群 G 有一个有限次正规序列

$$G=G_0\triangleright G_1\triangleright G_2\triangleright\cdots\triangleright G_n=(1),$$

它的每个因子 $G_i/G_{i+1}\in\mathscr{X}$，则称 G 是多重 $\mathscr{X}$ 群．若取 $\mathscr{X}$ 是{无限循环群}，则得多重{无限循环群}的概念，简称多重无限循环群．若取 $\mathscr{X}$ 是{循环、有限}，则所得多重 $\mathscr{X}$ 群为多重{循环、有限}群．此类群存在一个有限指数的特征子群是多重无限循环群．所以，多重{循环、有限}群是多重无限循环群被有限群的扩张．因此，也称多重循环群借有限群的扩张．

多重无限循环群(poly-infinite cyclic group)　见“多重 $\mathscr{X}$ 群”．

多重循环群(poly-cyclic group)　见“多重 $\mathscr{X}$ 群”．

多重有限群(poly finite group)　见“多重 $\mathscr{X}$ 群”．

代数闭群(algebraically closed group)　一类特殊的群．它将代数闭域概念引申到群方程组．设 G 是群，$W(x_i,g_k)$ 表示变量 $x_j(j=1,2,\cdots,t)$ 与 G 中元 g_k 的一个字．群 G 称为代数闭群是指对字方程和字不等式的每一个有限组

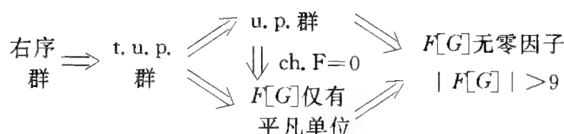
$$W_i(x_i,g_k)=1\quad(i=1,2,\cdots,r),$$
$$W_i(x_j,g_k)\neq1\quad(i=r+1,\cdots,t),$$

在群 G 与 G 的某个扩群中同时有解或无解．它是由斯科特(Scott，W. R.)于 1951 年引入的．它的重要性在于每一个群都能嵌入到某个代数闭群．若 G 是代数闭群，则 $F[G]$ 是本原环且 G 的增广理想 $\omega_F(G)$ 是惟一极大理想．

惟一乘积群(unique product group)　较序群弱的群类．如果对群 G 的任意两个非空有限子集 A,B，至少存在一个元 x 有惟一表示：$x=ab,a\in A,b\in B$，则称 G 是惟一乘积群，通常简称 u. p. 群．它在研究群代数是否含零因子或单位中有重要作用．

u. p. 群(u. p. group)　即“惟一乘积群”．

双惟一乘积群(two unique product group)　介于右序群与惟一乘积群之间的一类群．设 A,B 是群 G 的任意两个非空有限子集，且 $|A|+|B|>2$，若至少存在 G 中两个不同的元 x,y 皆有惟一表示：$x=ab,y=cd,a,c\in A,b,d\in B$，则称 G 为双惟一乘积群，通常简称 t. u. p. 群，在群代数 $F[G]$ 中其意义如图所示．



t. u. p. 群(t. u. p. group)　即“双惟一乘积群”．

诱导模(induced module)　用表示的方法去研究群环结构的重要概念．设 R 是有 1 结合环，H 是群 G 的子群，对给定的右 $R[H]$ 模 W，由张量积所定义的一个右 $R[G]$ 模

$$W^G=W\otimes_{R[H]}R[G]$$

称为 $R[H]$ 模 W 的诱导模．若 $T=\{g\}$ 为 H 在 G 中右截断，则

$$W^G=\bigoplus_{g\in T}(W\otimes g).$$

诱导模对包含、交、和、直和关系仍然保持并有泛性质：若 W 是右 $R[H]$ 模，$f:W\to W^G$ 是典型嵌入映射，则对任意右 $R[G]$ 模 V 和任意

$$\varphi\in\mathrm{Hom}_{R[H]}(W,V_H),$$

存在惟一的 $\psi\in\mathrm{Hom}_{R[G]}(W^G,V)$，使得 $\psi f=\varphi$．

***H* 投射**(H-projective)　投射模概念的扩展．设 H 是群 G 的子群，V 是右 $R[G]$ 模，对 $R[G]$ 模的每一个正合列

$$0\to U\to W\to V\to0,\tag{1}$$

若与其相伴的 $R[H]$ 模序列

$$0\to U_H\to W_H\to V_H\to0\tag{2}$$

是分裂正合的，则(1)也是分裂正合的，称 $R[G]$ 模 V 是 H 投射的，其中 V_H 是 V 的限制模，即视 V 为 $R[H]$ 模，其余类似．

***H* 内射**(H-injective)　H 投射的对偶概念．设 H 是群 G 的子群，V 是右 $R[G]$ 模，对 $R[G]$ 模的每一正合列

$$0\to V\to W\to U\to0,$$

若它的限制 $R[H]$ 模序列：

$$0\to V_H\to W_H\to U_H\to0$$

是分裂正合列，则前一序列也为分裂正合列，称 $R[G]$ 模 V 是 H 内射的，其中 U_H 表 U 视作 $R[H]$ 模，即 U 的限制模．其余类似．若 G 是有限群，F 是域，T 是 H 在 G 中截断(含 1)，则下列条件等价：

1. V 是 H 投射．
2. V 同构于 $(V_H)^G$ 的直和项．
3. V 同构于 W^G 的直和项，其中 W 是 $F[H]$ 模．
4. 存在 $\psi\in\mathrm{End}_{F[H]}(V_H)$ 使得 $(\sum_{t\in T}t\psi t^{-1})v=v$，对一切 $v\in V$．
5. V 是 H 内射．

这是希格曼(Higman，G.)于 1954 年证明的．

群作用(group action)　交叉积中最基本的概

念．由群的元所给出集合的一种映射．设 G 是群，X 是集合，$\mathrm{sym}(X)$ 表集 X 上对称群，所谓群 G 作用于 X 是指存在一个同态 $f:G\to\mathrm{sym}(X)$．通常省去 f 记为：${}^{g}x=f(g)(x)$，$x\in X$．于是群作用于 X 即是由群 G 的元素所决定的 X 自身的一些映射，满足：

$$^{1}x=x\ {}^{gh}x={}^{g}({}^{h}x),\quad 对任\ x\in X,g,h\in G.$$

若 X 是某代数系（如域、群、模、代数），则 X 的自同构群 $\mathrm{Aut}(X)$ 是 $\mathrm{sym}(X)$ 的子群．从而，

$$f:G\to\mathrm{Aut}(X)\subseteq\mathrm{sym}(X)$$

的同态称为群 G 作用于 X，也称 X 为 G 代数系．其作用的核 $G_0=\{g\in G\mid {}^{g}x=x,任\ x\in X\}$．当 $G_0=1$ 时，称群 G 作用于 X 是忠实的．

G 代数系（G algebraic system）　见“群作用”．

忠实作用（faithful action）　见“群作用”．

G 不变（G-invariant）　亦称 G 平稳．群 G 的元作用下的闭合性．设 S 是代数系 R（如 R 是环、域、代数）的子集，且群 G 作用于 R．若对任 $g\in G$ 恒有 ${}^{g}S=\{{}^{g}s\mid s\in S\}=S$，则称 S 是 G 不变．若 S 是环 R 的理想且是 G 不变，则称 S 是 R 的 G 不变理想．若 $H\lhd G$，R 是有 1 环，则 $R[H]$ 是群环 $R[G]$ 的 G 不变子环，并且 $R[G]$ 的任意理想均为 G 不变理想．

G 平稳（G-stable）　即“G 不变”．

G 不变理想（G-invariant ideal）　见“G 不变”．

不动环（fixed ring）　由不动域引申的概念．若群 G 作用于环 R 为 R 的自同构，${}^{g}r$ 表示 $r\in R$ 在 g 作用下的像，则称 R 的子环

$$^{G}R=\{r\in R\mid {}^{g}r=r,\forall\ g\in G\}$$

为 R 对 G 的不动环．当 G 是有限群，且 $|G|^{-1}\in R$ 时，蒙哥马利（Montgomery, S.）于 1976 年证明：

$$J({}^{G}R)=JR\cap{}^{G}R,$$

其中 JR 为 R 的雅各布森根．环 R 与不动环 ${}^{G}R$ 密切相关，若 R 无 $|G|$ 扭且 R 是半素环，则 ${}^{G}R$ 也是半素环；若 R 是有 1 单环，G 作用是外自同构，则 ${}^{G}R$ 是本原环；若 R 是半单阿廷环，且 $|G|^{-1}\in R$，则 ${}^{G}R$ 也是半单阿廷环．不动环对建立环上伽罗瓦理论起关键作用．除环、本原环、素环、半素环上的伽罗瓦理论已分别由蒙哥马利、帕斯曼（Passman, D. S.）和卡尔钦哥（Kharchenko, V. K.）建立．

分次单位群（graded unit group）　一种特殊的群．它是 G 分次代数单位群的子群．G 分次代数

$$A=\bigoplus_{g\in G}A_g$$

的单位群 $U(A)$ 中元素 u，若存在 $g\in G$，使得 $u\in A_g$，则称 u 为 A 的分次单位．A 的一切分次单位组成的集合 $\mathrm{Gr}U(A)$ 为 $U(A)$ 的子群，称为 A 的分次单位群．若 $u\in\mathrm{Gr}U(A)$，且 $u\in A_g$，则称 g 为 u 的次数，记为 $\deg u=g$．当 u 的次数为 g 时，u^{-1} 的次数为 g^{-1}．

因子集（factor set）　决定群扩张的一组要素．设 N,G 为群，α 是 G 到 $\mathrm{Aut}(N)$ 的映射，

$$\alpha=\{\alpha(g)\mid g\in G\}$$

为 N 的自同构集．记

$$\alpha(x)(n)={}^{\alpha(x)}n\ \ (x\in G;n\in N).$$

设 t 为 $G\times G$ 到 N 的映射，若对任 $x,y,z\in G$，$n\in N$，有

$$^{\alpha(x)}[{}^{\alpha(y)}n]=t(x,y){}^{\alpha(xy)}n\cdot t(x,y)^{-1},\tag{1}$$

$$t(x,y)t(xy,z)={}^{\alpha(x)}t(y,z)\cdot t(x,yz),\tag{2}$$

$$t(x,1)=t(1,x)=1,\tag{3}$$

则称 (t,α) 为 G 在 N 上的一个因子集．

因子集的同余（congruent of factor set）　决定因子集分类的一种关系．对 G 在 N 上的两个因子集 (t,α)，(t',α')，若存在 G 到 N 的映射 λ 满足 $\lambda(1)=1$，且

$$^{\alpha'(g)}n=\lambda(g)\cdot{}^{\alpha(g)}n\cdot\lambda(g)^{-1}\ (\forall\ g\in G,n\in N),$$

$$t'(x,y)=\lambda(x)\cdot{}^{\alpha(x)}\lambda(y)\cdot t(x,y)\lambda(xy)^{-1}\quad(\forall\ x,y\in G),$$

则称 (t,α)，(t',α') 同余．这种同余关系是一个等价关系．

相伴因子集（associated factor set）　群扩张所对应的因子集．所谓群 N 被 G 的扩张，是指存在群的短正合列 $E:1\to N\xrightarrow{i}X\xrightarrow{f}G\to 1$．设

$$E':1\to N\xrightarrow{i'}Y\xrightarrow{f'}G\to 1$$

是另一种扩张，若存在一个同态 $\gamma:X\to Y$ 有交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}1&\longrightarrow&N&\xrightarrow{i}&X&\xrightarrow{f}&G&\longrightarrow&1\\&&\downarrow 1_N&&\downarrow\gamma&&\downarrow 1_G&&\\1&\longrightarrow&N&\xrightarrow{i'}&Y&\xrightarrow{f'}&G&\longrightarrow&1\end{array}$$

则称 E 与 E' 同余．这种同余关系是等价关系，用 $\{E\}$ 表示 E 的同余类．设 E 是 N 被 G 的扩张，$\varphi:G\to X$ 是 f 的截面（即满足 $\varphi(1)=1$，$f\varphi=1_G$）．若 $t:G\times G\to N$ 且 $\{\alpha(g)\mid g\in G\}\subseteq\mathrm{Aut}(N)$ 满足：

$$t(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)\varphi(xy)^{-1}\ \ (\forall\ x,y\in G),$$

$$^{\alpha(g)}n=\varphi(g)n\varphi(g)^{-1}\ \ (\forall\ g\in G,n\in N),$$

则 (t,α) 是因子集，称为相伴于 E 的因子集．f 随 X 的选择不同，所对应的因子集同余，因此，群 N 被 G 的一个扩张 E 决定了惟一的 G 在 N 上的因子集的同余类；并且 N 被 G 的扩张的同余类与 G 在 N 上的因子集的同余类之间一一对应．若 (t,α) 是相伴于 E 的因子集，则 E 是分裂的当且仅当存在映射 $\lambda:G\to N$，$\lambda(1)=1$ 使得

$$t(x,y)=\alpha(x)(\lambda(y)^{-1})(\lambda(x)^{-1})\lambda(xy)\quad(\forall\ x,y\in G).$$

交叉系（crossed system）　由因子集引申的与交叉积密切相关的概念．设 A 是有单位元的交换环

R 上代数，G 是群，对 $\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A)$，记

$$\alpha(g)b = {}^g b \quad (g \in G, b \in A)$$

与映射 $t: G \times G \to U(A)$，若对任 $x,y,z \in G, b \in A$，满足如下条件：

1. ${}^x({}^y b) = t(x,y)^{xy} b t(x,y)^{-1}$；

2. $t(x,y)t(xy,z) = {}^x t(y,z) t(x,yz)$；

3. $t(x,1) = t(1,x) = 1$；

则称 (G,A,α,t) 为 G 在 A 上的交叉系，$t(x,y)$ 称为挠函数.

挠函数(twisted function)　见"交叉系".

等价交叉系(equivalent crossed system)　交叉系之间的重要关系. 与交叉积密切相关的概念，并且从等价观点，相互惟一决定. 群 G 在 R 代数 A 上的两个交叉系 (G,A,α,t) 及 (G,A,α',t')，若存在映射 $u: G \to U(A)$，$u(1)=1$，且满足：

1. $\alpha'(g) = i_{u(g)}\alpha(g)$，$\forall\, g \in G$，其中

$$i_{u(g)}(r) = u(g) r u(g)^{-1} \quad (\forall\, r \in A)；$$

2. $t'(x,y) = u(x)^x u(y) t(x,y) u(xy)^{-1}$，

$$(\forall\, x,y \in G)；$$

则称 (G,A,α,t) 与 (G,A,α',t') 等价. 等价交叉系所决定的交叉积等价.

交叉积(crossed product)　一种特殊的强分次代数. 设

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

为 G 分次代数，$U(A_1)$ 为 A_1 的单位群，$\mathrm{Gr}U(A)$ 为 A 的分次单位群，$\deg: \mathrm{Gr}U(A) \to G$，$\deg(u) = g$ 当且仅当 $u \in A_g$. 若群同态序列

$$1 \to U(A_1) \to \mathrm{Gr}U(A) \xrightarrow{\deg} G \to 1$$

是正合的，或等价地，任 $g \in G$，$A_g \cap U(A) \neq \varnothing$，则称 A 为 G 在 A_1 上交叉积，记为 $A = A_1 * G$，且 A_1 称为 $A_1 * G$ 的基环. 在交叉积 $A = A_1 * G$ 中，对每个 $g \in G$，存在 $\bar{g} \in A_g \cap U(A)$，有 $\bar{1} = 1$，规定：

$$\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A_1), \quad \alpha(g)a = \bar{g} a \bar{g}^{-1} = {}^g a,$$

$$t: G \times G \to U(A_1), \quad t(x,y) = \bar{x}\bar{y}\,\overline{xy}^{-1},$$

对任意 $a \in A_1, x,y \in G$. A 是以 $A_g = A_1\bar{g} = \bar{g}A_1$ 为 A 的 g 分量的强 G 分次代数，

$$A = \left\{ \sum a_g \cdot \bar{g}, \middle| a_g \in A \right\},$$

仅有限个 $a_g \neq 0$ 且为以 $\{\bar{g} \mid g \in G\}$ 为基的 A_1 双模，其乘法为

$$a\bar{g} \cdot b\bar{h} = a^g b t(g,h)\, \overline{gh}, \qquad (*)$$

如上可得 (G,A_1,α,t) 为 G 在 A_1 上交叉系，称为相对于 $A_1 * G$ 的交叉系. $\{\bar{x} \mid x \in G\}$ 取值虽可不同，但所得相对于 $A_1 * G$ 的不同的交叉系等价. 因此，一个交叉积从等价观点就惟一决定了一个交叉系. 反之，给定 G 在 R 代数 B 上一个交叉系 (G,B,α,t). 若 C 是由 $\{\bar{g} \mid g \in G\}$ 为基生成的自由 B 模，且以 $(*)$ 为乘法，则

$$C = \bigoplus_{g \in G} B\bar{g} = \bigoplus_{g \in G} C_g$$

是 G 分次 R 代数，其中 $C_1 = B$，且 C 是 G 在 B 上交叉积，它以 (G,B,α,t) 为交叉系. 因此，为强调交叉系对交叉积的决定作用，也记为 $A = B_\alpha^t(G)$.

基环(basic ring)　见"交叉积".

等价交叉积(equivalent crossed product)　交叉积之间的重要关系. 它与等价交叉系密切相关，并决定了交叉积定义的合理性. 设 A,B 是两个 G 分次 R 代数，且 A,B 均为 G 在 A_1 上交叉积，若存在 A 到 B 的分次同构 f，且 f 也是 A 到 B 的 A_1 模同构(即 f 是 R 代数同构，使得 $f(Ag) = Bg$ $(\forall\, g \in G)$ 且 $f(a) = a, \forall\, a \in A_1$)，则称 A 和 B 等价. G 在 A_1 上两个交叉积是等价的当且仅当 G 在 A_1 上交叉系有相同的等价类.

斜群环(shew group ring)　交叉积的子类. 设

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

是 G 分次 R 代数，$U(A_1)$ 是 A_1 的单位群，$\mathrm{Gr}U(A)$ 为 A 的分次单位群，若群同态列

$$1 \to U(A_1) \to \mathrm{Gr}U(A) \xrightarrow{\deg} G \to 1$$

是分裂正合的(或等价地，对每个 $g \in G$，均存在 $\bar{g} \in Ag \cap U(A)$，使得对任 $x,y \in G$，有 $\bar{x}\,\bar{y} = \overline{xy}$)，则称 A 为 G 在 A_1 上斜群环，记为 $A = A_1 *_s G$. 斜群环 $A = A_1 *_s G$ 是交叉积的特殊类，所以对 $x \in G$，取 $\{\bar{x} \in A_x \cap \bigcup(A)$ 有 $\bar{1} = 1\}$，规定

$$\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A_1), \quad t: G \times G \to U(A_1),$$

对任意 $a \in A_1, x,y \in G$，$\alpha(x)a = \bar{x} a \bar{x}^{-1} = {}^x a$，但

$$t(x,y) = \bar{x}\,\bar{y}\,\overline{xy}^{-1} = 1,$$

此时 $A_1 *_s G = A_{1,\alpha}(G) = \{\sum a_x \bar{x} \mid a_x \in A_1, x \in G$，仅有限个 $a_x \neq 0\}$，其乘法为：$a\bar{x} \cdot b\bar{y} = a^x b \bar{x} \cdot \bar{y}$，于是，$A_1 *_s G$ 所对应的交叉系为 $(G,A_1,\alpha,1)$.

挠群环(twisted group ring)　交叉积的子类. 设

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

是 G 分次 R 代数，如果对任 $g \in G$，恒有 $\bar{g} \in Ag \cap U(A)$，使得 $\bar{g}$ 中心化 A_1，其中 $U(A)$ 为 A 的单位群，则称 A 为 G 在 A_1 上挠群环，记为 $A = A_1 *_t G$. 挠群环 $A = A_1 *_t G$ 也是交叉积的特殊类. 所以对 $x \in G$，取 $\{\bar{x} \in A_x \cap \bigcup(A)$ 有 $\bar{1} = 1\}$，并规定：

$$\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A_1),\ \alpha(x) = 1,$$

$$t: G \times G \to U(A_1),\ t(x,y) = \bar{x}\bar{y}\,\overline{xy}^{-1},$$

对任 $x,y \in G$，此时

$$A_1 *_t G = A_1^t(G)$$

$$= \left\{ \sum a_x \bar{x} \,\middle|\, a_x \in A_1, \text{仅有限个 } a_x \neq 0 \right\},$$

其乘法为

$$a\overline{x}\cdot b\overline{y}=abt(x,y)\,\overline{xy},$$

$A_1 *_t G$ 所对应的交叉系为$(G,A_1,1,t)$. 特别地,若 A_1 含于 A 的中心,则 $A=A_1 *_t G$ 为 G 在 A_1 上挠群代数.

对角等价(diagonal equivalent) 挠群代数的一种特殊等价. 其重要性在于判别$F^t[G]$何时等价于 $F[G]$. 域 F 上挠群代数 $F^{t_1}[G]$经基$\{\overline{x}\mid x\in G\}$的对角变换

$$\widetilde{x}=\delta(x)\overline{x}, \qquad (*)$$

其中 $\delta(x)$是 G 到 $F^*=F\backslash\{0\}$的一个函数,得出以$\{\widetilde{x}\mid x\in G\}$为基,以

$$t_2(x,y)=\delta(x)\delta(y)t(x,y)\delta(xy)^{-1}$$

为挠函数的挠群代数 $F^{t_2}[G]$. 称 $F^{t_1}[G]$对角等价于 $F^{t_2}[G]$. $F^t[G]$对角等价于 $F[G]$,当且仅当

$$t(x,y)=\delta(y)^{-1}\delta(x)^{-1}\delta(xy),$$

其中函数 δ:$G\to F^*$称为 α 上边缘. 对角等价来源于当 G 是有限群时,基变换($*$)恰为对角阵. 若 P 是有限 p 群、F 是特征数为 p 的完全域,则 $F^t[P]$总对角等价于 $F[P]$.

单项式空间(monomial space) 可表为一维子空间直和的向量空间. 设 X 为一指标集,若存在域 F 上向量空间 V 的一维子空间簇$\{V_x\mid x\in X\}$使得

$$V=\bigoplus_{x\in X}V_x,$$

则称$(V,X,(V_x))$为域 F 上的单项式空间.

半线性单项式表示(semilinear monomial representation) 群表示的一种类型. 设 V 为域 F 上向量空间,$(V,X,(V_x))$为域 F 上单项式空间 V 的一切非奇异半线性变换构成一个群,称为半线性变换群,记为 $\mathrm{GS}(V)$. 若存在 G 到 $\mathrm{GS}(V)$的一个同态 Γ,使得对任 $g\in G$,$\Gamma(g)$置换 $V_x(x\in X)$,则称 Γ 为群 G 关于单项式空间$(V,X,(V_x))$的半线性单项式表示. G 的每一个半线性单项式表示 Γ,决定了 G 到 X 的置换群的一个同态 γ,使得 $\gamma(g)x=y$ 当且仅当 $\Gamma(g)V_x=V_y$.

半线性变换群(semilinear transformation group) 见"半线性单项式表示".

投射交叉表示(projective crossed representation) 群表示的一种类型. 设 $\mathrm{GS}(V)$是域 F 上的向量空间 V 的半线性变换群,对 G 到$\mathrm{GS}(V)$的映射 ρ,若存在映射 t:$G\times G\to F^*=F\backslash\{0\}$,使得对任意 $x,y\in G$,有

$$\rho(x)\rho(y)=t(x,y)\rho(xy),\quad \rho(1)=1_V,$$

则称 ρ 为投射交叉表示. 由 ρ 对 t 的相依性,也称 ρ 为 G 在 V 上的 t 表示. 若对任意 $x,y\in G$,恒有 $t(x,y)=1$,则称 ρ 为域 F 上 G 的交叉表示. 若对任 $g\in G,\lambda\in F,v\in V$,有 $\rho(g)(\lambda v)=\lambda\rho(g)(v)$,则称 ρ 为投射表示. 当 ρ 为交叉表示,也为投射表示时,ρ 即为通常的线性表示.

交叉表示(crossed representation) 见"投射交叉表示".

投射表示(projective representation) 见"投射交叉表示".

投射等价(projectively equivalent) 群代数的一种特殊等价. 它与线性表示等价的意义类似. 设

$$\rho_1:G\to\mathrm{GS}(V_1),\quad \rho_2:G\to\mathrm{GS}(V_2)$$

分别是域 F 上向量空间 V_1,V_2 的两个投射交叉表示,其中 $\mathrm{GS}(V_i)$为 F 上向量空间 V_i 的半线性变换群 $(i=1,2)$. 若存在映射 μ:$G\to F^*=F\backslash\{0\}$,有$\mu(1)=1$,及一个向量空间的同构 f:$V_1\to V_2$,使得对任意 $g\in G$ 有 $\rho_2(g)=\mu(g)f\rho_1(g)f^{-1}$成立,则称 ρ_1 和 ρ_2 为等价投射. 若对任意 $g\in G,\mu(g)=1$,则 ρ_1 和 ρ_2 即为线性等价. 若 t_1 表示 ρ_1 和 t_2 表示 ρ_2(参见"投射交叉表示")为等价投射,则 ρ_1,ρ_2 决定 G 在 F 上有相同作用,并且 t_1 上同调于 t_2. 进而,$t_1=t_2\Leftrightarrow\rho_1,\rho_2$ 为线性等价.

Γ 正则元(Γ-regular element) 指标集的特殊元. 指半线性单项式表示所决定的指标集 X 中某些元. 设 Γ 是群 G 在单项式空间$(V,X,(V_x))$上的半线性单项式表示,γ 是由 Γ 确定的 G 到 X 的置换群的一个同态,即$\gamma(g)(x)=y$ 当且仅当 $\Gamma(g)V_x=V_y$. 对 $x\in X$,若存在 V_x 中非零元 v_x 使得对 x 的稳定子 $G(x)=\{g\in G\mid\gamma(g)(x)=x\}$中任意元 g 恒有 $\Gamma(g)v_x=v_x,v_x\in V_x$,则称 x 为 Γ 正则元.

挠正则元(twisted regular element) 群的特殊元. 它是由挠函数决定的. 设交叉积 $R*G=R^t_{1,\alpha}(G)$,G 中元 g,若满足

$$g\in G_0=\{g\in G\mid {}^g r=\overline{g}r\overline{g}^{-1},\text{任 } r\in R\},$$

存在 $0\neq v\in(\mathrm{Z}(R)*G_0)_g$ 使得 $\overline{x}v=v\overline{x}$,对一切 $x\in\mathrm{C}_G(g)$,其中,$\mathrm{Z}(R)$为 R 的中心,$\mathrm{C}_G(g)$为 g 在 G 的中心化子,则称 g 为挠正则元或 t 正则. 由于 $0\neq v\in(\mathrm{Z}(R)*G_0)_g$ 有形式 $v=\lambda\overline{g}$,$0\neq\lambda\in\mathrm{Z}(R)$,$g\in G_0$,所以$g\in G_0$是挠正则,当且仅当

$${}^x\lambda t(x,y)=\lambda t(g,x),$$

对一切 $x\in\mathrm{C}_G(g)$. 若 G 作用于 $\mathrm{Z}(R)$上是平凡的,则 $g\in G_0$ 是挠正则,当且仅当对任意 $x\in\mathrm{C}_G(g)$恒有 $t(x,y)=t(g,x)$. 若 $R*G$ 是斜群环,则每个 $g\in G_0$ 均为挠正则元. 若 $F=\mathrm{Z}(R)$,R 是单环,$V=F*G_0$ 且对每个$g\in G_0$,$V_g=\{\lambda\overline{g}\mid\lambda\in F\}$,则$(V,G_0,(V_g))$为 F 上单项式空间,对每个 $g\in G$,$\Gamma(g)$:$V\to V$,$\Gamma(g)v=\overline{g}v\overline{g}^{-1}$,$v\in V$,$\Gamma(g)$为 V 的非奇异半线性单项式表示,并且,$g\in G_0$是 Γ 正则,当且仅当 g 是挠正则元.

理想集的强置换(strong permutation of ideal set) 群对环的理想集的作用. 设 R 为环,G 为群,

$Q=\{I \mid I \lhd R\}$，若对任意 $g\in G, I\in Q$，${}^{g}I$ 是惟一确定的 R 的理想，且对任意 $x,y\in G$，有 ${}^{x}({}^{y}I)={}^{xy}I$，${}^{1}I=I$，则称 G 作用 R 的理想集，或称 G 置换 R 的理想集. 若 G 作用在 R 的理想集 Q 上，并且这个作用对任意 $g\in G, I, J\in Q$，满足：

1. 若 $I\subseteq J$，则 ${}^{g}I\subseteq {}^{g}J$；
2. ${}^{g}(IJ)={}^{g}I\cdot {}^{g}J$；

则称群 G 强置换 R 的理想.

G 半素环（G-semiprime ring） 附加条件的一类半素环. 设 G 是群，I 是环 R 的 G 不变理想，若 I 不含 R 的非零的 G 不变幂零理想，则称 I 为无 G 幂零理想. 若环 R 本身无 G 幂零，则称 R 为 G 半素环. 因此，环 R 是 G 半素的当且仅当(0)是 R 的惟一 G 不变幂零理想. 若对含于 I 中的任意非零的 G 不变理想 A,B 有 $AB\neq 0$，则称 I 为无 G 零化子理想. 若环 R 本身是无 G 零化子理想，则称 R 为 G 素环.

G 素环（G-prime ring） 见“G 半素环”.

马廷达商环（Martindale ring of quotient） 一种特殊环类. 它是马廷达（Martindale, W. S.）在素环的理想集的等价类上定义的环类. 设 R 是素环，X 为一切左 R 模同态 $f:A\to R$（A 遍及 R 的所有非零理想）的集合，X 中两个元 $f:A\to R$ 和 $g:B\to R$ 称为等价，是指存在 $0\neq C\lhd R, C\subseteq A\cap B$，使得 $f(c)=g(c)$，$\forall c\in C$. 将 X 中元按此等价关系分类，用 $\bar{f}=[f,A]$ 表示 f 所在的类，$Q_m(R)$ 为一切等价类的集合，规定：

$$[f,A]+[g,B]=[f+g,A\cap B],$$
$$[f,A]\cdot[g,B]=[fg,BA],$$

fg 是先 f 后 g 的合成，于是 $Q_m(R)$ 构成一个环，称为 R 的马廷达（左）商环，这是马廷达于 1969 年定义的. 马廷达商环 $S=Q_m(R)$ 是素环，它的中心 $Z(S)=C_S(R)$ 为域. 若 σ 是 R 的自同构，则 σ 可惟一扩张为 S 的自同构. 因此，当 G 是有限群时，$S_a^t(G)$ 是交叉积 $R_a^t(G)$ 的惟一交叉积扩张.

撰 稿 朱元森 张子龙
审 阅 李白飞 陈操宇

分 次 环

分次环论（graded ring theory） 环论的重要分支之一. 具有分次结构的环及模的理论.（群）分次环与分次模的历史源远流长，早在 1854 年，凯莱（Cayley, A.）就引入了域 K 上的群代数 $K[G]$，它是群 G 分次 K 代数. 分次环的另一早期例子是（实）数域 $\mathbb{R}$ 上的多项式环 $\mathbb{R}[x]$. 分次环与模最初发展的主要动力是交换代数几何中的射影代数簇，并形成代数几何研究中的基本方法之一. 自 20 世纪 70 年代以来，（群）分次环和模的发展进入了一个崭新的时期，主要来自非交换代数几何及群表示理论的推动. 群分次环理论非常活跃且富有成果，在这一发展阶段中代表人物有奥西塔因（Oystaeyen, F. Van）、纳斯塔西库（Nastasescu, C.）、达第（Dade, E. C.）、蒙哥马利（Montgomery, S.）、科恩（Cohen, M.）和帕斯曼（Passman, D. S.）等. 群分次环以其与众多数学分支的密切联系而引起人们的极大兴趣. 例如：

1. 相伴于滤子化环的 Z 分次环理论是李代数、代数几何尤其是层理论、微分方程尤其是微分算子环等理论研究中的有力工具.
2. 非交换环的任意群分次的理论在群作用于环及不动点（环）、群表示理论尤其是稳定克利福德理论等发挥了重要的作用.
3. 非交换环的有序群分次的理论及由此而产生的分次序理论是数论、代数表示论、非交换代数几何、维数理论和环理论的一个重要的基本成分.
4. 一般群分次理论与霍普夫代数、冯·诺伊曼代数等理论有着深刻的联系.

值得一提的是，分次环的理论固然重要，而更重要的是分次环的研究方法，这一点可以从分次环的广泛而富有意义的应用中看出.

分次环（graded ring） 具有分次结构的环. 设 R 是结合环，G 是有单位元 e 的乘法群，若 R 是其加法子群族 $\{R_g \mid g\in G\}$ 的直和（或和）且

$$R_gR_h\subseteq R_{gh}\quad(\forall g,h\in G),\qquad (*)$$

则称 R 为 G 分次环（或 G 系）. 此时：

1. R_e 是 R 的子环.
2. 若 G 分次环 R 有单位元 1，则 $1\in R_e$.
3. $R_g(\forall g\in G)$ 是 R 的 R_e 双子模.

对于 G 分次环 R，若在（$*$）式中有

$$R_gR_h=R_{gh}\ (\forall g,h\in G),$$

则称分次环 R 是强 G 分次的，或完全分次的，也称 G 克利福德系. 若分次环 R 有单位元，则 $R=\bigoplus_{g\in G}R_g$ 是强 G 分次的当且仅当 $R_gR_{g^{-1}}=R_e$，$\forall g\in G$. 若对一切 $g\in G$，R_g 在 R 中的右零化子与左零化子皆为零，即 $\gamma_R(R_g)=l_R(R_g)=0$，则称 R 为弱分次环. 任意强分次环必为弱分次的. 在上面的定义中，若 R 是有单位元交换环 S 上的代数，则称 R 为分次 S 代数. 若 G 是交换群，R 是 G 分次环，记环 $S=R$，并规定 S 的分次为 $S_g=R_g^{-1}$，$\forall g\in G$，则称 S 为 R 的反分次环. 在 G 分次环

$$R=\bigoplus_{g\in G}R_g$$

中，称 R_g 为 R 的 g 分支，R_g 的非零元素为 R 的 g 次齐次元. 对任意 $r\in R$ 有惟一分解

$$r=\sum_{g\in G}r_g,\quad r_g\in R_g,$$

其中仅有限个 r_g 非零，非零元 r_g 称为 r 的 g 次齐次

分量. 例如, G 是群, 环 R 上群环 $R[G]$ 就是以 R_g 为 g 分量的分次环, 且为强分次环. 任何一个环 R 都可看做 G 分次环(对任何群 G), 只需视 $R_e=R, R_g=0$, $e\neq g\in G$, 如此所得分次环称为平凡 G 分次环.

强分次环(strongly graded ring)　见“分次环”.

弱分次环(weakly graded ring)　见“分次环”.

克利福德系(Clifford system)　见“分次环”.

反分次环(opposite graded ring)　见“分次环”.

分次代数(graded algebra)　见“分次环”.

分次模(graded module)　具有分次结构的分次环上的模. 给定 G 分次环 R, 若一个左 R 模

$$M=\bigoplus_{g\in G}M_g \text{ 且 } R_gM_h\subseteq M_{gh} \quad (\forall\ g,h\in G),$$

其中 M_g 为子加群, 则称 M 是 G 分次左模. 类似地, 可定义分次右模. ${}_RR$ 和 R_R 分别是 G 分次左和右 R 模. 若 $R_gM_h=M_{gh}$, $\forall\ g,h\in G$, 则称 M 是强分次的. 类似于分次环, 在分次模中可定义 g 分支、g 次齐次元和 g 次齐次分量. 分次模 M 的支集规定为 $\{M_g\neq 0\mid g\in G\}$, 并记为 $\mathrm{Supp}_G(M)$. M 的 G 分次子模 N, 是指 N 为 M 的 R 子模且 $N=\bigoplus_{g\in G}(N\cap M_g)$. 这等价于若 $x\in N$, 则 x 的齐次分量也在 N 中. 特别地, ${}_RR$ 的分次子模称为 R 的分次左理想. 类似地, 可定义 R 的分次右理想和分次理想.

强分次模(strongly graded module)　见“分次模”.

分次子模(graded submodule)　见“分次模”.

分次理想(graded ideal)　见“分次模”.

非退化分次(nondegenerate grading)　用于刻画具有某种特性的分次. 设

$$R=\bigoplus_{g\in G}R_g$$

是 G 分次环, 若对 $\forall\ 0\neq r_g\in R_g$, 有 $r_gR_{g^{-1}}\neq 0$ 和 $R_{g^{-1}}r_g\neq 0$, 则称 R 的分次为非退化的. 若 $\forall\ 0\neq r_g\in R_g, h\in G$, 有 $r_gR_h\neq 0$, 则称 R 的分次是忠实的. 具有单位元的强分次环, 其分次是忠实的.

忠实分次(faithful grading)　见“非退化分次”.

1 零基座(1 null socle)　分次模的一个特殊分次子模. 若 N 是 G 分次 R 模 M 的分次子模, 则 R 商模 M/N 也为 G 分次模, 其 g 分支为

$$(M/N)_g=(M_g+N)/N \quad (\forall\ g\in G).$$

M 的最大的(在包含意义下)1 分支为零的 G 分次 R 子模称为 M 的 1 零基座, 记为 $S_1(M)$. $S_1(M)$ 的 g 分支

$$S_1(M)_g=\{m_g\in M_g\mid R_{g^{-1}}m_g=0\},$$

且 $S_1(M/S_1(M))=0$. 特别地, $S_1({}_RR)=0$, 当且仅当 R 满足: $0\neq r_g\in R_g, \forall\ g\in G\Rightarrow R_{g^{-1}}r_g=0$. 这对分次序和分次阿兹玛亚代数的研究有重要作用.

分次模范畴(category of graded modules)　以分次模为对象的范畴. 给定 G 分次环 R, 就有由全体 G 分次左 R 模组成的分次模范畴 R-gr. 设 $M=\bigoplus_{g\in G}M_g$ 和 $N=\bigoplus_{g\in G}N_g$ 是 R-gr 中的两个对象, 在 R-gr 中 M 到 N 的态射集

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-}gr}(M,N)=\{f\in\mathrm{Hom}_R(M,N)\mid f(M_g)\subseteq N_g,\forall\ g\in G\},$$

对任意 $f\in\mathrm{Hom}_{R-gr}(M,N)$ 恒有 f 的核 $\ker f$ 与余核 $\mathrm{coker} f$ 均在 R-gr 中, 而态射的合成按通常的映射合成. 于是, R-gr 是格罗腾迪克范畴, 即 R-gr 是具有生成元 $\bigoplus_{g\in G}R(g)$ 的阿贝尔范畴, 且满足条件: 恒存在直和, 且关于任意 $A\in R$-gr 的分次子模 B 与分次子模的全序序列 $\{A_i\}$, $(\cup A_i)\cap B=\cup(A_i\cap B)$ 成立. 从而任一 G 分次模在 R-gr 中均有惟一(同构意义下)的内射包. 设 $M=\bigoplus_{g\in G}M_g$ 是分次 R 模, $g\in G$, M 的 g 平移 $M(g)$ 是指作为 R 模 $M(g)=M$, 且 $M(g)$ 的 h 分支 $M(g)_h=M_{hg}$, $\forall\ h\in G$, 从而 $M(g)$ 也为 G 分次模. 于是由映射 $M\to M(g)$ 决定的函子 $T_g: R\text{-}gr\to R\text{-}gr$ 是一个范畴自同构.

平移(suspension)　见“分次模范畴”.

(弱)整除((weakly) divide)　两分次模之间的一种特定联系. 设 $M,N\in R$-gr. 在 R-gr 中, 若 M 同构于 N 的某直因子(这里及以下的同构和直因子均在 R-gr 中而言), 即存在 $f\in\mathrm{Hom}_{R\text{-}gr}(N,M)$, $g\in\mathrm{Hom}_{R\text{-}gr}(M,N)$ 使得 $gf=1_N$, 则称 M 在 R-gr 中整除 N. 而 M 在 R-gr 中弱整除 N, 是指 M 同构于 t 个 N 的直和 $N^{(t)}=N\oplus\cdots\oplus N$ 的某直因子. 在 R-gr 中 M 弱整除 N, 当且仅当存在 $f_i\in\mathrm{Hom}_{R\text{-}gr}(N,M)$ 与 $g_i\in\mathrm{Hom}_{R\text{-}gr}(M,N)$ $(i=1,2,\cdots,t)$, 使得

$$f_1g_1+f_2g_2+\cdots+f_tg_t=I_M.$$

M 与 N 在 R-gr 中弱同构是指它们在 R-gr 中彼此弱整除. 特别地, 若对任意 $g\in G$, M 和 $M(g)$ $(\forall\ g\in G)$ 在 R-gr 中都是(弱)同构的, 则称 M 是(弱)G 不变的. M 是弱 G 不变的, 当且仅当分次环 $\mathrm{END}_R(M)$ 是强分次的. 而 M 是 G 不变的, 当且仅当序列

$$1\to \mathrm{U}(\mathrm{End}_{R\text{-}gr}(M))\to \mathrm{U}(\mathrm{END}_R(M))\to G\to 1$$

是正合列.

弱同构(weakly isomorphism)　见“(弱)整除”.

(弱)不变分次模((weakly) invariant graded modul)　见“(弱)整除”.

分次同态群(graded homomorphism group)　模同态加群的一个分次子群. 给定 G 分次环 R, 设 M,N 为两个分次 R 模, 由同态加群 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 的子加群

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-}gr}(M,N\,(g))$$
$$=\{\varphi\in \mathrm{Hom}_R(M,N)\,|\,\varphi(M_h)\subseteq N_{hg},\forall\ h\in G\},$$

$\forall\ g\in G$,得出 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 的 G 分次子群

$$\mathrm{HOM}_R(M,N)=\sum\nolimits_{g\in G}\mathrm{Hom}_{R\text{-}gr}(M,N\,(g))$$
$$=\bigoplus\nolimits_{g\in G}\mathrm{Hom}_{R\text{-}gr}(M,N\,(g)),$$

称为 M 到 N 的分次同态群,特别地,$\mathrm{END}_R(M)=\mathrm{HOM}_R(M,M)$ 称为分次模 M 的分次自同态环,其 g 分支为 $\mathrm{Hom}_{R\text{-}gr}(M,M\,(g))$. 关于分次同态群和分次自同态环,有下列结果:

1. 当 M 是有限生成 R 模,或 M 和 N 的支集均有限时,$\mathrm{Hom}_R(M,N)=\mathrm{HOM}_R(M,N)$.

2. M 是弱 G 不变的当且仅当 $\mathrm{END}_R(M)$ 是强 G 分次环.

3. 当 M 是 G 不变时,$\mathrm{END}_R(M)$ 是 G 在

$$\mathrm{End}_R(M_1)(\cong \mathrm{END}_R(M)_1)$$

上的交叉积.

4. M 也是 G 分次右 $\mathrm{END}_R(M)$ 模,和 G 分次左 R 右 $\mathrm{END}_R(M)$ 模,即

$$R_gM_h\,\mathrm{END}_R(M)_k\subseteq M_{ghk}\ (\forall\ g,h,k\in G),$$

其中,$\mathrm{HOM}_R(M,N)$ 是一切有限次同态组成的 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 的子群,$\mathrm{END}_R(M)$ 含义类似.

分次自同态环(graded endomorphism ring) 见"分次同态群".

分次投射模(graded projective module) 投射模的分次形式. 给定 G 分次环 R 及 G 分次 R 模 M. 若 M 有由齐次元组成的基,即

$$M\cong\bigoplus_{g\in S}R(g),\quad S\subset G\ (R(g)\text{允许重复出现}),$$

则称 M 为分次自由的. 在范畴 R-gr 中的投射(内射)对象称为分次投射(内射)模. 若 $M,E\in R$-gr,则 M 是分次投射对象,当且仅当 M 作为 R 模是投射的;E 是分次内射 R 模,当且仅当函子 $\mathrm{Hom}_n(-,E)$ 是正合的. 但分次内射模 E 作为 R 模未必是内射的.

分次内射模(graded imjective module) 见"分次投射模".

分次自由模(graded free module) 见"分次投射模".

分次阿廷环(graded Artinian ring) 阿廷环的分次形式. 设 R 是 G 分次环,若 R 的分次左理想有极小(极大)条件,则称 R 为分次左阿廷(诺特)环.

分次诺特环(graded Noetherian ring) 见"分次阿廷环".

阿廷分次环(Artinian graded ring) 具有分次和降链条件的环. 设 R 是 G 分次环. 若 R 还是阿廷环,则称 R 是阿廷分次环. 这类环在代数表示论中有不少应用.

分次半素(素)环(graded semiprime (prime) ring) 半素(素)环的分次形式. 给定 G 分次环 R 的分次理想 I. 对任意 G 分次理想 J,若 $J^2\subseteq I$,恒有 $J\subseteq I$,则称 I 为分次半素理想;对任意 G 分次理想 J,K,若 $JK\subseteq I$,恒有 $J\subseteq I$ 或 $K\subseteq I$,则称 I 为分次素理想. 若 G 分次环 R 的零理想为分次半素(素)理想,则称 R 为分次半素(素)环. R 是分次半素环当且仅当 R 不含非零的幂零分次理想. 此处幂零分次(左)理想是指幂零的且是分次的(左)理想.

分次半素(素)理想(graded semiprime (prime) ideal) 见"分次半素(素)环".

分次幂零(左)理想(graded nilpotent (left) ideal) 见"分次半素(素)环".

分次素根(graded prime radical) 素根的分次形式. G 分次环 R 的所有分次素理想之交称为 R 的分次素根(或称 Bear 分次低根),记为 $\mathscr{B}_G(R)$. 若 $\mathscr{B}(R)$ 为 R 作为环的素根,则

$$\mathscr{B}_G(R)=\bigoplus_{g\in G}(R_g\cap\mathscr{B}(R));$$
$$\mathscr{B}(R_e)=\mathscr{B}_G(R)\cap R_e=\mathscr{B}(R)\cap R_e.$$

特别地,当 G 是有限群或 R 是 $|G|$ 无扭时,$\mathscr{B}_G(R)=\mathscr{B}(R)$.

分次半单(单)模(graded semisimple (simple) module) 模论中相平行的概念. 给定 G 分次环 R,分次 R 模 M 称为分次单模,或分次不可约模,是指 $RM\neq 0$,且 M 只有 0 和 M 这两个分次子模. 分次单模的直和称为分次半单模. 分次 R 模 V 的分次子模 M,若 $V\neq M$ 且不存在 V 的分次子模真包含 M,称 M 为 V 的分次极大子模. M 是 V 的分次极大子模当且仅当 V/M 是分次单模.

雅各布森分次根(Jacobson graded radical) 雅各布森根在分次环上的应用. 给定 G 分次环 R 与分次 R 模 M,M 的一切分次极大子模的交称为 M 的雅各布森分次根,记为 $J_G(M)$. 当 M 无真分次极大子模时,令 $J_G(M)=M$. $J_G(M)$ 必是分次 R 模 M 到一切分次单 R 模的分次同态核的交. 当视 G 分次环 R 为分次左 R 模时,称 $J_G(R)$ 为 R 的雅各布森分次根. 于是

$$J_G(R)=\bigcap\{\mathrm{Ann}_RV\,|\,V\text{ 为 }G\text{ 分次单 }R\text{ 模}\}$$
$$=\bigcap\{I\,|\,R\text{ 的分次极大左理想}\}.$$

分次单 R 模在 R 中的零化子称为 R 的分次本原理想. 而 R 的每个极大左理想含一个 R 的分次本原理想,且每个分次本原理想 I 是包含 I 的若干分次极大理想的交. 因此,$J_G(R)$ 是 R 的一切分次本原理想的交. 一般地,分次环 R 的 J 根与 R 的 J 分次根无必然联系,但当 R 是强分次环时,有 $J_G(R)\cap R_1=J(R_1)$. 当 G 是有限群时,还有:

1. $J_G(R)\subseteq J(R)$.

2. $J(R)^{|G|}\subseteq J_G(R)$.

3. 若$|G|^{-1}\in R$，则$J_G(R)=J(R)$.

分次哥尔迪环(graded Goldie ring)　哥尔迪环的分次形式. 给定G分次环R，分次左模M的分次哥尔迪维数，是指M在范畴R-gr中的哥尔迪维数. 若R作为分次左R模的分次哥尔迪维数是有限的，且关于分次左零化子有极大条件，则称R为分次(左)哥尔迪环. 若G是有限群且R是分次半素，则R_1是哥尔迪环当且仅当R是分次哥尔迪环，或当且仅当R是哥尔迪环.

分次哥尔迪维数(graded Goldie dimension)　见"分次哥尔迪环".

满单函子(epi-mono functor)　一种常用的函子. 它在研究分次模范畴时有重要价值. 给定G分次环R. 在范畴R-gr和R-mod间有四个常用的函子：

1. 诱导函子 Ind：R_e-mod→R-gr，$N\to R\otimes_{R_e}N$，此G分次模的g分支为$R_g\otimes_{R_e}N$($\forall\ g\in G$).

2. 满单函子$R\bar{\otimes}_{R_e}$-：R_e-mod→R-gr，

$$N\to R\bar{\otimes}_{R_e}N=R\otimes_{R_e}N/S_1(R\otimes_{R_e}N),$$

其g分支为$R_g\otimes_{R_e}N+S_1(R\otimes_{R_e}N)$，$S_1(R\otimes_{R_e}N)$是$R\otimes_{R_e}N$的1零基座，函子$R\bar{\otimes}_{R_e}$是共变的保直和的，且把单$R_e$模映射为分次单$R$模.

3. 上诱导函子 coind：R_e-mod→R-gr，

$$N\to \mathrm{coind}(N),$$

它是$\mathrm{Hom}_{R_e}(R,N)$的R子模，其g分支为

$$\{f\in \mathrm{Hom}_{R_e}(R,N)\mid (R_h)f=0\ \forall\ h\neq g^{-1}\}$$

$$(\cong \mathrm{Hom}_{R_e}(R_{g^{-1}},N)),$$

coind 是共变的左正合函子.

4. 限制函子$(\ \ )_g$：R-gr→R_e-mod，$M\to M_g$，其中$g\in G$，$M=\bigoplus_{h\in G}M_h\in R$-$gr$，$(\ \ )_g$是共变的正合函子.

这些函子有以下性质：

1. 函子 Ind 和 coind 分别是函子(　)的左和右伴随函子.

2. 函子$(\ \ )_1$：R-gr→R_e-mod 是范畴等价，当且仅当R是强G分次环，当且仅当函子 Ind：R_e-mod→R-gr是范畴等价.

3. 函子$R\bar{\otimes}_{R_e}$诱导出范畴R_e-mod与R-gr的(某满)子范畴R-$gr(1)=\{M\in R$-$gr\mid M=RM_1$且$S_1(M)=0\}$之间的范畴等价.

以上函子尤其是满单函子和上诱导函子在克利福德理论、分次半单模的结构及分次投射和分次内射等理论中有着重要的应用.

上诱导函子(coinduced functor)　见"满单函子".

稳定克利福德定理(stable clifford theorem)　有重要应用的范畴等价定理. 给定G分次环R，设K是有限生成的左Re模，$M=R\otimes_{Re}K$. 若R是强G分次的且K(即指M)是弱G不变的，则有稳定克利福德定理：若$E=\mathrm{End}_R(M)$，则函子

$$M\otimes_E:\ E\text{-mod}\to CD[M]$$

是有逆$\mathrm{Hom}_R(M,-)$的范畴等价，其中$CD[M]=\{X\in R$-mod$\mid$存在指数集I和J及R模正合序列$M^{(I)}\to M^{(J)}\to X\to 0\}$. 此定理在群表示理论中有着十分重要的应用.

碎积(smash product)　亦称冲积. 与分次环相伴的结合环. 伴随着G分次环R有(广义)碎积$R\#G^*$，它是有基$\{v_g\mid g\in G\}$的自由左R模$\bigoplus_{g\in G}Rv_g$，也是结合环，其乘法为

$$(xv_g)(yv_h)=xy_{gh^{-1}}v_h\quad(\forall\ x,y\in R,g,h\in G).$$

这个环的重要作用之一是使分次模范畴R-gr同构于左酉$R\#G^*$模范畴. 特别地，当G作为环$R\#G^*$的自同构作用为$(xv_h)^g=xv_{hg}$时，碎积就得斜群环$(R\#G^*)*G$，其生成元集为：$\{xv_g*h\mid x\in R,g,h\in G\}$，乘法为

$$(xv_g*h)(yv_p*q)=(xv_g)(yv_{ph^{-1}})*gq.$$

关于分次环碎积有两个著名的对偶定理：

1. $(R\#G^*)*G\cong M_G(R)^{\mathrm{fin}}$，其中$M_G(R)^{\mathrm{fin}}$是以$G$中元作为行标和列标且仅有有限个非零元的$R$上的矩阵环.

2. $(S*G)\#G^*\cong M_G(S)^{\mathrm{fin}}$，其中$S$是任意结合环，斜群环$S*G$为$G$分次环，它的$g$分支是$Sg$.

分次环的碎积在分次环研究中的作用同群代数在群表示论研究中的作用类似.

冲积(smash product)　即"碎积".

正分次环(positive graded ring)　整数加群上的特殊分次环. 设$\mathbf{Z}$是整数加法群，$R=\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}R_n$是$\mathbf{Z}$分次环，即$R_nR_m\subseteq R_{n+m}$　($\forall\ n,m\in\mathbf{Z}$). 若$R_n=0$　($\forall\ n<0$)，则称R为正分次的，也称正则分次环；若$R_n=0$，$\forall\ n>0$，则R称为负分次的. $\mathbf{Z}$分次环与层理论有着密切的联系.

正则分次环(regular graded ring)　即"正分次环".

负分次环(negative graded ring)　见"正分次环".

滤子化环(filtered ring)　一种与整数加群上的分次环有着密切联系的环. 一个有单位元1的结合环R，若存在R的加法子群升链$\{F_nR\mid n\in\mathbf{Z}\}$，且满足：$1\in F_0R$，$F_nR\cdot F_mR\subseteq F_{n+m}R$　($\forall\ n,m\in\mathbf{Z}$)，则称$R$为滤子化环，这簇子群集合，用$FR$表示，称为$R$的一个滤子. 由定义，$F_0R$是$R$的子环. 任何环$R$都是以平凡滤子(即$F_nR=0$当$n<0$；$F_nR=R$，当$n\geqslant 0$)的滤子化环. 同时环$R$的任一理想$I$可构造$R$的一个滤子：$F_nR=R$当$n\geqslant 0$，$F_nR=I^{-n}$当$n<0$，使

R 成为滤子化环. 此滤子称为 I-adic 滤子.

I-adic滤子(I-adic filtration)　见"滤子化环".

滤子化模(filtered module)　滤子化环在模中相平行的概念. 设 R 是滤子化环, M 为左 R 模. 若存在 M 的子加群升链 $\{F_nM|n\in\mathbf{Z}\}$ 使得

$$F_nR\cdot F_mM\subseteq F_{n+m}M\quad(\forall\ n,m\in\mathbf{Z}),$$

则称 M 为滤子化模, 子加群簇 $\mathrm{FM}=\{F_nM|n\in\mathbf{Z}\}$ 称为 M 的滤子. 特别地:

1. 若 $M=\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}F_nM$, 则称 FM 是穷举的.

2. 若存在某 $n_0\in\mathbf{Z}$, 使得 $F_iM=0\ \forall\ i<n_0$, 则称 FM 是离散的.

3. 若 $\bigcap\limits_{n\in Z}F_nM=0$, 则 FM 称为分离的.

于是, 若 R 是滤子化环, 则左正则模 $_RR$ 是滤子化模; 若环 R 的滤子 FR 是穷举的, 则 R 是拓扑环, 簇 $\{(F_nR)_{n\in\mathbf{Z}}\}$ 为 R 中点 0 处的基底.

滤子(filtration)　见"滤子化模".

穷举滤子(exhaustive filtration)　见"滤子化模".

离散滤子(discrete filtration)　见"滤子化模".

分离滤子(separat filtration)　见"滤子化模".

滤子化 R 模范畴 R-filt(the category R-filt of filtered R-module)　以滤子化模为对象的特殊范畴. 设 R 是滤子化环, M,N 是滤子化左 R 模, 一个 R 同态 $f\in\mathrm{Hom}_R(M,N)$, 若对 M,N 的滤子 FM 和 FN, 满足 $f(F_iM)\subset F_{i+p}(N)$, 对 $\forall\ i\in\mathbf{Z}$ 成立, 则称 f 为 p 次同态. 一切有限次同态组成 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 的子群 $\mathrm{HOM}_R(M,N)$, 而一切 p 次同态又构成 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 的子群 $F_p\mathrm{HOM}_R(M,N)$. 特别地, 零次同态构成的子群简记为 $\mathrm{HOM}_{FR}(M,N)$. 设 R 是滤子化环, 一切滤子化左 R 模为对象的集合 R-filt 与以 $\mathrm{HOM}_{FR}(-,-)$ 中元为态射所构成的范畴, 称为滤子化 R 模范畴. 它是加性范畴. 若 $f\in\mathrm{HOM}_{FR}(M,N)$, 则 $\ker f$ 与 $\mathrm{coker} f$ 也在 R-filt 中.

p 次同态(p-degree homomorphism)　见"滤子化 R 模范畴 R-filt".

完全滤子化模(complete filtered module)　滤子化模的特殊类. 给定 $M\in R$-filt, 即 M 是滤子化左 R 模. M 的元素的序列 $(m_i)_{i\in\mathbf{N}}$, 若对每个 $p\in\mathbf{N}$ 存在一个 $N(p)\in\mathbf{N}$, 对一切 $s,t\geqslant N(p)$ 有 $m_s-m_t\in F_{-p}M$, 则称 $(m_i)_{i\in\mathbf{N}}$ 为柯西序列. 若对每个 $p\in\mathbf{N}$, 存在 $N(p)\in\mathbf{N}$, 只要 $S\geqslant N(p)$ 恒有 $m_s-m\in F_{-p}M$, 则称序列 $(m_i)_{i\in\mathbf{N}}$ 收敛于 m. 一个滤子化模 $M\in R$-filt, 若滤子 FM 是分离的且 M 中一切柯西序列是收敛的, 则称 M 是完全滤子化模, 相应的滤子 FM 也称为完全的. 完全滤子化模的有限直和也是完全的.

完全滤子(complete filtration)　见"完全滤子化模".

相伴分次(associated gradation)　由滤子所产生的分次. 设 M 是滤子化环 R 上的滤子化模. 考察加法群

$$G(R)=\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}}F_iR/F_{i+1}R,$$
$$G(M)=\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}}F_iM/F_{i-1}M.$$

若 $x\in F_pM$, 则记 x_p 为 x 在 $G(M)_p=F_pM/F_{p-1}M$ 中的像. 若 $a\in F_i, x\in F_jM$, 则定义 $a_i\cdot x_j=(ax)_{i+j}$ 并扩张成 Z 双线性映射 $\mu: G(R)\times G(M)\to G(M)$. 若取 $M=R$, 则 μ 使 $G(R)$ 成为一个分次环, 从而 $G(M)$ 成为一个分次 $G(R)$ 模. $G(R)$ 和 $G(M)$ 分别称为 R 的相伴分次环和 M 的相伴分次模. 若分次左 $G(R)$ 模 $G(M)$ 是分次诺特的, 则 M 也是诺特的, 且 $\mathrm{K.dim}_RM\leqslant\mathrm{K.dim}_{G(R)}G(M)$, 其中 K.dim 表示克鲁尔维数. 特别地, 若 $G(R)$ 是左诺特环, 则 R 和 F_0R 也是左诺特环, 且

$$\mathrm{K.dim}\ R\leqslant\mathrm{K.dim}\,G(R),$$
$$\mathrm{K.dim}\ F_0R\leqslant\mathrm{K.dim}\ G(R)+1.$$

相伴滤子化环的分次环理论是李代数、代数几何和微分方程等理论研究中十分有效的工具.

扎里斯基中心环(Zariski central ring)　一种拓扑装置的特殊环. 设 $\mathscr{Z}(R)$ 为环 R 的中心, 若空间 $R=\mathbf{X}$ 的拓扑有一开集基 $\mathbf{X}(S)=\{P\subseteq\mathbf{X}|P\not\subset S, S$ 遍及 $\mathscr{Z}(R)$ 的子集$\}$; 等价地: 若对 R 的每个理想 I 有

$$\mathrm{rad}(I)=\mathrm{rad}(R(I\cap\mathscr{Z}(R))),$$

则称 R 为扎里斯基中心环. 例如, 半单阿廷环、阿兹玛亚代数、分次除环均为扎里斯基中心环. 设 R 是 G 分次环, 若 R 也为扎里斯基中心环, 则称 R 是 GZ 环. 若对 R 的每个分次理想 I 有

$$\mathrm{rad}(I)=\mathrm{rad}(R(I\cap\mathscr{Z}(R))),$$

则称 R 是 ZG 环. 由定义, GZ 环必为 ZG 环. 对正分次 ZG 环 R, R_0 是扎里斯基中心环.

GZ 环(GZ-ring)　见"扎里斯基中心环".

ZG 环(ZG-ring)　见"扎里斯基中心环".

撰　稿　朱元森　周柏荣
审　阅　刘绍学　李白飞　陈操宇

微分算子环

微分算子环(ring of differential operators)　环论的重要分支学科之一. 它起源于 1932 年奥尔(Ore, O.)对非交换多项式理论的研究. 设 R 是 u 微分环(参见"u 微分环"), R 上未定元 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_u$ 的多项式全体, 按通常的加法和乘法满足条件:

$$\theta_i\theta_j=\theta_j\theta_i,\quad\theta_ir-r\theta_i=\delta_i(r),$$
$$\forall\ i,j\in\{1,2,\cdots,u\}\ (\forall\ r\in R)$$

所构成的环, 称为微分环 R 上的微分算子环. 记为

$R[\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_u;\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_u]$或$R[\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_u]$，也称为$R$关于$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_u$的奥尔扩张．由归纳法可得

$$\theta_i^n a=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\delta_i^{n-j}(a)\theta_i^j.$$

当$u=1$时，$\forall\ x\in R[\theta;\delta]$，有

$$x=r_n\theta^n+r_{n-1}\theta^{n-1}+\cdots+r_1\theta+r_0\quad(r_i\in R).$$

当$r_n\neq 0$时，称n是x的次数，称r_n为x的首项系数．

微分算子环的理论、方法及其所涉及的基本概念，在研究多项式环、域、李代数、代数几何、微分方程、算子谱理论、广义解析函数以及物理学等许多领域均有广泛应用，从而使它作为环论的一个重要分支得到迅速发展．比约克(Björk, J. E.)于1979年著《微分算子环》一书，对微分算子环的理论做了系统的总结．

奥尔扩张(Ore extension)　见“微分算子环”．

带算子环(ring with operators)　以通常环为特例的更广的环类．设R是一个环，Σ是一个集合，若$\forall\ a,b\in R,\forall\ \alpha\in\Sigma$，有：

1. $\alpha a\in R$；
2. $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$；
3. $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)$；

则α称为R的算子，Σ称为R的算子区，R称为带算子区Σ的环，简称(带)算子环，或Σ环．又，若R的子环S也是Σ环时，则S称为R的(带)算子子环，或Σ子环，或Σ容许的．若I是整数集，R为任意环，则$\forall\ a,b\in R,\forall\ n\in I$，条件1，2，3成立．因此，任意环$R$都可看做以整数环$I$为算子区的算子环．

Σ环(Σ-ring)　见“带算子环”．

算子子环(subring with operators)　见“带算子环”．

环的导子(derivation of ring)　分析中导数概念在环论中的引申．环R到R的映射δ，若$\forall\ a,b\in R$，有：

1. $\delta(a+b)=\delta a+\delta b$；
2. $\delta(ab)=(\delta a)b+a(\delta b)$；

则称δ为R的导子．若R是带算子区Σ的环，则在导子的定义中，除了条件1和2之外，还要求$\forall\ a\in R,\forall\ \alpha\in\Sigma$，有

3. $\delta(\alpha a)=\alpha(\delta a)$.

环R的导子又称为环R的微分．

环的微分(differential of ring)　即“环的导子”．

内导子(inner derivation)　亦称内微分．由环的元素决定的导子．设R为结合环，$r\in R$，对$a\in R$，若$\delta_r(a)=ra-ar$(或$\delta_r(a)=ar-ra$)，则δ_r是R的导子，称为R的由元素r决定的内导子．当且仅当R是可换环时，R没有异于零自同态的内导子．若R为李环，$r\in R$，对$a\in R$，记$\delta_r(a)=ar$(或$\delta_r(a)=ra$)，则δ_r是李环的一个微分，称为李环R的由元素r所确定的内导子．对于一个李环R，当且仅当R是零环时，R没有异于零自同态的内导子．

内微分(inner derivation)　即“内导子”．

微分环(differential ring)　带导子集的环．若环R有一个导子集合Δ，则Δ称为R的微分系，R称为有微分系Δ的环，或简称微分环或Δ环．设S是有微分系Δ的环R的子环，若S也是有微分系Δ的环，则S称为R的微分子环，或Δ子环，而R称为S的微分扩环．R至少有两个Δ子环$\{0\}$和R，称为R的平凡微分子环．其余的微分子环称为非平凡微分子环，或真微分子环．有微分系Δ的环R的子环S是Δ子环的充分必要条件是：$\forall\ a\in S,\forall\ \delta\in\Delta$，有$\delta a\in S$．$\Delta=\{\delta\}$时，$\Delta$环及$\Delta$子环分别记为$\delta$环，$\delta$子环．

微分子环(differential subring)　见“微分环”．

微分扩环(differential extension ring)　见“微分环”．

***u*微分环**(u-differential ring)　一类微分系可交换的特殊微分环．设R是非零的有单位元的结合环，若R是有微分系$\Delta=\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_u\}$的微分环，且任意$\delta_i$与$\delta_j$可交换($1\leqslant i,j\leqslant u$)，则$R$称为$u$微分环．

微分理想(differential ideal)　平行于通常环的理想．设R是有微分系Δ的微分环，R的理想I称为R的微分理想，或Δ理想，是指I也是有微分系Δ的微分环．R至少有两个微分理想$\{0\}$和R，称为R的平凡微分理想．其余的微分理想称为非平凡微分理想或真微分理想．有微分系Δ的环R的理想I是Δ理想的充分必要条件是：$\forall\ a\in I,\forall\ \delta\in\Delta$，有$\delta a\in I$或$\delta I\subseteq I$．当$\Delta=\{\delta\}$时，$\Delta$理想又记为$\delta$理想．对于任意给定的$R$的一个理想$J$，若

$$(J:\delta)=\{a\in R\mid\delta^n(a)\in J,\ \text{对所有}\ n=0,1,2,\cdots\},$$

则$(J:\delta)$是包含在J中最大的R的δ理想．

Δ理想(Δ-ideal)　即“微分理想”．

外尔代数(Weyl algebra)　一种微分算子环．设$k[x_1,x_2,\cdots,x_n]$是域k上n元多项式环．考虑作用于其上的通常的偏导算子

$$\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

及由$k[x_1,x_2,\cdots,x_n]$的元素做成的乘法算子，这些算子的加法和乘法分别定义为算子的加法与合成

$$(D+E)(p)=D(p)+E(p);$$

$$(DE)(p)=D[E(p)],$$

其中$p\in k[x_1,x_2,\cdots,x_n]$，$D,E$是算子．由这些算子

生成一个结合环，称为 $k[x_1,x_2,\cdots,x_n]$上的微分算子环. 它是一个非交换环，同时也是一个由乘法算子 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 及偏导算子 $\partial_1,\partial_2,\cdots,\partial_n$生成的 k 代数，称之为外尔代数，记为$A_n(k)$. 其中元素可写成有限和

$$\sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha\beta}x^{\alpha}\partial^{\beta}$$

的形式(此处 $k_{\alpha\beta}\in k$, $x^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$, $\partial^{\beta}=\partial_1^{\beta_1}\partial_2^{\beta_2}\cdots\partial_n^{\beta_n}$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$是多重指标). 外尔代数是单的、左(右)诺特的、具有限整体同调维数的环. 伯恩斯坦(Bernstein, I. N.)于 1972 年通过对外尔代数及其上模的研究，把 1954 年阿姆斯特丹国际数学家大会上提出的 Γ 函数半纯扩张(在右半复平面全纯的某种分布半纯地扩展到全平面)这一分析的问题完全转化成纯代数的问题，给出了这一问题的简洁证明，大大简化了由他自己于 1968 年给出的基于奇点分解的艰深证明. 这成为微分算子环理论卓有成效的运用和这一理论发展的最初原动力之一. 微分算子环(层)及其上的模(层)理论围绕着这一问题得到了系统的发展.

代数簇上微分算子环(ring of differential operators over an algebraic variety)　特殊的微分算子环. 它是仿射代数簇的坐标环上某些自同态算子构成的微分算子环. 设 k 是特征为零的域，A 为交换 k 代数. 设 $D^0(A)=\mathrm{End}_k(A)$，归纳地定义 $D^i(A)$如下：$D^i(A)=\{\theta\in\mathrm{End}_k(A)\mid[\theta,a]\in D^{i-1}(A),\forall\, a\in A\}$. 记 $D(A)=\bigcup_{i=0}^{\infty}D^i(A)$，称为 A 上 k 线性微分算子环. $D^i(A)$产生 $D(A)$的一个滤子. 一个重要的特殊情形是 $A=\theta(X)$为仿射代数簇 X 的坐标环，此时 $D(A)$简记为 $D(X)$，称为代数簇 X 上的微分算子环. 若 X 是 d 维光滑既约仿射簇，则$D(X)$作为 k 代数由 A 及导子集 $\mathrm{Der}_k(X)$生成. $D(X)$是单的左、右诺特整环，其左、右克鲁尔维数及整体同调维数均为 d. 当 $X=A^n$ 为仿射空间自身时，$D(A^n)$即为 n 次外尔代数 $A_n(k)$.

全律模(holonomic module)　一类特殊的模. 源于微分方程理论的全律组. 设 M 是代数 R 上的模. 若

$$\mathrm{GK}K(M)=\frac{1}{2}\mathrm{GK}(R/\mathrm{ann}\,M),$$

其中 GK( )表示盖尔范德-克锐洛夫维数，则 M 称为全律模. 若 $\mathrm{ch}K=0$ 而 $R=A_n(K)$，则 M_R 为全律模等价于 $\mathrm{GK}(M)=n$.

形式幂级数系数微分算子环(ring of differential operators with coefficients of formal power series)　微分算子环的一种具体类型. 设$\hat{\mathscr{O}}_n$是特征为零的域 k 上 n 元形式幂级数环. 由$\hat{\mathscr{O}}_n$上通常偏导算子

$$\partial=\frac{\partial}{\partial x_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

及由$\hat{\mathscr{O}}_n$中元素定义的乘法算子生成的 k 线性算子环称为$\hat{\mathscr{O}}_n$上的微分算子环，又称为形式幂级数系数微分算子环，记为$\hat{\mathscr{D}}_n(k)$. 解析系数微分算子环 $\mathscr{D}_n$ 可看做$\hat{\mathscr{D}}_n(\mathbf{C})$的子环.

解析系数微分算子环(ring of differential operators with analytic coefficients)　微分算子环的一种具体类型. 设 $\mathscr{O}_n$ 是 n 元复空间 $\mathbf{C}^n$ 中某点 p 附近全体收敛幂级数(即 p 点的解析函数芽)所成环. 由 $\mathscr{O}_n$ 上通常偏导算子

$$\partial_i=\frac{\partial}{\partial z_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

及 $\mathscr{O}_n$ 中的元素定义的乘法算子生成一个 $\mathbf{C}$ 线性算子环，环中元素的加、乘法分别定义为算子的加法与合成，称之为 $\mathscr{O}_n$ 上 $\mathbf{C}$ 线性微分算子环，又称为解析系数微分算子环，记为 $\mathscr{D}_n$. 于是，$\mathscr{D}_n$ 是整体同调维数为 n 的左、右诺特环.

解析系数微分算子层(sheaf of differential operators with analytic coefficients)　具有好的环论性质的特殊算子层. 设 $\mathscr{O}$ 是 n 维复空间 $\mathbf{C}^n$ 上解析函数的层. 对 $\mathbf{C}^n$ 中的每个开集 U，记

$$\Gamma(U)=\left\{\mathscr{D}=\sum_{\text{有限}}f_{\alpha}(z_1,z_2,\cdots,z_n)\partial^{\alpha}\,\middle|\,f_{\alpha}\in O(U)\right\},$$

其中 $\alpha=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是 n 重指标，$\partial^{\alpha}=\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$,

$$\partial_i=\frac{\partial}{\partial z_i}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

这样得到一个 $\mathbf{C}^n$ 上的层，称为解析系数微分算子层，记为 $\mathscr{D}$. 它在 $\mathbf{C}^n$ 上任一点 p 的茎都同构于解析系数微分算子环 $\mathscr{D}_n$. $\mathscr{D}$ 是个(非交换)环组成的凝聚层，每根茎都是左和右的诺特环并具有左和右的整体同调维数 n.

流形上微分算子层(sheaf of differential operators on a manifold)　有较好应用价值的特殊算子层. 设 X 是复解析(或代数)流形. $O(X)$是 X 上解析函数(或正则函数)环. 由$O(X)$上的 $\mathbf{C}$ 线性导子与 $O(X)$自身的乘法算子生成$O(X)$上 $\mathbf{C}$ 线性算子环 $D(X)$. 对 X 的每个开集 V，记

$$D_X(V)=O(V)\otimes_{O(X)}D(X).$$

此处 $O(V)$是 V 上的解析函数环. 这样定义了一个 X 上的层 D_X，它在每个开集 V 上的截面是 $D_X(V)$，称为流形 X 上微分算子层. 它是一个拟凝聚的 O_X 模层. 当 X 是 n 元复空间 $\mathbf{C}^n$ 时，D_X 就是解析系数微分算子层 $\mathscr{D}$. 当 X 是 $\mathbf{C}$ 上仿射代数簇 $\mathscr{V}$ 时，同样地定义可得到层 $\mathscr{D}_{\mathscr{V}}$. $\mathscr{D}_{\mathscr{V}}$ 模层称为代数 $\mathscr{D}$ 模(层).

代数$\mathscr{D}$ 模层(algebraic $\mathscr{D}$-module (sheaf))

见“流形上微分算子层”.

微局部微分算子环(ring of micro-local differential operators) 具有有限整体同调维数的诺特环. 微局部微分算子层 $\mathscr{E}$ 在点 $p=(z,\zeta)\in T_0^*(\mathrm{C}^n)$ 处的茎记为 $\mathscr{E}_p$. 在 $\mathscr{E}_p$ 上定义运算“$\circ$”:对

$$F=\sum_{i\in Z}f_i,\quad G=\sum_{j\in Z}g_j,$$

记 $F\circ G=\sum(\alpha!)^{-1}(\partial_\zeta^\alpha f_i)(\partial_z^\alpha g_j)$. 其中和号 $\sum$ 指对一切整数 i,j 及多重指标 $\alpha=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 求和,

$$\partial_\zeta^\alpha=\partial_{\zeta_1}^{\alpha_1}\partial_{\zeta_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{\zeta_n}^{\alpha_n},\quad \partial_z^\alpha=\partial_{z_1}^{\alpha_1}\partial_{z_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{z_n}^{\alpha_n}.$$

这样 $\mathscr{E}_p$ 做成一个环,称为微局部微分算子环. $\mathscr{E}_p$ 是左(右)诺特的且具有限整体同调维数的环.

微局部微分算子层(sheaf of micro-local differential operators) 微分算子环理论研究的重要对象之一. 设 $Z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 是 n 元复空间 C^n 的坐标,$\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$ 是其上余切向量坐标. 记

$$T_0^*(\mathrm{C}^n)=\{(z,\zeta)\,|\,\zeta\neq 0\}.$$

对 $T_0^*(\mathrm{C}^n)$ 的开集 Ω,记 $\mathscr{O}(\Omega)$ 为 Ω 上全纯函数集. 对 $f\in\mathscr{O}(\Omega)$,若 $f(z,\lambda\zeta)=\lambda^m\cdot f(z,\zeta)$ 在 Ω 上成立,则称 f 为 m 次的 ζ 齐次全纯函数. 并记 Ω 上所有 m 次 ζ 齐次全纯函数为 $\mathscr{O}(m)(\Omega)$. 若和式

$$\sum_{i\in Z}f_i(z,\zeta)$$

满足下列三条:

1. $\forall\, i, f_i(z,\zeta)\in\mathscr{O}(i)(\Omega)$;
2. $\forall\, p\in\Omega$,$\exists\, p$ 的开邻域 V 及整数 ω,使当 $i>w$ 时 $f_i(z,w)=0$ 在 V 上成立;
3. $\forall\, p\in\Omega$,$\exists\, p$ 的开邻域 V 及常数 A,K,使对一切 i,

$$|f_i(z,\zeta)|_v=\sup\{|f_i(z,\zeta)|:(z,\zeta)\in\Omega\}\leqslant A(|i|!)K^{|i|};$$

则把所有满足上述三条的和式 $\sum_{i\in z}f_i(z,\zeta)$ 的集合记为 $\Gamma(\Omega,\mathscr{E})$,它定义了一个 $T_0^*(\mathrm{C}^n)$ 上的层 $\mathscr{E}$,称为微局部微分算子层. $\mathscr{E}$ 是一个凝聚环层,解析系数微分算子层 $\mathscr{D}$ 可看做是 $\mathscr{E}$ 的子层. 在 $\Gamma(\Omega,\mathscr{E})$ 上定义合成“$\circ$”:对 $F=\sum f_i, G=\sum g_j\in\Gamma(\Omega,\mathscr{E})$,若

$$F\circ G=\sum_{\alpha,i,j}(\alpha!)^{-1}(\partial_\zeta^\alpha f_i)(\partial_z^\alpha g_j),$$

其中

$$\partial_\zeta^\alpha f_i=\frac{\partial^\alpha f_i}{\partial\zeta^\alpha},\quad \partial_z^\alpha g_j=\frac{\partial^\alpha g_j}{\partial z^\alpha},$$

则 $\Gamma(\Omega,\mathscr{E})$ 做成一个结合环,称为微局部微分算子的芽环. $\Gamma(\Omega,\mathscr{E})$ 是左和右诺特环,其整体同调维数为 n.

微局部微分算子的芽环(ring of germs of micro-local differential operators) 见“微局部微分算子层”.

伯恩斯坦-佐腾多项式(Bernstein-Sato polynomial) 一种特殊的多项式. 它在用微分算子环理论研究 Γ 函数半纯扩张及奇点分布时起重要作用. 设 $f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 是 n 个复变元的收敛幂级数,$\mathscr{D}_n$ 是解析系数微分算子环. 若存在复系数一元多项式 $b(\lambda)$ 和系数在 $\mathscr{D}_n$ 中的一元多项式 $Q(\lambda)$ 适合函数方程 $b(\lambda)f^\lambda=Q(\lambda)f^{\lambda+1}$,其中,

$$Q(\lambda)=\sum_{k=0}^m\lambda^kQ_k\quad(Q_k\in\mathscr{D}_n),$$

而

$$Q(\lambda)f^{\lambda+1}=\sum_{k=0}^m\lambda^kQ_k(f^{\lambda+1}),$$

并按通常微分法则 $\partial_j(f^{\lambda+1})=(\lambda+1)\partial_j(f)f^\lambda$ 定义 Q_k 对 $f^{\lambda+1}$ 的作用,则把适合此函数方程的 $b(\lambda)$ 中次数最低的首一多项式称为 f 的伯恩斯坦-佐腾多项式,记为 $b_f(\lambda)$.

***D* 模**(*D*-module) 微分算子环上的模. 早期是指解析系数微分算子环 $\mathscr{D}_n$ 上的模及流形 X 上微分算子环 $D(X)$ 上的模. 随着微分算子环理论的发展,各种重要的微分算子环不断出现,其上的模总称为 D 模. D 模和层论结合,已经发展成了一整套系统的理论,不仅形成了环论的一个独特分支,而且与代数几何、复函数分布论、偏微分方程、李代数、微分几何诸多领域有紧密联系.

***D* 模层**(sheaf of *D*-modules) 微分算子环层上的模层. 早期是指解析系数微分算子层 D 上的模层和流形 X 上微分算子芽的环层 D_X 上的模层. 随着微分算子环理论的发展,各种微分算子环层上的模层总称为 D 模层. D 模层理论是微分算子环理论的核心之一. 它最初是在 20 世纪 70 年代围绕着复流形上全纯微分算子芽的环层而发展起来的,是线性偏微分方程组的代数化形式,它的主要结果之一是黎曼-希尔伯特对应. D 模层理论开创了一套建立各种 D 模层的深刻的拟凝聚、凝聚性质、全律性质以及全纯、诺特、同调维数等性质的方法. D 模层理论最简单的情形是仿射 n 空间 A^n 上的微分算子层 $\mathscr{D}_{A^n}$ 的模层. 此时层 $\mathscr{D}_{A^n}$ 的全截面形成外尔代数. 由于仿射簇上拟凝聚与正则函数环上模的理论等价,所以在外尔代数上只须考虑其上的模. 这一最初的 D 模(层)理论由伯恩斯坦(Bernstein, I. N.)发展起来,至今已形成系统的与许多学科联系紧密的重要环论分支,通常称为微分算子环与 D 模理论.

黎曼-希尔伯特对应(Riemann-Hilbert correspondence) 见“*D* 模层”.

全截面(global section) 见“*D* 模层”.

伯恩施坦滤子(Bernstein filtration) 一种标准的正滤子. 在外尔代数 $A_n(k)$ 中,对整数 $v\geqslant 0$,用集合 $\{x^\alpha\partial^\beta\,|\,|\alpha|+|\beta|\leqslant v\}$ (其中 $\alpha=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n,\beta=$

$\beta_1\beta_2\cdots\beta_n$ 是多重指标，$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$，$\partial^\beta = \partial_1^{\beta_1}\partial_2^{\beta_2}\cdots\partial_n^{\beta_n}$，$|\alpha| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|$，$|\beta| = |\beta_1| + |\beta_2| + \cdots + |\beta_n|$）的元素生成 $A_n(k)$ 的 k 子空间 $\mathscr{B}_v$，得到滤子 $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq B_v \subseteq \cdots$. 这个滤子称为伯恩施坦滤子. 在这个滤子下相应的分次环 $gr(A_n(k))$ 是一个可换诺特环，且同构于 $2n$ 个变元的多项式环. 这成为给出 $A_n(k)$ 及其上模的伯恩施坦维数的基础.

良滤子(good filtration)　一类特殊的滤子. 对微分算子环 D，设它有一滤子 $\cdots \subseteq \mathscr{F}_{-1} \subseteq \mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}_1 \subseteq \cdots$，适合

$$\bigcup_{i \in Z} \mathscr{F}_i = D, \mathscr{F}_i\mathscr{F}_j \subseteq \mathscr{F}_{i+j},$$

相应的分次环为 $gr(D)$. 若 D 模 M 上滤子

$$\Gamma: \cdots \subseteq \Gamma_{-1} \subseteq \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \cdots$$

$$(\text{适合} \bigcup_{i \in Z} \Gamma_i = M, \Gamma_i\Gamma_j \subseteq \Gamma_{i+j})$$

使相应于 Γ 的分次模 $gr(M)$（作为分次环 $gr(D)$ 上的模）是有限生成的，则称 Γ 为 D 模 M 上的良滤子.

Σ 滤子(Σ-filtration)　微分算子环的一个滤子. 对交换环 R，记 R 上导子集为 G，由 G 中元素（作为 R 上导算子）与 R 自身的元素（作为 R 上乘积算子）生成微分算子环 $D(R)$，其中元素的加、乘运算分别由算子的加法与合成定义. 由 $D(R)$ 中不多于 v 个导算子的乘积的集合

$$\{\delta_1\delta_2\cdots\delta_k \mid \delta_i \in G, i = 1, 2, \cdots, k, k \leqslant v\}$$

生成的 R 子模记为 Σ_v. 于是，$\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \cdots$ 成为 $D(R)$ 上的滤子，称为 Σ 滤子.

伯恩施坦维数(Bernstein dimention)　D 模的一种维数. 设 R 是可换局部环，$\mathfrak{m}$ 是 R 的惟一极大理想，M 是有限生成 R 模. $M/(\mathfrak{m}^{v+1}M)$ 作为 R 模的长度 $l_R(M/(\mathfrak{m}^{v+1}M))$ 在 v 充分大时适合一个关于 v 的有理系数多项式 $f(v)$. 这个 $f(v)$ 的次数 d 称为 M 的维数，记为 $d(M)$. 对可换诺特环 R 及有限生成 R 模 M，任取 R 的极大理想 $\mathfrak{m}$，M 在 $\mathfrak{m}$ 处的局部化 $M_\mathfrak{m}$ 作为局部环 $R_\mathfrak{m}$ 上有限生成模的维数，记为 $d(M_\mathfrak{m})$. 取数集 $\{d(M_\mathfrak{m}) \mid \mathfrak{m}$ 取遍 R 的极大理想$\}$ 的上确界，称为 M 的维数. 设 D 是微分算子环，有滤子 $\{\mathscr{B}_v\}_{v \in Z}$ 使相应分次环 $gr(D)$ 成为可换诺特环. M 是有限生成 D 模，有良滤子 $\{\Gamma_v\}$ 使相应分次模 $gr(M)$ 是有限生成 $gr(D)$ 模，称 $gr(M)$ 作为 $gr(D)$ 模的维数为 D 模 M 的伯恩施坦维数. 伯恩施坦维数还特别指外尔代数上有限生成模的维数. 伯恩施坦维数与同调维数有密切的关系，它被用来考虑 D 模的全律性.

全律 D 模(holonomic D-module)　伯恩施坦维数可达最小的特殊 D 模. 设 M 是微分算子环 D 上的有限生成模且有伯恩施坦维数. 若 M 的伯恩施坦维数在所有有限生成 D 模的伯恩施坦维数中达到最小值，则称 M 为全律 D 模. 特别地，伯恩施坦维数比全律 D 模大 1 的 D 模，称为次全律 D 模.

伯恩斯坦类 D 模(Beinstein class of D-modules)　一种特殊的模类. 指全律 D 模类. 尤指全律的 $A_n(k)$ 模类.

次全律 D 模(subholonomic D-module)　见"全律 D 模".

D 模的特征理想(characteristic ideal of a D-module)　一类特殊的理想. 对解析系数微分算子环 $\mathscr{D}_n$，有滤子 $\{\Sigma_v\}_{v \in Z}$ 使相应分次环 $gr(\mathscr{D}_n)$ 成为可换诺特环. 设 M 是有限生成 $\mathscr{D}_n$ 模，M 上有良滤子 $\{\Gamma_v\}$ 使相应的分次模 $gr(M)$ 是有限生成 $gr(\mathscr{D}_n)$ 模. $gr(M)$ 在分次环 $gr(\mathscr{D}_n)$ 中的零化理想的根理想 $J_M = \{\alpha \in gr(\mathscr{D}_n) \mid$ 存在整数 w 使 $\alpha^w gr(M) = 0\}$ 称为 $\mathscr{D}_n$ 模 M 的特征理想.

D 模层的特征簇(charateristic variety of sheaf of D-modules)　一类特殊的簇. 对解析系数微分算子层 $\mathscr{D}$ 上的模层 μ，它的每个茎 μ_p 是 $\mathscr{D}_n$ 模. 相应的特征理想 J_{μ_p} 可作为一个层 J_μ 在 p 点的茎，J_μ 就称为 μ 的特征理想层. J_μ 作为 $T^*(\mathbf{C}^n)$ 上全纯函数理想的零点集 $V_\mu = \{(z, \zeta) + (z, \xi) = 0$ 对一切 $f \in (Ju)_z\}$，称为 D 模层 μ 的特征簇，记为 $SS(\mu)$.

全律 D 模层(holonomic sheaf of D-modules)　一种特殊的 D 模层. 对解析系数微分算子层 D 上的模层 μ，若它的特征簇 $SS(\mu)$ 在余切丛 $T^*(\mathbf{C}^n)$ 中具有可能达到的最小维数，则称 μ 为全律 D 模层.

撰　稿　王志玺　吴泉水　周　梦
审　阅　许永华　黄维明

拟　　环

拟环(near-ring)　亦称准环. 比环更广泛的代数系. 一个非空集合 N 连同 N 上的两个二元运算"+"和"·"，若满足：

1. $(N, +)$ 是一个群（不必交换）；
2. $(N, \cdot)$ 是一个半群；
3. 对于任意 $n_1, n_2, n_3 \in N$，有

$$(n_1 + n_2)n_3 = n_1n_3 + n_2n_3;$$

则称 $(N, +, \cdot)$ 为一个（右）拟环，简记为 N. 若将条件 3 中的等式换成 $n_1(n_2 + n_3) = n_1n_2 + n_1n_3$，则称 $(N, +, \cdot)$ 为一个左拟环. 左、右拟环的研究是平行的理论. 若 $(N, +)$ 是交换群，则称 $(N, +, \cdot)$ 为阿贝尔拟环. 若 $(N, \cdot)$ 是交换半群，则称 $(N, +, \cdot)$ 为交换拟环. 若 $N = N_d = \{n \in N \mid n(n_1 + n_2) = nn_1 + nn_2, \forall\, n_1, n_2 \in N\}$，则称 $(N, +, \cdot)$ 为分配拟环. "拟环(near-ring)"一词是德国数学家扎森豪斯

(Zassenhaus,H.)于 1936 年最先提出的. 拟环理论始于 20 世纪 30 年代初,而在 20 世纪 50 年代以后得到迅速发展. 它同环论有许多相似之处,但比环论更广泛,更复杂.

每个环都可嵌入某个阿贝尔群 G 的所有自同态所成的环 $\mathrm{End}(G)$,而每个拟环可嵌入某个群 Γ(不必是阿贝尔的)的所有映射所成的拟环 $M(\Gamma)$,因此可以说环论是群映射的线性理论,而拟环是群映射的非线性理论. 拟环是研究非线性同调代数、代数拓扑、泛函分析和群范畴的有力工具,已在群论、组合数学、非线性几何、动力系统和自动机方面得到应用.

准环(near ring)　即"拟环".

阿贝尔拟环(Abelian near ring)　见"拟环".

交换拟环(commutative near ring)　见"拟环".

分配拟环(distributive near ring)　见"拟环".

零对称拟环(zero-symmetric near-ring)　其乘法接近于结合环的一类重要拟环. 一个拟环 N 的子集 $N_0=\{n\in N\mid n0=0\}$ 称为 N 的零对称部分. 若 $N=N_0$,则称 N 为零对称拟环. 每个环都是零对称拟环. 在一般拟环中,$n0=0$ 并不恒成立. 零对称拟环比一般拟环更接近于环,它在拟环理论中占有重要地位.

恒定拟环(constant near-ring)　亦称常拟环. 具有特殊乘法的一类拟环. 一个拟环 N 的子集 $N_c=\{n\in N\mid nn'=n,\forall\ n'\in N\}$ 称为 N 的恒定部分. 若 $N=N_c$,则称 N 为恒定拟环. 恒定拟环有许多重要特性,例如,每个恒定拟环是素拟环,恒定拟环的加法群的每个正规子群都是素理想.

常拟环(constant near-ring)　即"恒定拟环".

分配生成拟环(distributive generated near-ring)　一类零对称拟环. 一个拟环 N 的加法群 $(N,+)$,若由分配元素集合

$$N_d=\{n\in N\mid n(n_1+n_2)=nn_1+nn_2,\forall\ n_1,n_2\in N\}$$

加法地生成,则称 N 为分配生成拟环. 分配生成拟环是零对称的. 阿贝尔分配生成拟环是环. 群 $(\Gamma,+)$ 上的自同态生成的拟环 $\mathrm{End}(\Gamma)$、自同构生成的拟环 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ 和内自同构生成的拟环 $I(\Gamma)$ 都是分配生成拟环的重要例子.

拟环的皮尔斯分解(Peirce-decomposition of a near-ring)　拟环加法群的一种分解. 若取拟环 N 中任意一个幂等元 e,则对于任意元素 $n\in N$,存在惟一的 $x_0\in\{x\in N\mid xe=0\}$ 和惟一的 $x_1\in Ne$,使得 $n=x_0+x_1$. 特别地,取 $e=0$,存在惟一的 $n_0\in N_0$ 和惟一的 $n_c\in N_c$,使得 $n=n_0+n_c$,从而

$$(N,+)=(N_0,+)+(N_c,+),\quad N_0\cap N_c=\{0\}.$$

这种分解称为拟环 N 的皮尔斯分解.

抽象仿射拟环(abstract affine near-ring)　与仿射变换拟环类似的抽象拟环. 一个拟环 N,若满足条件:$(N,+)$ 是阿贝尔群,$N_0=N_d$,则称 N 为抽象仿射拟环. 抽象仿射拟环 N 的恒定部分 N_c 做成 N 的一个理想,其零对称部分 N_0 是一个环.

N 群(N-group)　环模概念的推广. 设 N 是一个拟环,$(\Gamma,+)$ 是一个群,映射 $\mu:N\times\Gamma\to\Gamma$ 使得 $(n,\gamma)\to n\gamma$,若对于任意的 $\gamma\in\Gamma$,$n_1,n_2\in N$ 满足:

$$(n_1+n_2)\gamma=n_1\gamma+n_2\gamma;$$

$$(n_1n_2)\gamma=n_1(n_2\gamma),$$

则称 (Γ,μ) 为一个 N 群,记为 ${}_N\Gamma$. 对于 Γ 的子群 Δ,若满足 $N\Delta\subseteq\Delta$,则称 Δ 为 ${}_N\Gamma$ 的一个 N 子群. $\Omega=N0=N_c0$ 是 ${}_N\Gamma$ 的最小 N 子群. N 群与拟环之间存在着深刻的内在联系,拟环的某些特性可以用 N 群刻画,N 群中成立着许多与拟环相应的结果.

拟环的理想(ideal of a near-ring)　环论中理想概念在拟环中的推广. 拟环 N 的加法群 $(N,+)$ 的一个正规子群 I,若满足条件:$IN\subseteq I$,对任意元素 $n,n'\in N$,$i\in I$,都有 $n(n'+i)-nn'\in I$,则称 I 为 N 的一个理想,记为 $I\trianglelefteq N$. 若 $(N,+)$ 的正规子群 I 满足前者,称 I 为 N 的右理想;若 I 满足后者,则称 I 为 N 的左理想. 拟环的理想与环的理想的最显著差别是环 R 的理想 I 必有 $RI\subseteq I$,但拟环 N 的理想 I 一般不满足 $NI\subseteq I$.

N 群的理想(ideal of a N-group)　N 群的一类特殊正规子群. 设 Δ 是 N 群 ${}_N\Gamma$ 的正规子群,若对于任意 $\gamma\in\Gamma$,$\delta\in\Delta$ 和 $n\in N$,都有 $n(\gamma+\delta)-n\gamma\in\Delta$,则称 Δ 是 ${}_N\Gamma$ 的一个理想. ${}_N\Gamma$ 的理想不一定是 N 子群,但零对称拟环的理想必是 N 子群.

半拟环(seminear-ring)　比拟环更广泛的代数系. 设 S 是一个非空集合,"+"和"·"是 S 上的两个二元运算,若:

1. $(S,+)$ 与 $(S,\cdot)$ 都是半群;
2. $s_3\in S$,$(s_1+s_2)s_3=s_1s_3+s_2s_3$ $(\forall\ s_1,s_2)$;

则称 $(S,+,\cdot)$ 为一个半拟环. 每个拟环都是半拟环.

拟环的素理想(prime ideal of a near-ring)　环论中素理想概念在拟环理论中的推广,并且同环中素理想的定义完全相似(参见"环的素理想").

拟环的半素理想(semiprime ideal of a near-ring)　类似于环的半素理想.

完全半素理想(completely semiprime ideal)　比完全素理想条件弱的一种理想. 设 P 是拟环 N 的一个理想,对 N 中的任意元 a,若由 $a^2\in P$ 可得 $a\in P$,则称 P 是 N 的一个完全半素理想.

复合环(composition ring)　亦称 TRI 算子代数. 是由环与拟环复合而成的代数系. 非空集合 R 连同 R 上的三个二元运算"+","·"和"∘",

若满足：

1.$(R,+,\cdot)$是一个环；

2.$(R,+,\circ)$是一个拟环；

3.对于任意$r_1,r_2,r_3\in R$，都有

$$(r_1\cdot r_2)\circ r_3=(r_1\circ r_3)\cdot(r_2\circ r_3);$$

则称$(R,+,\cdot,\circ)$为一个复合环.一个环到自身的所有映射对于逐点相加、相乘和映射的合成做成一个复合环.

TRI 算子代数(TRI-operator algebras)　即“复合环”.

不变子拟环(invariant subnear-ring)　一类特殊的子拟环.拟环 N 的子拟环 M，若满足 $MN\subseteq M$ 且 $NM\subseteq M$，则称 M 为 N 的一个不变子拟环.在一个环中，不变子拟环与理想是一致的，但在拟环中则不然.例如，N_c 是 N 的一个不变子拟环，通常它既不是右理想也不是左理想.

忠实 N 群(faithful N-group)　一类特殊的 N 群.若 N 群${}_N\Gamma$ 的零化子$(0:\Gamma)=\{0\}$，则称${}_N\Gamma$ 是忠实的.忠实的 N 群在拟环的嵌入理论中有较为重要的作用.

完全可约拟环(completely reducible near-ring)　一类特殊的拟环.若拟环 N 是单理想的直和，则称 N 为完全可约拟环.它在拟环分解理论中占有重要地位.

亚直既约拟环(subdirectly irreducible near-ring)　比单拟环更广泛的一类拟环.若拟环 N 不同构于若干拟环的非平凡次直积，则称 N 为一个亚直既约拟环.亚直既约拟环类似于亚直既约环，有如下的刻画：N 是亚直既约拟环$\Leftrightarrow$若$(I_a)_{a\in A}$是拟环 N 的一族理想，并且$\bigcap\limits_{a\in A}I_a=\{0\}$，则存在 $a\in A$，使

$$I_a=\{0\}\Leftrightarrow\bigcap_{\{0\}\neq I\trianglelefteq N}I\neq\{0\}\Leftrightarrow N$$

包含一个惟一的最小理想，它含于所有其他非零理想.每个单拟环都是亚直既约的.每个拟环都同构于若干亚直既约拟环的亚直积.

拟代数(near-algebra)　比结合代数更加广泛的代数系.域 F 上的一个向量空间 A，连带一个二元合成“$\cdot$”，若$(A,+,\cdot)$是拟环，且$\forall\ a,b\in A,\forall\ \lambda\in F$，有$(\lambda a)\cdot b=\lambda(a\cdot b)$，则称 A 为 F 上的拟代数.例如，取向量空间${}_FV$ 上所有变换之集$M(V)$，规定“+”为逐点相加，“$\cdot$”为合成，且$\forall\ a\in{}_FV,\forall\ f\in M(V)$，$\lambda f(a)=f(\lambda a)$，则 $M(V)$做成一个拟代数.

拟环的模左理想(modular left ideal of a near ring)　一类重要的左理想.拟环 N 的左理想 L，若存在 $e\in N$，使$\forall\ n\in N$，$n-ne\in L$，则称 L 为 N 的模左理想.此时也称 L 是由 e 模化的，且 e 是模 L 的右单位元.L 是 N 的模左理想的充分必要条件是存在 N 群${}_N\Gamma$ 及 $\gamma\in\Gamma$，使${}_N\Gamma$ 由 γ 单演(即 $N\gamma=\Gamma$)，且

$$L=(0:\gamma).$$

ν 模左理想(ν-modular left ideal)　用以刻画拟环某种类型的根的一类左理想.拟环 N 的一个左理想 L 称为 N 的 ν 模左理想，若 L 是 N 的模左理想，且 N/L 是 ν 型 N 群，其中 $\nu\in\{0,1,2\}$.一个 0 模左理想是一个极大模左理想，一个 2 模左理想 L 是在 L 与 N 之间无真 N_0 子群的极大模左理想.

拟环的雅各布森根(Jacobson-type radicals of a near-ring)　环论中雅各布森根在拟环理论中的推广.设 $\nu\in\{0,1,2\}$，定义

$$J_\nu(N)=\bigcap_{{}_N\Gamma\text{是}\nu\text{型的}N\text{群}}(0:\Gamma)$$

为拟环 N 的 ν 根，即 N 的雅各布森型根.关于 ν 根，还有如下的等价定义

$$J_\nu(N)=\bigcap_{\substack{I\text{是}N\text{的}\nu\text{-}\\\text{本原理想}}}I=\bigcap_{\substack{L\text{是}N\text{的}\nu\text{-}\\\text{模左理想}}}(L:N),$$

其中 $\nu\in\{0,1,2\}$，$\nu\neq0$.

$$J_\nu(N)=\bigcap_{\substack{L\text{是}N\text{的}\nu\text{-}\\\text{模左理想}}}L.$$

对 $\nu=0$，有一个类似于拟环的根的结构

$$J_{\frac{1}{2}}(N)=\bigcap_{\substack{L\text{是}N\text{的}0\text{-}\\\text{模左理想}}}L.$$

在通常情况下，$J_{\frac{1}{2}}(N)$只是 N 的一个左理想，同时

$$J_0(N)=(J_{\frac{1}{2}}(N):N).$$

它与 $J_\nu(N)$有如下的包含关系

$$J_0(N)\subseteq J_{\frac{1}{2}}(N)\subseteq J_1(N)\subseteq J_2(N).$$

若 N 是一个环，则

$$J_0(N)=J_1(N)=J_2(N)=J(N),$$

$J(N)$是环 N 的雅各布森根.

ν 根(ν-radicals)　见“拟环的雅各布森根”.

拟环的诣零根(nil radical of near-ring)　一类特殊的根.拟环最大的诣零理想.拟环 N 的所有诣零理想之和称为 N 的诣零根，记为 $\mathscr{N}(N)$.诣零根含于所有 ν 根.

拟环的素根(prime radical of near-ring)　一类特殊的根.即含于每个素理想的根理想.设 N 是一个拟环，称 N 的所有素理想的交为 N 的素根，记为 $\mathscr{P}(N)$或 $J_{-2}(N)$，$L_r(N)$.素根 $\mathscr{P}(N)$一般不是一个素理想，但必是一个半素理想.素根与其他根之间有下列包含关系

$$\mathscr{P}(N)\subseteq\mathscr{N}(N)\subseteq J_0(N)\subseteq J_1(N)\subseteq J_2(N).$$

局部拟环(local near-ring)　一类条件较强的拟环.设 N 是一个有单位元的零对称拟环，L 表示 N 的没有左逆元的子集，即 $L=\{k\in N\mid Nk\neq N\}$，若 L 是一个 N 子群，则称拟环 N 是一个局部拟环.拟域是 $L=\{0\}$的局部拟环.

拟域(near-field)　接近于域的一类重要拟环.设 N 是一个拟环，若$(N^*=N\backslash\{0\},\cdot)$是一个群，则称 N 为一个拟域.在整数模 2 的剩余类加群 $\mathbf{Z}_2$

中定义乘法如下

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 1 \cdot 1 = 1,$$

则$(\mathsf{Z}_2, +, \cdot)$做成一个不是域的拟域，而且除这一个拟域之外，其他所有拟域都是零对称的. 迪克森(Dickson, L. E.)于1905年首先发现单侧分配域，获得了拟域的概念. 现在拟域理论已发展成为拟环的一个独立分支. 拟域可以协调某类特殊的几何平面，也是刻画二元可迁群、关联群和弗罗贝尼乌斯(Frobenius, F. G.)群的有力工具.

扎森豪斯判别准则(zassenhaus-criterion)　判别有限拟域为迪克森拟域的一个充分必要条件. 有限拟域N是一个迪克森拟域，当且仅当$G = N^* = (N\backslash\{0\}, \cdot)$是亚循环群，即$[G,G]$和$G/[G,G]$都是循环群.

迪克森拟域(Dickson near-field)　一类著名的拟域. 若N是一个拟域，φ: $N^* \to \mathrm{Aut}(N, +, \cdot)$使$n \to \varphi_n$是一个耦合映射，在$N$中定义另一个乘法

$$n \circ_\varphi m = \begin{cases} \varphi_m(n) \cdot m & (m \neq 0), \\ 0 & (m = 0), \end{cases}$$

则$(N, +, \circ_\varphi)$也做成一个拟域，记为N^φ. 若存在某个域F，使得$F^\varphi = N$，则N称为一个迪克森拟域. 利用扎森豪斯判别准则可以确定在目前已知的拟域中，除7例有限拟域之外，其他拟域都是迪克森拟域. 这7种例外情形的阶数分别为$p^2, p = 5, 7, 11, 23, 29$和59.

平面拟环(planar near-ring)　有着广泛应用的一类零对称拟环. 设N是一个拟环，在N中引进等价关系$\equiv$: $a \equiv b \Leftrightarrow \forall\, n \in N, na = nb$. 若$|N/\equiv| \geqslant 3$，并且每个方程$ax = xb + c$，$a, b, c \in N, a \not\equiv b$在$N$中恰有一解，则称$N$为一个平面拟环. 平面拟环在非交换几何、弗罗贝尼乌斯群以及组合结构中有着广泛的应用.

正规拟域(normal near-field)　具有特殊性质的一类拟域. 设F是拟域N的一个真子域，若：

1. $F^* = (F\backslash\{0\}, \cdot)$是$N^* = (N\backslash\{0\}, \cdot)$的正规子群；

2. $\forall\, f, f' \in F, n \in N$，都有
$$n(f + f') = nf + nf';$$

则称N是F上的正规拟域. 这时N可视为F上的向量空间. 正规拟域具有特殊性质：若N^*/F^*是交换群，并且$\dim_F(N) \geqslant 3$，则N是一个域. 若$\dim_F(N) = 2$，并且N是有限的，则N是域$\mathrm{GF}(p^2)$或者是阶为9或64的迪克森拟域.

相容拟环(compatible near-ring)　具有特殊忠实N群的一类拟环. 设N是一个拟环，Γ是一个N群，若对于所有$\gamma \in \Gamma$和$n \in N$，都存在某个$m \in N$，使得$n(\gamma + \delta) - n\gamma = m\delta$对于所有的$\delta \in \Gamma$成立，则称$\Gamma$为相容$N$群. 如果拟环$N$具有一个忠实的相容$N$群，则$N$称为相容拟环.

相容N群(compatible N-group)　见"相容拟环".

驯顺拟环(tame near-ring)　与相容拟环密切相关的一类拟环. N群Γ称为驯顺的，是指${}_N\Gamma$的每个N_0子群都是理想，这里N_0是N的零对称部分. 若拟环N有一个忠实的驯顺N群，则称N为驯顺拟环. 驯顺性与相容性之间的联系可表述如下：若N是有单位元的拟环，${}_N\Gamma$是单式N群，则${}_N\Gamma$是驯顺的，当且仅当对于所有$\gamma, \delta \in N$和$n \in N$，存在某个$m \in N_0$，使得$n(\gamma + \delta) - n\gamma = m\delta$.

驯顺N群(tame N-group)　见"驯顺拟环".

多项式拟环(polynomial near-ring)　环或群上的多项式集做成的拟环. 设R是有单位元的交换环，Γ是一个群(其运算记为加法)，x是其上的未定元，记

$$R[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,|\, n \in \mathsf{N}_0(\text{非负整数集}), a_i \in R, a_n \neq 0 \right\} \cup \{0\};$$

$$\Gamma[x] = \{\gamma_0 + n_1 x + \gamma_1 + n_2 x + \cdots + \gamma_{s-1} + n_s x + \gamma_s \,|\, s \in \mathbf{N}_0, \gamma_i \in \Gamma, n_i \in \mathsf{Z}^* (= \mathsf{Z}\backslash\{0\}), \text{并且} \forall\, t \in \{1, 2, \cdots, s-1\} \text{均有} \gamma_t \neq 0\}.$$

若在$R[x]$和$\Gamma[x]$中定义"+"为多项式通常的加法，而"$\circ$"为多项式的代入，则$(R[x], +, \circ)$和$(\Gamma[x], +, \circ)$分别做成拟环，称之为多项式拟环. 通常的多项式环$(R[x], +, \cdot)$的每个理想都是多项式拟环$(R[x], +, \circ)$的左理想. 加法群$\Gamma[x]$的每个正规子群都是多项式拟环$(\Gamma[x], +, \circ)$的左理想.

多项式函数拟环(near-ring of polynomial functions)　由多项式函数做成的变换拟环. 若$R[x]$是多项式拟环，$p \in R[x]$，则称$\bar{p}: R \to R$使$r \to p \circ r = \bar{p}(r)$为由多项式$p$导出的多项式函数，记$P(R) = \{\bar{p} \,|\, p \in R[x]\}$；对于多项式拟环$\Gamma[x]$，类似地得到$P(\Gamma)$. 多项式函数之集$P(R)$和$P(\Gamma)$对于变换的加法和乘法各做成拟环，称为多项式函数拟环.

单演N群(monogenic N-group)　一类极其重要的N群. 设Γ是一个N群，若存在一个元素$\gamma \in \Gamma$，使得$N\gamma = \Gamma$，则称${}_N\Gamma$是由γ单演的，γ称为${}_N\Gamma$的一个生成元. 一个单演N群${}_N\Gamma$，若$\forall\, \gamma \in \Gamma$，有$N\gamma = \{0\}$或者$N\gamma = \Gamma$，则称${}_N\Gamma$为强单演的.

强单演N群(strongly monogenic N-group)　见"单演N群".

ν型N群(N-group of type ν)　N群三种类型的泛称. 一个非零的单演N群Γ，若${}_N\Gamma$是单的，则称为0型；若${}_N\Gamma$是单的并且是强单演的，则称${}_N\Gamma$为

1型的；若Γ是N_0单的(N_0是N的零对称部分)，则称${}_N\Gamma$为2型的.上述三种类型的N群统称ν型N群，$\nu=0,1,2$.引入ν型N群是为了研究本原拟环.2型N群必是1型N群，1型N群必是0型N群.因而ν型N群不是N群的一种分类.

本原拟环(primitive near-ring)　本原环的概念在拟环中的推广.设$\nu\in\{0,1,2\}$，若拟环N存在一个ν型忠实的N群${}_N\Gamma$，则称N为ν本原拟环，或者称N在Γ上是本原的.这三类ν本原拟环统称本原拟环.一个环R，若在Γ上是ν本原的($\nu=0,1,2$)，则R是R模Γ上的本原环.

ν本原拟环(ν-primitive near-ring)　见“本原拟环”.

撰　稿　王学宽　宋眉眉
审　阅　吴品三　侯国荣

半　环

半环(semiring)　介于半群与环之间的代数结构.它是定义在同一承载集上由分配律联系着的两个半群，即在非空集S中定义有两个代数运算“+”与“·”，使得$(S,+)$与$(S,\cdot)$都做成半群，并且，对于S中任意元素a,b,c，有

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$$
$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$$

成立，则称S为半环.例如，结合环是半环，全体自然数关于通常的加法和乘法做成半环.

半环概念最早由范迪维尔(Vandiver,H.S.)于20世纪40年代提出.半环结构的研究源于结合环的理想理论、自然数的公理化，以及线性空间的正函数理论.半环理论的发展过程，大致分为三个阶段：

1.经典结构理论，主要包括有效半环的韦德伯恩-阿廷理论和一般半环的雅各布森理论.

2.近代半环理论，主要包括半域、半模、半环的根论和序结构理论.

3.具有无限和代数运算的半环理论及其应用.

半环理论除应用于分析学、拓扑学、欧几里得几何学和非交换环论等数学学科外，还广泛应用于图论、最优化理论和量子物理的数学模型理论，特别是在计算机科学的自动机和语言理论中有重要应用.

半环的同余(congruence on a semiring)　研究半环结构的重要概念.设S是一个半环，R是S上的一个等价关系，若R做成半环$S\times S$的子半环，则称R为半环S上的一个同余关系，简称S上的一个同余.设R是半环S上的等价关系，R是半环S上一个同余的等价条件是：若$(x,y),(u,v)\in R$，则$(x+u,y+v),(xu,yv)\in R$.与结合环不同的是，半环S的理想与S上的同余并不保证是一一对应的，因而，构造商半环只能用同余而不能用理想.以至半环的同态核只能与半环上的同余一一对应，而不保证能与半环的理想一一对应.

浸润理想(saturated ideal)　研究一个半环与它的同态像之间子系统(理想、子半环)对应关系的重要概念.设f是半环S到S'的同态，$K(A)$是S的理想(子半环)，对任意给定的$a\in K(a\in A)$及任意$b\in S$，若$f(b)=f(a)$，则$b\in K(b\in A)$，此时，称S的理想K(子半环A)关于f是浸润的.与结合环不同的是，对于含零元的半环而言，半环S包含$\bar{0}=\{x\in S\mid f(x)=0\}$的理想(子半环)与$S'$的理想(子半环)并不保证是一一对应的，只能是$S'$的理想(子半环)与$S$关于$f$浸润的理想(子半环)是一一对应的.

浸润子半环(saturated subsemiring)　见“浸润理想”.

半环的强(弱)直和(strong(weak) direct sum of semirings)　直和概念应用到半环，半环的一种分解.设S_1,S_2均为半环S的子半环，若：

1.$S=S_1+S_2$；

2.$t_1,x_1\in S_1,t_2,x_2\in S_2$，若$x_1+x_2=t_1+t_2$，且

$$x_1=t_1,\quad x_2=t_2;$$

则称S为S_1,S_2的强(弱)直和.条件2可改为

2′.$S_1\cap S_2=\{0\}$.

有效半环(potent semiring)　半环的子类.不含非零幂零右理想和非零幂零左理想的含零元的半环，称为有效半环.若有效半环S的每个非零理想包含S的极小右理想与极小左理想，则S的每个非零右理想包含一个乘法幂等元.设S是含单位元的加法可换的有效单半环，若S包含极小右理想与极小左理想，并且S可表成一些极小右理想的强直和，则S同构于一个除半环上的全矩阵半环.这是有效单半环的韦德伯恩-阿廷结构定理，它是关于结合环中相应定理的推广.

半环的雅各布森根(Jacobson radical of a semiring)　环的雅各布森根的推广.设S是含零元的加法可换的半环，I是S的右理想，若I满足条件：对任意$i_1,i_2\in I$，存在$j_1,j_2\in I$使

$$i_1+j_1+i_1j_1+i_2j_2=i_2+j_2+i_1j_2+i_2j_1,$$

则称I为S的右半正则右理想.类似地，可得左半正则左理想的定义.称S的所有右半正则右理想之和R为S的右雅各布森根，类似地，可定义S的左雅各布森根.并且二者是一致的，称之为S的雅各布森根，记为$J(S)=R$.若$J(S)=\{0\}$，则称S为J半单半环；若$J(S)=S$，则称S为J根半环.关于半环的雅各布森根与J半单半环，有与结合环相应结果类似的完整刻画，并且是结合环相应结果的整齐

推广.

半单半环(semisimple semiring)　一种结构整齐的半环. 设 A 是一个含零元的加法可换半环, S 是一个幺半群, 若有一个运算 $A\times S\to S$, 运算结果记为 $ax, a\in A, x\in S$, 满足条件:

1. $a(x+y)=ax+ay$.
2. $(a+b)x=ax+bx$.
3. $a(bx)=(ab)x$.
4. $0x=a0=0$,

其中, $a,b\in A, x,y\in S$, 则称 S 为一个左 A 半群. 类似地, 可得右 A 半群的定义. 设 S 是一个左 A 半群, 若 S_1 是幺半群 S 的子幺半群, 并且 S_1 又做成左 A 半群, 则称 S_1 为 S 的左 A 子半群; 若 $AS=\{ax\mid a\in A, x\in S\}\neq\{0\}$, 且 S 不含异于 $\{0\}$ 与 S 的左 A 子半群, 则称 S 为 0 单左 A 半群. 类似地, 可得 0 单右 A 半群的定义.

设 $\{S_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 是 S 的一簇左 A 子半群, 若

$$S=\bigcup_{\alpha\in I}S_\alpha,$$

其中每个 S_α 都是 0 单左 A 半群, 并且当 $\alpha\neq\beta$ 时, $S_\alpha\cap S_\beta=\{0\}$, 则称 S 为左 0 半单半环. 类似地, 可定义右 0 半单半环. 既是左 0 半单又是右 0 半单的半环 A, 称之为 0 半单半环(完全单半环).

完全单半环(complete simple semiring)　见“半单半环”.

0 半单半环的结构定理(structural theorem of 0-semisimple semiring)　对 0 半单半环的结构和特征的一种刻画. 若 A 是含零元的加法可换半环, 则下列结论等价:

1. A 是 0 半单半环.
2. A 是完全单半环, 即 A 是单半环($A^2\neq\{0\}$, A 不含异于 $\{0\}$ 与 A 的理想), 并且 $A=\bigcup L_\alpha=\bigcup R_\beta$, L_α, R_β 分别是 A 的一些极小左理想与极小右理想.
3. $A=\bigcup R_k$, R_k 是 A 的理想, 且 R_k 是完全单半环.
4. $A=\bigcup L_\alpha=\bigcup R_\beta$, L_α, R_β 分别是 A 的一些非幂零的极小左理想与非幂零的极小右理想.

除半环(division semiring)　一类特殊的半环. 设 S 是含零元(加法未必可换)的半环; 若 $(S\backslash\{0\},\cdot)$ 是群, 则称 S 为一个除半环; 若对于除半环 S 中任意元 x, 有 $x+x=x$, 则称 S 为加法幂等除半环.

格林关系(Green relation)　一种等价关系. 指半环 G 上的两个关系. 如下两关系:

$$L: xLy\Leftrightarrow G+x=G+y\quad(x,y\in G),$$

$$R: xRy\Leftrightarrow x+G=y+G\quad(x,y\in G),$$

均为 G 上等价关系, 称为半环 G 上的格林关系.

加法幂等除半环(additive idempotent division semiring)　一种特殊的除半环. 半环 G 中任意元 x, 恒有 $x+x=x$, 称 G 为加法幂等半环. 一个除半环 G 若是加法幂等的, 则称为加法幂等除半环. 对于 G 是加法幂等除半环, 有如下的定理:

1. 若 $x+y=y+x, \forall\ x,y\in G$, 则 $(G\backslash\{0\},\leqslant)$ 做成格序群, 其中“$\leqslant$”:

$$x\leqslant y\Leftrightarrow x+y=y,\quad\forall\ x,y\in G\backslash\{0\}.$$

2. 设:

$$H_R=\{x\in G\backslash\{0\}\mid x+G\backslash\{0\}=1+G\backslash\{0\}\},$$

$$H_L=\{x\in G\backslash\{0\}\mid G\backslash\{0\}+x=G\backslash\{0\}+1\},$$

则商半环 $G/H_L(G/H_R)$ 上的格林关系 $L(R)$ 是平凡的等价关系.

同余自由交换半环(congruence-free commutative semiring)　一类结构特殊的半环. 它不假定 S 有加法恒等元和乘法零元(即对所有 $a\in S$, 使 $a\cdot 0=0$ 的元素 0, 若存在必惟一), 但假定 S 含单位元且加法、乘法可换, 若 S 上只有平凡同余(即最小同余 Δ 与 $S\times S$), 则称 S 为同余自由交换半环. 阶 $\geqslant 2$ 的同余自由交换半环分成如下三种类型:

Ⅰ 型: 其中半环 S 有元素 a, 它既是加法恒等元, 又是乘法零元.

Ⅱ 型: 其中半环 S 有一个无穷元 ∞, 它具有性质: $\infty\cdot a=\infty+a=\infty, \forall\ a\in S$.

Ⅲ 型: 其中 S 没有乘法零元.

上述同余自由交换半环有以下特征:

1. 若 $S=\{0,1\}$, 则 S 是且仅是下列四种之一:

1) 2 阶域(Ⅰ 型).

2) 布尔半域: $0+0=0\cdot 0=0\cdot 1=0$,
$0+1=1\cdot 1=1+1=1$(Ⅰ 型).

3) Ⅱ 型半域: $0+0=0+1=0\cdot 0=0\cdot 1=0$,
$1+1=1\cdot 1=1$.

4) Ⅱ 型半域: $0+0=0+1=0\cdot 0=0\cdot 1=0$,
$1+1=0, 1\cdot 1=1$.

2. 阶大于 2 的 Ⅰ 型半环是域.

3. 阶大于 2 的 Ⅱ 型半环 S 中每个非无穷元有一个乘法逆元, 并且

$$x+x=x, x+y=\infty\ (x\neq y, \forall\ x,y\in S).$$

4. 阶大于 2 的 Ⅲ 型半环或者是加法可消的($x+y_1=x+y_2\Rightarrow y_1=y_2, \forall\ x,y_1,y_2\in S$)或者 $(S,+)$ 是一个带($1+1=1$).

半环上的半模(semimodular over semiring)　环上模的拓广. 设 A 是一个含零元 0_A 的加法可换半环, $(M,+,0_M)$ 是一个加法可换幺半群, 若有一个从 $M\times A$ 到 M 的纯量运算“$\circ$”, 满足条件:

1. $(x+y)\circ a=x\circ a+y\circ a$;
2. $x\circ(a+b)=x\circ a+x\circ b$;
3. $x\circ(a\cdot b)=(x\circ a)\circ b$;
4. $0_M\circ a=x\circ 0_A=0_M$;

则称 M 为半环 A 上右半模. 类似地, 有半环 A 上左

半模、双半模，以及含单位元半环 A 上的幺半模概念. 半模是研究半环结构的重要工具，它在刻画半环的雅各布森根以及研究半环上的线性代数等方面起着重要的作用.

投射半模(projective semimodule)　一类重要的幺半模. 一个左幺半模 P 称为投射的，当且仅当下面的条件成立：

1. 设 $\varphi: M \to N$ 是满的 A 幺半模同态，若 $\alpha: P \to N$ 是 A 幺半模同态，则存在一个 A 幺半模同态 $\beta: P \to M$ 使 $\beta\varphi = \alpha$.

2. 设 $\varphi: M \to N$ 是一个稳定的左 A 幺半模同态（即对任意 $m, m' \in M$，有 $m\varphi = m'\varphi \Leftrightarrow \exists\ x, x' \in \{0_N\}\varphi^{-1}$ 使得 $m + x = m' + x'$ 成立），若 $\alpha, \alpha': P \to M$ 是 A 幺半模同态，并且满足条件 $\alpha\varphi = \alpha'\varphi$，则存在 A 幺半模同态 $\beta, \beta': P \to M$ 满足条件

$$\beta\varphi = \beta'\varphi \quad 和 \quad \alpha + \beta = \alpha' + \beta'.$$

投射半模对研究半环的结构起着重要作用.

内射半模(injective semimodules)　一类重要的幺半模. 一个左 A 幺半模 E 称内射的当且仅当给定一个左 A 幺半模 M 和一个子半模 N，任意一个从 N 到 E 的 A 幺半模同态都能扩张成为从 M 到 E 的 A 幺半模同态. 内射半模对研究半环结构起着重要作用.

全序半环(total ordered semirings)　一类重要的半环. 一个半群 $(S, \cdot)$ 称为全序半群，是指 $(S, \leqslant)$ 做成全序集，并且，对 S 中任意元素 x, y，若 $x \leqslant y$，则对任意 $z \in S$，$zx \leqslant zy$，$xz \leqslant yz$. 一个半环 $(S, +, \cdot)$，若在同一全序关系下，$(S, +)$ 与 $(S, \cdot)$ 都做成全序半群，则称 $(S, +, \cdot)$ 为全序半环.

格半环(lattice semiring)　在同一承载集上同时定义有格与半环的一种代数结构. 设 $(S, +, \cdot)$ 为半环，若 S 上有一偏序关系"$\leqslant$"使 $(S, \leqslant)$ 做成格，并且满足条件：

1. 若 $a \leqslant b$，则 $a + x \leqslant b + x$，$\forall\ x \in S$；

2. 若 $a \leqslant b$，则 $ax \leqslant bx$，$xa \leqslant xb$，$\forall\ x \in S$；

则称 S 为格半环. 格半环对研究半环的序结构和格环结构有重要应用价值.

半域(semifield)　一类结构特殊的半环. 一个半域是一个（加法与乘法）交换的半环 $(K, +, \cdot)$，使得 $(K, \cdot)$ 是一个带零元的阿贝尔群（即存在特殊元素 $a \in K$，使 $(K \setminus \{a\}, \cdot)$ 做成阿贝尔群且对任意元素 $x \in K$ 有 $ax = xa = a$，此时，a 称为 $(K, \cdot)$ 的零元（注意：a 未必是加法恒等元，从而未必是半环 K 的零元）. 半域理论对研究半环的嵌入有着十分重要的作用. 关于半域的根理论已形成具有特色的研究新领域.

闭半环(closed semirings)　一种重要的半环. 指带有无限和代数运算的半环结构. 一个闭半环 $(C, +, \cdot, \sum, 0, 1)$ 满足：

1. $(C, +, \cdot, 0, 1)$ 是一个加法可换和幂等（即 $x + x = x$，$\forall\ x \in C$），含零元 0（$0 + x = x + 0 = x$，$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$，$\forall\ x \in C$）和含单位元 1（$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$，$\forall\ x \in C$）的半环.

2. 对每个指标集 I，以及 C 的子集 $\{x_i \in C \mid i \in I\}$，规定 $\sum$ 为满足下列条件的 C 中的运算：

1) $\sum\limits_{i \in \phi} x_i = 0$（$\phi$ 为空集），

$$\sum_{i \in \{1\}} x_i = x_1,\quad \sum_{i \in \{1,2\}} x_i = x_1 + x_2.$$

2) $\sum\limits_{j \in J}\Big(\sum\limits_{i \in I_j} x_i\Big) = \sum\limits_{i \in I} x_i$，其中 $I = \dot{\bigcup\limits_{j \in J}} I_j$（即 I 是 $I_j (j \in J)$ 的无交并）.

3) $\sum\limits_{i \in I} z x_i = z\Big(\sum\limits_{i \in I} x_i\Big)$，$\sum\limits_{i \in I} x_i z = \Big(\sum\limits_{i \in I} x_i\Big) z$.

4) $\sum\limits_{i \in I} x_i = x$，所有 $x_i = x$.

闭半环在理论计算机学科中有着重要的应用价值. 由于无限和代数运算在半环中的建立，使得关于闭半环的结构研究具有鲜明的创新意义. 关于除闭半环结构的研究引发出许多涉及数学基础学科的深层次问题（例如，关于集合论中的大基数问题和无限超滤子问题等）.

完全半环(complete semiring)　一种特殊半环. 它是比闭半环更广泛的具有无限和代数运算的代数结构. 一个完全半环 $(K, +, \cdot, \sum)$ 满足：

1. $(K, +, \cdot, 0, 1)$ 是一个含零元和单位元的加法可换半环.

2. 对每个指标集 I，以及 K 的子集 $\{x_i \in K \mid i \in I\}$，$\sum$ 规定为满足下列条件的运算：

1) $\sum\limits_{i \in \phi} x_i = 0$（$\varnothing$ 表空集），

$$\sum_{i \in \{1\}} x_i = x_1,$$

$$\sum_{i \in \{1,2\}} x_i = x_1 + x_2.$$

2) $\sum\limits_{j \in J}\Big(\sum\limits_{i \in I_j} x_i\Big) = \sum\limits_{i \in I} x_i$　$(I = \dot{\bigcup\limits_{j \in J}} I_j)$.

3) $\sum\limits_{i \in I} z x_i = z\Big(\sum\limits_{i \in I} x_i\Big)$，$\sum\limits_{i \in I} x_i z = \Big(\sum\limits_{i \in I} x_i\Big) z$.

完全半环在理论计算机学科中有着十分重要的应用价值.

交换半环上的代数(algebra on a commutative semiring)　域上代数在半环上的推广. 若一个集合 A 赋予四个算子："$+$"，"$\cdot$"，"$\circ$"，"$\bar{o}$"，其中"$+$"，"$\cdot$"是 A 的二元运算，"$\circ$"是 K 对于 A 的纯量运算，"$\bar{o}$"是 A 的零元算子即 A 的一个特殊元素，并且，满足如下公理：

1. $a + b = b + a$；

2. $a + (b + c) = (a + b) + c$；

3. $(k_1k_2)\circ a=k_1\circ(k_2\circ a)$;

4. $1\circ a=a,\quad 0\circ a=\bar{o}$;

5. $(k_1+k_2)\circ a=k_1\circ a+k_2\circ a$;

6. $k\circ(a+b)=k\circ a+k\circ b$;

7. $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$;

8. $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$,

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$;

9. $k\circ(a\cdot b)=(k\circ a)\cdot b=a\cdot(k\circ b)$;

则称 A 为 K 上代数,其中,$k_1,k_2,k_3\in K,a,b,c\in A$,1,0 分别为 K 中单位元与零元. 设 A 是一个 K 代数,若 A 还赋予一个一元算子“$\dotplus$”:对任意 $a\in A$,$a^{\dotplus}=a+a^2+\cdots$,称 A 为一个 $K\dotplus$代数. 半环上的代数是研究计算机科学中的自动机与语言理论的重要代数结构.

$K\dotplus$代数($K\dotplus$-algebra) 见“交换半环 K 上的代数”.

完全交换半环上的完全代数(complete algebra on a complete commutative semiring) 较狭窄但有实际应用的一类代数结构. 一个集合 A 赋予了五个算子:“$+$”,“$\cdot$”,“$\circ$”,“$\bar{o}$”,“$\sum$”,其中前四个算子及有关满足的公理同交换半环 K 上的代数中所述,而 K 的运算“$\sum$”与 A 的“$\sum$”的定义及有关满足的公理如下:对任意指标集 I,及每个 A 的元素簇 $\{a_i|i\in I\}$,$\sum\limits_{i\in I}a_i$ 为 A 中一个惟一确定的元素,满足如下公理:

$$\sum_{i\in\varnothing}a=\varnothing,$$

其中$\varnothing$表示空集,

$$\sum_{i\in\{1\}}a_i=a_1,\quad \sum_{i\in\{1,2\}}a_i=a_1+a_2,$$

$$\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I_j}a_i\Big)=\sum_{i\in I}a_i,$$

若:

$$I=\dot{\bigcup_{j\in J}}I_j;$$

$$\sum_{i\in I}ba_i=b\Big(\sum_{i\in I}a_i\Big);\quad \sum_{i\in I}a_ib=\Big(\sum_{i\in I}a_i\Big)b;$$

$$\sum_{i\in I}ka_i=k\Big(\sum_{i\in I}a_i\Big);\quad \sum_{i\in I}k_ia=\Big(\sum_{i\in I}k_i\Big)a;$$

则称 A 为 K 上完全代数,或称 A 为完全 K 代数. 完全 K 代数是研究计算机科学中自动机与语言理论的重要代数结构.

完全 K 代数(complete K-algebra) 见“完全交换半环上的完全代数”.

交换半环上的线性方程组(lineal equation systems on a commutative semiring) 线性方程组在交换半环上的推广. 设 Σ 是一个有限字母表,K 是交换半环,Σ^* 是由 Σ 生成的自由幺半群,K^{Σ^*} 表示从 Σ^* 到 K 的映射组成的集合,它做成一个 $K\dotplus$代数. K 上的一个含 n 个方程,n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程组为

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}E_{ij}x_j+T_i\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

其中 E_{ij},T_j 是 Σ^* 的 K 子集(即 $E_{ij},T_j\in K^{\Sigma^*}$),$i,j=1,2,\cdots,n$. 未知量 x_i 取值于 $K\dotplus$代数 K^{Σ^*} 中元. 它是研究自动机与语言理论的重要工具.

形式幂级数(formal power series) 研究自动机与语言理论的一个重要的概念. 设 Σ 是一个字母表,S 是一个非空集,映射

$$\gamma:\Sigma^*\to S,\ \omega\to\omega\gamma\overset{\text{记}}{=\!=}(\gamma,\omega),\ \forall\ \omega\in\Sigma^*,$$

称 γ 为一个形式幂级数,写成

$$\gamma=\sum_{\omega\in\Sigma^*}(\gamma,\omega)\omega,$$

其中(γ,ω)为 ω 的系数.

撰 稿 陈培慈
审 阅 刘绍学

结 合 代 数

结合代数(associative algebra) 类似于环、域,而更接近于环的一个代数系. 设 A 是一个结合环,若 A 又是域 F 上向量空间,且对任意元素 $a,b\in A$,$\lambda\in F$,适合 $\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b)$,则称 A 是 F 上结合代数,简称 F 代数. 称 F 上向量空间 A 的维数为代数 A 的维数,记为 $\dim A$. 一般地,若结合环 A 又是左 R 模,其中 R 是有单位元 1 的交换环,且对任意 $a\in A,\lambda\in R$,适合

$$1\cdot a=a,\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b),$$

则称 A 是 R 上代数. 通常假定一个 R 代数有单位元.

结合代数研究的中心问题是刻画各类代数的结构,它是从 19 世纪 50 年代哈密顿(Hamilton,W. R.)引入实域上四元数(1843 年)、格拉斯曼(Grassmann,H. G.)引入向量乘法以及凯莱(Cayley,A.)等人讨论矩阵代数开始的. 到 20 世纪初,韦德伯恩(Wedderburn,J. H. M.)开创了有限维代数发展的新阶段,他的半单代数结构理论对代数的发展起了推动作用,使有限维代数的研究基本上归结为幂零代数与可除代数的研究,进而得出半单代数较完整的表示理论. 阿尔贝特(Albert,A. A.)的《代数结构》一书(1939 年)是对经典代数的很好的总结. 非半单代数结构的研究则较为复杂,因此划分成一些自然的代数类并对它们进行描述就成了占主要地位的工作. 克德(Köthe,G.)、中山正(Nakayama,T.)、浅野启三(Asano,K.)等人刻画了主理想代数、弗罗贝尼乌斯代数以及它们的推广. 近年来,开始用模论

的方法研究代数结构，产生了代数表示论（参见“代数表示论”）.

由于 R 上代数 A 与环的概念仅多一个 $R\times A$ 到 A 的乘法运算，因此，子代数、单侧理想、理想、商代数、幂零和幂零理想、同构及同态等概念仅比环中相应概念多一个与 R 中元相乘封闭的性质，不再重复它们的定义.

R 代数（R-algebra） 见“结合代数”.

代数的代数（algebraic algebra） 一种特殊的代数结构. 若域 F 上代数 A 中每个元皆是 F 上代数元（即为 F 上一个多项式的根），则称 A 为 F 上代数的代数. F 上任意有限维代数恒为 F 上代数的代数.

结构常数（structure constants） 决定有限维代数结构的一组常数. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是域 F 上 n 维代数 A 的一个 F 基. 由基元素的乘积

$$a_i\cdot a_j=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ij}^{k}\cdot a_k\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

决定的 n^3 个 F 中元素 $\gamma_{ij}^{k}(i,j,k=1,2,\cdots,n)$ 称为 A 的结构常数. 结构常数完全决定了有限维代数 A 的结构，例如，A 的乘法满足结合律当且仅当

$$\sum_{l=1}^{n}\gamma_{ij}^{l}\gamma_{lk}^{m}=\sum_{l=1}^{n}\gamma_{jk}^{l}\gamma_{il}^{m}\quad(\forall\ i,j,k).$$

可除代数（division algebra） 平行于除环的一类重要代数. 若 R 代数 A 的每个非零元在 A 中恒有逆元，即 $A^*=A\backslash\{0\}$ 是乘群，则称 A 是 R 可除代数. R 是域时，R 可除代数简称可除代数. 代数闭域 F 上有限维可除代数只有 F 自身. 而实数域 $\mathbb{R}$ 上有限维可除代数有且仅有实数域、复数域与四元数可除代数三种，这是有限维可除代数著名的弗罗贝尼乌斯结构定理.

皮尔斯分解（Peirce decomposition） 代数（或环）关于一个幂等元的分解. 设 e 是代数（或环）A 的幂等元. A 的分解式：

$A=eA\oplus(1-e)A$,

$A=Ae\oplus A(1-e)$,

$A=eAe\oplus eA(1-e)\oplus(1-e)Ae\oplus(1-e)A(1-e)$,

分别称为关于幂等元 e 的右、左与双侧皮尔斯分解. 其中，$(1-e)A=\{a-ea\mid a\in A\}$ 恰为 e 的右零化子，$eA(1-e)$ 是以 e 为左单位元的子代数，其余类似. 若 A 是域 F 上有限维代数，有单位元 1，且单位元有分解：$1=e_1+e_2+\cdots e_n$，其中 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是两两正交的本原幂等元，则 A 关于这些幂等元的分解式

$$A=\bigoplus_{i=1}^{n}Ae_i,\quad A=\bigoplus_{i=1}^{n}e_iA,\quad A=\bigoplus_{i,j=1}^{n}e_iAe_j$$

分别称为 A 的左、右、双侧皮尔斯分解，其中直和分别为左、右理想及向量空间的直和.

代数张量积（tensor product of algebras） 构造新代数的一种重要方法. 两个 R 代数 A,B 作为 R 模的张量积 $A\otimes_R B$ 是由 $\{x\otimes y\mid x\in A,y\in B\}$ 生成的 R 模，并具有泛性质（即对任一 R 代数 P，作为模若 $\Phi:A\times B\to P$ 是 R 模双线性平衡映射，则存在惟一的 R 模同态 $\varphi:A\otimes_R B\to P$，使得对任意 $x\in A,y\in B$ 恒有 $\varphi(x\otimes y)=\Phi(x,y)$），于是，在 $A\otimes_R B$ 中存在一个乘法运算满足：

$$(x_1\otimes y_1)(x_2\otimes y_2)=x_1x_2\otimes y_1y_2$$
$$(\forall\ x_1,x_2\in A;y_1,y_2\in B),$$

且在此乘法下 $A\otimes_R B$ 成为 R 结合代数，称为 A,B 的张量积. 当 A,B 有单位元时，$1=1_A\otimes 1_B$ 为 $A\otimes_R B$ 的单位元. 由于 R 代数的张量积也是 R 模的张量积，因此，R 模张量积的性质作为代数张量积也成立. 此外，还有

$$(A\otimes B)\otimes C\cong A\otimes(B\otimes C),$$
$$(A\oplus B)\otimes C\cong A\otimes C\oplus B\otimes C,$$
$$R\otimes A\cong A\otimes R\cong A.$$

张量积对研究代数结构有重要意义. 例如，域 F 上有限维单代数恒为 F 上 n 阶全阵代数 F_n 与 F 上可除代数 D 的张量积. 从而将有限维单代数的研究归结为可除代数的研究.

纯量扩张（scalar extension） 常用的代数基域扩张，它对域上中心单代数结构的研究有重要作用. 若 A 是 R 代数，S 是交换的 R 代数，则 $A_S=A\otimes_R S$ 是 S 上代数，称为 A 的纯量扩张. 纯量扩张有如下基本性质：

$$(A\oplus B)_S\cong A_S\oplus B_S,$$
$$(A\otimes_R B)_S\cong A_S\otimes_R B_S,$$
$$(A_S)_T\cong A_T,$$

其中 T 是包含 S 的任一 R 交换代数. 若 K 是域 F 的有限扩张，则域 F 上中心单代数 A 的纯量扩张 A_K 仍是 K 上中心单代数.

模的张量代数（tensor algebra of a module） 由模的 k 重张量积构造的代数. 设 A 是 R 代数，M 是 A 双模. 由张量积的可结合性，$M^{(k)}=M^{(k-1)}\otimes M$ 也为 A 双模，其中 $M^{0}=A$，$M^{(1)}=M$. 此外，从同构观点可视 $M^{(k)}\otimes M^{(l)}$ 与 $M^{(k+l)}$ 等同. 设

$$T(M)=\bigoplus_{k=0}^{\infty}M^{(k)}=\left\{\sum u_k\ \text{有限和}\ \middle|\ u_k\in M^{(k)}\right\},$$

并对任意元 $u_k\in M^{(k)}$，$u_l\in M^{(l)}$ 规定 $u_k\cdot u_l=u_k\otimes u_l$，再将此乘法线性扩张到 $T(M)$ 使之成为 R 代数，称 $T(M)$ 为 A 双模 M 的张量代数. 当 $A=R$ 时，$T(M)$ 是 R 模 M 的张量代数. 设 f 是 R 模 M 到 R 代数 A 的模同态，若 $f^{(i)}=f^{(i-1)}\otimes f$ 为 $M^{(i)}$ 到 A 的 R 模同态（$f^{(0)}=f$），则有

$$f^{(i)}(x_1\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_n)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n).$$

由于

$$T(M)=\bigoplus_{0}^{\infty}M^{(i)},$$

可定义 $T(M)$ 到 A 的代数同态 f^*，f^* 作用在 $M^{(i)}$ 上与 $f^{(i)}$ 一致，所以 $T(M)$ 具有泛性质：R 模 M 到 R 代数 A 的任一模同态可惟一扩展为 $T(M)$ 到 A 的代数同态. $T(M)$ 是 R 正则分次代数，它含 A 为子代数且含 A 双子模 M.

模的对称代数(symmetric algebra of a module) 由模的张量代数所构造的一种代数. 若 R 是有单位元的交换环，M 是 R 模，$T(M)$ 是模 M 的张量代数. 对任意自然数 n，σ_n 为 n 个数码 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的对称群，$A^{(n)}$ 是 $M^{(n)}$ 中由一切形如

$$x_1\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_n - x_{\sigma(1)}\otimes x_{\sigma(2)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(n)}$$

的元生成的子模(其中，$\sigma(i)$ 是 i 在 σ_n 下的像)，则

$$A=\bigoplus_{n=0}^{\infty}A^{(n)}$$

是 $T(M)$ 的理想，且 $A^{(n)}=M^{(n)}\cap A$. 做商模 $S^{(n)}=M^{(n)}/A^{(n)}$，其中 $S^{(0)}=R$，$S^{(1)}=M$，于是，商代数

$$S(M)=T(M)/A=\bigoplus_{n=0}^{\infty}S^{(n)}$$

是交换代数，称为模 M 的对称代数. $S^{(n)}=M^{(n)}/A^{(n)}$ 称为模 M 的 n 次对称幂. 对称代数也是 R 上正则分次代数.

模的对称幂(symmetric power of a madule) 见"模的对称代数".

外代数(exterior algebra) 由模的张量积构造的一类代数. 设 $T(M)$ 是 R 模 M 是张量代数，若

$$M^{(i)}=M\otimes M\otimes\cdots\otimes M$$

是 i 个 M 的张量积，则

$$T(M)=\bigoplus_{0}^{\infty}M^{(i)},$$

其中 $M^{(0)}=R$. 若 B 是一切 $x\otimes x$，$x\in M$ 在 $T(M)$ 中生成的理想，则

$$B\subseteq\sum_{i\geqslant 2}M^{(i)} \quad 且 \quad B\cap M=0.$$

称商代数 $E(M)=T(M)/B$ 为外代数. 若

$$E^{(i)}=(M^{(i)}+B)/B,$$

则 $E(M)=\bigoplus E^{(i)}$，且 $E^{(i)}E^{(j)}\subseteq E^{i+j}$. 因此，$E(M)$ 为一个分次代数. 若 A 是 R 代数，f 为 R 模 M 到 A 的 R 模同态，满足 $f(x)^2=0$，$\forall\ x\in M$，则由 $T(M)$ 的泛性质，f 可惟一扩张为 $T(M)$ 到 A 的代数同态 f^*，且满足

$$f^*(x)^2=f(x)^2=0 \quad (\forall\ x\in M).$$

由于 f^* 的核含一切 $x\otimes x$，$\forall\ x\in M$，即 $\ker f^*\supset B$，所以存在 $E(M)$ 到 A 的代数同态 $\bar{f}: x+B\to f^*(x)$. 于是，R 模 M 到 R 代数 A 的模同态 f，若满足 $f(x)^2=0$，$\forall\ x\in M$，则 f 可惟一扩张为 $E(M)$ 到 A 的 R 代数同态

$$\bar{f}: \bar{f}(x+B)=f(x).$$

代数的根(radical of an algebra) 代数的一个特殊理想，在非半单代数理论中占有重要位置. 代数 A 的正则模的根称为代数的根，记为 $\mathrm{rad}\,A$，亦称为 A 的雅各布森根，记为 $J(A)$. 它与环的雅各布森根相同. 若 A 是阿廷代数，则 $\mathrm{rad}\,A$ 是 A 中惟一最大幂零理想，亦称为 A 的幂零根，此时商代数 $A/\mathrm{rad}\,A$ 是半单代数.

代数的中山正引理(Nakayama's Lemma for algebras) 中山正引理的一般代数形式. 设 P 是 R 代数 A 的左理想，从而，$P\subseteq\mathrm{rad}\,A$ 的充分必要条件是：对任一有限生成的左 A 模 M，若 $N\subseteq M$ 适合 $N+PM=M$，则 $N=M$.

本原代数(primitive algebra) 与本原环相平行的代数. 本原代数是有忠实既约代数模的代数. 代数 A 是本原代数当且仅当 A 作为环是本原环.

半本原代数(semiprimitive algebra) 与半本原环相平行的代数. 若代数 A 的雅各布森根 $J(A)=0$，则 A 称为半本原代数. 代数 A 是半本原代数当且仅当它作为环是半本原环.

外尔本原代数(Weyl primitive algebra) 一种特殊的本原代数. 外尔(Weyl, H.)给出的一个本原代数的例子. 若 $F\{x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 是特征为零的域 F 上 $2n$ 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的自由代数. I 是由

$$x_ix_j-x_jx_i,\ y_iy_j-y_jy_i,\ y_ix_j-x_jy_i-\sigma_{ij}1$$
$$(1\leqslant i,j\leqslant n)$$

在 $F\{x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 中生成的理想，则

$$W_n=F\{x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n\}/I$$

是 F 上本原代数，称为外尔(本原)代数，W_n 也为单代数. 外尔代数也是微分算子环的基本例子之一. W_n 作为位置和动量算子所生成的代数首先出现在量子力学中，生成元的不可换性反映了海森堡不定度原理.

代数模(modules over an algebra) 一个与环模类似的概念. 若 A 是域 F 上的代数，则 A 是一个环. 若 M 是 F 上向量空间，还是环 A 上的右模，且

$$(\alpha m)a=\alpha(ma)=m(\alpha a),$$

任意 $\alpha\in F$，$m\in M$，$a\in A$，则称 M 是代数 A 上的右模. 同样地，可定义代数 A 上的左模. 环上模的概念和性质均适用于代数上的模，相应概念参看模论.

代数的表示(representation of an algebra) 类似于群的表示，研究代数的具体实现. 若 A 是域 F 上的代数，M 是 F 上向量空间，$E(M)$ 是 M 的一切线性变换组成的线性算子代数，则 A 到 $E(M)$ 的一个代数同态 φ 称为代数 A 的一个表示. M 称为 A 的表示空间，$\dim_F M$ 称为表示 φ 的次数，记为 $\deg\varphi$. 若 $\deg\varphi<\infty$，则称 φ 是 A 的有限表示. 若 $\deg\varphi=n<\infty$，取定 M 的一组 F 基，则 $E(M)\cong M_n(F)$，A 到

$M_n(F)$的代数同态称为 A 的一个矩阵表示. 若 $\varphi: A \to E(M)$是 A 的一个表示,记 $ma=m\varphi(a)$, $\forall\ m\in M, a\in A$,则 M 成为一个右 A 模. 反之,若 M 是右 A 模,记 $\varphi: A\to E(M)$, $a\to\lambda_a$,其中 $\lambda_a(m)=ma$, $\forall\ m\in M$,则 φ 是一个代数同态. A 的表示与 A 模之间存在着对应关系. 代数 A 的一个表示 $\varphi: A\to \mathrm{End}(M)$,若 φ 是单同态,则称 φ 为忠实的. φ 是忠实表示,当且仅当 φ 所对应的 A 模是忠实的. 由正则 A 模 A 确定的代数 A 的表示,称为正则表示. 若 A 有单位元,则正则表示是忠实的.

代数忠实表示(faithful representation of an algebra) 见"代数的表示".

代数表示空间(represention space of an algebra) 见"代数的表示".

代数表示的次数(degree of represention of an algebra) 见"代数的表示".

代数的矩阵表示(matrix represention of an algebra) 见"代数的表示".

代数正则表示(regular representation of an algebra) 见"代数的表示".

等价表示(equivalent representation) 本质上相同的表示. 域 F 上代数 A 的两个表示

$$\varphi: A \to \mathrm{End}(M), \quad \psi: A \to \mathrm{End}(N),$$

若存在向量空间 M 到 N 的同构 f,使得

$$\varphi(a) = f(\psi(a))f^{-1} \quad (\forall\ a \in A),$$

则称 φ,ψ 为等价表示. 代数 A 的两个表示 φ,ψ 等价,当且仅当 φ,ψ 所对应的模同构. 代数 A 的两个矩阵表示 φ,ψ 等价,当且仅当表示的次数相等,即 $\deg\varphi=\deg\psi$,且存在可逆矩阵 S,对任意 $a\in A$,有

$$\psi(a) = S(\psi(a))S^{-1}.$$

代数的既约表示(irreducible representation of an algebra) 与单代数模(或既约代数模)对应的表示. 若 φ 是域 F 上代数 A 的一个矩阵表示,则 φ 是既约的,当且仅当不存在 φ 的等价表示 ψ,使得对一切 $x\in A$,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) & * \\ 0 & \psi_2(x) \end{pmatrix},$$

其中 ψ_1,ψ_2 是两个低于 ψ 的次数的矩阵表示.

包络环(enveloping ring) 研究无限维代数的一个工具. 若 A 是结合环,则 A 的变换 $R_a: x\to xa$ 与 $L_a: x\to ax$ 是加群$(A,+)$的自同态. 由集合$\{R_a, L_a \mid a\in A\}$在$(A,+)$的自同态环 $\mathrm{End}(A,+)$中所生成的子环

$$E = \left\{L_a + R_b + \sum_i L_{x_i}R_{y_i} \mid a,b,x_i,y_i \in A\right\}$$

称为 A 的包络环. $E'=\{\sum L_{x_i}R_{y_i} \mid x_i,y_i\in A\}$称为 A 的简包络环,它是包络环的子环. 当 A 有单位元时, $E=E'$. 域 F 上中心单代数 A 的简包络环 E' 是 F 上向量空间 A 的稠密环.

简包络环(simplified enveloping ring) 见"包络环".

形心(centroid) 环的中心的自然推广. 在无中心的环中可以用形心代替中心. 环 A 的包络环 E 在加群$(A,+)$的自同态环 $\mathrm{End}(A,+)$中的中心化子

$$\mathfrak{C}_A = \{\varphi \in \mathrm{End}(A,+) \mid \varphi\tau = \tau\varphi, \forall\ \tau \in E\}$$

称为环 A 的形心. 因为单环的形心是域,所以单环与单代数一致. 当环 A 有单位元 1 时, A 的中心与形心相等.

中心单代数(central simple algebra) 亦称正规单代数. 结构较清楚的一类重要单代数. 若域 F 上代数 A 的中心是 F 本身,则称 A 为中心代数(正规代数). 中心是 F 的 F 单代数称为中心单代数. 每一个有单位元的单代数都是其中心上的中心代数,所以有单位元的单代数的研究可归结为对纯量扩张与中心单代数的研究. 有限维单代数恒有单位元,所以恒为其中心上的中心单代数. 然而域 F 上无限维单代数 A 未必有单位元,但此时 A 的形心是域,设为 $\mathfrak{C}$,通常称 A 为 $\mathfrak{C}$(特别地 $\mathfrak{C}=F$ 时)上中心单代数. 当 A 有单位元时, A 的形心就是 A 的中心. 任何单环都是形心上中心单代数.

正规单代数(normal simple algebra) 即"中心单代数".

中心代数(central algebra) 见"中心单代数".

(广义)四元数代数((generalized) quaternion algebra) 有限中心单代数的重要例子. 若 a,b 是域 F 的非零元素, A 是 F 上以 $1,i,j,k$ 为基的向量空间,定义 i,j,k 的乘法如下:

$$i^2=a,\ j^2=b, \quad ij=-ji=k, \quad k^2=-ab,$$
$$ik=-ki=ja, \quad jk=-kj=-ib,$$

则 A 是 F 上结合代数,称为 F 上广义四元数代数,记为

$$\left(\frac{a,b}{F}\right). \left(\frac{a,b}{F}\right)$$

是四维中心单代数,当 F 的特征数$\neq 2$ 时,任意四维中心单代数都同构于一个(广义)四元数代数. 一般地, F 上一个四元数代数或者是一个可除代数或者同构于矩阵代数 $M_2(F)$. 其中,

$$0 \neq a \in F, \quad \left(\frac{a,1}{F}\right) \cong M_2(F).$$

当 $a=b=-1$ 时,

$$A = \left(\frac{-1,-1}{F}\right)$$

称为 F 上哈密顿四元数代数. 实数域 $\mathbb{R}$ 上哈密顿四元数代数是可除代数,通常称为四元数可除代数,这是哈密顿(Hamilton, W. R.)于 1943 年引入的.

哈密顿四元数代数(Hamilton quaternion alge-

bra） 见“（广义）四元数代数”.

四元数可除代数（quaternion divisible algebra） 即“哈密顿四元数代数”.

克利福德代数（Clifford algebra） 由二次型定义的一类代数.它对研究二次型、正交群和多复变函数有重要作用.域 F 上有限维向量空间 V 上二次型 Q，它是 V 到 F 的一个映射：$x \to Q(x)$，$x \in V$，满足：

1. $Q(\alpha x)=\alpha^2 Q(x)$ $(\alpha \in F, x \in V)$.

2. $B(x,y)=Q(x+y)-Q(x)-Q(y)$，是双线性的，也是对称的.

若 $V^{(t)}$ 为 t 个 V 的张量积：$V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$，$V^{(0)}=F$，则

$$T(V)=\bigoplus_{0}^{\infty} V^{(t)}$$

是 V 的张量代数.由一切元 $x \otimes x - Q(x)1$，$x \in V$ 生成 $T(V)$ 的一个理想 K_Q，其商代数

$$C(V,Q)=T(V)/K_Q$$

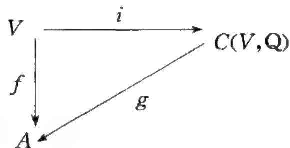
称为二次型 Q 的克利福德代数.其元素为 $\bar{u}=u+K_Q$，$u \in T(V)$.由于 $T(V)$ 是由 V 生成的，所以 V 到 $C(V,Q)$ 的自然映射 $i: x \to \bar{x}=x+K_Q$，$x \in V$，使得 $i(V)$ 就生成 $C(V,Q)$.事实上，若

$$\dim V=n,$$

且 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 为 V 的基，则 $\bar{u}_{i_1},\bar{u}_{i_2},\cdots\bar{u}_{i_r}$ $(i_1<i_2<\cdots<i_r,\ 1<r\leqslant n)$ 生成 F 上向量空间 $C(V,Q)$.从而

$$\dim C(V,Q) \leqslant n^2.$$

特别地，若 $n=2$ 且 $B(x,y)$ 是非退化的，则 $C(V,Q)$ 是四元数代数.克利福德代数具有泛性质：若 f 是 V 到一个代数 A 的线性映射，使得



$$f(x)^2=Q(x)1,\quad x \in V,$$

则存在 $C(V,Q)$ 到 A 惟一的代数同态 g 使得如图交换.

相似中心单代数（similar central simple algebras） 亦称等价中心单代数.有限中心单代数按相应的可除代数所划分的某种等价类.若 B,C 是域 F 上有限单代数，则有 F 上有限可除代数 D_1,D_2 使得 $B=F_n \otimes D_1$，$C=F_m \otimes D_2$，且 D_1,D_2 在同构意义下是惟一确定的.若 B,C 是中心的，且相应的可除代数 $D_1 \cong D_2$，则称 B 与 C 相似，或 B 与 C 等价，记为 $B \sim C$.相似关系是等价关系，从而可将中心单代数划分为等价类.

等价中心单代数（equivalent central simple algebras） 即“相似中心单代数”.

布饶尔群（Brauer group） 亦称代数类群.域 F 上有限中心单代数的相似代数类所构成的群.设 $\mathscr{U}$ 是域 F 上有限中心单代数的全体，有限中心单代数按其相应的中心可除代数同构所定义的相似关系是等价关系.用 $[A]$ 表示 $\mathscr{U}$ 中元 A 所在的等价类.若 $\mathscr{B}(F)=\{[A] \mid A \in \mathscr{U}\}$，在 $\mathscr{B}(F)$ 中规定乘法 $[A][B]=[A \otimes_F B]$，则 $\mathscr{B}(F)$ 构成一个交换群，称为域 F 上的布饶尔群.它是布饶尔（Brauer，R.（D.））于 1929 年首先引入的.布饶尔群 $\mathscr{B}(F)$ 中每个元 $[A]$ 可惟一地（同构意义下）由一个可除代数决定.若 $A,B \in \mathscr{U}$，则 $A \cong B$ 当且仅当在 $\mathscr{B}(F)$ 中 $[A]=[B]$ 且 $\dim_F A=\dim_F B$.特别地，当 F 是代数闭域时，$\mathscr{B}(F)=\{1\}$.

代数类群（algebra class group） 即“布饶尔群”.

诺特-斯科朗定理（Noether-Skolem theorem） 关于有限维中心单代数的自同构必为内自同构的定理.它是域 F 上全阵代数 F_n 的自同构皆为内自同构定理的推广.设 B 是域 F 上有限维中心单代数 A 的单子代数，则 B 到 A 的任一代数同态 φ 恒存在 A 中可逆元 u 使得 $\varphi(y)=u^{-1}yu$，任意 $y \in B$.进而，与 A 有共同单位元的两个单子代数 B_1,B_2 间的同构可扩充为 A 的内自同构.此定理是研究中心单代数的重要工具.

代数的分裂域（splitting field of an algebra） 基域的一个特殊扩域.域 F 的一个扩域 K 称为 F 代数 A 的分裂域，是指 $A_K=A \otimes_F K$ 是 K 上全矩阵代数的直和.中心单代数都有分裂域，并且，K 是 F 上有限维中心单代数 A 的分裂域当且仅当 $A_K \cong M_n(K)$（作为 K 代数），其中 $n=\deg A=\deg A_K$.特别地，域 F 上中心可除代数 D 的每个极大子域都是 D 的分裂域，从而 F 上中心单代数必有 F 的正规扩域作为分裂域.

代数的严格极大子域（strictly maximal subfield of an algebra） 有限中心单代数的特殊子域.若域 F 上代数 A 的子代数 E 是域，则 E 称为 A 的子域，而 $E \supseteq 1_A F$，所以 E 也是 F 的扩域.若 A 不含子域 $K \supseteq E$，且 $K \neq E$，则称 E 是 A 的极大子域.因为，域 F 上有限中心单代数 A 的维数恒为某自然数 m 的平方，即 $(A:F)=m^2$，并且 A 的每个子域 K 的维数 $(K:F)$ 是 m 的因数；所以，若 A 的子域 E 的维数 $(E:F)=m$，则 E 是 A 的极大子域（反之未必成立），称为 A 的严格极大子域，m 称为 A 的次数，记为 $\deg A=m=\sqrt{(A:F)}$.有限中心单代数 A 的子域 E 是严格极大子域当且仅当 E 在 A 的中心化子 $C_A(E)=E$.若 A 是有限中心可除代数，则 A 的每个极大子域皆为严格极大.

代数的子域（subfield of an algebra） 见“代数的严格极大子域”.

代数的次数（degree of an algebra） 见“代数

的严格极大子域”.

舒尔指数(Schur index) 与有限中心单代数相似的可除代数的次数. 对域 F 上有限维中心单代数 A, 从同构意义上来说存在惟一中心可除代数 D 和某自然数 n, 使得 $A\cong M_n(D)$. 将相应于 A 的可除代数 D 的次数 $\deg D=\sqrt{(D:F)}$ 称为 A 的舒尔指数, 记为 $\mathrm{Ind}\,A=\deg D$. 舒尔指数也可对任意可分代数定义, 特别地, 有限维半单代数 $A=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n$, 若对每个单代数 A_i 的舒尔指数定义为 A_i 作为它中心上代数的舒尔指数 $\mathrm{Ind}\,A_i$, 则 $(\mathrm{Ind}\,A_1, \mathrm{Ind}\,A_2, \cdots, \mathrm{Ind}\,A_n)$ 就称为 A 的舒尔指数.

循环代数(cyclic algebras) 特殊的有限中心单代数. 一个有限中心单代数 A, 若它有严格极大子域 E, 使得 E/F 是循环扩张, 则称 A 为循环代数. 代数数域上的有限中心可除代数是循环代数, 有理数域上的每个单代数都是其中心上的循环代数. 这是布饶尔(Brauer, R. (D.))、哈赛(Hasse, H.)、诺特(Noether, M.)、阿尔贝特(Albert, A. A.)关于有限结合代数理论中最完美的结论.

包络代数(enveloping algebra) 由给定代数与其反代数构造的张量代数. 设 A 是 R 代数, A 的反代数 A^{op} 与代数 A 的张量代数 $A^e=A^{op}\otimes_R A$ 称为 A 的包络代数. 如此定义的代数 A^e 与 A 看做另一个交换环 S(比如, S 是 R 的子环或 A 的中心)上代数的包络代数 $A^{op}\otimes_S A$ 是不同的. 若 A 是有 1 的 R 代数, 则每个右 A^e 模 M 皆为 A 双模, 其模乘法为:

$$am=m(a\otimes 1),\quad mb=m(1\otimes b),$$

对任意 $m\in M, a, b\in A$. 反之, 若在 A 双模 M 中规定

$$m(a\otimes b)=(am)b=a(mb),$$

则 M 是右 A^e 模. 包络代数是研究 R 分离代数的工具.

分离代数(separabl algebra) 亦称可分代数. 与分离扩域密切相关的代数. 设 A^e 是 R 代数 A 的包络代数. 若 A 作为右 A^e 模(模乘法 $a(x\otimes y)=(xa)y$)是投射的, 则称 A 为分离代数. 若 $\mu: A^e\to A$, $\mu(x\otimes y)=xy, \forall\, x, y\in A$, 则 μ 为 A^e 到 A 的 R 模满同态. 于是, A 是分离的, 当且仅当

$$0\to\ker\mu\to A^e\to A\to 0$$

是分裂正合的. 分离代数 A 作为 R 的子环上代数未必分离, 但对任一 R 交换代数 S, 其纯量扩张 $A_s=A\otimes_R S$ 是分离 S 代数. 分离代数最初是对域 F 上代数定义的, 即 F 代数 A 是分离的充分必要条件是 A 为有限维代数, 且对 F 的每个扩域 E, $A_E=A\otimes_F E$ 是半单的. “分离”来源于 F 的扩域 E 是分离 F 代数的充分必要条件是 E 为 F 的分离扩域. 域 F 上分离代数有如下结构定理: F 代数 A 是分离的, 当且仅当

$$A=\bigoplus_{i=1}^{n}A_i,$$

其中 A_i 是有限维 F 代数, 且 A_i 的中心是 F 的分离扩域.

可分代数(separable algebra) 即“分离代数”.

布尔巴基定理(Bourabki theorem) 分离代数关于张量积的性质定理. 设 A, B 是域 F 上有限维代数, 若 A 是分离 F 代数, B 是半单代数, 则 $A\otimes_F B$ 是半单代数. 它对研究群代数的半单性起重要作用, 由布尔巴基(Bourabki)于 1958 年证明.

代数的韦德伯恩-阿廷结构定理(Wedderburn-Artim structure theorem for algebra) 历史上著名的半单代数的结构定理. 它与环的韦德伯恩-阿廷定理类似. 若 A 是一个域 F 上半单代数, 则:

1. 存在正整数 $n_1, n_2, \cdots, n_r$ 与 R 可除代数 $D_1, D_2, \cdots, D_r$ 使得

$$A\cong M_{n_1}(D_1)\oplus M_{n_2}(D_2)\oplus\cdots\oplus M_{n_r}(D_r).$$

2. 适合条件 1 的序对 $(n_1, D_1), (n_2, D_2), \cdots, (n_r, D_r)$ 是由 A 惟一确定的.

3. 若 $n_1, n_2, \cdots, n_r$ 是正整数, $D_1, D_2, \cdots, D_r$ 是可除代数, 则 $M_{n_1}(D_1)\oplus M_{n_2}(D_2)\oplus\cdots\oplus M_{n_r}(D_r)$ 是半单 F 代数.

阿兹玛亚代数(Azumaya algebra) 一类著名的有限中心代数. 有单位元的环 R 作为其中心 $\mathrm{C}=\mathrm{Z}(R)$ 上代数, 若满足 $(R:\mathrm{C})<\infty$, 在映射

$$\Phi: R\bigoplus_{C} R^{op}\to\mathrm{End}_c(R),$$

$$\Phi(r_1\otimes r_2)(r)=r_1 r r_2\quad(\forall\, r\in R)$$

下, $R\otimes_C R^{op}\cong\mathrm{End}_c(R)$; 并且, 对 C 的每一个素理想 P, 其局部化 R_p 是 t 维自由 C_p 模(其中, R^{op} 是 R 的反环, $\mathrm{End}_c(R)$ 为 C 上代数 R 的自同态环), 则称 R 为 t 秩阿兹玛亚代数. 若 R 是有限个有限秩的阿兹玛亚代数的直和, 则 R 称为阿兹玛亚代数. 它是由东屋五郎(Azumaya, G.)建立而得名. 确切地, 应称其为东屋五郎代数.

东屋五郎代数(Azumaya algebra) 即“阿兹玛亚代数”.

阿廷代数(Artinian algebra) 与阿廷环相平行的一类代数, 见“阿廷环”.

诺特代数(Noetherian algebra) 与诺特环类似的一类代数, 见“诺特环”.

简约代数(reduced algebra) 代数的特殊类型. 一个 R 代数 A, 若 $A/J(A)$ 是有限个可除代数的直积, 其中 $J(A)$ 是 A 的雅各布森根, 则 A 称为简约代数. 若 A 是阿廷 R 代数,

$$P=\bigoplus_{i=1}^{n}P_i,$$

其中 $P_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是主不可分解右 A 模, 则自

同态代数$\mathrm{End}_A(P)$是简约的充分必要条件为$P_i \not\cong P_j$，对一切$i \neq j$.

基代数(basic algebra) 特殊的简约代数. 一个R代数A，若存在A的右理想P满足条件：

1. P是正则右A模A_A的直和项；
2. $AP=A$；
3. 自同态代数$\mathrm{End}(P)$是简约R代数；

则$B=\mathrm{End}(P)$称为A的基代数. 每个右阿廷R代数都有惟一的基代数且也是阿廷的. 例如，半单代数

$$A=\bigoplus_{i=1}^{n} A_i,\quad A_i \cong M_{n_i}(D_i),$$

其中$D_i=\mathrm{End}_A(P_i)$是可除代数，P_i是A_i的单A子模且为A_i的直和项. 若

$$P=\bigoplus_{i=1}^{n} P_i,$$

则

$$B=\mathrm{End}_A(P)=\bigoplus_{i=1}^{n} D_i$$

就是A的基代数.

局部代数(local algebra) 与局部环相应的一类特殊代数(参见"局部环"). 菲廷(Fitting, H.)证明了：若A模N的自同态代数$\mathrm{End}_A(N)$是局部的，则N不可分解. 当A是域F上有限维代数时，其逆亦真.

拟弗罗贝尼乌斯代数(quasi-Frobenius algebra) 简称QF代数. 一类重要的特殊代数. 域F上代数A，若它的一切投射模都是内射模，等价地说，它的正则模是内射模，则称A为拟弗罗贝尼乌斯代数. 这类代数也可从代数内部刻画：代数A是拟弗罗贝尼乌斯代数当且仅当A的左、右理想格反同构. 域F上代数A是QF代数当且仅当A是QF环. 这类代数起源于对有限群表示的研究，由中山正(Nakayama, T.)引入.

QF代数(QF-algebra) 即"拟弗罗贝尼乌斯代数".

弗罗贝尼乌斯代数(Frobenius algebra) 拟弗罗贝尼乌斯代数的子类. 设A是域F上代数，若左正则模${}_AA$与右正则模A_A的对偶模

$$A^*=\mathrm{Hom}_A(A_A, A_A)$$

作为左A模与A同构，则称A为弗罗贝尼乌斯代数. A是弗罗贝尼乌斯代数的一个判别条件是：存在A到F的线性映射$\lambda: x \to \lambda(x)$，使得对一切$x \in A$，若$\lambda(xa)=0$，则$a=0$. 半单代数、有限群代数$F[G]$均为弗罗贝尼乌斯代数. 这类代数起源于奈斯比特(Nesbitt, C. J.)和思罗尔(Thrall, R. M.)于1937年对有限群在域上表示的研究，卡什(Kasch, F.)于1954年已推广到R代数上.

单列代数(uniserial algebra) 亦称主理想代数. 单侧理想是主理想的特殊代数类. 域F上有限维代数，其任意右理想或任意左理想都是主理想的代数称为单列代数. 单列代数的商代数恒为拟弗罗贝尼乌斯代数. 这类代数有一个重要性质是：单列代数上任意不可分解模都同构于主模的商模，并且此不可分解模由其长度和投射覆盖惟一确定.

主理想代数(principal ideal algebra) 即"单列代数".

半链模(semichain module) 子模有线性序的模类. 域F代数A上左模(或右模)M，若满足下面两个等价条件之一，则称M为链模：

1. M的每个非零子模N都有惟一的极大子模(N的根).
2. M的子模格是一个链(即线性序集).

链模的直和称为半链模. 例如，单模是链模，半单模是半链模.

链模(chain module) 见"半链模".

广义单列代数(generalized uniserial algebra) 比单列代数广泛的一类代数. 域F上有限维代数A，若正则右A模是半链模，则称A为右单列代数. 同样地，可定义左单列代数. 若正则右A模和正则左A模都是半链模，则称A为广义单列代数. 这类代数是中山正(Nakayama, T.)引入的. 它的特点是每个商代数都有双射模(同时为投射模及内射模的模).

遗传代数(hereditary algebra) 与遗传环相平行的代数. 若域F上代数A的任意右理想作为A模都是投射模，则称A是右遗传代数. 代数A是右遗传的，当且仅当投射右A模的任意子模都是投射模. 同样地，可定义左遗传代数. 但对域F上有限维代数而言，左、右遗传是一致的.

局部有限代数(locally finite algebra) 与局部有限群相平行的概念. 若域F上代数A中任意有限个元生成的子代数是有限维的(或幂零的)，则称A是局部有限代数(或局部幂零代数). 局部有限代数是代数的代数，逆命题不真.

局部幂零代数(locally nilpotent algebra) 见"局部有限代数".

库洛什问题(Kurosh's problem) 结合代数中的著名问题. 受群论中伯恩赛德问题"周期群是局部有限吗?"的启发，库洛什(Kurosh, A.)于1941年提出代数中相应问题："域F上代数的代数是局部有限吗?"当A是PI-F代数时，林文茨基(Levitzki, J.)于1943年和卡普兰斯基(Kaplansky, I.)于1946年分别对A还是诣零代数或代数的代数，肯定地回答了库洛什问题；希尔绍夫(Ширшов, А. И.)于1957年得出更一般的结论：设有单位元的交换环R上代数A是d次PI代数，若A有生成元组，且任意不超过d个生成元的乘积是R上代数元，则A是局部有

限的. 1964 年,苏联数学家戈洛德(Голод, Е. С.)否定地解决了库洛什问题,他证明:任意可数域上存在三个元生成的诣零代数是无限维的. 从而也给出了伯恩赛德问题的反例.

可裂因子系(splitting factor system) 决定代数扩张可裂性的一个函数. 设 A 是域 F 上代数,而 N 是 A 双模, $A\times A$ 到 N 的一个双线性函数 f,若对 A 中任意元 a,b,c,适合

$$f(ab,c)-f(a,bc)+f(a,b)c-af(b,c)=0,$$

则称 f 为一个因子系. 若 σ 是 F 上向量空间 A 到 N 的同态,则由 $f(a,b)=a\sigma(b)+\sigma(a)b-\sigma(ab)$ 所定义的因子系称为可裂因子系.

因子系(factor system) 见"可裂因子系".

广义(内)导子(generalized (inner) derivation) 代数导子的推广. 它与马尔采夫(Мальцев, А. И.)关于非半单代数结构的惟一性定理的证明密切相关. 设 A 是域 F 上代数, M 是任意 A 双模,若 F 上向量空间 A 到 M 的一个同态 f 适合

$$f(ab)=f(a)b+af(b)\quad(\forall\ a,b\in A),$$

则称 f 是 A 到 M 的广义导子. 特别地,对任意给定的 $t\in M$,若 $f(a)=at-ta$,则称 f 为 A 的广义内导子.

代数模的分裂扩张(splitting extension of the algebra module) 模中相应概念的推广. 它与韦德伯恩-马尔采夫定理密切相关. 设 A 是域 F 上有限维代数, N 是左 A 模 U 的 A 子模,若作为左 A 模, U/N 同构于 M,则称 U 是 N 借助于左 A 模 M 的扩张. 若存在 U 的 A 子模 M_1 使得 $U=N\oplus M_1$,则称 A 模 N 借助于 M_1 的扩张 U 是分裂的. 若 A 模 U 是 N 借助于 M 的扩张,而 φ 是 U 到 M 的相应 A 模同态,则扩张 U 是分裂的当且仅当存在 M 到 U 的 A 模同态 ψ,使 $\varphi\psi=1$. A 模 N 借助 M 的扩张可确定一个广义导子,所以,扩张 U 是分裂的充分必要条件是相应的广义导子是内导子.

韦德伯恩-马尔采夫定理(Wedderburn-Malcev theorem) 非半单代数结构定理. 该定理断言:若 A 是特征为零的域 F 上有限维结合代数, N 为其幂零根,则 $A=N\oplus S$(为向量空间直和),其中 S 是 F 上半单代数,并且这种分解在内自同构意义下惟一.

代数的迹函数(trace function of algebra) 向量空间线性变换迹的推广. 设 A 是特征为零的域 F 上的有限维代数,对 A 中任意一对元素 x,y, $A\times A$ 到 F 的对应值 $(x,y)_A=\mathrm{tr}(R_xR_y)$ 称为代数 A 的迹函数,其中 $\mathrm{tr}(R_xR_y)$ 是 F 上向量空间 A 的右乘变换 R_x, R_y 的乘积的迹. 若不存在非零元 y 使 $(A,y)=0$,则称此迹函数非退化. 有限维半单代数的迹函数是非退化的. 迹函数是解决一些代数问题的有力工具.

非退化迹函数(nonsingular trace function) 见"代数的迹函数".

次理想(subideal) 介于子代数与理想之间的一个概念. 设 B 是代数 A 的子代数,若存在子代数链

$$B=B_0\subseteq\cdots\subseteq B_n=A,\qquad(*)$$

其中 B_i 是 B_{i+1} 的理想,则称 B 是 A 的次理想,记为 $B\mathrm{si}A$,链(*)称为次理想链. 次理想是与维兰特(Wielandt, H$_0$.)于 1937 年对群引入的次正规子群相平行的概念.

次理想链(subideal chain) 见"次理想".

哈密顿代数(Hamiltonian algebra) 与哈密顿群相平行的一类代数. 若域上代数 A 的每一个子代数都是 A 的理想,则称 A 为哈密顿代数,简称 H 代数. 每个子代数都是左(右)理想的代数称为左(右)哈密顿代数,简称左(右)H 代数. 这类代数是刘绍学于 1964 年引入的,他刻画了 H 代数与左 H 代数的代数结构.

左(右)H 代数(left (right) H-algebra) 见"哈密顿代数".

拟遗传代数(quasi-hereditary algebra) 一类特殊代数. 拟遗传代数来源于量子群与李代数的研究. 设 A 是域 K 上有限维代数, I 是 A 的理想. 若 $I^2=I$, $I(\mathrm{rad}\,A)I=0$ 且 I 是投射 A 模,则称 I 是 A 的遗传理想. 若存在一个理想的有限链 $0=I_0\subset I_1\subset\cdots\subset I_n=A$ 使 I_i/I_{i-1} 是 A/I_{i-1} 的遗传理想 $(i=1,2,\cdots,n)$,则称 A 是拟遗传代数.

遗传理想(hereditary ideal) 见"拟遗传代数".

PI 代数(algebra with polynomial identities) 代数的特殊类. 设 A 是有单位元交换环 Λ 上代数, X 是不定元集, $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是自由代数 $\Lambda\{x\}$ 的一个多项式, $x\in X$. 若对 A 中任意 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 恒有 $f(r_1,r_2,\cdots,r_n)=0$,则称 f 是 A 的一个恒等式,或称 A 适合多项式恒等式 f. 对 Λ 代数 A,若存在一个多项式恒等式,则称 A 为 PI 代数. 例如,交换代数适合恒等式 $x_1x_2-x_2x_1$. 交换代数和域 F 上有限维代数均为 PI 代数. PI 代数的子代数、商代数、同态像、直积也为 PI 代数.

德恩(Dehn, P. M.)于 1922 年为解决希尔伯特(Hilbert, D.)提出的几何问题,首先提出满足一个多项式恒等式的概念;瓦格纳(Wagner, W.)于 1939 年得到 $M_2(F)$ 满足的第一个著名恒等式. 在雅各布森(Jacobson, N.)研究工作基础上,卡普兰斯基(Kaplansky, I.)于 1948 年开辟了以 PI 理论研究环结构的新方向. 希尔绍夫(Ширшов, А. И.)于 1957 年证明了著名的库洛什问题对 PI 代数有肯定的回答. 佛玛乃克(Formanek, E.)与芮兹米斯洛夫

(Razmyslov,Y. P.)于1972年独立获得了$M_n(F)$的中心多项式定理,从而建立了PI理论与交换环理论间的联系.罗文(Rowen,R. L.)于1980年出版了专著《环论中PI》,总结了PI代数发展的成果和尚未解决的问题.

代数的多项式恒等式(polynomial identity of a algebra) 见“PI代数”.

自由代数(free algebra) 具有生成基的一类代数.集合$X=\{x_1,x_2,\cdots\}$中若干个元依照某个次序的一个排列,称为X上一个字.若在X上字的全体集合中任二元$h=x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$,$g=x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$,规定乘法:$h\cdot g=x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$,则此集合构成一个自由半群.若在此自由半群中添加形式元1,且规定$1h=h1=h$,则此集合为自由幺半群,记为$\mu(X)$.设Λ是有单位元的交换环,若

$$\Lambda\mu(X)=\left\{\sum\nolimits_{h\in\mu(X)}\alpha_h h\,\middle|\,\alpha_h\in\Lambda,\text{仅有限个 }\alpha_h\neq 0\right\},$$

规定:

$$\sum\alpha_n h+\sum\beta_n h=\sum(\alpha_n+\beta_n)h,$$

$$r\left(\sum\alpha_h h\right)=\sum(r\alpha_h)h\quad(r\in\Lambda),$$

$$\left(\sum\alpha_h h\right)\left(\sum\beta_g g\right)=\sum_{f\in\mu(X)}\left(\sum_{hg=f}\alpha_h\beta_g f\right),$$

则$\Lambda\mu(X)$构成一个结合代数,称为X上自由Λ代数,记为$\Lambda\{X\}$.$\Lambda\{X\}$中元称为多项式.设

$$f=\sum_{h\in\mu(X)}\alpha_h h,$$

α_h称为h的系数,$\alpha_h h$称为单项式,且f的次数

$$\deg f=\max\{\deg h\,|\,h\text{ 为 }f\text{ 中系数非零单项式}\}.$$

当$\mu(X)$为交换自由幺半群时,自由代数$\Lambda[X]$与Λ上多项式代数$\Lambda\{X\}$一致.一般地,若在自由幺半群$\mu(X)$上规定一个关系~:

$$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\sim x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m},$$

当且仅当$n=m$且集合$\{x_{i_k}\,|\,k=1,2,\cdots,n\}$与集合$\{x_{j_k}\,|\,k=1,2,\cdots,m=n\}$相等,则~为$\mu(X)$的一个等价关系,从而可将$\mu(X)$中元按等价分类,$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$所在的类用$\overline{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}}$表示,且记

$$\bar{\mu}(X)=\{\overline{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}}\,|\,x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\in\mu(X),\ i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_n\},$$

于是,$\bar{\mu}(X)$对$\mu(X)$所诱导的乘法也构成交换幺半群,也为自由幺半群.同前类似,由$\bar{\mu}(X)$所生成的Λ代数$\Lambda\bar{\mu}(X)$称为自由交换代数,记为$\Lambda[\xi]$.当Λ是整数环Z时,自由代数Z$\{X\}$与自由交换代数Z$[\xi]$分别称为自由环与自由交换环,它们中的元素皆为整系数多项式.

自由环(free ring) 见“自由代数”.

Ω上自由环(free ring over Ω) 自由环的推广.给定幺半群Ω和集合X,在集合$\mu(\Omega,X)=\{w_1x_{i_1}\cdots w_kx_{i_k}w_{k+1}\,|\,w_j\in\Omega,x_{i_j}\in X,k\geqslant 0\}$中规定乘法

$$(w_1x_{i_1}\cdots w_kx_{i_k}w_{k+1})(w_1'x_{j_1}\cdots w_l'x_{j_l}w_{l+1}')=w_1x_{i_1}\cdots w_kx_{i_k}(w_{k+1}w_1')x_{j_1}\cdots x_{j_l}w_{l+1}'),$$

其中$w_{k+1}w_1'$是Ω中乘法,则$\mu(\Omega,X)$构成一个幺半群称为Ω上自由幺半群,当$\Omega=\{1\}$时,$\mu(\Omega,X)=\mu(X)$.当$\Lambda=$Z时,由$\mu(\Omega,X)$生成的自由Z代数Z$\mu(\Omega,X)$称为Ω上的自由环,记为Z$[\Omega,X]$.

n次标准多项式(standard polynomial of degree n) 一种重要而基本的多项式.下式

$$S_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}(n)}(\mathrm{sg}\,\sigma)x_{\sigma_1}\cdots x_{\sigma_n}\in \mathrm{Z}\{X\}$$

称为n次标准多项式,其中sgσ表示取值±1,Sym(n)为n个符号的置换群.若Λ为一交换环,则Λ上的n阶全矩阵代数$M_n(\Lambda)$恒满足S_{2n},但不满足任何次数低于$2n$的标准多项式,这是著名的阿密苏-林文茨基定理.

多项式的容度(content of a polynomial) 系数环的一个特殊理想.设f是自由代数$\Lambda\{x\}$中一个多项式,f的所有系数在Λ中生成的理想称为f的容度,记为$c(f)$.若f是Λ代数A的多项式恒等式,且$c(f)A\neq0$,则称f是A的非平凡多项式恒等式,或称A的真恒等式.

非平凡多项式恒等式(non-trivial polynomial identity) 见“多项式的容度”.

多项式的高度(height of a polynomial) 对多项式的一种刻画.指描述多项式的次数与含变量的个数之差的一个数.一个单项式的高度,系指其次数与出现的不同x_i个数之差,例如,$x_1^2x_2x_3^2$的高度为$5-3=2$;$x_1x_2^2x_3x_4$的高度为1.一个多项式的高度,定义为其单项式中的最大高度,例如,$f=x_1^2x_2x_3^2+x_1x_2^2x_3x_4$的高度为2.

多重线性等价(multi-linear equivalent) 具有相同多重线性恒等式的代数类.设R_1与R_2是Λ代数,若R_2的多重线性恒等式也是R_1的恒等式,则记为$R_1\leqslant_{\mathrm{mult}\Lambda}R_2$.当$R_1$是$R_2$的子代数时,恒有$R_1\leqslant_{\mathrm{mult}\Lambda}R_2$.当$R_1\leqslant_{\mathrm{mult}\Lambda}R_2$,$R_2\leqslant_{\mathrm{mult}\Lambda}R_1$时,称$R_1$与$R_2$是$\Lambda$上多重线性等价的,记为$R_1\approx_{\mathrm{mult}\Lambda}R_2$.若$R_2$的任一恒等式也是$R_1$的恒等式,则记为$R_1\leqslant_\Lambda R_2$;若$R_1\leqslant_\Lambda R_2$,$R_2\leqslant_\Lambda R_1$,则称$R_1$与$R_2$是等价的,记为$R_1\approx_\Lambda R_2$.$R_1\approx_\Lambda R_2\Rightarrow R_1\approx_{\mathrm{mult}\Lambda}R_2$,反之不一定成立.

t正规多项式(t-normal polynomial) 一种特殊的多项式.设f是自由代数$\Lambda\{X\}$中含n个变元的一个多项式,$t\leqslant n$为给定正整数,若f的每个单项式中$x_i(1\leqslant i\leqslant t)$出现且仅出现一次,称$f$为$t$线性多项式.若对任意$i,j$,$1\leqslant i<j\leqslant t$,在$f$中以$x_i$代

x_j 后 $f(\cdots,x_i,\cdots,x_i,\cdots)=0$，则称 f 为 t 交错多项式. 特别地，当 $n=t$ 时，f 称为交错多项式. 若 f 是 t 线性又是 t 交错多项式，则称 f 为 t 正规多项式，特别地，当 $t=n$ 时，称 f 为正规多项式. 例如，标准多项式 S_n 是正规的.

交错多项式(alternating polynomial) 见"t 正规多项式".

正规多项式(normal polynomial) 见"t 正规多项式".

中心多项式(central polynomial) 值域属于代数中心的特殊多项式. 设 $g(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 是自由代数 $\Lambda\{x\}$ 的一个多项式，A 是一个 Λ 代数，若对 A 中任意元 $a_1,a_2,\cdots,a_m$，恒有 $g(a_1,a_2,\cdots,a_m)\in A$ 的中心，且至少有两组 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 与 $(a_1',a_2',\cdots,a_m')$，使得

$$g(a_1,a_2,\cdots,a_m)\neq g(a_1',a_2',\cdots,a_m'),$$

则称 $g(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 是 A 的一个中心多项式. 历史上第一个中心多项式是佛玛乃克(Formanek,E.)发现的.

卡佩利多项式(Capelli polynomial) 一类重要的特殊多项式. 设 $f_{(t)}$ 是多项式 f 中含 $x_1,x_2,\cdots,x_t$ 的单项式的和，若 $f_{(t)}$ 也为单项式且系数为 1，则称 f 是 t 本原多项式，它是本原多项式的推广. 令 $\mathrm{Sym}(t)$ 是数码 $1,2,\cdots,t$ 的置换群. 多项式

$$C_{2t-1}(x_1,x_2,\cdots,x_{2t-1})$$
$$=\sum_{\pi\in\mathrm{Sym}(t)}(\mathrm{sg}\pi)x_{\pi1}x_{t+1}x_{\pi2}x_{t+2}\cdots x_{\pi(t-1)}x_{2t-1}x_{\pi t}$$

与 $C_{2t}=C_{2t-1}x_{2t}$，其中 $\mathrm{sg}\pi$ 取值 ±1，皆为 t 本原和 t 正规多项式，有：

$$(C_{2t-1})_{(t)}=x_1x_{t+1}\cdots x_{t-1}x_{2t-1}x_t,$$
$$(C_{2t})_{(t)}=x_1x_{t+1}\cdots x_tx_{2t},$$

称 C_{2t-1}，C_{2t} 为卡佩利多项式.

若 C_{2t-1}(分别的 C_{2t})是 R(代数 A)的恒等式，则每个 t 正规多项式也是 R(代数 A)的一个恒等式. 利用卡佩利多项式可解决如下问题：一个多项式，若它不是 R 代数 A 的恒等式，是否为其子代数的恒等式？事实上，C_{2n^2} 不是域 F 上矩阵代数 $M_n(F)$ 的恒等式，但它是 $M_n(F)$ 的每一个真子代数的多项式恒等式(对任意域 F).

***t* 本原多项式**(t-primitive polynomial) 见"卡佩利多项式".

稳定多项式恒等式(stable polynomial identity) 对多项式扩张仍保持的恒等式. 环 R 的一个恒等式 f，若对 R 的多项式扩张环 $R[\lambda]$，f 也是恒等式，则称 f 为 R 稳定. 若对每个使 f 为恒等式的环 R，f 皆 R 稳定，则称 f 为稳定多项式恒等式. 类似地，可对有对合环(环 R 的反自同构 $*$ 使得 $*^2=1$(恒等自同构)，称 $*$ 为 R 的对合)$(R,*)$ 定义 $*$ 稳定：$(R,*)$ 的一个多项式恒等式 f，若也为 $(R[\lambda],*)$ 的恒等式，则称 f 为 $(R,*)$ 稳定. 若 $*$ 多项式 f 对每个以 f 为恒等式的对合环 $(R,*)$ 皆为 $(R,*)$ 稳定，则称 f 为 $*$ 稳定. R 稳定的和仍为 R 稳定；$(R,*)$ 稳定的和仍为 $(R,*)$ 稳定.

***(对合)稳定恒等式**(*(involution)-stable identity) 见"稳定多项式恒等式".

PI 类(数)(PI-class number) 影响 PI 代数性质的一个参数. PI 代数 R，若满足 $R\leqslant_{\mathrm{mult}\mathbb{Z}}M_n(\mathbb{Z})$(参见"多重线性等价")，并且对 R 上矩阵代数 $M_n(R)$ 的中心多项式 g_n 恒有 $g_n(R)\neq0$，则称 PI 代数 R 有 PI 类数 n. 一个代数的所有中心扩张都有相同的 PI 类数. 卡普兰斯基定理证明：适合 d 次真恒等式的本原代数 R 必有 PI 类数 $n<[d/2]$. 从而得出适合 d 次真恒等式的半本原代数或半素代数也有 PI 类数 $n<[d/2]$. 这里 $[d/2]$ 表示不大于 $d/2$ 的最大整数.

闭本原代数(closed primitive algebras) 本原代数的一个特殊的中心扩张. 设 R 是一个本原代数，M 是一个忠实既约 R 模，则 $D=\mathrm{End}({}_RM)$ 是一个除环. 若 F 是 D 的一个极大子域，则

$$RF=\left\{\sum_{i=1}^{m}r_if_i\,\middle|\,r_i\in R,f_i\in F\right\}$$

也是一个本原代数，称为 R 的闭本原代数. 由于 $RF\subseteq\mathrm{End}\ (M_F)$ 且 M 是忠实既约的 RF 模，所以 RF 是 $\mathrm{End}\ (M_F)$ 的稠密子代数. 又 RF 的中心 $\mathrm{C}(RF)=F$，且 RF 是 R 的中心扩张，因此它们是等价的，即 $RF\approx R$. 闭本原代数 $R'=RF$，若适合一个 d 次非平凡的多项式恒等式，则 $R'\cong M_n(F)$，此处 F 是上述除环 D 的一个极大子域，且 $n\leqslant[d/2]$.

本原 PI 代数的结构定理(structure theorem for primitive PI-algebra) 亦称卡普兰斯基定理. PI 代数的重要定理. 它是 PI 理论发展上的一个里程碑. 若 A 是本原 Λ 代数，A 满足一个 d 次非平凡多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，则 A 有 PI 类数 $n\leqslant[d/2]$，且 $A\cong M_t(D)$，D 为某个除环，其中

$$n^2=t^2[D:\mathrm{C}(D)]=[A:\mathrm{C}(A)],$$

由此，A 是其中心 $\mathrm{C}(A)$ 上的 n^2 维的单代数(其中，$\mathrm{C}(D)$ 为 D 的中心). 这一著名定理是卡普兰斯基(Kaplansky,I.)于 1948 年证明的.

卡普兰斯基定理(Kaplansky theorem) 即"本原 PI 代数的结构定理".

可容代数(admissible algebras) 一种特殊代数. 它对 PI 代数的研究有重要意义. 一个代数 R 称为可容代数，是指存在 R 到一个多重线性等价的代数 R' 的入射，R' 是闭本原代数的直积，这类代数的意义在于：若 PI 代数 R' 是闭本原代数的直积，则

$$R' \cong \prod_{i=1}^{m} M_{k_i}(H_{k_i}),$$

此处 H_{h_i} 是域的直积，且 R' 有 PI 类数，于是每个可容代数也有某个 PI 类数. 半本原代数是可容的. 若代数 R 的诣零根 $\mathrm{Nil}(R)=0$，则 R 也是可容的.

A_n 环（A_n-ring） 一类特殊的环. 满足一种特殊多项式恒等式的环. 有单位元的环 R 适合以下条件时，称为 A_n 环：

1. R 适合交换自由环 $\mathbf{Z}[\xi]$ 上 n 阶矩阵环 $M_n(\mathbf{Z}[\xi])$ 的恒等式.

2. $(n-1)$ 次标准多项式 S_{2n-2} 不是 R 的任何同态像的恒等式.

阿廷-普罗色斯定理断定：R 是 A_n 环的充分必要条件为 R 是 n^2 秩的东屋五郎代数.

泛矩阵代数 $\Lambda_n\{y\}$（algebra $\Lambda_n\{y\}$ of generic matrices） 矩阵代数的拓广. 在自由交换代数 $\Lambda\{\xi\}$ 中，将未定元集 ξ 编上号码为

$$\{\xi_{ij}^{(k)} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n, k=1,2,3\cdots\},$$

记 $Y_k=(\xi_{ij}^{(k)}) \in M_n(\Lambda[\xi])$，称为泛矩阵. 由泛矩阵 $Y_k(k=1,2,3\cdots)$ 生成 $M_n(\Lambda[\xi])$ 的子代数 $\Lambda_n\{Y\}$，称为泛矩阵代数. 当 $\Lambda=\mathbf{Z}$ 时，$\mathbf{Z}_n\{Y\}$ 称为泛矩阵环. 对任意有 1 交换环 C 的矩阵代数 $M_n(C)$ 及给定的映射 $\sigma: Y_k \to A_k \in M_n(C)$，存在惟一的代数同态扩张 $\bar{\sigma}: \Lambda_n\{Y\} \to M_n(C)$. 若 $R \leqslant_\Lambda M_n(\Lambda[\xi])$（参见“多重线性等价”），则映射 $\sigma: Y_k \to r_k \in R$ 有惟一的代数同态扩张 $\bar{\sigma}: \Lambda_n\{Y\} \to R$.

泛矩阵（generic matrices） 见“泛矩阵代数 $\Lambda_n\{y\}$”.

泛矩阵环（generic matrices ring） 见“泛矩阵代数 $\Lambda_n\{y\}$”.

代数的 *T* 理想（T-ideal of the algebra） 一类特殊的理想. 环的特征理想概念在代数中的扩展. 设 A 是 Λ 代数，$I \lhd A$，若对 A 的任意代数自同态 φ，恒有 $\varphi(I) \subseteq I$，则称 I 为 A 的 T 理想，记为 $I \lhd_T A$. 对 X 上自由代数 $\Lambda\{X\}$，若 $J < \Lambda$，则 $J\{X\} \lhd_T \Lambda\{X\}$. 对每个 Λ 代数 A，A 的一切恒等式的集合 $\mathscr{T}(A)$ 恒为 $\Lambda\{X\}$ 的 T 理想.

相对自由代数（relatively free algebras） 可由自由代数的 T 理想决定的商代数. 设 I 是自由代数 $\Lambda\{X\}$ 的理想，商代数 $U=\Lambda\{X\}/I$ 称为相对自由的，是指对满足 U 的所有恒等式即每个 $\leqslant_\Lambda U$ 的代数 R，使得映射 $\sigma: \bar{x}_k \to r_k \in R$ 有惟一的 $U \to R$ 的代数同态扩张（其中 $\bar{x}_k = x_k + I$）. 若 $U=\Lambda\{x\}/I$ 是相对自由的，则 U 的恒等式集为 I，因此 I 是 $\Lambda\{x\}$ 的 T 理想；反之，若 A 是 $\Lambda\{x\}$ 的 T 理想，则 $\Lambda\{x\}/A$ 是相对自由的.

恒等可容同态（id-admissible homomorphism） 自由环到环的特殊同态. 设 Ω 是有单位元的环，φ 是 Ω 上自由环 $\mathbf{Z}\mu(\Omega,X) \to \Omega$ 的环同态，若对于 Ω 中每个元 ω 恒有 $\varphi(\omega)=\omega$，则 φ 称为恒等可容同态.

W 环（W-ring） 讨论广义恒等式而引入的一种环. 设 W 为一个有单位元的环，一个环 R 称为 W 环，是指存在 $W \to R$ 的一个同态 φ，使得 φ 保中心（即 φ 也为中心 $C(W) \to C(R)$ 的同态）. 设 R_1, R_2 都是 W 环，同态 $\psi: R_1 \to R_2$ 称为 W 同态，是指对每个 $r \in R_1, \omega \in W$ 满足：$\psi(\omega r)=\omega\psi(r), \psi(r\omega)=\psi(r)\omega$.

W 同态（W-homomorphism） 见“W 环”.

广义恒等式（generalized identities） 多项式恒等式的推广. 设 W 是一个有单位元的环，R 是一个 W 环，集合 $\mathscr{K}(R,W)=\bigcap\{\ker\psi \mid \psi: W(X) \to R$ 是 W 同态$\}$ 称为 W 环 R 的广义恒等式集，其中每个元称为 R 的广义恒等式，它是系数取自 W 的多项式恒等式.

广义恒等式集（set of generalized identities） 见“广义恒等式”.

撰　稿　方洪锦　朱元森　张英伯　郑玉美
审　阅　刘绍学　许永华　李白飞

代数表示论

代数表示论（representation theory of algebras） 研究阿廷代数模范畴的代数分支. 代数表示论起源于布饶尔（Brauer, R. (D.)）和思罗尔（Thrall, R. M.）于 1945 年提出的关于域上有限维代数的两个猜测：第一，有界表示型代数是有限型的；第二，对于任意一个无限表示型代数，存在无限多个自然数 d，使得 d 维模的同构类有无限多个. 所谓一个代数是有界表示型的，是指该代数上有限维模的维数是有界的. 而一个代数是表示有限型的，是指它仅有有限多个不可分解模的同构类，反之，称为无限型的.

罗伊特尔（Roiter, A. V.）于 1968 年证明了布饶尔-思罗尔第一猜测，可看做代数表示论的开端. 1972—1973 年，加布里埃尔（Gabriel, P.）运用图和二次型的方法对代数闭域上路代数的表示进行了完全的分类，奠定了代数表示论的方法论基础. 1974—1977 年，奥斯兰德（Auslander, M.）和里廷（Reiten, I.）运用同调手法研究不可分解模，提出了几乎可裂序列这一重要概念，奠定了代数表示论的理论基础.

几乎可裂序列（almost split sequences） 亦称奥斯兰德-里廷序列或简称 AR 序列. 模范畴中一种特殊的短正合序列. 设 Λ 是一个阿廷代数，$\mathrm{mod}\,\Lambda$ 记 Λ 的有限生成的左模范畴. 设

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

是 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中的一个短正合序列，称此短正合序列为几乎可裂序列，若这一序列满足下述条件：

1. A,C 是不可分解 Λ 模.

2. 序列不可裂.

3. 若有 Λ 模 X 及模同态 $f:X\to C$，且 f 不是可裂满射，则存在同态 $h:X\to B$，使 $f=p\cdot h$，这时 $A=D\mathrm{Tr}(C)$（或 $C=\mathrm{Tr}D(A)$，参见“AR 变换”）. 若 C 是一个不可分解的非投射模，则存在一个以 C 为终点的几乎可裂序列. 对偶地，若 A 是一个不可分解的非入射模，则存在一个以 A 为起点的 AR 序列.

奥斯兰德-里廷序列（Auslauder-Reitin sequence） 即“几乎可列序列”.

AR 序列（AR-sequences） 即“几乎可裂序列”.

不可约映射（irreducible maps） 与几乎可裂序列密切相关的一个概念. 设 Λ 是阿廷代数，M,N 是有限生成的不可分解 Λ 模，f 是 M 到 N 的一个非同构的模同态. 若对于某个 Λ 模 L 和模同态

$$h:M\to L,\quad k:L\to N,$$

使 f 可以分解成 $f=h\cdot k$，则 h 是可裂单射或 k 是可裂满射. 这时称 f 为不可约映射. 若

$$0\to A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{p}C\to 0$$

是一个几乎可裂序列，其中

$$B=B_1\oplus B_2\oplus\cdots\oplus B_n,$$
$$i=(i_1,i_2,\cdots,i_n)^T,$$
$$p=(p_1,p_2,\cdots,p_n),$$

则

$$A\xrightarrow{i_j}B_j\quad 及\quad B_j\xrightarrow{p_j}C$$

是不可约映射，其中 $j=1,2,\cdots,n$. 若 P 是不可分解投射模，

$$\mathrm{rad}\ P=M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_n\xrightarrow{(i_1,i_2,\cdots,i_n)}P$$

是 P 的根到 P 的嵌入，则 $M_j\xrightarrow{i_j}P$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 是不可约映射. 若 I 是不可分解入射模，

$$I\xrightarrow{(p_1,p_2,\cdots,p_n)}I/\mathrm{Soc}I=N_1\oplus N_2\oplus\cdots\oplus N_n$$

是自然投射，则 $I\xrightarrow{p_j}N_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 是不可约映射. 反之，$\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中任意两个不可分解模之间的不可约映射均为上述四种形式之一.

稳定模范畴（stable module category） 模范畴的一种特殊的商范畴. 设 Λ 是一个阿廷代数，Λ 的稳定模范畴 $\underline{\mathrm{mod}}_P\Lambda$ 是 Λ 的有限生成的模范畴 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 的一个商范畴. 其像元是非投射 Λ 模. 对于任意两个非投射模 M,N，射元集

$$\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(M,N)=\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)/P(M,N),$$

其中 $P(M,N)$ 是可以经过投射模分解的 M 到 N 的映射做成的 $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ 的子加群. 设 Λ 和 Λ_1 是两个阿廷代数，若它们的稳定模范畴等价，即 $\underline{\mathrm{mod}}_P\Lambda\sim\underline{\mathrm{mod}}_P\Lambda_1$，则称代数 Λ 与 Λ_1 稳定等价.

AR 变换（AR-transformation） 模范畴到自身的一个函子，诱导出稳定模范畴之间的一个等价函子. 设 Λ 是一个阿廷代数，M 是一个有限生成的不可分解 Λ 模，

$$P_1\xrightarrow{\alpha}P_0\to M\to 0$$

是 M 的极小投射分解. 作用函子 $\mathrm{Hom}_\Lambda(-,\Lambda)$，得

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(P_0,\Lambda)\xrightarrow{\alpha^*}\mathrm{Hom}_\Lambda(P_1,\Lambda)\to\mathrm{Cok}\,\alpha^*\to 0,$$

其中 $\alpha^*=\mathrm{Hom}_\Lambda(\alpha,\Lambda)$，是 $\mathrm{Cok}\,\alpha^*$ 在 mod^{op} 中的极小投射分解，这里 Λ^{op} 是 Λ 的反代数，记 $\mathrm{Cok}\,\alpha^*=\mathrm{tr}(M)$. 若 $D=\mathrm{Hom}_k(-,k)$ 是通常的对偶函子，则 $D\mathrm{tr}$ 是 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 到自身的一个函子. 记 $\overline{\mathrm{mod}}_I\Lambda$ 为 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 的一个商范畴，其像元是非入射 Λ 模；对于任意两个非入射模 M 和 N，射元集

$$\overline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(M,N)=\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)/I(M,N),$$

其中 $I(M,N)$ 是 M 到 N 的可以经过入射模进行分解的映射做成的子加群. 函子 $D\mathrm{tr}$ 诱导出稳定模范畴之间的一个等价

$$D\mathrm{tr}:\underline{\mathrm{mod}}_p\Lambda\to\overline{\mathrm{mod}}_I\Lambda,$$

其逆为

$$\mathrm{tr}D:\overline{\mathrm{mod}}_I\Lambda\to\underline{\mathrm{mod}}_p\Lambda.$$

箭图的表示范畴（representations category of quivers） 一个特殊的阿贝尔范畴. 一个通常箭图 $Q=(V(Q),A(Q))$ 是一个有限有向图，其中 $V(Q)$ 是顶点集，$A(Q)$ 是箭向集. 设 k 是一个域，Q 在 k 上的一个表示 $V=(V_i,V_\alpha)_{i\in V(Q),\alpha\in A(Q)}$ 是一簇向量空间 $V_i,i\in V(Q)$ 及一簇线性映射 $V_\alpha:V_i\to V_j$，其中 i 是 α 的起点，j 是终点. 给定 Q 的两个表示 V,V'，态射 $f=(f_i)_{i\in V(Q)}:V\to V'$ 定义为一簇线性映射 $f_i:V_i\to V'_i$，使得任取箭 $\alpha:i\to j$ 有 $f_iV'_\alpha=V_\alpha f_j$，$Q$ 在 k 上的有限维表示（即 $\sum_{i\in V(Q)}\dim V_i<\infty$）及其态射构成一个阿贝尔范畴，记为 $R(Q)$，称为箭图 Q 的表示范畴.

嘉当矩阵（Cartan matrix） 一类特殊矩阵. 若 Q 是一个不带有向循环的箭图，则 Q 确定一个嘉当矩阵 C，C 的阶 $n=|V(Q)|$，矩阵主对角线上的元素 $c_{ii}=2$，任取箭向 $\alpha:i\to j$，$c_{ij}=c_{ji}=$（从 i 到 j 的箭向个数的相反数）. 若从 i 到 j 且从 j 到 i 没有箭，则 $c_{ij}=c_{ji}=0$. 嘉当矩阵是对称的，并确定了 $R(Q)$ 的格罗腾迪克群上的一个二次型 Q. 若 V 是 Q 的一个表示，记

$$\underline{\dim}V=(\dim_K V(1),\cdots,\dim_K V(n)),$$

则

$$q(\underline{\dim}V)=\underline{\dim}V\cdot C\cdot(\underline{\dim}V)^T.$$

设 x 是一个 n 阶行向量，每一个分量都是非负整数，若 $q(x)=1$，则 x 称为二次型 q 的一个正根.

有限型箭图表示范畴(representation category of a quiver of finite type)　一种特殊的表示范畴. 设 k 是代数闭域,一个箭图 Q 在 k 上的表示范畴 $R(Q)$ 是有限型的,当且仅当 Q 的基本图 $\overline{Q}$(即箭图 Q 忽略方向后得到的图形)是邓金图(参见"李代数")的不交并. 在这种情况下,若 V 是 Q 的一个不可分解表示,则 $\dim V$ 是二次型 Q 的一个正根;反之,任取 Q 的一个正根,恰有且仅有 Q 的一个不可分解表示,其维数向量对应于这个正根.

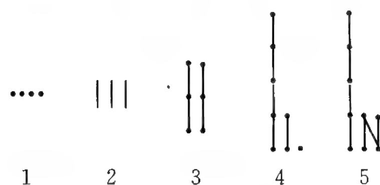
驯顺型箭图表示范畴(representation category of quiver of tame type)　一种特殊的表示范畴. 设 k 是代数闭域,一个连通箭图 Q 在 k 上的表示范畴 $R(Q)$ 是驯顺型的(参见"德洛兹德定理"),当且仅当 Q 的基本图 $\overline{Q}$ 是欧几里得图(参见"李代数"). 这时,Q 的嘉当矩阵是半正定的,其相应二次型的幂零根空间是一维的. 这项工作是由加拿大德拉柏(Dlab,V.)和德国林格尔(Ringel,C. M.)完成的.

路代数(path algebras)　一类特殊的代数. 由箭图定义的代数. 设 $Q=(V(Q),A(Q),s,t)$ 是一个箭图,s,t 分别表示箭向的起点和终点. 一个从 a 到 b 的长度为 $l\geqslant 1$ 的路具有形式 $(a|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l|b)$,此处 $a,b\in V(Q)$,$\alpha_i\in A(Q)$,且满足条件 $s(\alpha_1)=a$,$t(\alpha_i)=s(\alpha_{i+1})$,$1\leqslant i<l$,$t(\alpha_l)=b$. 此外,定义 $(a||a)$ 是长度为 0 的路. 若 $a=b$,则称路 $(a|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l|b)$ 是一个有向循环,特别地,当 $l=1$ 时,称之为圈. 设 k 是域,kQ 是以箭图中的所有的路为基做成的向量空间,对任意两条路 $(a|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_t|b)$ 和 $(c|\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s|d)$ 定义乘法如下:

$$(a|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t|b)(c|\gamma_1,c|\gamma_2,\cdots,\gamma_s|d)$$
$$=\begin{cases}(a|\alpha_1,a|\alpha_2,\cdots,\alpha_t\gamma_1\cdots\gamma_s|d) & (b=c),\\ 0 & (b\neq c),\end{cases}$$

若将此乘法按分配律扩展到全空间 kQ,则 kQ 成为有单位元的结合代数,称为由 Q 决定的路代数. 路代数的模范畴 $\mathrm{mod}\,kQ$ 与箭图 Q 的表示范畴 $R(Q)$ 等价. 两个箭图的路代数同构,当且仅当这两个箭图同构.

偏序集的表示(representations of a partially ordered set)　偏序集划分为驯顺型及野型的判定. 设 $(S,\leqslant)$ 是一个有限偏序集,k 是一个域,$(S,\leqslant)$ 在域 k 上的一个表示,通常称为 S 空间,具有形式 $V=(V_\omega;V_s)_{s\in S}$,其中 V_ω 是一个 k 向量空间,称为 V 的全空间,对任意 $s\in S$,V_s 是 V_ω 的子空间,并且满足条件:若 $s\leqslant t$,则 $V_s\subseteq V_t$. 设 $V=(V_\omega;V_s)_{s\in S}$ 和 $W=(W_\omega;W_s)_{s\in S}$ 是两个 S 空间,一个态射 $f:V\to W$ 是一个 K 线性映射 $f_\omega:V_\omega\to W_\omega$,并且满足条件:对任意 $s\in S$,$f_\omega(V_s)\subseteq W_s$. 此时,若称 f_s 是 f_w 在 V_s 上的限制,则可以记 $f=(f_w;f_s)_{s\in S}$. 具有有限维全空间的所有 S 空间及其态射的范畴 $l(S)$ 是一个带有短正合列的克鲁尔-施密特范畴. 克雷内尔(kleiner,M. M.)证明:一个有限偏序集是无限表示型的,当且仅当它包有一个临界子集. 临界子集共有下述五种:



而一个有限偏序集是有限表示型的,当且仅当它同构于克雷内尔列出的 14 种偏序集之一.

全空间(full space)　见"偏序集的表示".

代数的箭图(quiver of an algebra)　由代数确定的箭图. 设 Λ 是代数闭域 k 上的有限维基代数,$1=e_1+e_2+\cdots+e_n$ 是单位元的正交本原幂等元分解.

$$\Lambda=P_1\oplus P_2\oplus\cdots\oplus P_n,$$

其中 $P_i=\Lambda e_i$ 是所有的不可分解投射 Λ 模,

$$S_i=P_i/\mathrm{rad}\ P_i$$

是单 Λ 模,$i=1,2,\cdots,n$. Λ 的箭图是一个以单模 S_i 的同构类为顶点 i,以

$$\{\alpha_{ij}^l\,|\,l=1,2,\cdots,d_{ij}=\dim_k \mathrm{Ext}_\Lambda^1(S_j,S_i)\}$$

为 i 到 j 的箭得到的有向图,记为 Q_Λ. 加布里埃尔(Gabriel,P.)证明如下定理:若 k 是代数闭域,则 $\Lambda\cong kQ_\Lambda/I$,其中 I 是 kQ_Λ 的一个理想,满足条件 $J^n\subset I\subset J$,J 是由全体 1 长路生成的理想,n 是某个适当的正整数.

加布里埃尔定理(Gabriel's theorem)　见"代数的箭图".

代数的奥斯兰德-里廷箭图(Auslander-Reiten quiver of an algebra)　简称代数的 AR 箭图. 阿廷代数模范畴的一种组合刻画. 设 Λ 是阿廷代数,以不可分解 Λ 模 M 的同构类 $[M]$ 为顶点,以不可约映射为箭,即,若不可分解模 $M\to N$ 有不可约映射,则有一条箭 $[M]\to[N]$. 记 $\mathrm{Irr}(M,N)$ 为从模 M 到 N 的不可约映射和零映射构成的集合,

$$\overline{\mathrm{End}}(M)=\mathrm{End}(M)/\mathrm{rad}\ \mathrm{End}(M),$$
$$\overline{\mathrm{End}}(N)=\mathrm{End}(N)/\mathrm{rad}\ \mathrm{End}(n),$$

于是,$\mathrm{Irr}(M,N)$ 是一个 $\overline{\mathrm{End}}(M)$-$\overline{\mathrm{End}}(N)$ 双模. 记

$$d=\dim_{\overline{\mathrm{End}}(M)}\mathrm{Irr}(M,N),$$
$$d'=\dim\ \mathrm{Irr}(M,N)_{\overline{\mathrm{End}}}(N).$$

在箭向上给予赋值 $[M]\xrightarrow{(d',d)}[N]$,这样得到的图形称为代数 Λ 的 AR 箭图,记为 Γ_Λ. 若对任意正整数 n, $(D\mathrm{tr})^n(M)\neq 0$ 且 $(\mathrm{tr}D)^n(M)\neq 0$,则称 M 是正则模. 由正则模的全体做成的 Γ_Λ 的满子图称为 Λ 的稳定 AR 箭图.

瑞特曼(Riedtmann,C.)证明:设 Λ 是代数闭域 k 上的有限维代数,且 Λ 是有限表示型的,若 $\mathfrak{C}$ 是 Λ 的稳定 AR 箭图的一个分支,则 $\mathfrak{C}\cong \mathbb{Z}B/G$,其中 $\overline{B}$

是邓金图；Z 是整数集；$\mathbb{Z}B$ 是一个赋值图；顶点集 $V(\mathbb{Z}B)=\{(n,b)\mid\forall\ n\in\mathbb{Z},b\in V(B)\}$，箭向集

$$A(\mathbb{Z}B)=\{(n,b)\xrightarrow{(d,d')}(n,b_2)\text{ 和 }(n,b_2)\xrightarrow{(d',d)}(n+1,b_1)\mid\forall\ b_1\xrightarrow{(d,d')}b_2\in A(B)\};$$

G 是 $\mathbb{Z}B$ 的一个允许自同构群. 哈伯尔(Happel, D.)、波瑞泽尔(Preiser, Udo.)和林格尔(Ringel, C. M.)证明：若 $\mathfrak{C}$ 是任意阿廷代数稳定 AR 箭图的一个分支，带有一个循环模(循环模 M 指存在正整数 n，使 $(D\mathrm{tr})^n(M)\cong M$)，则 $\mathfrak{C}=\mathbb{Z}B/G$. 若 $\mathfrak{C}$ 是有限的，则 $\bar{B}$ 是邓金图；若 $\mathfrak{C}$ 是无限的，则 $\bar{B}=A_\infty$. 张英伯证明：若 $\mathfrak{C}$ 是任意阿廷代数稳定 AR 箭图的一个非循环分支，则 $C\cong\mathbb{Z}B$，其中 B 是一个赋值箭图，从而 $\mathfrak{C}$ 中不含有向循环路.

稳定 AR 箭图(steady AR-quiver)　见“代数的奥斯兰德-里廷箭图”.

德洛兹德定理(Drozd theorem)　对代数的表示型进行分类的基本定理. 设 Λ 是代数闭域 K 上的有限维代数，若对每一个维数 $d>0$，存在有限个 Λ-$k[x]$双模 M_i，且 M_i 作为 $k[x]$模是有限生成自由的，使得任取一个不可分解 d 维 Λ 模，存在某个 i 和某个 $k[x]$模 N，使得 $M_i\otimes_{k[x]}N$ 同构于这个取定的 d 维 Λ 模，则称 Λ 是驯顺表示型的. 若存在有限生成的 Λ-$k\langle x,y\rangle$双模 M，此处 $k\langle x,y\rangle$是 k 上不可换未定元 x,y 的二元多项式环，M 是自由$k\langle x,y\rangle$模，使下述定义的函子 $F:\mathrm{mod}\,k\langle x,y\rangle\to\mathrm{mod}\,\Lambda,F(N)=M\otimes_{k\langle x,y\rangle}N$ 保存不可分解性和同构类，则称 Λ 是野表示型的. 德洛兹德(Drozd, Yu. A.)证明：一个代数闭域上的有限维代数或者是驯顺表示型的，或者是野表示型的.

驯顺表示型(tame represention type)　见“德洛兹德定理”.

野表示型(wild represention type)　见“德洛兹德定理”.

乘法基定理(multiplicative bases theorem)　关于有限表示型代数的构造性定理. 加布里埃尔(Gabriel, P.)提出过一个猜想：维数一定的有限表示型代数在同构意义下只有有限多个. 罗伊特尔(Roiter, A. V.)等人证明：若 k 是代数闭域，Λ 是 k 上有限维，且带单位元的基代数，则 Λ 有一组乘法基. 乘法基是代数 Λ 的一组特殊 k 基$\{x_i\}_{i=1,\cdots,n}$，使得对任意 $1\leqslant i,j\leqslant n,x_ix_j\in\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$或 $x_ix_j=0$. 这就是所谓乘法基定理，这一定理意味着加布里埃尔猜想对代数闭域上的有限表示型代数成立.

倾斜模(tilting modules)　一种特殊的模. 倾斜理论是代数表示论研究中的主要技巧之一. 设 Λ 是有限维 k 代数，一个左 Λ 模 T 称为倾斜模，若下述条件满足：

1. T 的投射维数 $\mathrm{pdim}\,T\leqslant1$.

2. $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(T,T)=0$.

3. T 的互不同构的直和项的个数等于 Λ 的格罗腾迪克群 $K_0(\Lambda)$的秩.

特别地，若 Λ 是遗传代数，T 是倾斜模，则代数 $B=\mathrm{End}_\Lambda T$ 称为倾斜代数. 倾斜代数的整体维数是 2.

倾斜代数(tilted algebras)　见“倾斜模”.

重复代数(repetitive algebras)　由有限维代数构造的一类无限维代数. 若 Λ 是域 k 上的有限维代数，$D=\mathrm{Hom}_k(-,k)$是对偶函子，则 $D(\Lambda)$有自然的 Λ-Λ 双模结构. Λ 的重复代数记为 $\hat{\Lambda}$，定义如下：

$$\hat{\Lambda}=\begin{bmatrix}\ddots & \ddots & & & & \\ & \Lambda_{i-1} & D_{i-1} & & & \\ & & \Lambda_i & D_i & & \\ & & & \Lambda_{i+1} & D_{i+1} & \\ & & & & \ddots & \ddots\end{bmatrix},$$

其中 $\Lambda_i=\Lambda,D_i=D(\Lambda)$，$\hat{\Lambda}$ 中的每个矩阵只有有限个系数非零. 其加法是通常矩阵的加法，乘法由自然映射 $\Lambda\underset{\Lambda}{\otimes}D(\Lambda)\to D(\Lambda)$，$D(\Lambda)\otimes_\Lambda\Lambda\to D(\Lambda)$和零映射 $D(\Lambda)\otimes D(\Lambda)\to0$ 导出. 重复代数 $\hat{\Lambda}$ 是局部有界的，即对 $\hat{\Lambda}$ 的任一幂等元 e，$\hat{\Lambda}e$ 和 $e\hat{\Lambda}$ 都是有限维向量空间，且 $\hat{\Lambda}$ 是自入射的.

有限表示型自入射代数(selfinjective algebras of finite representation type)　一种特殊的代数. 有限表示型自入射代数的 AR 箭图. 设 Λ 是代数闭域 k 上的有限维自入射代数，若 Λ 是有限表示型的，则 Λ 的 AR 箭图具有形式$(\mathbb{Z}B)\mathscr{C}/G$，其中 $\bar{B}$ 是邓金图，$\mathbb{Z}B$ 的意义参见“AR 箭图”. $\mathscr{C}$ 是相位，G 是允许自同构群. 相位的含义是在 $\mathbb{Z}B$ 中安放投射点的位置. 瑞特曼(Riedtmann, Chr.)刻画了全部邓金类自入射代数的组合相位. 若 Q 是邓金箭图，则 $\mathbb{Z}Q$ 上的组合相位与 Q 倾斜代数一一对应. 肖杰、彭联刚将这一结果推广为：若 $\mathscr{A}$ 是局部有界的自入射代数，且有等价 $\mathrm{mod}\,\mathscr{A}\cong D^b(kQ)$，其中 Q 是一个不带有向圈的箭图，则存在 Q 倾斜代数 Λ，使 $\mathscr{A}\cong\hat{\Lambda}$($\hat{\Lambda}$ 为 Λ 的重复代数).

覆盖函子(covering functors)　来源于代数拓扑的一个概念. 设 M,N 是两个 k 范畴，$F:M\to N$ 是一个 k 线性函子，若对 N 中的任意像元 a,b，由 F 导出的映射

$$\bigcup_{z/b}M(x,z)\to N(a,b),\ \bigcup_{t/a}M(t,y)\to N(a,b)$$

均为双射，其中 t,z 分别取遍 M 的所有使得 $Ft=a$，$Fz=b$ 的像元，而 x,y 是满足 $Fx=a,Fy=b$ 的任意两个固定像元，则 F 称为覆盖函子.

代数的平凡扩张(trivial extension of an algebra)　从已知代数构造新代数的一种方法. 设 Λ 是

域 k 上有限维基代数，按照如下方式定义的有限维 k 代数 $T(\Lambda)=\Lambda \ltimes D(\Lambda)$ 称为 Λ 的平凡扩张：$T(\Lambda)$ 的 k 向量空间结构是 $\Lambda \oplus D(\Lambda)$，$D$ 是对偶函子 $\mathrm{Hom}_k(-,k)$；乘法结构为：

$$(a,\varphi)\cdot(b,\psi)=(ab,a\cdot\psi+\varphi\cdot b),$$
$$\forall\ a,b,\in\Lambda,\varphi,\psi\in D(\Lambda),$$

其中 $a\cdot\psi$ 与 $\varphi\cdot b$ 由双模结构 ${}_\Lambda D(\Lambda)_\Lambda$ 确定. $T(\Lambda)$ 是自入射代数.

撰　稿　张英伯
审　阅　王志玺　刘绍学

交换环与交换代数

交换代数(commutative algebra)　研究含单位元的交换环为主要对象的学科. 它是以代数数论和代数几何为背景而产生和发展的，并为这两个古老的数学分支提供了新的统一工具. 早在 18 世纪末到 19 世纪初，高斯(Gauss, G. F.)在研究二次和四次互反律、二平方和与二元二次型等问题时运用了二次域和代数整数环. 到了 19 世纪中期，库默尔(Kummer, E. E.)研究著名的费马猜想时，也把问题放到分圆域的代数整数环上去考虑，开创了数论研究的新时期. 经过戴德金(Dedekind, (J. W.) R.)和希尔伯特(Hilbert, D.)等人的系统化，建立了理想、模及戴德金整环等概念，从而创立了代数数论这门新学科. 这个时期，代数数论主要是以代数整数环为具体模型研究戴德金整环的.

比数论稍晚些时候，几何也经历了代数化过程，由占统治地位的解析方法转向代数方法. 19 世纪末，由戴德金和韦伯(Weber, H.)的工作，把代数函数论建立在代数数论的统一基础之上. 1893 年，希尔伯特建立了零点定理. 不久，拉斯科(Lasker, L.)又建立了代数簇与多项式理想之间的对应关系. 特别是 20 世纪 20—30 年代，德国女数学家诺特(Noether, E.)关于理想的准素分解理论和克鲁尔(Krull, W.)的赋值论、局部环理论和维数理论使古典几何建立在代数基础之上，形成了代数几何这门学科. 受代数数论与代数几何发展的刺激，交换代数逐步发展成为一门独立的学科. 20 世纪 50 年代后，由于模论、同调代数的发展，特别是格罗腾迪克(Grothendieck, A.)的概型理论对交换代数的发展起了巨大推动作用. 现在交换代数已应用到微分学与代数拓扑、多复变函数论和偏微分方程等学科中.

因子(factor)　整数环中因数概念的推广. 它研究单一分解环的基础概念. 设 R 是整环，$a,b\in R$，$b\neq 0$. 若存在 R 中元 c，使得 $a=bc$，则称 b 是 a 的因子，或称 b 整除 a，记为 $b|a$. 若 a 是 b 的因子，b 也是 a 的因子，则称 a 与 b 相伴. 若 b 是 a 的因子，而 b 非单位又不与 a 相伴，则称 b 为 a 的一个真因子.

整除(divisibility)　见"因子".

相伴(associated)　见"因子".

真因子(proper factor)　见"因子".

既约元(irreducible element)　素数概念的推广. 整环中既不是零也不是单位的元素，若没有真因子，则称为既约元.

素元(prime element)　整数环中素数性质的推广. 整环 R 中非零元素 p，p 不是单位，若 $a,b\in R$，且 $p|ab$，可得 $p|a$ 或 $p|b$，则称 p 是素元. 素元皆为既约元. 在整数环或域上多项式环中，每一个既约元也是素元，但对一般整环来说，既约元未必是素元，如在 $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ 中，3 是既约元而非素元. 因此，整环中元素未必能惟一地表为既约元的乘积.

最大公因子(greatest common divisor)　整数环中相应概念的推广. 设 a,b 是整环 R 中元素，若 c 是 a 的因子，也是 b 的因子，则 c 称为 a,b 的一个公因子. 进而，若 c 是 a,b 的一个公因子，且 a,b 的任意公因子都是 c 的因子，则称 c 为 a,b 的最大公因子，记为 $c=(a,b)$. 最大公因子之间可相差一个 R 中的单位. 在整环中，若任意两元素的最大公因子存在，则素元与既约元的概念是一致的.

公因子(common factor)　见"最大公因子".

单一分解环(unique factorization ring)　亦称高斯环. 一种重要的整环类. 设 R 是有单位元的整环，若 R 中任意元都能分解成有限个既约元的乘积，而且在相伴意义下分解是惟一的，即若 $a=p_1p_2\cdots p_n=q_1q_2\cdots q_m$，$p_i,q_j$ 是既约元，则必有 $n=m$，且适当调换次序后对于 $i=1,2,\cdots,n$ 均有 p_i 与 q_i 相伴，则称 R 为单一分解环. 整数环、单一分解环上多项式环都是单一分解环. 库默尔(Kummer, E. E.)于 1944 年首先指出整环 $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ 不是单一分解环. 整环是单一分解环，当且仅当真因子的任意降链终止于有限且既约元恒为素元.

高斯环(Gauss ring)　即"单一分解环".

主理想整环(principal ideal domain)　比单一分解环范围更窄的整环类. 若一个环 R 的任意理想都是主理想，则称 R 为主理想环. 若整环 R 是主理想环，则 R 称为主理想整环. 整数环 $\mathbf{Z}$ 及域上一元多项式环都是主理想整环. 主理想整环必为单一分解环，反之不真.

主理想环(principal ideal ring)　见"主理想整环".

欧氏环(Euclid ring)　比主理想整环更窄的环类. 它是整数环、域上一元多项式环有带余除法意义下的推广. 设 R 是整环，若存在 $R^\circ=R\backslash\{0\}$ 到非负

整数集内的一个映射 δ 适合条件：任给 $a\in R^{\circ}$，对 R 中任意元 b，恒有 $q,r\in R$，使得 $b=qa+r$，其中 $r=0$ 或 $\delta(r)<\delta(a)$，则称 R 为欧氏环. 整数环、域上一元多项式环都是欧氏环.

高斯整数环(ring of Gauss integers)　欧氏环的一个著名例子. 设 $\mathrm{Z}[\mathrm{i}]=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b$ 是整数,i 为虚数单位$\}$. $\mathrm{Z}[\mathrm{i}]$对通常数的加法和乘法构成一个整环，称为高斯整数环. 而 $a+b\mathrm{i}\to a^2+b^2$ 是 $\mathrm{Z}[\mathrm{i}]\setminus\{0\}$ 到非负整数集的映射，并且这个映射满足欧氏环定义的条件，因此，$\mathrm{Z}[\mathrm{i}]$也是欧氏环.

本原多项式(primitive polynomial)　一类特殊多项式. 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 是单一分解环 R 上的多项式，若它的系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的最大公因子是 R 中单位，则称$f(x)$为本原多项式. 两个本原多项式的乘积仍为本原多项式. 这个结论称为高斯引理. 利用高斯引理可以证明：若 R 是单一分解环，则 $R[x]$也是单一分解环. 于是域上多项式环 $F[x_1,x_2,\cdots,x_n]$为单一分解环.

高斯引理(Gruss lemma)　见“本原多项式”.

乘闭子集(multiplicatively closed subset)　局部化方法中的重要概念. 设 R 是有单位元 1 的环，S 为 R 的一个子集，若 S 包含 1 并且关于乘法封闭，则称 S 为 R 的乘闭子集. 常用的乘闭子集是：取 R 的非零因子集或任取 $0\neq a\in R$ 而

$$\{1,a,a^2,\cdots,a^n,\cdots\}$$

为乘闭子集；或任取 R 的素理想 $\mathfrak{p}$ 而$S=R\setminus\mathfrak{p}$为乘闭子集.

分式环(ring of fractions)　亦称商环. 整数环 Z 构作有理数环的推广. 设 R 是有单位元 1 的交换环，S 为 R 的乘闭子集，在集合 $R\times S$ 上定义等价关系～：$(a,s)\sim(b,t)$当且仅当存在 $u\in S$ 使得 $u(at-bs)=0$. 以 a/s 表示$(a,s)\in R\times S$ 所在的等价类，$S^{-1}R$ 表示 $R\times S$ 的全部等价类组成的集合. 若在 $S^{-1}R$上定义加法和乘法

$$\frac{a}{s}+\frac{b}{t}=\frac{(at+bs)}{st},\quad \frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}=\frac{ab}{st},$$

则 $S^{-1}R$ 对如此定义的加法和乘法是具有单位元 1/1的交换环，称 $S^{-1}R$ 为 R 关于 S 的分式环，也称局部化. 由 $f(x)=x/1(x\in R)$定义的环同态 $f:R\to S^{-1}R$ 具有如下性质：

1. 若 $s\in S$，则 $f(s)$是 $S^{-1}R$ 中可逆元.

2. $f(a)=0$，当且仅当对某个 $s\in S,as=0$.

3. $S^{-1}R$ 中任一元素均可表为 $f(a)f(s)^{-1}$(但表示法未必惟一)，其中 $a\in R,s\in S$.

反过来，这三条性质惟一地确定了环 $S^{-1}R$.

乘闭子集 S 不含单位元 1 时，用同法可构作 $S^{-1}R$，而且与由 S 添加 1 后所成的 S_0 构作的 $S_0^{-1}R$ 是同构的. $S^{-1}R$ 具有性质：

1. $S^{-1}R$ 是平坦 R 模.

2. $S^{-1}R$ 具有泛性质：若 $g:R\to R'$是环同态，并且对每个 $s\in S$，$g(s)$是 R'的可逆元，则存在惟一的环同态 $h:S^{-1}R\to R'$使得 $g=h\circ f$.

3. $S^{-1}R$ 中的素理想——保序对应于 R 中与 S 不相交的素理想.

商环(quotient ring)　即“分式环”.

局部化(localization)　分式环的另一名称(参见“分式环”). 局部化有两个重要性质：即保持正合性和诺特性质. 通过哥尔迪(Goldie,A. W.)等人的工作，局部化方法已应用于非交换环论研究中. 例如，哥尔迪证明了左诺特素环的(右)全分式环是单阿廷环. 局部化方法有直观的几何背景. 在代数几何中研究一个代数簇在某点或某点附近的局部性质，而从各点的局部特性去把握代数簇的整体特性. 这种方法在代数数论和整个代数学中是有效的方法.

分式域(field of fractions)　亦称商域. 一类特殊的局部化. 设 R 是整环，$S=R\setminus\{0\}$，R 关于 S 的局部化 $S^{-1}R$ 称为 R 的分式域. 例如，$R=\mathrm{Z}$(整数环)，取 $S=\mathrm{Z}\setminus\{0\}$即得$S^{-1}\mathrm{Z}=\mathrm{Q}$(有理数域).

商域(quotient field)　即“分式域”.

环关于素理想的局部化(localization of a ring at its prime ideal)　一种重要的分式环. 若 R 是具有单位元的交换环，$\mathfrak{p}$ 为 R 的一个素理想，则 $S=R\setminus\mathfrak{p}$为 R 的乘闭子集. 这时将 $S^{-1}R$ 写成 $R_{\mathfrak{p}}$，称为环 R 在 $\mathfrak{p}$ 处的局部化. $R_{\mathfrak{p}}$ 是局部环，其惟一极大理想为 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}=\{a/s\mid a\in\mathfrak{p},s\in S\}$. 在代数几何中，代数簇上的点对应着其坐标环的素理想，考虑代数簇上一点“附近”的性质，往往将注意力集中在其坐标环的一个素理想“近旁”，从而达到由局部把握整体的目的.

局部性质(local property)　对局部化保持的性质. 设 L 是环上某个性质，若对每个环 R 适合：R 有性质 L，当且仅当对每个 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\,R$，$R_{\mathfrak{p}}$ 恒有性质 L，则称 L 是一个局部性质，此处 $\mathrm{Spec}\,R$ 表示环 R 的全部素理想组成的集合. 因此，若 L 是一个局部性质，则要检验环 R 是否有性质 L，只需检验每个 $R_{\mathfrak{p}}$ 是否有性质 L. 由局部性质去掌握整体特性是研究环、模的重要手段.

饱和集(saturated set)　一种乘闭子集. 设 S 是环 R 的乘闭子集，若满足：$xy\in S\Rightarrow x\in S$ 且 $y\in S$，则称 S 为 R 的饱和集. 环 R 的每一个乘闭子集 S 都有一个包含 S 的最小饱和集

$$\overline{S}=R\setminus\bigcup_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\,R\\ \mathfrak{p}\cap S=\varnothing}}\mathfrak{p}.$$

若 $S\neq R$，则 S 是饱和集的充分必要条件是 $R\setminus S$ 是一些素理想的并. 环 R 中全体非零因子的集合 S_0 是饱和集. $S_0^{-1}R$ 称为 R 的全分式环. $S_0^{-1}R$ 中的元

素或为零因子或为单位. 若 R 是整环,则 R 的全分式环就是 R 的商域.

全分式环(full fractional ring)　见"饱和集".

adic 拓扑(adic-topology)　一种由理想定义的拓扑. 设 $\mathfrak{N}$ 是有单位元的交换环 R 的一个理想,M 是 R 模,把 $\{\mathfrak{N}^n M \mid n=0,1,\cdots\}$ 作为 M 中 0 的局部基而在 M 上引进的拓扑,称为 M 的 $\mathfrak{N}$-adic 拓扑. 当 $M=R$ 时,$\{\mathfrak{N}^n \mid n=0,1,2,\cdots\}$ 作为 R 中 0 的局部基就决定了 R 的 $\mathfrak{N}$-adic 拓扑. M(或 A)在 $\mathfrak{N}$-adic 拓扑下是 T_2 空间等价于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}^n M = (0)\ (\text{或}\ \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}^n = 0).$$

设 N 是 M 的子模,M/N 是 T_2 空间等价于 N 是 M 的闭子集,也等价于

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (N+\mathfrak{N}^n M)=N.$$

若 $\mathfrak{a}$ 为诺特环 R 的理想,且 $\bigcap_{n>0} \mathfrak{a}^n=0$,则 $\mathfrak{a}$-adic 拓扑环 R 的完备化 $\hat{R}$ 也为诺特环.

柯西序列(Cauchy sequence)　一种特殊序列. 分析中相应概念在代数中的引申. 设 $\mathfrak{N}$ 是有单位元的交换环 R 的理想,M 是 R 模. $\{x_i\}=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 为 M 中的元素序列,若对任意自然数 n 存在 N,使得对任意自然数 r,s,恒有 $x_{N+r}-x_{N+s}\in \mathfrak{N}^n M$,则称 M 中元素序列 $\{x_n\}$ 为($\mathfrak{N}$-adic 拓扑下的)一个柯西序列. 若柯西序列 $\{x_n\}$ 收敛于 0,即恒有 $x_{N+r}\in \mathfrak{N}^n M$,则称 $\{x_i\}$ 为零序列.

零序列(null sequence)　见"柯西序列".

完备化(completion)　有理数域拓广成实数域方法的推广. 设 $\mathfrak{N}$ 是有单位元的交换环 R 的理想,M 为 R 模. 若 $C(M)$ 表示 M 中全体柯西序列的集合,$C(M)$ 通过定义运算

$$\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\},\quad r\{x_n\}=\{rx_n\}$$

成为 R 模,而全体零序列的集合 $\Theta(M)$ 是它的 R 子模,则称 R 模 $\hat{M}=C(M)/\Theta(M)$ 是

$$M/(\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}^n M)$$

的(作为 $\mathfrak{N}$-adic 拓扑产生的度量空间的)完备化. 若 $M=R$,在 $C(R)$ 中定义乘法 $\{x_n\}\cdot\{y_n\}=\{x_n y_n\}$,则 $\Theta(R)$ 成为交换环 $C(R)$ 的理想,因而

$$\hat{R}=C(R)/\Theta(R)$$

是交换环. 若对于 $\{a_n\}\in C(R)$,$\{x_n\}\in C(M)$,规定

$$(\{a_n\}+\Theta(R))(\{x_n\}+\Theta(M))=\{a_n x_n\}+\Theta(M),$$

则 $\hat{M}$ 成为 $\hat{R}$ 模,称 $\hat{R}$ 和 $\hat{R}$ 模 $\hat{M}$ 分别为 R 和 R 模 M 的 $\mathfrak{N}$-adic 完备化. 完备化也可按通常柯西序列恒有极限来刻画.

扎里斯基环(Zariski ring)　一种特殊的诺特拓扑环. 设 R 是诺特环,$\mathfrak{N}$ 为 R 的理想,若 R 中每个理想对于 $\mathfrak{N}$-adic 拓扑都是闭的,则称 R 是关于理想 $\mathfrak{N}$ 的扎里斯基环. 若 $\hat{R}$ 是 R 的 $\mathfrak{N}$-adic 完备化,则 $\hat{R}$ 是忠实平坦 R 代数,当且仅当 R 是关于 $\mathfrak{N}$ 的扎里斯基环,又当且仅当 $\mathfrak{N}\subset J(R)$(R 的雅各布森根).

***p*-adic 整数环**(ring of p-adic integers)　一种特殊的环. 有理整数环 Z 对于素理想 $(p)=p\mathsf{Z}$ 的完备化,称为 p-adic 整数环,记为 Z_p. Z_p 中每个元素称为 p-adic 整数,它可惟一表示成如下 p-adic 展开式

$$a=a_0+a_1p+\cdots+a_np^n+\cdots\quad(0\leqslant a_n\leqslant p-1).$$

Z_p 是局部环,它有惟一极大理想 $p\mathsf{Z}_p$. Z_p 的雅各布森根 $J(\mathsf{Z}_p)=\{a\in \mathsf{Z}_p \mid a_0=0\}$.

***p*-adic 整数**(p-adic integer)　见"p-adic 整数环".

理想论(ideal theory)　与环的理想密切相关的理论. 它是交换环理论的重要部分. 20 世纪 20 年代初,由诺特(Noether,E.)所建立的一般交换环上理想的准素分解理论与 20 世纪 30 年代克鲁尔(Krull,W.)的局部环与维数理论. 这一理论使古典几何建立在坚实的代数基础之上,形成了代数几何这门学科. 理想论也是代数数论的重要工具.

理想的扩张(extension of an ideal)　反映环的理想在同态映射下的变化关系的概念. 设 A,B 是交换环,f 是 A 到 B 的同态映射,将 A 的理想 $\mathfrak{a}$ 的像 $f(\mathfrak{a})$ 在 B 中生成的理想记为 $\mathfrak{a}^e$,即 $\mathfrak{a}^e=f(\mathfrak{a})B=\{\sum x_i y_i(\text{有限和}) \mid x_i\in f(\mathfrak{a}),y_i\in B\}$,称为理想 $\mathfrak{a}$ 在 B 中的扩张. 而 A 的理想 $\mathfrak{a}$ 在 A 对乘闭子集 S 的分式环 $S^{-1}A$ 中的扩张为

$$\mathfrak{a}^e=\left\{\frac{a}{s}\,\middle|\, a\in\mathfrak{a},s\in S\right\}.$$

反之,若 $\mathfrak{b}$ 是 B 的理想,则 $\mathfrak{b}$ 的原像集 $f^{-1}(\mathfrak{b})$ 是 A 的理想,$f^{-1}(\mathfrak{b})$ 称为理想 $\mathfrak{b}$ 在 A 中的收缩,记为 $\mathfrak{b}^c$. 若 $\mathfrak{b}$ 是素理想,则 $\mathfrak{b}^c$ 为素理想. 关于素理想在上述扩张下的动态是代数数论研究的重要问题之一.

理想的收缩(contraction of an ideal)　见"理想的扩张".

素谱(prime spectrum)　在交换环理论与代数几何中起重要作用的概念. 交换环 R 的全体素理想的集合称为 R 的素谱,记为 $\mathrm{Spec}\,R$. 其拓扑意义是:若 I 是 R 的任意理想,定义

$$V(I)=\{P\in \mathrm{Spec}\ R \mid I\subseteq P\},$$

则所有这些 $V(I)$ 的集合适合拓扑空间理论中对闭集的公理. $\mathrm{Spec}\,R$ 上相应的拓扑称为扎里斯基拓扑. 因此,环的素谱在扎里斯基拓扑意义下构成一个拓扑空间. 同样,交换环 R 的全体极大理想的集合称为 R 的极大谱,记为 $\mathrm{Max}\,R$.

极大谱(maximum spectrum)　见"素谱".

理想的根(radical of an ideal)　环的一种特殊理想. 含给定理想的素理想的交. 设 I 是有单位元的交换环 R 的理想. 记 $\sqrt{I}=\{x\in R \mid$ 存在正整数 n,

使得 $x^n \in I\}$,它是 R 的理想且 $\sqrt{I} \supset I$,称 $\sqrt{I}$ 为理想 I 的根.当 $I \neq R$ 时,理想 I 的根是 R 中包含 I 的一切素理想的交.若 $\sqrt{I}=I$,则称 I 为根理想.素理想必为根理想.

根理想(radical ideal) 见"理想的根".

小根(nil radical) 亦称诣零根.交换代数中一种特殊根.有单位元的交换环 R 的零理想的根,称为 R 的小根,记为 N_R. N_R 是 R 中一切素理想的交,也是 R 中一切幂零元的集合.

大根(large radical) 亦称雅各布森根.环的一种特殊根.有单位元的交换环 R 的大根是 R 中一切极大理想的交,常用 $J(R)$ 表示.

$$J(R)=\{x \in R \mid 1-xR \subseteq U(R)\},$$

其中 $U(R)$ 是 R 的单位群.

克鲁尔维数(Krull dimension) 决定环结构的一个参数,对赋值环的研究有重要意义.设 $\mathfrak{p}$ 是 R 的素理想,R 中终止于 $\mathfrak{p}$ 的素理想真升链 $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n=\mathfrak{p}$ 的长度 n 的最大值称为素理想 $\mathfrak{p}$ 的高,记为 $h(\mathfrak{p})$. R 的理想 $\mathfrak{a}$ 的高是包含在 $\mathfrak{a}$ 中的所有素理想真升链的最大长度.环的克鲁尔维数是指 R 中素理想真升链长度的最大值,记为 $\dim R$.它是一个非负整数或 ∞.例如,域的维数为零,整数环的维数为 1.一般地,环 R 为阿廷环当且仅当 R 为诺特环且 $\dim R=0$.

理想的高(height of an ideal) 见"克鲁尔维数".

理想的维数(dimension of an ideal) 刻画理想的一个参数.对交换环 R 的理想 $\mathfrak{u}$,将 $R/\mathfrak{u}$ 的克鲁尔维数称为理想 $\mathfrak{u}$ 的维数,它是 R 中包含 $\mathfrak{u}$ 的素理想升链的长度的最大值.

准素理想(primary ideal) 一种特殊的理想.理想论中理想分解的基础.设 Q 是交换环 R 的理想且 $Q \neq R$,如果对 R 中任意元素 $x,y,xy \in Q$ 且 $x \notin Q$,恒有正整数 n,使得 $y^n \in Q$,则称 Q 是 R 的准素理想.素理想是准素理想,但素理想的幂未必是准素理想.

准素整环(primary domain) 平行于素环的概念.设 R 是交换环,若零理想是准素理想,则称 R 为准素整环.换言之,R 除幂零元外不含其他的零因子.整环是准素整环,准素整环的克德根是素理想.准素理想与准素整环有如下关系:Q 是 R 的理想,Q 是准素理想当且仅当 R/Q 是准素整环.

相伴素理想(associated prime ideal) 一种特殊的素理想.包含给定准素理想的最小素理想.若 Q 是环 R 的准素理想,则 Q 的根 $\sqrt{Q}=P$ 是包含 Q 的最小素理想,称 P 是 Q 的相伴素理想,也称属于 Q 的素理想.而 Q 称为 P 准素理想. P 准素理想的交仍为 P 准素理想.

P 准素理想(P-primary ideal) 见"相伴素理想".

准素环(primary ring) 接近素环的特殊环类.一个有单位元的交换环 R,若它最多含一个素理想 P,则称 R 为准素环.例如,域是准素环.若交换环 R 的准素理想 Q 有极大理想 M 作为其相伴素理想,则 R/Q 也是准素环.任意满足降链条件的有 1 交换环 R,可惟一分解为诺特准素环的直和.

理想的因子(factor of an ideal) 理想间的包含关系.是整数环中因子概念引申到环的理想.设 A,B 是交换环 R 的两个理想,若 $A \subset B$,则称 B 为 A 的因子,A 称为 B 的倍.

理想的倍(multiple of an ideal) 见"理想的因子".

理想的最大公因子(greatest common divisor of ideals) 整数环中相应概念到环的引申.设 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 是环 R 的理想,M 是诸 I_i 的公因子,即 $I_i \subset M$.若 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 的任意公因子 N 均是 M 的因子,则称 M 为 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 的最大公因子.于是,理想 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 的最大公因子 M 是惟一确定的且

$$M=I_1+I_2+\cdots+I_n.$$

理想的互素(coprime of ideals) 整数环中元素互素概念的推广.设 A,B 是环 R 的理想,若 A 与 B 的最大公因子是 R,即 $A+B=R$,则称 A 与 B 互素.若 R 是有 1 的交换环,R 的理想 A,B 互素,则

$$A \cap B=AB.$$

中国剩余定理(Chinese remainder theorem) 亦称孙子定理.古典孙子定理的推广.若 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 是环 R 中 n 个理想,则它们彼此互素(即 $i \neq j$ 时,有 $I_i+I_j=R$)的充分必要条件是对 R 中任意 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,存在 R 中元 a 适合同余方程组

$$a \equiv a_i (\bmod\ I_i) \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

这等价于在映射

$$f:\ x+\bigcap_{i=1}^{n} I_i \rightarrow (x+I_1, x+I_2, \cdots, x+I_n)$$

下,

$$R/\bigcap_{i=1}^{n} I_i \cong R/I_1 \oplus R/I_2 \oplus \cdots \oplus R/I_n.$$

公元 3 世纪,孙子在《孙子算经》中提出,而被后人叙述为如下定理:设 $m_1, m_2, \cdots, m_r$ 是两两互素的整数,则同余方程组:$x \equiv a_i (\bmod\ m_i)$ $(i=1,2,\cdots,r)$ 对模 $m=m_1 m_2 \cdots m_r$ 有惟一解

$$x \equiv \sum \frac{m}{m_i} x_i a_i (\bmod\ m),$$

其中

$$\frac{m}{m_i} x_i \equiv 1 (\bmod\ m_i).$$

理想的最低公倍(least common multiple of

ideals） 整数环中最小公倍数概念到环的引申．设 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 是环 R 的理想，D 是 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 的一个公倍，即 $D \subset I_i, i=1,2,\cdots,n$，且若 S 是 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 的任一公倍，则 S 是 D 的倍，则称 D 为 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 的最低公倍．

不可约理想（irreducible ideal） 与可约理想相反的概念，它是理想分解的基本概念．设 $\mathfrak{N}$ 是交换环 R 的一个理想，若 $\mathfrak{N}$ 可表为 R 中两个比它大的理想的交，即 $\mathfrak{N}=A\cap B, \mathfrak{N}\subset A\lhd R(\mathfrak{N}\neq A), \mathfrak{N}\subset B\lhd R(\mathfrak{N}\neq B)$，则称 $\mathfrak{N}$ 是可约理想；否则，称 $\mathfrak{N}$ 是不可约理想．素理想恒为不可约理想．在诺特环中，不可约理想必为准素理想．

可约理想（reducible ideal） 见“不可约理想”．

理想的准素分解式（primary decomposition of an ideal） 理想论的核心概念．设 $\mathfrak{N}$ 是环 R 的理想，若 $\mathfrak{N}$ 能表为有限个准素理想 $\mathfrak{N}_i$ 之交，即

$$\mathfrak{N}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{N}_i,$$

则称此式为 $\mathfrak{N}$ 的准素分解式，$\mathfrak{N}_i$ 称为 $\mathfrak{N}$ 的准素分量．具有准素分解式的理想称为可分解理想，否则称为不可分解理想．一般地，环的理想未必有准素分解式，但诺特环的每一个理想都是可分解理想．

可分解理想（decomposable ideal） 见“理想的准素分解式”．

理想的极小准素分解式（minimal primary decomposition of an ideal） 特殊的交分解式．它是不能再缩短的．环 R 的理想 $\mathfrak{N}$ 的一个准素分解式

$$\mathfrak{N}=\bigcap_{i=1}^{n}Q_i,$$

若满足：

1. $P_i=\sqrt{Q_i}, 1\leqslant i\leqslant n$ 是彼此不同的素理想；

2. $Q_j \not\supseteq \bigcap_{i\neq j}^{n} Q_i (1\leqslant j\leqslant n)$；

则称此分解式为 $\mathfrak{N}$ 的极小准素分解式．虽然极小准素分解式不惟一，但是 $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$ 是由 $\mathfrak{N}$ 惟一决定的，与 $\mathfrak{N}$ 的极小准素分解形式无关．称 $\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$ 为属于 $\mathfrak{N}$ 的素理想．

孤立素理想（isolated prime ideal） 一种特殊的素理想．代数几何中代数簇的相应概念在环中的引申．若环 R 的理想 $\mathfrak{N}$ 有极小准素分解式

$$\mathfrak{N}=\bigcap_{i=1}^{n}Q_i,$$

则属于 $\mathfrak{N}$ 的素理想集 $\Sigma=\{P_1, P_2, \cdots, P_n\}(P_i=\sqrt{Q_i})$ 中的极小元 P_i 称为 $\mathfrak{N}$ 的孤立素理想，而 Σ 中非极小元称为 $\mathfrak{N}$ 的嵌入素理想．它们所对应的 Q_i 分别称为 $\mathfrak{N}$ 的孤立准素分支和嵌入准素分支．属于 $\mathfrak{N}$ 的孤立素理想恰好是集合 $\{P\in \operatorname{Spec} R \mid P\supset \mathfrak{N}\}$ 的全部极小元．孤立与嵌入来源于代数几何中相应代数簇的孤立与嵌入概念．

嵌入素理想（embedded prime ideal） 见“孤立素理想”．

孤立准素分支（isolated primary component） 见“孤立素理想”．

嵌入准素分支（embedded primary component） 见“孤立素理想”．

克鲁尔环（Krull ring） 以克鲁尔（Krull，W．）命名的一类重要的整环．满足下列条件的整环 R 称为克鲁尔环：

1. 若 P 是高为 1 的素理想，则其局部化 R_P 是离散赋值环（参见“赋值论”）．

2. R 是所有这些离散赋值环 R_P 的交．

3. 对于 R 中非零元素 a，包含 a 且高为 1 的素理想仅有有限个．

在克鲁尔环中，对于任意非零分式理想 $\mathfrak{N}$ 存在惟一确定的高为 1 的素理想的幂的积与 $\mathfrak{N}$ 等价（即逆分式理想相等）．戴德金整环、一般的整闭诺特整环都是克鲁尔环．

普吕费尔整环（Prüfer domain） 一类特殊的整环．设 R 是一个整环，K 是它的分式域，若对于 R 的每个素理想 $\mathfrak{p}$，$A_{\mathfrak{p}}$ 都是赋值环，则称 R 是普吕费尔整环．若 R 是普吕费尔整环，K 是它的分式域，而 V 是介于 R 和 K 中间的一个赋值环，则必有 R 的一个素理想 $\mathfrak{p}$ 使得 $V=R_{\mathfrak{p}}$．

孤立集（isolated set） 由素理想组成的特殊集合．属于可分解理想的素理想的一个对包含封闭的子集．设 $\mathfrak{N}$ 是可分解理想，属于 $\mathfrak{N}$ 的素理想的集合 Σ 称为孤立集合，是指：若 P' 是属于 $\mathfrak{N}$ 的素理想且 $P'\subset P\in\Sigma$，则 $P'\in\Sigma$．

符号幂（symbolic power） 特殊的收缩理想．在有 1 的交换环 R 中，一个素理想 P 的幂 P^n 未必是准素的．符号幂就是构造一个由 P^n 确定的准素理想．$S_P=R\backslash P$ 是乘闭子集，称 $S_P^{-1}P^n$ 在 R 中的收缩理想为 P 的 n 次符号幂，记为 $P^{(n)}$，即

$$P^{(n)}=S_P^{-1}P^n\cap R.$$

$P^{(n)}$ 是 P 准素理想．若 P^n 是准素的，则 $P^{(n)}=P^n$．在诺特环中，因为 P^n 有极小准素分解

$$P^n=\bigcap_{i=1}^{r}Q_i,$$

所以 P 必等于某个 $P_i=\sqrt{Q_i}$．例如，若 $P=P_1$，则 $Q_1=P^{(n)}$ 是 P^n 的孤立准素分支．

克鲁尔交定理（Krull intersection theorem） 关于交换诺特环的真理想的定理．它是由克鲁尔（Krull，W．）建立的著名定理．该定理断言：若 $\mathfrak{N}$ 为有 1 的诺特环 R 的真理想，且为准素整环，则：

1. $\mathfrak{N}$ 的一切幂的交恒为零，即 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{N}^n=(0)$．

2. 若 $\mathfrak{N}$ 为素理想，则 $\mathfrak{N}$ 的一切符号幂的交为零，即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{N}^{(n)}=(0).$$

主理想定理(principal ideal theorem)　诺特环理论中的基本定理. 设 $A=(a)$ 是交换诺特环 R 的一个真主理想，若 A 有一个孤立准素分支，其相伴素理想为 P，则素理想的真降链 $P\supset P_1\supset P_2\supset\cdots$ 必终止于 P_1. 克鲁尔(Krull, W.)又将此定理推广到 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq R$ 的情况，并证明了此时素理想降链必终止于 P_n.

交的惟一分解定理(unique decomposition theorem for intersection)　交换诺特环理论的基本定理，也是理想论的核心. 若 R 是交换诺特环，则 R 中任意理想 $\mathfrak{N}$ 都有极小准素分解式

$$\mathfrak{N}=\bigcap_{i=1}^{n}Q_i.$$

若 $P_i=\sqrt{Q_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$ 是由 $\mathfrak{N}$ 惟一确定的，与 $\mathfrak{N}$ 的极小分解式无关；若 $\Sigma=\{P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_m}\}$ 是属于 $\mathfrak{N}$ 的一个素理想孤立集合，则

$$\bigcap_{k=1}^{m}Q_{i_k}$$

是由 $\mathfrak{N}$ 和 Σ 惟一决定的，与极小准素分解式无关.

交的惟一分解定理是诺特(Noether, E.)于1921年在交换环中引入极大条件后建立的. 由于受代数几何发展的促进，需要研究多项式环的理想理论，这个理论的一个重要问题是判断一个多项式是否属于理想 $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$，判断的方法就是把 $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ 分解为准素理想的交.

乘积的惟一分解定理(unique decomposition theorem for product)　交的惟一分解定理在有单位元的诺特环中的应用. 该定理断言：若 R 是有1的交换诺特环，则 R 的每个理想 A 都可表示成两两互素的理想 A_i 的乘积，即 $A=A_1A_2\cdots A_n$，且每个 A_i 不能再分解成两个互素理想的积，诸 A_i 由 A 惟一确定.

希尔伯特基定理(Hilbert basis theorem)　交换代数中的重要定理，也是代数几何的基本定理. 若 R 是有单位元的交换诺特环，则多项式环 $R[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 也是诺特环，这就是希尔伯特基定理. 由此得出域上多项式环 $F[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 与整数环上多项式环 $\mathbf{Z}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 具有基底条件，从而使诺特环的理想理论在代数几何中有重要作用.

半局部(交换)环(semilocal (commutative) ring)　含有限个极大理想的环类. 设 R 是有单位元的交换环，若 R 仅有有限个极大理想，则称 R 为拟半局部环. 诺特拟半局部环称为半局部环. 用 $(R,\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2,\cdots,\mathfrak{m}_r)$ 表示极大理想为 $\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2,\cdots,\mathfrak{m}_r$ 的(拟)半局部环. 但要注意：

1. (拟)半局部环可以在一般结合环中定义.

2. 有些文献将拟半局部环称为半局部环，而将半局部环称为诺特半局部环.

拟半局部环(quasi-semilocal ring)　见“半局部(交换)环”.

局部(交换)环(local (commutative) ring)　半局部环的子类. 它是仅含一个极大理想的环类. 设 R 是有1的交换环，若 R 仅有一个极大理想 $\mathfrak{m}$，则称 R 为拟局部环，记为 $(R,\mathfrak{m})$. 环 R 是拟局部环当且仅当 R 有理想 $\mathfrak{m}$ 使 $R\backslash\mathfrak{m}=U(R)$ (R 的单位群)，即 R 的全体非单位构成 R 的极大理想. 诺特拟局部环称为局部环. 局部环 $(R,\mathfrak{m})$ 的克鲁尔维数为一切 $\mathfrak{m}$ 准素理想的生成元的最小个数，从而是有限的.

拟局部环(quasi-local ring)　见“局部环”.

正则参数系(regular system of parameters)　用来刻画正则局部环的概念. 若 $(R,\mathfrak{m})$ 是克鲁尔维数为 r 的局部环，则 $\mathfrak{m}$ 中存在 r 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_r$，它们生成的理想 $\mathfrak{N}=(a_1,a_2,\cdots,a_r)$ 是 $\mathfrak{m}$ 准素理想，即 $\mathfrak{m}=\sqrt{\mathfrak{N}}$，此时，$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$ 称为 R 的一个参数系. 若 $\mathfrak{N}=(a_1,a_2,\cdots,a_r)$ 等于 $\mathfrak{m}$，则称 $\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$ 为 R 的正则参数系. 若 $(R,\mathfrak{m})$ 是局部环，$r=\dim R$，且 $F=R/\mathfrak{m}$，则 R 的参数系在 R 的子域 $\widetilde{F}(\cong F)$ 上线性无关. 局部环 $(R,\mathfrak{m})$ 有正则参数系，当且仅当 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 作为 F 上的向量空间有 $\dim_F(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)=\dim R$；又当且仅当相伴分次环 $G_{\mathfrak{m}}(R)$ 同构于 F 上多项式环 $F[t_1,t_2,\cdots,t_r]$.

参数系(system of parameters)　见“正则参数系”.

正则局部环(regular local ring)　局部环的子类. 有正则参数系的局部环 $(R,\mathfrak{m})$ 称为正则局部环. 即 $\mathfrak{m}$ 可由 $\dim R$ 个元素生成. 例如，域 F 上 n 个变量的形式幂级数环 $F[[x_1,x_2,\cdots,x_n]]$ 是 n 维正则局部环. $R=F[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 是代数闭域 F 上多项式环，若 $\mathfrak{m}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，则局部化 $R_{\mathfrak{m}}$ 也为正则局部环. 克鲁尔维为 r 的局部环 $(R,\mathfrak{m})$ 是正则的充分必要条件是 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 是 $R/\mathfrak{m}$ 上 r 维向量空间.

代数集(algebraic set)　特殊的集合. 它是若干个多项式的公共根的集合，是与代数簇密切相关的概念. 设 S 是域 K 上多项式环 $K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 的若干个多项式的集合，记 $V(S)=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in K^n\mid f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=0$，对任意 $f\in S\}$ 为 S 中所有多项式的公共根的集合. 对于 K^n 中子集 T，若存在集合 $S\subset K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 使得 $T=V(S)$，则称 T 为一个代数集. 故 $V(S)=V((S))$. 因此，K^n 中每个代数集皆为 $V(\mathfrak{N})$ 的形式，其中

$$\mathfrak{N} \lhd K[x_1, x_2, \cdots, x_n],$$

称 $V(\mathfrak{N})$ 为理想 $\mathfrak{N}$ 对应的代数集. 代数集的交与空集合 $\varnothing = V(K[x_1, x_2, \cdots, x_n])$ 以及 $K^n = V(0)$ 皆为代数集. 反之, 设 A 是 K^n 的一个子集合, 若 $I(A) = \{f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mid f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0, \forall\ (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A\}$, 则 $I(A) \lhd K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 称为集合 A 对应的多项式理想. 另一方面, 当 K 为代数闭域时, K^n 中代数集的全体 $\widetilde{A}$ 与 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 中根理想的全体 $\widetilde{R}$ 在映射 $I: A \to I(A), V: \mathfrak{N} \to V(\mathfrak{N})$ 下 $(A \in \widetilde{A}, \mathfrak{N} \in \widetilde{R})$ 是反序一一对应的.

可约代数集(reducible algebraic set)　一种特殊的代数集. 与代数簇是一对相斥概念, 即代数系可否并分解. 对域 K 上仿射空间 K^n 中代数集 V, 若存在代数集 V_1, V_2 使得 $V = V_1 \cup V_2$, 且 $V_1 \subset V (V_1 \neq V), V_2 \subset V (V_2 \neq V)$, 则称 V 是可约的, 否则称 V 是不可约的. 不可约代数集也称为代数簇. 当 K 是代数闭域时, K^n 中每个代数集恒可表为有限个彼此不互相包含的代数簇的并.

代数簇(algebraic variety)　见"可约代数集".

希尔伯特零点定理(Hilbert null theorem)　交换代数中的基本定理. 设 K 是域 F 的代数闭扩域, $\mathfrak{N} \lhd K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, 由于 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 是诺特环, 所以存在 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 中有限个多项式使得 $\mathfrak{N} = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$. 希尔伯特零点定理断言: 若 $\mathfrak{N}$ 是 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的真理想, 则 $\mathfrak{N}$ 中所有多项式在 K 中的公共根的集合 $V(\mathfrak{N}) = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in K^n \mid f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0\ (\forall\ f \in \mathfrak{N})\} \neq \varnothing$. 换言之, 对于多项式 $f_1, f_2, \cdots, f_m \in K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, 若 $1 \notin (f_1, f_2, \cdots, f_n)$, 则方程组 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 在代数闭域 K 中必有解. 但是, 当 K 不是代数闭域时, 此结论不真.

整元素(integral element)　有理整数概念在环论中的推广. 设 S 是有 1 的交换环 R 的一个子环, a 是 R 中的一个元素. 若 a 是 $S[x]$ 中某个首项系数为 1 的多项式 $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ 的根, 则 a 称为 S 上的整元素, 简称 a 在 S 上是整的; 而方程 $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ 称为 a 在 S 上的整相关方程.

整相关方程(integrally related equation)　见"整元素".

整闭包(integral closure)　域论中代数闭包的推广. 设 S 是有 1 的交换环 R 的子环, R 在 S 上的整元素的全体 $\mathscr{C} = \{x \in R \mid x$ 在 S 上是整的$\}$ 是 R 的子环, 称为 S 在 R 中的整闭包. 在 $\mathscr{C} = S$ 时, 称 S 在 R 中整闭. 若 $R = \mathscr{C}$, 则称 R 在 S 上是整的, 此时 R 称为 S 的整性扩张.

整闭(integrally closed)　见"整闭包".

整(性)扩张(integral extension)　见"整闭包".

前导子理想(conductor ideal)　一种特殊的极大理想. 设 R 是整环, $\widetilde{R}$ 是 R 在其商域 K 中的整闭包. 若 $\mathscr{F} = \{x \in R \mid x\widetilde{R} \subset R\}$, 则 $\mathscr{F}$ 是 R 的理想, 也是 $\widetilde{R}$ 的理想, 称 $\mathscr{F}$ 是 R 在 $\widetilde{R}$ 中的前导子. 前导子是 R 的极大理想, 也是 $\widetilde{R}$ 的极大理想.

整闭整环(integrally closed domain)　亦称正规环. 刻画戴德金整环的重要概念. 若整环 R 在它的商域中整闭, 称 R 为整闭整环. 例如, 单一分解环、赋值环均是整闭整环. 整闭性是局部性质.

正规环(normal ring)　即"整闭整环".

戴德金整环(Dedekind domain)　一维诺特整闭整环. 整环 R 称为戴德金整环, 若满足以下三个条件:

1. R 是诺特环.
2. R 在其商域中整闭.
3. $\dim R = 1$(其中 dim 表示克鲁尔维数), 也即 R 不是域且非零素理想均为极大理想.

在戴德金整环 R 中每个准素理想均为素理想的幂, 从而每个非零理想均可惟一(不计因子次序)地表示为有限个素理想的积. 由库默尔(Kummer, E. E.)开创, 戴德金(Dedekind, (J. W.)R.)所建立起来的戴德金整环的理论已十分完整, 但有些重要的诺特环, 例如, 域 F 和整数环 $\mathbf{Z}$ 上多项式环 $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, $\mathbf{Z}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 均非戴德金整环.

分式理想(fractional ideal)　比理想更广的一种理想. 它由整环的商域中元构成. 设 K 是整环 R 的商域. 若 X 是 R 模 K 的子模, 并且存在 K 中非零元 β 使得 $\beta X \subseteq R$, 则称 X 为 R 的一个分式理想. 有时为了区别, 把 R 的理想称为整理想. 整理想都是 R 的分式理想. 若 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ 是 K 中元素, 则 $\delta_1 R + \delta_2 R + \cdots + \delta_n R$ 是 R 的分式理想, 称为由 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ 所生成的分式理想. 特别地, 由 K 中一个元素 δ 生成的分式理想 δR 称为 R 的主分式理想, 也记为 (δ). 当 $a \in R$ 时, 主分式理想 (a) 就是主整理想.

整理想(integral ideal)　见"分式理想".

主分式理想(principal fractional ideal)　见"分式理想".

可逆理想(invertible ideal)　一种特殊的分式理想. 它是类比于可逆元而命名的. 设 K 是整环 R 的商域(即分式域), X 是 R 的非零分式理想. 若

$$X^{-1} = \{y \in K \mid yX \subset R\} = (R : X),$$

则 X^{-1} 也是分式理想, 称为 X 的逆理想. $XX^{-1} = X^{-1}X \subset R$, 但一般 $XX^{-1} \neq R$. 若 $XX^{-1} = R$ 成立, 则称 X 为可逆理想.

逆理想(converse ideal)　见"可逆理想".

容许理想理论(admissible ideal theory) 整环的一种特殊性质.它作为戴德金环的判定条件.若整环 R 的所有非零分式理想做成群,则称 R 容许理想理论.设 $G(R)$ 是 R 的所有非零分式理想的集合.由于两个分式理想 X,Y 的乘积(与整理想的积同样定义) XY 也是分式理想且适合交换律与结合律,而 R 是分式理想且 $RX=X$,所以 $G(R)$ 是有单位元的交换半群.当 R 是戴德金环时,R 中每个非零分式理想都是可逆理想,因此,$G(R)$ 构成一个群,称 $G(R)$ 为 R 的全分式理想群.于是,整环 R 是戴德金环的充分必要条件是 $G(R)$ 为乘法群,即 R 容许理想理论.也等价于下面两个条件:

1. 对 R 的非零理想 A,B,若 $A\subset B$,则存在 R 的理想 C 使得 $A=BC$.

2. R 的每个非零真理想恒可表为有限个极大整理想的乘积.

全分式理想群(group of all fractional ideals) 见"容许理想理论".

主分式理想群(group of principal fractional ideals) 戴德金整环的全分式理想群的子群.设 $P(R)$ 表示戴德金整环的一切非零主分式理想的集合,由分式理想的乘法知:

$$(\alpha)(\beta)=(\alpha\beta),\quad (\alpha)^{-1}=(\alpha^{-1}),$$

因此,$P(R)$ 做成一个交换群,称为 R 的主分式理想群.

理想类群(ideal class group) 衡量戴德金环与主理想整环相距程度的群.设 $G(R)$ 是戴德金环 R 的全部分式理想所构成的群,$P(R)$ 是主分式理想群.它们都是交换群且 $P(R)$ 是 $G(R)$ 的子群,其商群 $G(R)/P(R)=I(R)$ 称为 R 的理想类群.R 的每个分式理想 $\mathfrak{a}$ 在 $I(R)$ 中的像称为 $\mathfrak{a}$ 所在的理想类.于是,两个分式理想 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 同属于一个理想类当且仅当在 R 的商域 K 中存在非零元素 d 使 $\mathfrak{a}=(d)\mathfrak{b}$.所以,$I(R)$ 是一阶群,当且仅当 $P(R)=G(R)$;又当且仅当 R 的每个整理想均为主理想;又当且仅当 R 为主理想整环.

理想类(ideal class) 见"理想类群".

拟相等(quasi-equal) 相等概念的推广.设 K 是整环 R 的商域.R 中两个非零分式理想 X,Y,若其逆分式理想 X^{-1},Y^{-1} 相等,即 $X^{-1}=Y^{-1}$,则称 X,Y 拟相等,记为 $X\sim Y$.拟相等是 R 中全体非零分式理想的一个等价关系.在戴德金环中,拟相等与相等是一致的.引入拟相等的概念来代替相等,可使一些重要的诺特环类(但非戴德金环),例如域 F,整数环 $\mathbf{Z}$ 上多项式环 $F[x_1,x_2,\cdots,x_n]$,$\mathbf{Z}[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 也有类似于戴德金环的容许理想理论.

拟因子(quasi-factor) 对拟相等而言的因子.X,Y 是 R 的分式理想,若其逆分式理想 X^{-1},Y^{-1} 有 $X^{-1}\subset Y^{-1}$,则称 X 是 Y 的一个拟因子,或 Y 是 X 的一个拟倍,并记为 $X\leqslant Y$ 或 $Y\geqslant X$.$X\leqslant Y$,当且仅当 $X^{-1}Y\subset R$,当且仅当存在 R 的整理想 A 使 AX 拟相等于 Y.因此,若 $X\leqslant Y$,则称 X 拟整除 Y.在戴德金环中,拟整除与整除是一致的.

拟整除(quasi-divisibility) 见"拟因子".

群定理(group theorem) 类似于戴德金环的容许理想理论.设 K 是整闭整环 R 的商域.将 R 的一切非零分式理想按拟相等"$\sim$"做等价分类,X 所在的类用 $\{X\}$ 表示.若 $\tilde{G}$ 表示 R 中一切非零分式理想的等价类的集合,定义 $\{X\}\{Y\}=\{XY\}$,因 $\{R\}$ 是 $\tilde{G}$ 的单位元,

$$\{X\}^{-1}=\{X^{-1}\}=\{y\in K\mid yX\subseteq R\},$$

则 $\tilde{G}$ 构成群.因此,整闭整环 R 的全体分式理想按拟相等的等价类的集合构成一个群,这就是群定理.群定理不要求 R 是诺特环.由于在戴德金环中拟相等与相等、拟整除与整除一致,所以戴德金环的理论是诺特整闭整环理论的特例.

撰　稿　丁南庆　王志玺　朱元森
审　阅　牛风文　冯克勤

非结合环与非结合代数

非结合环与非结合代数(nonassociative rings and nonassociative algebras) 抽象代数学的一个重要分支,与结合环和结合代数理论在概念与术语的使用上、问题的背景与提出的方式上、讨论中的思路与解决问题的方法上都有密切联系.若集合 R 上有两个二元运算:加法"+"和乘法"·",而且:

1. $(R,+)$ 是加法群;

2. R 的乘法"·"对其加法"+"满足分配律,即对任意 $x,y,z\in R$,恒有:

$$(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z,$$
$$z\cdot(x+y)=z\cdot x+z\cdot y;$$

则称 $(R,+,\cdot)$ 是一个非结合环.进而,

3. 若 $(R,+)$ 是域 F 上的线性空间,且对任意 $\alpha\in F$,任意 $x,y\in R$ 有

$$\alpha(x\cdot y)=(\alpha x)\cdot y=x\cdot(\alpha y);$$

则称 $(R,+,\cdot)$ 是域 F 上的一个非结合代数.也称非结合环、非结合代数为分配环和分配代数.设 $(A,+,\cdot)$ 是一个非结合代数,若它对其乘法满足结合律或交错律或若尔当律或雅可比恒等式等,就分别称其为结合代数、交错代数、非交换若尔当代数、李代数等.因为,结合环必为非结合环,每个结合代数都是非结合代数,所以,字头"非"意味着乘法满足结合律与不满足结合律的环与代数的总和.由于结合环与结合代数的研究工作起步早、成果多,已自成系

统，所以在非结合代数与非结合环理论中通常将那些“结合的”系统排除在外．同样道理，李代数已形成独立局面，而不再被包含在一般非结合代数中．

一些重要的非结合代数是受到量子力学、统计物理等刺激发展起来的，但是在其代数结构的理论探讨上，可以说，基本上是沿着结合代数结构理论的路子向前发展．如引入理想、同态、商代数、根、直和、链条件、半单等概念，分别讨论各种类型非结合代数的韦德伯恩定理存在的可能性等．

在这个分支中，到目前为止，研究成果比较令人满意的是幂结合代数、凯莱代数、若尔当代数、非交换若尔当代数、交错代数等．

非结合环（nonassociative ring） 见“非结合环与非结合代数”．

非结合代数（nonassociative algebras） 见“非结合环与非结合代数”．

非结合代数的导出列（derived series of a nonassociative algebra） 由非结合代数 A 的一系列子代数组成的一个序列．若 A 是域 F 上的一个非结合代数，记 $A^{(1)}=A, A^{(2)}=A^{(1)}A^{(1)}=AA$，$A^{(i+1)}=A^{(i)}A^{(i)},\cdots$，则称 $A^{(1)},A^{(2)},\cdots,A^{(i)},\cdots$ 是 A 的导出列．导出列概念以及由它引出的可解性概念在处理非结合代数的根的存在性问题可以看做是结合代数中幂零性概念的推广．

可解代数（solvable algebra） 一类非结合代数．设 A 是域 F 上的一个非结合代数，若有正整数 n 使得在其导出列中 $A^{(n)}=0$，则称 A 是个可解代数．非结合代数 A 的理想 I 本身是可解代数时，称 I 是 A 的一个可解理想．可解代数的子代数是可解的，可解代数的同态像是可解的．对于结合代数而言，可解理想与幂零理想是一致的．非结合代数 A 是可解的当且仅当 A 的理想 I 及商代数 A/I 均是可解的．同时，A 的任意两个可解理想之和仍是可解的，因此，非结合代数中的可解性概念类似于结合代数中的幂零性，由此可定义非结合代数 A 的根与半单性．

可解理想（solvable ideal） 见“可解代数”．

幂零非结合代数（nilpotent nonassociative algebra） 一类特殊的非结合代数．设 A 是域 F 上的一个非结合代数，若有正整数 n，使得 A 中任意 n 个元素以任何顺序相乘之积均为 0，则称 A 是 F 上幂零的非结合代数．非结合代数 A 的理想 I 称为是幂零理想，是指 I 本身是幂零的．任何幂零理想必定是可解的．幂零性问题是非结合代数与非结合环的根理论中重要问题之一．

非结合代数的幂零理想（nilpotent ideal of a nonassociative algebra） 见“幂零非结合代数”．

非结合代数的中心（center of a nonassociative algebra） 给定的非结合代数的一个特殊子代数．设 A 是域 F 上的一个非结合代数，它所有与每个元素都可交换且可结合的元素构成的子集 C 称为 A 的中心，亦即 A 的元素 c 属于其中心 C，当且仅当对任意 $x,y\in A$ 恒有 $xc=cx,(xy)c=x(yc),(xc)y=x(cy),c(xy)=(cx)y$．任意非结合代数的中心本身是个交换的结合代数．任意单非结合代数的中心或为$\{0\}$或为域．

非结合代数的核心（nuclear of a nonassociative algebra） 给定非结合代数的一个结合子代数．设 A 是域 F 上的一个非结合代数，A 的元素 a 属于它的核心 D 的充分必要条件是，对任意 $x,y\in A$ 有

$$(a,x,y)=(x,a,y)=(x,y,a)=0.$$

若 $a,b\in D$，那么对任意 $x,y\in A$ 有

$$\begin{aligned}(ab,x,y)&=a(b,x,y)+(a,b,x)y\\&\quad+(a,bx,y)-(a,b,xy)\\&=0\end{aligned}$$

（参见“结合子”）．因此，D 是 A 的一个结合的子代数．

非结合代数的根（radical of a nonassociative algebra） 非结合代数的重要概念．指有限维非结合代数的惟一的极大的可解理想，它包含该代数的所有可解理想．若 N 是域 F 上有限维非结合代数 A 的根，则商代数 A/N 不含非零可解理想．在处理结合代数与非结合代数的根问题时难于采取完全平行的办法，因为幂零理想与可解理想并不总是一致的．

非结合代数的形心（centroid of a nonassociative algebra） 给定的非结合代数的所有线性变换做成的代数的一个子代数．设 A 是 F 上的一个非结合代数，$L(A)$代表 F 上向量空间 A 的所有线性变换做成的代数，A 上的线性变换 $\varphi\in L(A)$属于 A 的形心 Γ 的充分必要条件是，对任意 $x,y\in A$，恒有

$$\varphi(x)y=x\varphi(y)=\varphi(xy).$$

若用 L_x 表示代数 A 上由 x 导出的左乘变换，R_x 代表 A 上由 x 导出的右乘变换，则$\varphi\in L(A)$在 A 的形心 Γ 中的充分必要条件是，对任意 $x\in A$，$\varphi L_x=L_x\varphi,\varphi R_x=R_x\varphi$.

结合子（associator） 在非结合代数中用来度量给定的三个元素结合性的一个元素．设 A 是非结合代数，对任意 $x,y,z\in A$，称$(x,y,z)=(xy)z-x(yz)$为 x,y,z 的结合子．在结合代数中，每个结合子都是 0．在交错代数中，对任意两个元素 x,y 恒有

$$(x,x,y)=(y,x,x)=0.$$

在若尔当代数中，对任意两个元素 x,y 恒有$(x,y,x^2)=0$．结合子对于 x,y,z 三个分量来说都是线性的．

对合（involution） 代数学的基本概念．指非结合代数的一种周期为 2 的反自同构映射．若 A 是域

F 上的一个非结合代数，双射 $*: x \to x^*$，$x \in A$ 满足

$$(x+y)^* = x^* + y^*, \quad (xy)^* = y^* x^*, \quad x^{**} = x,$$

则称 $*$ 是 A 的一个对合. 这个概念首先出现在泛函分析中. 在一个有对合 $*$ 的非结合代数中，由形如 xx^*，$x+x^*$ 的元素的性质来推断整个代数的性质是主要研究课题之一.

赋范代数(normed algebra)　一类非结合代数. 设 A 是域 F 上一个有限维非结合代数，$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 A 在 F 上的一个基，任取 $a \in A$，必可惟一确定地表为

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n, \ a_i \in F,$$

对于这个基，规定 $|a| = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$，就得到 A 对于这个基的"模". 若非结合代数 A 对于其某个基的模满足 $|ab| = |a||b|$，$\forall\ a, b \in A$，则称 A 是 F 上的一个赋范代数.

恒等式的线性化(linearization of an identity)　非结合代数学中经常使用的一种技巧. 是对恒等式的一种特定的变化. 把恒等式中的一个变元 x 用两个变元 x, y 之和 $x+y$ 代替，推演出更一般的恒等式. 例如，设 A 是域 F 上的一个非结合代数，那么任意 $x \in A$ 都满足恒等式

$$[x, x] = xx - xx = 0. \qquad (*)$$

用 $x+y$ 代替上式之 x，得

$$[x+y, x+y] = [x, y] + [y, x] = 0,$$

即 $[x, y] = -[y, x]$，这个恒等式即称为是恒等式 $(*)$ 的线性化.

中心非结合代数(central nonassociative algebra)　一类特殊的非结合代数. 它的形心恰好是它的基础域. 亦即与所有左乘变换和右乘变换都可换的线性变换只能是由基础域中元素导出的纯量乘. 每个单代数作为其形心上的代数都是中心的，而且仍然是单的. 域 F 上的单代数 A 是中心的，当且仅当对 F 的任意扩张域 E，A 的纯量扩张 $A_E = A \otimes_F E$ 是单的.

幂结合代数(power associative algebra)　一类非结合代数. 若 A 是域 F 上的一个非结合代数，且对每个 $a \in A$，由 a 生成的 A 的子代数 $F[a]$ 都是结合的，则称 A 是 F 上的一个幂结合代数. 对任意 $a \in A$，若 $a^1 = a$，$a^{i+1} = aa^i$，对 $i = 1, 2, \cdots$，则一个非结合代数 A 是幂结合代数当且仅当 $a^i a^j = a^{i+j}$，对 $i, j = 1, 2, \cdots$. 结合代数、交错代数和若尔当代数都是幂结合的. 对于一个李代数，由于对每个元素 a 恒有 $a^2 = 0$，所以李代数也是幂结合的.

严格幂结合代数(strictly power associative algebra)　一种特殊的幂结合代数. 若 A 是域 F 上的一个非结合代数，且对 F 的每个扩张 K，其纯量扩张 $A_K = A \otimes_F K$ 都是 K 上的幂结合代数，则称 A 是 F 上的严格幂结合代数. 若域 F 的特征数不等于 2，3，5，则 F 上的所有交换的幂结合代数都是严格幂结合的. 所有单的、特征数非 2 的、非诣零的、交换的严格幂结合代数只要次数大于 2 必是若尔当代数.

单的非结合代数(simple nonassociative algebra)　一种特殊的非结合代数. 没有非平凡理想的非结合代数，且不为零乘代数(即任意两个元素之积均为零的代数). 域 F 上的非结合代数 A，若不是零乘代数且其理想只有 A 和 $\{0\}$，则称 A 为单的非结合代数. 对于结合代数有著名的韦德伯恩-阿廷定理(参见"结合代数"). 同样地，在非结合代数理论的每个分支中，研究相应的单与半单的代数的结构也是主要课题之一.

导子代数(derivation algebra)　由给定的非结合代数派生的一个李代数. 给定的非结合代数的一些线性变换做成的代数. 设 A 是域 F 上的一个非结合代数，F 上向量空间 A 的一个线性变换 δ 满足

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y),$$

对所有 $x, y \in A$，则称 δ 是非结合代数 A 上的一个导子. A 上的所有导子的集合 $\Delta(A)$ 是 A 上所有线性变换做成的线性空间的一个子空间. 对任意 $\delta, \delta' \in \Delta(A)$，其换位子 $[\delta, \delta']$ 仍然是 A 的一个导子，所以，线性空间 $\Delta(A)$ 在换位子规定的乘法之下做成 F 上的一个李代数，这个代数就称为是 A 的导子代数.

导子(derivation)　见"导子代数".

可离的非结合代数(separable nonassociative algebra)　一类重要的有限维非结合代数. 设 A 是域 F 上的有限维非结合代数，若对于 F 的每个扩域 K，A_K 恒可表成单理想的直和，则称 A 是 F 上的可离代数. 若 A 是域 F 上的有限维交错代数，根为 N，且 A/N 是可离的，则 $A = S + N$ (直和)，其中 S 是 A 的子代数，S 同构于 A/N.

非结合代数的结合乘代数(associative multiplication algebra of a nonassociative algebra)　给定的非结合代数的一些线性变换组成的一个结合代数. 设 A 是 F 上的一个非结合代数，E 是 F 上向量空间 A 的所有线性变换做成的结合代数. E 中由 A 的所有左乘变换和右乘变换生成的子代数称为 A 的结合乘代数，它的元素是有限和 $\sum S_1 \cdots S_n$，其中 S_i 或者是 A 的右乘变换或者是 A 的左乘变换.

非结合代数的同态基本定理(fundamental theorem of homomorphism for nonassociative algebras)　描述一般非结合代数同态像性质的重要定理. 其叙述是：若 A 是域 F 上的一个非结合代数，B 是 A 的一个理想，则商代数 A/B 是 A 在自然同态 $a \to a+B$，$a \in A$，$a+B \in A/B$ 下的同态像；反之，若 A' 是同态映射 $a \to a'$ ($\forall\ a \in A, a' \in A'$) 的同态

像,则 A' 同构于商代数 A/B,其中 B 是同态映射的核.

自由非结合代数(free nonassociative algebra) 一种具有泛性的非结合代数. 域 F 上的一个非结合代数称为是 F 上由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 生成的有 1 的自由非结合代数,记为 $FN\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,若对 F 上任意非结合代数 A 及 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$ 都有 $FN\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 到 A 的惟一确定的同态映射 ρ 使得 $\rho(1)=1,\rho(x_i)=a_i,i=1,2,\cdots,n$. 这种有泛性的自由非结合代数的存在性的证明与自由半群、自由结合代数的存在性的证明是类似的.

迹形式(trace form) 亦称不变对称双线性形式. 线性空间中的双线性函数的推广. 设 A 是域 F 上一个非结合代数,(x,y) 是 A 上(作为线性空间)的一个双线性形式,若还有 $(xy,z)=(x,yz)$ $(\forall\ x,y,z\in A)$,则称这个双线性形式是迹形式. 在非结合代数 A 上给定一个迹形式后,对 A 的每个理想 B,得 A 的理想 $\{y\in A\,|\,(x,y)=0$ 对所有 $x\in B\}$,它和 B 一起反映了 A 的有正交性质的结构.

不变对称双线性形式(invariant symmetric bilimear form) 即"迹形式".

合痕(isotopy) 代数学的基本概念. 指两个非结合代数之间的三个可逆线性变换满足的一种特殊的保乘关系. 设 $(A,+,\cdot)$ 和 $(A',\#,*)$ 都是域 F 上的非结合代数,f,g,h 是 $(A,+)$ 到 $(A',\#)$ 的三个线性变换,若对任意 $x,y\in A$ 恒有

$$f(x\cdot y)=g(x)*h(y),$$

则称 (f,g,h) 是 A 到 A' 的一个合痕. 此时称 A 是 A' 的 (f,g,h) 合痕. 这个概念首先由阿尔贝特(Albert,A. A.)于 1942 年给出.

非结合代数的特征理想(characteristic ideal of a nonassociative algebra) 非结合代数的一类特殊理想. 它在该代数的每个导子之下的像都包含在其本身中. 设 A 是域 F 上的一个非结合代数,B 是 A 的一个理想,若对于 A 的每个导子 δ 恒有 $\delta(x)\in B$,对所有 $x\in B$,则称 B 是 A 的一个特征理想. 一个单纯波节代数与一个没有非平凡的特征理想的结合代数密切相连.

穆方恒等式(Moufang identities) 非结合代数中元素的等式. 它是某些类型非结合代数满足的一些公理,即该代数中任意元素 x,y,z 满足

$$[(xy)x]z=x[y(xz)],$$
$$z[x(yx)]=[(zx)y]x,$$
$$(xy)(zx)=[x(yz)]x.$$

这些公理称为穆方恒等式. 首先出现在穆方圈(Monfang loop)的研究中,现常应用于非结合代数的分类中. 每个交错代数恒满足这些穆方恒等式.

可变通律(flexible law) 乘法系统中元素对的一个等式. 它是某些乘法系统满足的一个公理. 设集合 S 上有一个二元运算,称为乘法(运算时可将运算符号省去),且对任意 $s,t\in S$ 有 $(st)s=s(ts)$,则称 S 满足可变通律. 李代数、若尔当代数、交错代数和结合代数都满足可变通律. 域 F 上的非结合代数 A,若满足可变通律,则称为可变通代数.

可变通代数(flexible algebra) 见"可变通律".

波节代数(nodal algebra) 一类有 1 的有限维幂结合代数. 它的每个元素可表成其基础域中某元 α 与 1 之积和一个幂零元之和. 设 A 是域 F 上有 1 的有限维幂结合代数,若 A 的每个元素 a 恒可写成 $a=\alpha 1+z$, $\alpha\in F$,其中 z 是幂零的,而且 A 不能写成 $A=F1+N$,N 是 A 的某个诣零的子代数,则称 A 是 F 上的波节代数. 每个波节代数恒有单的波节代数为其同态像.

二次型代数(quadratic algebra) 一种特殊的非结合代数. 设 A 是域 F 上的一个有 1 的非结合代数,若 A 的每个元素 x 都满足一个如下形式的等式

$$x^2-t(x)x+n(x)\cdot 1=0,$$

其中 $t(x),n(x)\in F$ 由 x 确定并分别称为 x 的迹和模,则称 A 是 F 上的一个二次型代数. 在构造凯莱数的过程中,二次型代数起着重要作用.

交错代数(alternative algebra) 满足特别公理的一种非结合代数. 指它的任意两个元素 x,y 恒有

$$x^2y=x(xy),\quad yx^2=(yx)x.$$

写成结合子形式,即 $(x,x,y)=(y,x,x)=0$. 交错意味着对任意一个 3 级置换 σ 恒有

$$(x_1,x_2,x_3)=(\mathrm{sgn}\sigma)(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}).$$

交错代数中任意两个元素生成的子代数都是结合的. 有限维交错代数是半单的,当且仅当它是其单理想之直和.

交错代数的真幂零元(properly nilpotent element) 一种比幂零元具有更强幂零性的元素. 它不仅要求其本身是幂零,而且要求它与任何元素之积都是幂零的. 设 $\mathfrak{A}$ 是域 F 上的一个交错代数,$z\in\mathfrak{A}$ 称为 $\mathfrak{A}$ 的真幂零元,若对任意 $a,b\in\mathfrak{A}$,az 和 zb 都是幂零的. 若 z 是 $\mathfrak{A}$ 的真幂零元,则 z^2 必为幂零元,从而 z 必为幂零元. 有限维交错代数的根恰好由它的所有真幂零元素组成.

可离交错代数(separable alternative algebra) 结合代数理论中可离代数概念的推广. 域 F 上交错代数 $\mathfrak{A}$ 称为可离的,是指对 F 的每个扩张 K,代数 $\mathfrak{A}_K$ 都是单理想的直和. 设 $\mathfrak{A}$ 是域 F 上的一个有限维交错代数,$\mathfrak{N}$ 是它的根,若 $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ 是可离的,则 $\mathfrak{A}$ 有子代数 $\mathfrak{S}$ 使 $\mathfrak{A}=\mathfrak{S}\oplus\mathfrak{N}$ 且 $\mathfrak{S}\cong\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$.

凯莱-迪克森代数(Cayley-Dickson algebra) 一种特殊的交错代数. 维数是 8. 设域 F 之特征数不

为 2，F 上非结合代数 A 的维数是 8，有一基底 u_1，u_2，…，u_8，若 A 的乘法表如下，则称 A 是 F 上的一个凯莱-迪克森代数. 表中 μ_1，μ_2，μ_3 为域 F 中的纯量，这种代数于 1845 年先由凯莱(Cayley，A.)发现，其后迪克森(Dickson，L. E.)做了推广，以有限次代数数域为基础域的凯莱-迪克森代数只有有限个.

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_2	u_2	μ_1u_1	$-u_4$	$-\mu_1u_3$	$-u_6$	$-\mu_1u_5$	u_8	μ_1u_7
u_3	u_3	u_4	μ_2u_1	μ_2u_2	$-u_7$	$-u_8$	$-\mu_2u_5$	$-\mu_2u_6$
u_4	u_4	μ_1u_3	$-\mu_2u_2$	$-\mu_1\mu_2u_1$	$-u_8$	$-\mu_1u_7$	μ_2u_6	$\mu_1\mu_2u_5$
u_5	u_5	u_6	u_7	u_8	μ_3u_1	μ_3u_2	μ_3u_3	μ_3u_4
u_6	u_6	μ_1u_5	u_8	μ_1u_7	$-\mu_3u_2$	$-\mu_1\mu_3u_1$	$-\mu_3u_4$	$-\mu_1\mu_3u_2$
u_7	u_7	$-u_8$	μ_2u_5	$-\mu_2u_6$	$-\mu_3u_3$	μ_3u_4	$-\mu_2\mu_3u_1$	$\mu_2\mu_3u_2$
u_8	u_8	$-\mu_1u_7$	μ_2u_6	$-\mu_1\mu_2u_5$	$-\mu_3u_4$	$\mu_1\mu_3u_3$	$-\mu_2\mu_3u_2$	$\mu_1\mu_2\mu_3u_1$

凯莱(数)代数(Cayley (number) algebra)　一种重要的凯莱-迪克森代数. 在一般的凯莱-迪克森代数 A 中，若 F 为实数域，其乘法表中 μ_1，μ_2，μ_3 均为 -1，则称 A 为凯莱代数，也称为凯莱数代数或所有的凯莱数. 凯莱代数是个可除代数. 由凯莱(Cayley，A.)于 1845 年首先给出，其后迪克森(Dickson，L. E.)将其推广得到一般的 8 维凯莱代数，即凯莱-迪克森代数. 非结合代数的两个重要分支李代数和若尔当代数中，对于例外的代数的研究都是由凯莱代数引起的.

凯莱-迪克森过程(Cayley-Dickson process)　构造凯莱代数的一种方法. 即仿照由复数做四元数的方法给出的构造凯莱代数的一个具体过程. 设域 F 特征数为 0，A 是 F 上的有对合 * 的非结合代数，维数为 n，且满足

$$x + x^* = t(x)1, \quad xx^* = n(x)1,$$

其中 $t(x)$，$n(x)\in F$. 在 $A\times A$ 上规定

$$(a_1,a_2)+(a_3,a_4)=(a_1+a_3,a_2+a_4), a_i\in A,$$

$$(a_1,a_2)(a_3,a_4)=(a_1a_3+\mu a_4a_2^*, a_1^*a_4+a_3a_2),$$

$$(a_i\in A, \mu\neq 0),$$

$$\alpha(a_1,a_2)=(\alpha a_1,\alpha a_2)\ (\alpha\in F, a_i\in A);$$

则得 $2n$ 维代数.

交错双模(alternative bimodule)　交错代数的一类特殊模. 若 $\mathfrak{A}$ 是域 F 上的一个交错代数，$\mathfrak{M}$ 是 F 上的一个向量空间，有 $\mathfrak{M}\times\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{M}$，$\mathfrak{A}\times\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{M}$ 的双线性合成，对任意 $a,b\in\mathfrak{A}$ 和 $m\in\mathfrak{M}$，均有

$$(a,a,m)=(m,a,a)=0,$$

$$(a,m,b)=-(m,a,b),$$

$$(b,a,m)=-(b,m,a),$$

则称 $\mathfrak{M}$ 是对于 $\mathfrak{A}$ 而言的交错模，其中 (x,y,z) 是非结合代数的结合子运算，即

$$(x,y,z)=(xy)z-x(yz).$$

设 $\mathfrak{A}$ 是有限维可离交错代数，$\mathfrak{M}$ 是对于 $\mathfrak{A}$ 而言的有限维的交错双模，f 是 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{M}$ 的双线性映射，且

$$f(a,b,c)=f(a,b)c+f(ab,c)-af(b,c)-f(a,bc).$$

若对任意 $a,b\in\mathfrak{A}$ 恒有 $f(a,a,b)=f(b,a,a)$，则一定有 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{M}$ 的线性映射 g 使得

$$f(a,b)=ag(b)+g(a)b-g(ab)\quad(\forall\, a,b\in\mathfrak{A}).$$

半单交错代数(semisimple alternative algebra)　一类重要而基本的交错代数. 它的根为$\{0\}$. 有限维交错代数 $\mathfrak{A}\neq 0$ 是半单的充分必要条件是

$$A=\mathfrak{S}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{S}_t,$$

其中 $\mathfrak{S}_i(i=1,2,\cdots,t)$ 是单理想. 每个有限维半单交错代数 $\mathfrak{A}\neq 0$ 必包含恒等元 1.

单交错代数(simple alternative algebra)　一类特殊而重要的交错代数. 它不是零乘代数，除零理想和本身外无其他理想. 有限维单代数必有恒等元 1，它的中心必然是个域，它必然是其中心上的中心单有限维交错代数. 域 F 上的有限维中心单交错代数必定是 F 上的 8 维凯莱代数. 任意单交错代数，若不是诣零的，也不是结合的，则一定是其中心上的凯莱代数. 这个事实，当该代数特征非 2 且为可除代数时，有重要几何意义.

交错代数的皮尔斯分解(Peirce decomposition of alternative algebra)　利用一个幂等元将一交错代数表成它的一些子空间的直和的分解方法. 若 e 是交错代数 $\mathfrak{A}$ 的一个幂等元，

$$\mathfrak{U}_{ij}=\{x_{ij}\mid ex_{ij}=ix_{ij}, x_{ij}e=jx_{ij}\}\quad(i,j=0,1),$$

则 $\mathfrak{A}$ 可以表成它的四个子空间的直和

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_{00}+\mathfrak{n}_{01}+\mathfrak{n}_{10}+\mathfrak{n}_{11},$$

而 $\mathfrak{A}$ 的任意元素 x 恒可写成 $x=exe+(ex-exe)+(xe-exe)+(x-ex-xe+exe)$. 若 $\mathfrak{A}$ 是 F 上有限维交错代数，e 是 $\mathfrak{A}$ 的一个本原幂等元，则分解中的 $\mathfrak{A}_{00}$，$\mathfrak{n}_{01}$ 和 $\mathfrak{n}_{10}$ 必然都在 $\mathfrak{A}$ 的根中.

交错代数对正交幂等元组的分解(decomposition relative to a set of pairwise orthogonal idempotents in an alternative algebra)　一种比一般非结合代数的皮尔斯分解更精细的分解. 若 $e_1,e_2,\cdots,e_t$ 是交错代数 $\mathfrak{A}$ 的一组正交幂等元，δ_{ij} 是克罗内克符号，且 $\mathfrak{u}_{ij}=\{x_{ij}\mid e_kx_{ij}=\delta_{ki}x_{ij}, x_{ij}e_k=\delta_{jk}x_{ij}, k=1,2,\cdots,t, i,j=0,1,\cdots,t\}$，则 $\mathfrak{A}$ 是其子空间 $\mathfrak{n}_{ij}$ 的直和，即 $\mathfrak{A}=\sum\mathfrak{n}_{ij}$，$i,j=0,1,\cdots,t$. 这种分解有很多有用的性质，例如

$$\mathfrak{n}_{ij}\mathfrak{n}_{jk}\subseteq\mathfrak{n}_{ik}\quad(i,j=0,1,\cdots,t),$$

$$\mathfrak{n}_{ij}\mathfrak{n}_{ij}\subseteq\mathfrak{n}_{ij}\quad(i,j=0,1,\cdots,t),$$

$$\mathfrak{n}_{ij}\mathfrak{n}_{kl}=0\quad(j\neq k,(i,j)\neq(k,l)),$$

$$i,j,k,l=0,1,\cdots,t.$$

若尔当代数(Jordan algebra)　一种交换的非结合代数.它满足若尔当恒等式.所谓非结合代数满足若尔当恒等式,是指对它的任意元素 x,y,恒有 $xy=yx$ 及 $(xy)x^2=x(yx^2)$.任何交换(结合)代数都是若尔当代数.特征数为0的域 F 上的任意有限维半单的若尔当代数恒可惟一地表为其单理想之直和.对于有限维若尔当代数,理想是可解的、幂零的和诣零的三条件等价.若尔当代数是20世纪30年代初由物理学家若尔当(Jordan,P.)引出来的,最初的目的是推广量子力学的公式.

对称双线性形式的若尔当代数(Jordan algebra of symmetric bilinear forms)　由域上线性空间的一个给定的双线性形式引导出的该域上的一个非结合代数.设 S 是域 F 上线性空间,(x,y) 是 S 上一个对称的双线性形式,即$\forall\ a,b,c\in S$ 和 $\alpha\in F$ 恒有

$$(a+b,c)=(a,c)+(b,c),$$
$$(a,b+c)=(a,b)+(a,c),$$
$$\alpha(a,b)=(\alpha a,b)=(a,\alpha b),$$
$$(a,b)=(b,a).$$

若用 A 代表 S 和 F 的直和,并规定 A 的乘法

$$(\alpha 1+a)(\beta 1+b)=(\alpha\beta+(a,b))1+(\alpha b+\beta a),$$

则 $S\oplus F1$ 在此乘法之下构成一若尔当代数.这是若尔当代数的一个重要例子.

自由若尔当代数(free Jordan algebra)　具有泛性的一种若尔当代数.域 F 上的一个若尔当代数称为是 F 上由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 生成的自由若尔当代数,并记为 $\mathrm{FJ}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,是指对 F 上任意有1的若尔当代数 A 及 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$,恒有 $\mathrm{FJ}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 到 A 的惟一确定的同态映射 ρ,使得 $\rho(1)=1$, $\rho(x_i)=a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$.具有上述泛性的自由若尔当代数是存在的.$\mathrm{FN}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 生成的有1自由非结合代数,I 为其所有形如

$$ab-ba,\quad (ab)a^2-a(ba^2)$$

的元素所生成的理想,商代数 $\mathrm{FN}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}/I$ 即为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 生成的有1的自由若尔当代数.

特殊若尔当代数(special Jordan algebra)　一种特殊类型的若尔当代数.它与某个结合代数有关系.设 B 是域 F 上的一个结合代数,F 的特征数不为2.于是,在线性空间 B 上规定

$$x\circ y=(xy+yx)/2\quad(\forall\ x,y\in B),$$

则 $(B,+,\circ)$ 是 F 上的一个若尔当代数,通常记为 B^+.域 F 上的非结合代数 A,若同构于某个 B^+ 的子代数,则称 A 为特殊若尔当代数.

例外若尔当代数(exceptional Jordan algebra)　与特殊若尔当代数相对照的一种若尔当代数.一个若尔当代数不是特殊的若尔当代数即称为例外若尔当代数.著名的例外若尔当代数的例子是在一个凯莱-迪克森代数 C 上定义一个对合,然后考虑 C 上某些3阶方阵所构成的一个集合 $H(C)$,使得 $H(C)$ 是若尔当代数,但它不是任何特殊若尔当代数的同态像.

半单若尔当代数(Semisimple Jordan algebra)　若尔当代数结构理论研究中起重要作用的一类若尔当代数.域 F 上的若尔当代数称为半单的,若它的根是零.若域 F 之特征数为0,则 F 上的任意一个有限维半单若尔当代数 A 恒可惟一地表成 $A=A_1\oplus A_2\oplus\cdots\oplus A_n$,其中 A_i 是 A 的理想 $(i=1,2,\cdots,n)$,它们都是单的若尔当代数.

非交换若尔当代数(noncommutative Jordan algebra)　一类非结合代数.若域 F 上代数 A 满足若尔当恒等式 $(xy)x^2=x(yx^2)$ (对所有 $x,y\in A$)和可变通律 $(xy)x=x(yx)$ (对所有 $x,y\in A$),则称 A 是 F 上的一个非交换若尔当代数.若域 F 上的非结合代数 A 满足交换律,则$\forall\ x,y\in A$ 恒有 $(xy)x=x(xy)=x(yx)$.因此,若尔当代数必然是非交换若尔当代数,非交换若尔当代数是若尔当代数的推广.

有限维中心单若尔当代数的次数(degree of a finite dimensional central simple Jordan algebra)　衡量一个中心单若尔当代数对正交幂等元组分解时长度的一个数.若 $\mathscr{T}$ 是域 F 上的有限维中心单的若尔当代数,K 是 F 的代数闭包,则在 $\mathscr{T}_K$ 中必有两两正交的本原幂等元 $e_1,e_2,\cdots,e_t$,使得 $1=e_1+e_2+\cdots+e_t$,且这个 t 是由 $\mathscr{T}$ 惟一确定的,称为 $\mathscr{T}$ 在 F 上的次数.这个次数对于中心单若尔当代数的分类起很重要的作用.域 F 上的有限维中心单代数,当 F 的特征不为2时,研究表明,可以划分为五大类,即 A 型、B 型、C 型、D 型和 E 型.分类中,该若尔当代数对域 F 的次数 t 起很重要的作用.其中,E 型中心单的若尔当代数一定不是特殊若尔当代数.

若尔当双模(Jordan bimodule)　若尔当代数的一类特殊模.若域 F 特征非2,$\mathscr{T}$ 是 F 上的一个若尔当代数,$\mathfrak{M}$ 是 F 上的一个向量空间,有 $\mathfrak{M}\times\mathscr{T}$ 到 $\mathfrak{M}$,$\mathscr{T}\times\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{M}$ 的双线性合成,且对任意 $b,a\in\mathscr{T}$,$m\in\mathfrak{M}$ 都有:

$$\mathfrak{ma}=\mathfrak{am},$$
$$(\mathfrak{a}^2,\mathfrak{m},\mathfrak{a})=(\mathfrak{a}^2,\mathfrak{b},\mathfrak{m})+2(\mathfrak{ma},\mathfrak{b},\mathfrak{a})=0,$$

则称 $\mathfrak{M}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的若尔当双模.设 $\mathscr{T}$ 是特征非2的有限维可离若尔当代数,$\mathfrak{M}$ 是 $\mathscr{T}$ 的若尔当双模.若 f 是 $\mathscr{T}$ 到 $\mathfrak{M}$ 的双线性映射,且对任意 $a,b\in\mathscr{T}$ 有

$$f(a,b)=f(b,a),$$
$$F(a^2,b,a)=-(f(a,a),b,a),$$

其中

$$F(a,b,c)=f(a,b)c+f(ab,c)-af(b,c)-f(a,bc),$$

则一定有 $\mathscr{T}$ 到 $\mathfrak{M}$ 的线性映射 g 使得

$$f(a,b) = ag(b) + g(a)b - g(ab),$$
对任意 $a,b\in\mathscr{T}$ 都成立.

若尔当代数中的幂等元(idempotent elements of a Jordan algebra) 幂等元的相关概念到若尔当代数中的引申.两个幂等元 e_1,e_2 称为正交的,若 $e_1e_2=0$.若尔当代数 A 的一个幂等元称为主幂等元,若 A 不含与 e 正交的幂等元.幂等元 e,若它不能写成任何两个正交幂等元之和,则称 e 为本原的.域 F 上若尔当代数 A 的幂等元 e 称为绝对本原的,是指 $\{x\mid x\in A,xe=x\}=Fe$.绝对本原必是本原的.特别地,当若尔当代数是半单时,它的主幂等元即是单位元 1.幂等元在若尔当代数分解和单代数结构研究中起重要作用.

绝对本原幂等元(absolutely primitive idempotent element) 见"若尔当代数中的幂等元".

若尔当代数的皮尔斯分解(Peirce decomposition of a Jordan algebra) 有幂等元的若尔当代数表成不变子空间直和的一种分解方式.设 A 是 F 上的有限维若尔当代数,$e\in A$ 且 $e^2=e$,若 F 的特征数为 0,则 e 在 A 上导出的右乘变换 $Re:x\to xe$ 的特征根只能是 0,1/2 或 1.若用 $A_0,A_{1/2},A_1$ 分别代表属于特征为 0,1/2 或 1 的特征子空间,则 $A=A_0\oplus A_{1/2}\oplus A_1$,称为 A 对于幂等元 e 的皮尔斯分解.对于有 n 个正交的幂等元情形,即有 $e_i^2=e_i,e_ie_j=0$(若 $i\neq j$),$e_1+e_2+\cdots+e_n=1$,有
$$A=\sum_{i=1}^{n}\oplus A_{ii}\oplus\sum_{i<j}A_{ij},$$
其中
$$A_{ii}=\{x\mid x\in A,xe_i=x\},$$
$$A_{ij}=\{x\mid x\in A,xe_i=xe_j=x/2\}.$$

对称元若尔当代数(Jordan algebra of symmetric elements) 一种特殊的若尔当代数.给定有对合的结合代数中所有对称元在所谓对称乘法之下构成的一个若尔当代数.设 A 是域 F 上的一个结合代数,$*$ 是 A 的一个对合,A^+ 是 A 引出的若尔当代数,a,b 是 A 的元素,用 $a\cdot b$ 代表它们在 A 中的乘积,ab 代表它们在 A^+ 中的乘积.由
$$(ab)^*=(a\cdot b+b\cdot a)^*/2=a^*b^*$$
知 $*$ 是 A^+ 的自同构.A^+ 中所有对称元($a=a^*$)的集合构成一个特殊若尔当代数,通常称为对称元若尔当代数.这是若尔当代数理论中一个具有典型性的例子.

既约若尔当代数(irreducible Jordan algebra) 一种中心单若尔当代数.它有 n 个正交的绝对本原的幂等元 $e_1,e_2,\cdots,e_n$,使 $1=e_1+e_2+\cdots+e_n$.若 A 是域 F 上的中心单的若尔当代数,Ω 是 F 代数闭包,则纯量扩张 $A_\Omega=\Omega\otimes_F A$ 是既约的单的若尔当代数.

若尔当环(Jordan ring) 一类非结合环.它是交换的,而且它的任意两个元素 x,y 始终满足若尔当恒等式:
$$[(xx)y]x=(xx)(yx).$$
如同由一个结合代数可得到一个特殊的若尔当代数一样,若$(R,+,\cdot)$是个结合环,对$\forall\ x,y\in R$,规定
$$x*y=x\cdot y+y\cdot x,$$
则$(R,+,*)$称为若尔当环,通常简记为 R^+.结合环的若尔当结构理论就是研究结合环 R 所对应的若尔当环 R^+ 的各种若尔当理想、子环以及单性等的理论.

李环(Lie ring) 一类非结合环.它的任意三个元素 x,y,z 满足雅可比恒等式
$$(xy)z+(yz)x+(zx)y=0,$$
且它的每个元素的平方恒为 0.如同由一个结合代数可得到一特殊李代数一样,给定一个结合环$(R,+,\cdot)$,若对任意 $x,y\in R$,规定
$$[x,y]=x\cdot y-y\cdot x,$$
则$(R,+,[\ ])$成为李环,简记为 R^-.赫尔司亭(Herstein,I. N.)把 R^- 的结构称为结合环 R 的李结构.李环 R^- 与结合环 R 之间其单性、相应理想等都有密切关系.例如,若 R 是 2 扭自由结合环,则 R 是素(半素)李环(即 R^- 是素(半素)环)的充分必要条件是,R 为中心为零的素(半素)环(朱元森,1984 年).

李同态(Lie homomorphism) 结合环上李(若尔当)环的同态在结合环上的表现.设 R,R' 是结合环,R 到 R' 的一个加群同态 φ,若满足:
$$\varphi[x,y]=[\varphi(x),\varphi(y)],$$
$$(\varphi(x*y)=\varphi(x)*\varphi(y))\quad(\forall\ x,y\in R),$$
则称 φ 为 R 到 R' 的李(若尔当)同态.当 φ 是满单射时,φ 称为 R 到 R' 上李(若尔当)同构.一个李同态(同构)φ,若满足 $\varphi(x^3)=\varphi(x)^3,\forall\ x\in R$,则称 φ 为 3 李同态(同构).李同态(同构)何时是环同态(同构)? 20 世纪 60 年代为不少学者所研究,如赫尔司亭(Herstein,I. N)与克莱因菲尔德(Kleinfeld,E.)证明:单环 R 到单环 R' 上的 3 李同态,当 $\mathrm{ch}(R)=2$ 时是同构或反同构.一般地,朱元森于 1981 年证明:有 1 结合环 R,R' 且 R' 的中心不含零因子且 $\mathrm{ch}(R')\neq 2,3$,则 R 到 R' 上 3 李同态(同构)必为同态或负反同态(同构或负反同构).当 R' 是素环且$(R,+)$不含周期为 2,3 的元时,上述结论仍成立.

若尔当同态(Jordan homomorphism) 见"李同态".

3 李同态(3-Lie homomorphism) 见"李同态".

导子李环(Lie ring of derivations) 由环的某些导子构成的环.若 R 是个结合环,δ_1,δ_2 是 R 的导子,则 $\delta_1+\delta_2$ 也是 R 的导子,同时,$[\delta_1,\delta_2]=\delta_1\delta_2-$

$\delta_2\delta_1$ 也是 R 的导子，因此，R 的所有导子的集合 Der(R)在映射加法和上述李乘之下构成一个李环. 若 R 是特征非 2 的素的结合环，则 Der(R)是素的李环；若 R 是 2 扭自由的半素的结合环，则 Der(R)是半素的李环. 也可以讨论一般非结合环的导子李环.

撰　稿　牛风文
审　阅　刘绍学　郭元春

霍普夫代数

霍普夫代数(Hopf algebra)　20 世纪 60 年代以后迅速发展起来的代数学的新学科. 域 k 上的霍普夫代数是同时具有 k 代数结构和它的对偶结构(k 余代数结构)并满足一定的相容条件的代数系统. 霍普夫代数理论的发展有两个来源. 一个来源是代数拓扑学，这方面的工作可以追溯到霍普夫(Hopf, H.)于 1941 年关于系统在域 k 中的连通李群 G 的上同调群 $H^*(G,k)$的研究. 霍普夫得到一个十分卓越的结果：当 k 是特征为 0 的域时，$H^*(G,k)$是具有奇数阶生成子的外代数且其维数是有限的. 后来博雷尔(Borel, A.)于 1953 年、米尔诺和穆尔(Milnor, J. W.-Moore, J. C.)于 1965 年又做了重要的推广和深化(如把连通李群推广到道路的 H 空间和与之对偶的同调群即邦德列雅金(Pontrygin)代数 $H_*(G,k)$的研究等)，这方面的工作导致了分次霍普夫代数理论，这也是其命名的由来. 另一个来源是表示理论，开始于霍赫希尔德(Hochschild, G.)和莫斯托夫(Mostow, H.)于 1957 年对李群的表示环的研究. 史维德勒(Sweedler, M. E.)沿着这个方向建立了非分次的霍普夫代数理论，推动了霍普夫代数的迅速发展. 分次的与非分次的霍普夫代数虽然结构相似，却是题材互异.

霍普夫代数的结构从对偶的角度看可说是十分自然的. 例如把上文述及的 G 取为有限群，就可以得到群代数及其对偶代数作为霍普夫代数的平凡例子. G 也可以取为拓扑群、代数群等，因此，在数学的许多分支中都存在着具有霍普夫代数结构的对象. 霍普夫代数理论在许多数学分支中都有重要的应用，例如代数群理论、域扩张的伽罗瓦理论和布饶尔群理论、C^*代数、李代数和李超代数、组合理论等.

霍普夫代数在物理学中的模型是量子群，因此它在物理学，特别是量子逆扩散方法和超对称理论的研究中，占有显著的重要地位.

在霍普夫代数的以下诸词条中，若没有特别说明，则 R 恒指有单位元的交换环，所有 R 上的代数均指有单位元的结合代数.

余代数(coalgebra)　代数的对偶概念. 设 C 是 R 模，Δ 是一个 R 线性映射 $C\to C\otimes_R C$，被称为余乘法或对角映射；ε 是一个 R 线性映射 $C\to R$，称为余单位元或增广. R 上的余代数是指满足以下二交换图的三元组(C,Δ,ε)：

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C\otimes C \\ \downarrow{\scriptstyle\Delta} & & \downarrow{\scriptstyle\Delta\otimes \mathrm{id}} \\ C\otimes C & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\Delta} & C\otimes C\otimes C \end{array}\qquad\text{(余结合性)}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \swarrow & \downarrow{\scriptstyle\Delta} & \searrow & \\ R\otimes C & & & & C\otimes R \\ & \nwarrow{\scriptstyle\varepsilon\otimes \mathrm{id}} & & \nearrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\varepsilon} & \\ & & C\otimes C & & \end{array}\qquad\text{(余单位)}$$

余代数同态(coalgebra morphism)　代数同态的对偶概念. 设(C,Δ_C,ε_C)和(D,Δ_D,ε_D)是 R 上的两个余代数，f 是 C 到 D 的 R 模同态，若下面两个图交换：

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & D \\ \downarrow{\scriptstyle\Delta_C} & & \downarrow{\scriptstyle\Delta_D} \\ C\otimes_R C & \xrightarrow{f\otimes f} & D\otimes_R D \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & D \\ & {\scriptstyle\varepsilon_C}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\varepsilon_D} & \\ & R & \end{array}$$

则称 f 为(C,Δ_C,ε_C)到(D,Δ_D,ε_D)的余代数同态.

西格马记号(sigma notation)　一种数学符号. 西格马记号在余代数理论中起着重要作用. 该记号为

$$\Delta(c)=\sum_{(c)}c_{(1)}\otimes c_{(2)}\quad(c,c_{(i)}\in C(i=1,2)).$$

由余结合律，

$$\sum_{(c)}\Delta(c_{(1)})\otimes c_{(2)}=\sum_{(c)}c^{(1)}\otimes\Delta(c_{(2)})$$
$$=\sum_{(c)}c_{(1)}\otimes c_{(2)}\otimes c_{(3)}.$$

子余代数(sub-coalgebra)　子代数的对偶概念. 若(C,Δ,ε)是一个 R 上的余代数，V 是 C 的一个 R 子模，使$\Delta(V)\subseteq V\otimes_R V$，则三元组($V,\Delta|_V,\varepsilon|_V$)称为 C 的一个子余代数. 若余代数 C 中任意两个非零的子余代数的交非零，则称 C 是不可约的.

不可约余代数(irreducible coalgebra)　见“子余代数”.

双边余理想(two-sided coideal)　使得商空间仍为余代数的子空间. 设(C,Δ,ε)是 R 余代数，V 为 C 的 R 子模. 若 V 满足 $\Delta(V)\subseteq V\otimes_R C+C\otimes_R V$ 和 $\varepsilon(V)=0$，则称 V 为双边余理想. 若 $\Delta(V)\subseteq V\otimes_R C$，则 V 称为右余理想；若 $\Delta(V)\subseteq C\otimes_R V$，则 V 称为左

余理想. 双边余理想未必是左或右余理想. 若 V 既是左余理想, 又是右余理想, 则 V 是子余代数, 但 V 未必是双边余理想, 除非 $V=\{0\}$.

右(左)余理想(right(left) coideal) 见"双边余理想".

商余代数(quotient coalgebra) 商代数的对偶概念. 设 (C,Δ,ε) 是 R 上的一个余代数, V 是 C 的一个双边余理想, π 是 C 到 C/V 的 R 模同态. 因为

$$C \xrightarrow{\varepsilon} R,\quad C \xrightarrow{\pi} C/V \xrightarrow{\varepsilon_{C/V}} R \qquad\qquad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta_C} & C\otimes C \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi\otimes\pi \\ C/V & \xrightarrow{\Delta_{C/V}} & C/V\otimes_R C/V \end{array}$$

$\varepsilon(V)=0$, 所以有惟一的 R 模同态 $\varepsilon_{c/v}$ 使上(左)图交换. 又因为 $((\pi\otimes\pi)\cdot\Delta)(V)=0$, 所以有惟一的 R 模同态 $\Delta_{C/V}$ 使上(右)图交换. 从而, $(C/V,\Delta_{C/V},\varepsilon_{C/V})$ 是 R 上的余代数. 此余代数称为 C 的商余代数.

右余模(right comodule) 模的对偶概念. 设 (C,Δ,ε) 是一个 R 上的余代数, M 是 R 上模. 若有 R 模同态 $\rho: M\to M\otimes_R C$ 使下面两图交换, 则 (M,ρ) 称为右余模, ρ 称为右余模的结构映射.

$$M \xrightarrow{\rho} M\otimes_R C \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varepsilon} M\otimes_R R,\quad M\to M\otimes_R R \qquad\qquad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho} & M\otimes_R C \\ \rho\downarrow & & \downarrow\mathrm{id}\otimes\Delta \\ M\otimes_R C & \xrightarrow{\rho\otimes id} & M\otimes_R C\otimes_R C \end{array}$$

子余模(sub-comodule) 余模的一个特殊 R 子模. 它是子模的对偶. (C,Δ,ε) 是 R 上的余代数, (M,ρ) 是右 C 余模. M 的一个 R 子模 N, 若满足 $\rho(N)\subseteq N\otimes_R C$, 则称 N 为 M 的子余模.

余模同态(comodule homomorphism) 模同态概念到余模的引申. 设 (M,ρ_M) 和 (N,ρ_N) 是 R 上余代数 (C,Δ,ε) 上的两个余模. 若一个 R 模同态 $f: M\to N$ 使右图交换, 则 f 称为 M 到 N 的余模同态.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \rho_M\downarrow & & \downarrow\rho_N \\ M\otimes_R C & \xrightarrow{f\otimes id} & N\otimes_R C \end{array}$$

对偶代数(dual algebra) 从余代数结构导出的代数. 设 (C,Δ,ε) 是 R 上的余代数, $C^*=\mathrm{Hom}_R(C,R)$ 是 R 上的模. 定义两个 R 线性映射:

$$\mu: C^*\otimes_R C^*\to C^*,$$

$$\mu(f\otimes g)(c)=\sum_{(c)} f(c_{(1)})g(c_{(2)})$$

$$(\forall\ f,g\in C^*, c\in C);$$

$$\eta: K\to C^*, \eta(k)(c)=k\varepsilon(c)\quad(\forall\ k\in R, c\in C).$$

于是 (C^*,μ,η) 是 R 上的结合代数. 这个代数称为余代数 C 的对偶代数.

对偶余代数(dual coalgebra) 从代数结构导出的余代数. 设 (A,μ,η) 是域 R 上的代数,

$$A^\circ=\{f\in A^*=\mathrm{Hom}_R(A,R)\,|\,\ker f\supseteq I,$$
$$I\lhd A, \text{使得} \dim_R A/I<\infty\}.$$

因为有自然嵌入 $A^*\otimes_R A^*\to(A\otimes_R A)^*$, 所以可将 $A^*\otimes_R A^*$ 看做 $(A\otimes_R A)^*$ 的子集. 从而

$$A^\circ\otimes_R A^\circ=(A\otimes_R A)^\circ,$$

且 $\mu: A\otimes_R A\to A$ 的导出映射 $\mu^*: A^*\to(A\otimes_R A)^*$ 将 A° 映射到 $(A\otimes_R A)^\circ$. 于是得到两个 R 线性映射

$$\mu^\circ=\mu^*|_{A^\circ}: A^\circ\to(A\otimes_R A)^\circ=A^\circ\otimes_R A^\circ$$

和

$$\eta^\circ=\eta^*|_{A^\circ}: A^\circ\to R,$$

其中 η^* 是 η 的导出映射, 而且 $(A^\circ,\mu^\circ,\eta^\circ)$ 是 R 上的余代数. 这个余代数称为代数 A 的对偶余代数.

有理 C^* 模(rational C^*-module) 一种特殊的模. 指特定条件下的 C^* 模. 若 (C,Δ,ε) 是 R 上的余代数, $C^*=\mathrm{Hom}_R(C,R)$, 则 C 的余代数结构导出 C^* 的代数结构(参见"对偶代数"). 设 M 是左 C^* 模, 并且定义 R 模同态

$$\rho: M\to\mathrm{Hom}_R(C^*,M), \rho(m)(f)=f\cdot m$$
$$(\forall\ m\in M; f\in C^*).$$

当 R 是域时, 有自然嵌入

$$M\otimes_R C\to M\otimes_R C^{**}\xrightarrow{\varphi}\mathrm{Hom}_R(C^*,M),$$

其中 $\varphi(m\otimes t)(f)=t(f)m, \forall\ t\in C^{**}, f\in C^*, m\in M$. 等同 $M\otimes_R C$ 和它在 $\mathrm{Hom}_R(C^*,M)$ 中的像, 若有 $\rho(M)\subseteq M\otimes_R C$, 则 M 称为有理 C^* 模.

余代数的余交换性(cocommutativity of coalgebra) 与代数的交换性对偶的概念. 一个余代数 (C,Δ,ε) 称为余交换的, 若 $t\cdot\Delta=\Delta$, 其中

$$t: C\otimes_R C\to C\otimes_K C,$$

$$t\Big(\sum_i a_i\otimes b_i\Big)=\sum_i b_i\otimes a_i.$$

余代数张量积(tensor product of coalgebras) 代数张量积的对偶概念. 设 $(C,\Delta_C,\varepsilon_C)$ 和 $(D,\Delta_D,\varepsilon_D)$ 是 R 上的两个余代数. 定义两个 R 线性映射:

$$\Delta_{C\otimes D}: C\otimes_R D\to C\otimes_R D\otimes_R C\otimes_R D,$$

$$\Delta_{C\otimes D}(c\otimes d)=\sum_{(c),(d)} c_{(1)}\otimes d_{(1)}\otimes c_{(2)}\otimes d_{(2)},$$

其中

$$\Delta_C(c)=\sum_{(c)} c_{(1)}\otimes c_{(2)},$$

$$\Delta_D(d)=\sum_{(d)} d_{(1)}\otimes d_{(2)};$$

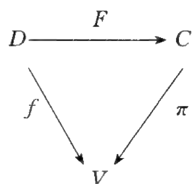
和

$$\varepsilon_{C\otimes D}: C\otimes_R D\to R,$$

$$\varepsilon_{C\otimes D}(c\otimes d)=\varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d).$$

从而, $(C\otimes_R D,\Delta_{C\otimes D},\varepsilon_{C\otimes D})$ 也是一个余代数, 称为余代数 C 和 D 的张量积.

余自由余代数(cofree coalgebra)　一类余代数.它与向量空间密切相关.设 V 是域 R 上的向量空间.一个对 (C,π),其中 C 是 R 上的余代数,$\pi:C\to V$ 是 R 线性映射,若对 R 上任意的余代数 D 和任意的 R 线性映射 $f:D\to V$,存在惟一的余代数同态 F 使右图交换,则称 (C,π) 为 V 上余自由的余代数.对 R 上任意的向量空间 V,V 上的余自由的余代数总是存在的.



单余代数(simple coalgebra)　与单代数相平行的概念.R 上余代数 C,若没有非平凡的子余代数,则 C 称为单余代数.若 C 的子余代数作为余代数是单的,则称为单子余代数.当余代数 C 的每一个单子余代数都是单 R 模时,C 称为点余代数.

点余代数(pointed coalgebra)　见"单余代数".

余代数的余根(coradical of coalgebra)　余代数的一个特殊子余代数.若 C 是一个余代数,则 C 的所有单子余代数的和称为余代数 C 的余根.通常记为 Corad(C).当 $C=$Corad(C)时,称 C 为余半单余代数.

余半单余代数(cosemisimple coalgebra)　见"余代数的余根".

双代数(bialgebra)　一种代数系统.它既有代数结构,又有余代数结构,且两种结构具相容性.设 (B,μ,η) 是 R 代数,且 (B,Δ,ε) 是 R 上的余代数,其中 μ 是 B 的乘法映射,η 是刻画 B 的单位元的映射.若 Δ 和 ε 都是 R 代数同态(等价于 μ,η 都是 R 余代数同态),则 $(B,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$ 称为 R 上的双代数.

子双代数(sub-bialgebra)　与子代数、子环相平行的概念.双代数 $(B,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$ 的一个 R 子模(R 商模)A,若它是 (B,μ,η) 的子(商)代数,又是 (B,Δ,ε) 的子(商)余代数,则 A 称为 B 的子(商)双代数.

商双代数(quotient bialgebra)　见"子双代数".

双代数同态(bialgebra homomorphism)　具有双重同态性质的映射.设 B 和 B' 是 R 上的两个双代数,若一个 B 到 B' 的代数同态 f 同时又是余代数同态,则 f 称为 B 到 B' 的一个双代数同态.

双理想(bi-ideal)　具有双重代数结构的理想.设 B 是一个双代数,若 J 是 B 的双边余理想(B 作为余代数),又是 B 的双边理想(B 作为代数),则 J 称为 B 的一个双理想.

似群元素(group-like element)　余代数中与群代数中的群元素性质类似的元素.设 (C,Δ,ε) 是 R 余代数,$c\in C$,若 $\Delta(c)=c\otimes c$,则称 c 是似群元素.若 C 是双代数且 $\Delta(c)=c\otimes 1+1\otimes c$,则称 c 是本原元素.

本原元素(primitive element)　见"似群元素".

左(右)积分(left(right) integral)　一种特殊的映射.若 B 是一个 R 上的双代数,则 B 的余代数结构导出 $B^*=\mathrm{Hom}_K(B,R)$ 的代数结构(参见"对偶代数").B^* 的元 x 称为一个左(右)积分,若

$$fx=f(1_B)x\ \ (xf=f(1_B)x)\ \ (\forall\ f\in B^*),$$

其中 1_B 是 B 作为代数时的单位元.

卷积(convolution)　一种运算.指余代数到代数的 R 同态映射间的一种乘积.设 (C,Δ,ε) 是 R 上的余代数,(A,μ,η) 是 R 上的代数.在 $\mathrm{Hom}_R(C,A)$ 上定义乘法"$*$"为

$$(f*g)(c)=\sum_{(c)}f(c_{(1)})g(c_{(2)}),$$

对任意 $f,g\in\mathrm{Hom}_R(C,A)$,$c\in C$.从而,$\mathrm{Hom}_R(C,A)$ 在乘法"$*$"下成为 R 上的代数,并且有单位元 $\eta\cdot\varepsilon$,其乘法"$*$"称为卷积.

霍普夫代数(Hopf algebra)　一种代数结构.它是源于代数拓扑和李群而发展起来的具有广泛应用的代数系统.设 $(H,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$ 是 R 上的双代数,"$*$"是 $\mathrm{Hom}_R(H,H)$ 上的卷积.若 $\mathrm{Hom}_R(H,H)$ 中的恒等映射 I 关于卷积"$*$"有逆元 S,即

$$(I*S)(h)=\sum_{(h)}h_{(1)}S(h_{(2)})=(\eta\cdot\varepsilon)(h),$$

$$(S*I)(h)=\sum_{(h)}S(h_{(1)})(h_{(2)})=(\eta\cdot\varepsilon)(h),$$

$\forall\ h\in H$,则 $(H,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon,S)$ 称为 R 上的霍普夫代数,S 称为 H 的对极.若 $(A,\mu|_A,\eta,\Delta|_A,\varepsilon|_A)$ 是 H(作为双代数)的子双代数,且 $S(A)\subseteq A$,则称它为 H 的子霍普夫代数.

子霍普夫代数(sub-Hopf algebra)　见"霍普夫代数".

对极(antipode)　恒等映射关于卷积的逆元(参见"霍普夫代数").对极的存在与非零左积分的存在有密切的关系.莱松(Larson,R. G.)、史维德勒(Sweedler,M. E.)及佩锐庚(Pareigis,B.)的工作断言:有限维霍普夫代数是弗罗贝尼乌斯代数.

霍普夫理想(Hopf ideal)　对极作用下闭合的双理想.设 H 是一个霍普夫代数,S 是它的对极.若 H 的双理想 J,使得 $S(J)\subseteq J$,则 J 称为 H 的霍普夫理想.

霍普夫代数同态(Hopf algebra homomorphism)　满足特定条件的双代数同态.设 $(H,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon,S)$ 和 $(H',\mu',\eta',\Delta',\varepsilon',S')$ 是 R 上的两个霍普夫代数.若 f 是 $(H,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$ 到 $(H',\mu',\eta',\Delta',\varepsilon')$ 的一个双代数同态,并且 $S'\cdot f=f\cdot S$,则 f 称为霍普夫代数同态.

商霍普夫代数(quotient Hopf algebra)　商代数概念的引申.设 H 是一个霍普夫代数,I 是 H 的一个霍普夫理想.H/I 有惟一的霍普夫代数结构使

自然同态 $H \to H/I$ 成为霍普夫代数同态. H/I 连同这霍普夫代数结构称为 H 关于 I 的商霍普夫代数.

对偶双代数(dual bialgebra)　由给定双代数诱导出的一个具双重对偶性的双代数. 设$(B,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$是域 R 上的双代数. 若 $B^{\circ}=\{f\in \mathrm{Hom}_R(B,R)=B^*\mid \ker f$ 包含 B 的一个理想 J, 使得 $\dim_R B/J<\infty\}$, 则 B°是余代数 B 的对偶代数 B^* 的子代数,也是代数 B 的对偶余代数. 因此,B°关于这样的代数及余代数结构成为一个双代数,称为 B 的对偶双代数. 若 H 是一个霍普夫代数,其对极为 S,则任意 $f\in H^{\circ}$,有 $f\cdot S\in H^{\circ}$. 若 $S^{\circ}(f)=f\cdot S$,则双代数 H°有对极 S°,从而成为一个霍普夫代数,称为 H 的对偶霍普夫代数.

对偶霍普夫代数(dual Hopf algebra)　见"对偶双代数".

双代数模(bialgebra module)　一种代数对象. 它既有模结构,又有余模结构,且两种结构又具有相容性. 设$(B,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$是一个双代数,$M$ 是右 B 模(B 作为代数),又是右 B 余模(B 作为余代数). 右 B 模作用记为 $m\cdot b, m\in M, b\in B$. 右 B 余模的结构映射记为

$$\rho\colon M\to M\otimes_K B,$$

$$\rho(m)=\sum_{(m)} m_{(0)}\otimes m_{(1)}\quad (m,m_{(0)}\in M, m_{(1)}\in B).$$

若下图交换,其中

$$t\colon B\otimes_K B\to B\otimes_K B,$$

$$t\Big(\sum_i h_i\otimes h_i'\Big)=\sum_i h_i'\otimes h_i.$$

则称 M 为 B 双代数模. 图交换性等价于,对任意 $m\in M, b\in B$,

$$\rho(m\cdot b)=\sum_{(b)(m)}(m_{(0)}\cdot b_{(1)})\otimes(m_{(1)}b_{(2)}).$$

$$\begin{array}{ccccc}
M\otimes_R B & \xrightarrow{\ \cdot\ } & M & \xrightarrow{\ \rho\ } & M\otimes_R B\\
\Big\downarrow{\scriptstyle \rho\otimes\Delta} & & & & \Big\uparrow{\scriptstyle \cdot\otimes\mu}\\
M\otimes_R B\otimes_R B\otimes_R B & & \xrightarrow{\ \mathrm{id}\otimes t\otimes \mathrm{id}\ } & & M\otimes_R B\otimes_R B\otimes_R B
\end{array}$$

若 B 是一个霍普夫代数,则 B 双代数模称为 B 霍普夫模.

霍普夫模(Hopf module)　见"双代数模".

量射(measuring)　代数间的一种特殊映射. 设 A 和 B 是 R 上的两个代数,C 是 R 上的余代数. 若 R 模同态 $\alpha\colon C\otimes_R A\to B$ 满足:

1. $\alpha(c\otimes aa')=\sum_{(c)}\alpha(c_{(1)}\otimes a)\alpha(c_{(2)}\otimes a')$;

2. $\alpha(c\otimes 1_A)=\varepsilon(c)1_B$;

对任意 $a,a'\in A, c\in C$,则(α,C)称为 A 到 B 的量射,也称 α 量射 A 到 B.

作用(action)　霍普夫代数的基本概念. 设 B 是 R 上的双代数,A 是 R 上的代数. 若 R 模同态 α: $B\otimes_K A\to A$ 满足:

1. $\alpha(b\otimes aa')=\sum_{(c)}\alpha(b_{(1)}\otimes a)\alpha(b_{(2)}\otimes a')$;

2. $\alpha(b\otimes 1_A)=\varepsilon(b)1_A$;

3. $\alpha(1_B\otimes a)=a$;

对任意 $a,a'\in A, b\in B$,则称 α 为 B 在 A 上的一个弱作用. 若 R 模同态 α 还满足

4. $\alpha(b'\otimes\alpha(b\otimes a))=\alpha(b'b\otimes a)$,

对任意 $a\in A, b,b'\in B$,则 α 称为双代数 B 在代数 A 上的一个作用. 若双代数 B 在代数 A 上有一个作用,则代数 A 称为关于这个作用的 B 模代数.

模代数(module algebra)　见"作用".

弱作用(weak action)　见"作用".

广义交叉积(generalized crossed product)　环与群的交叉积的一般化. 设 α 是 R 上双代数$(B,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$在代数 A 上的弱作用,$\alpha(b\otimes a)$记为 $b\cdot a$,又 σ 是 $B\otimes_R B$ 到 A 的 R 双线性映射. 在 $A\otimes_R B$ 上定义乘法如下

$$(a\otimes b)(a'\otimes b')=\sum_{(b)}\sum_{(b')}a(b_{(1)}\cdot a)\sigma(b_{(2)},b'_{(1)})\otimes b_{(3)}b'_{(2)}.$$

若 $A\otimes_R B$ 在此乘法下成为一个结合代数,并且有单位元 $1_A\otimes 1_B$,则 $A\otimes_R B$ 称为 A 与 B 的交叉积,记为 $A\#_\sigma B$,元素 $a\otimes b$ 写为 $a\# b$. $A\otimes_R B$ 在此乘法下成为一个结合代数的充分必要条件是:

1. $\sigma(1_B,b)=\sigma(b,1_B)=\varepsilon(b)1_A\ (\forall\, b\in B)$.

2. $(\forall\, b,b',b''\in B)$,

$$\sum_{(b),(b')(b'')}[b_{(1)}\cdot\sigma(b'_{(1)},b''_{(1)})]\sigma(b_{(2)},b'_{(2)}b''_{(2)})=\sum_{(b),(b')}\sigma(b_{(1)},b'_{(1)})\sigma(b_{(2)}b'_{(2)},b'').$$

3. $(\forall\, a\in A, b,b'\in B)$

$$\sum_{(b),(b')}[b_{(1)}\cdot(b'_{(1)}\cdot a)]\sigma(b_{(2)},b'_{(2)})=\sum_{(b),(b')}\sigma(b_{(1)},b'_{(1)})(b_{(2)}b'_{(2)}\cdot a).$$

广义碎积(generalized smash product)　一类特殊的广义交叉积. 设$A\#_\sigma B$ 是代数 A 与双代数 B 的一个交叉积,α 是双代数 B 在代数 A 上的弱作用. 若 $B\times B$ 到 A 的双线性映射 σ 满足条件

$$\sigma(b,b')=\varepsilon(b)\varepsilon(b')1_A\quad(\forall\, b,b'\in B),$$

且 α 是作用,则交叉积$A\#_\sigma B$称为 A 与 B 的碎积,通常记为 $A\# B$. 若双代数 B 在代数 A 上的弱作用 α 是平凡的,即 $\alpha(b\otimes a)=\varepsilon(b)a, \forall\, a\in A, b\in B$,则交叉积 $A\#_\sigma B$ 称为 A 与 B 的挠积,通常记为$A_\sigma[B]$. 碎积是斜群环的一般化,挠积则是挠群环的一般化.

挠积(twisted product) 见“广义碎积”.

余作用(coaction) 作用的对偶概念. 设 B 是 R 上的双代数，A 是 R 上的代数. 一个 R 模同态 ρ: $A\to A\otimes_R B$，若满足下面条件：

1. $\rho(ab)=\rho(a)\rho(b)$；
2. $\rho(1_A)=1_A\otimes 1_B$；
3. $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\rho(a)=a$；

对任意 $a,b\in A$，则 ρ 称为 B 在 A 上的一个弱余作用. 若还满足条件

4. $(\rho\otimes\mathrm{id})\cdot\rho=(1\otimes\Delta)\cdot\rho$；

则 ρ 称为 B 在 A 上的余作用. 余作用是群分次概念的一般化.

弱余作用(weak coaction) 见“余作用”.

几乎余交换霍普夫代数(almost cocommutative Hopf algebra) 余交换霍普夫代数的推广. 设 H 是霍普夫代数. 若 H 的对极 S 是双射，而且存在可逆元 $T\in H\otimes H$，使得对任意 $h\in H$，有

$$\tau(\Delta(h))=T\Delta(h)T^{-1},$$

其中

$$\tau:\ H\otimes H\to H\otimes H,$$

$$\tau\Big(\sum_i a_i\otimes b_i\Big)=\sum_i b_i\otimes a_i,$$

则称 H 为几乎余交换霍普夫代数.

拟三角霍普夫代数(quasitriangular Hopf algebra) 一类重要的量子群. 若霍普夫代数(H,N)是几乎余交换的，其中

$$N=\sum_i a_i\otimes b_i\in H\otimes H$$

且

$$(\triangle\otimes\mathrm{id})R=R^{13}R^{23},\quad (\mathrm{id}\otimes\triangle)R=R^{13}R^{12},$$

其中

$$R^{12}=\sum_i a_i\otimes b_i\otimes 1,$$

$$R^{23}=\sum_i 1\otimes a_i\otimes b_i,$$

$$R^{13}=\sum_i a_i\otimes 1\otimes b_i,$$

则称 H 是拟三角霍普夫代数. 若还有

$$N^{-1}=\tau(N)=\sum_i b_i\otimes a_i,$$

则称 H 为三角霍普夫代数. 拟三角霍普夫代数也称为辫子霍普夫代数.

三角霍普夫代数(triangular Hopf algebra) 见“拟三角霍普夫代数”.

辫子霍普夫代数(braided Hopf algebra) 见“拟三角霍普夫代数”.

余拟三角霍普夫代数(coquasitriangular Hopf algebra) 拟三角霍普夫代数的形式对偶. 对于霍普夫代数 H，若在 $\mathrm{Hom}_R(H\otimes H,R)$中存在卷积可逆的双线性型$\langle -|-\rangle$: $H\otimes H\to R$，使得对任意 h，$k,l\in H$，有

$$\sum\langle h_1|k_1\rangle k_2h_2=\sum h_1k_1\langle h_2|k_2\rangle,$$

则称 H 是几乎交换的. 若还有

$$\langle h|kl\rangle=\sum\langle h_1|k\rangle\langle h_2|l\rangle,$$

$$\langle hk|l\rangle=\sum\langle h|l_2\rangle\langle k|l_1\rangle,$$

则称 H 是余拟三角霍普夫代数，也称为余辫子霍普夫代数.

余辫子霍普夫代数(cobraided Hopf algebra) 见“余拟三角霍普夫代数”.

几乎交换霍普夫代数(almost commutative Hopf algebra) 见“余拟三角霍普夫代数”.

右双代数扩张(right extension of bialgebra) 代数借助于双代数的扩张. 设 A_0 和 A 是 R 上的代数，B 是 R 上的双代数. 若满足：

1. A 是右 B 余模，其结构映射 $\rho: A\to A\otimes_K B$；
2. A_0 是 A 的子代数；
3. $A_0=\{a\in A\mid\rho(a)=a\otimes 1_B\}$；

则扩张 A/A_0 称为右双代数 B 扩张. A_0 称为 A 的余不变子代数. 若 B 是霍普夫代数，则称 A/A_0 为右霍普夫扩张.

右霍普夫扩张(right Hopf extension) 见“右双代数扩张”.

右双代数伽罗瓦扩张(right Galois extension of bialgebra) 经典的域的自同构群下的伽罗瓦扩张的霍普夫代数推广. 设 A/A_0 是双代数 B 扩张，B 余模 A 的结构映射为 $\rho: A\to A\otimes_R B$. 若映射：

$$\beta:\ A\otimes_{A_0}A\to A\otimes_K B,$$

$$\sum_i a_i\otimes a_i'\to\sum_i\sum_{(a_i')}a_i a_{i(0)}'\otimes a_{i(1)}'$$

是满射，其中

$$\rho(a_i')=\sum_{(a_i)}a_{i(0)}'\otimes a_{i(1)}',$$

则双代数 B 扩张A/A_0称为右双代数伽罗瓦扩张. 若 B 是霍普夫代数，则 A/A_0 称为右霍普夫-伽罗瓦扩张. 若 H 是有限维的，则 β 是满射等价于 β 是双射.

右霍普夫-伽罗瓦扩张(right Hopf-Galois extension) 见“右双代数伽罗瓦扩张”.

撰　稿　王志玺　陈操宇
审　阅　许永华　萧　杰

模与同调代数

模　论

模论(module theory)　抽象代数学的重要组成部分之一，主要研究环上的模. 模的概念本质上是域上向量空间的直接推广. 早在19世纪，狄利克雷(Dirichlet, P. G. L.)就曾经考虑过多项式环上的模，20世纪20年代，诺特(Noether, E.)曾一再提出过模的重要作用. 交换环上的模在代数几何中有重要作用，非交换环特别是群环上的模就是群的线性表示，域上的模就是向量空间. 到了20世纪40年代，由于环论的需要和同调代数的兴起，模论得到了进一步发展. 近30年来，已成为同调代数、群论、环论、代数K理论、范畴论等分支学科研究中不可缺少的工具，并在其他数学分支，如代数几何、拓扑学、泛函分析甚至微分方程等领域里得到了较广泛的应用. 现代模论已成为内容丰富、文献浩繁的代数学的一个独立分支.

模(module)　一个重要的代数系统. 它是一个带算子区A的交换(加)群M. 给定集合A与交换群M，若定义了$a\in A$与$x\in M$的乘积$ax\in M$，并且这个积满足条件：

1. $a(x+y)=ax+ay$ $(a\in A, x, y\in M)$，

则称A为M的算子区，称M为带算子区A的模，又称为A上的模或A模. 这时，由对应$(a,x)\rightarrow ax$确定的映射$A\times M\rightarrow M$，称为A作用到M上的运算. 任意$a\in A$可诱导出M的自同态$a_M: x\rightarrow ax$，而考虑交换群M能否成为A模就是看能否给出映射

$$\mu:\ A\rightarrow \mathrm{End}(M),\quad a\rightarrow a_M.$$

特别地，考虑A是结合环，若满足上述条件1的A模还满足：

2. $(a+b)x=ax+bx$；

3. $(ab)x=a(bx)$；

即映射$\mu: A\rightarrow \mathrm{End}(M)$为环同态，则称$M$为左$A$模或左环模. 由于$A$到$M$上的运算是写在左侧，所以$M$就称为左$A$模，记为${}_AM$. 类似地，有右$A$模$M$，记为$M_A$. 若$A$有单位元1，且又满足条件

4. $1x=x$ $(x\in M)$；

则称M为酉模或幺模，以下设A模都是酉模.

算子区(operator domain)　见“模”.

带算子区的模(module with operator domain)　见“模”.

酉模(unitary module)　见“模”.

幺模(identity module)　即“酉模”.

子模(submodule)　模论的重要概念之一. 指A模M满足一定条件的子集. 利用子模来研究模是一种常用方法. 若N是交换加法群M的子群，并且A到M的运算也是A到N上的运算，即，对任意$a\in A$，$y\in N$，积$ay\in N$，则N本身也是A模，称为M的子模或子A模. 任何一个非零A模M至少有两个子模，一个是零模(只有一个元素0)，另一个是M自己，称为M的平凡子模，而M的其余子模称为M的非平凡的子模. 若N是M的子模，且$N\neq M$，则称N为M的真子模. 若$\{N_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$A$模$M$的子模簇，则$\bigcap_{\alpha\in I}N_\alpha$和$\sum_{\alpha\in I}N_\alpha$仍是$M$的子模. 较为重要的子模有极大子模、极小子模、本质子模和多余子模等. 模M的所有子模组成一个格.

零模(zero module)　见“子模”.

平凡子模(trivial submodule)　见“子模”.

非平凡子模(nontrivial submodule)　见“子模”.

真子模(proper submodule)　见“子模”.

极大子模(maximal submodule)　一类重要子模. 若N是A模M的真子模，并且不存在严格包含N的M的真子模(即，若N'是M的真子模，且$N'\supseteq N$，则一定有$N'=N$成立)，则称N是M的极大A子模. 并不是所有的A模都有极大子模. 若M是有限生成的非零A模，则M必有极大子模，并且M的每个真子模必被包含在一个极大子模内. 投射模一定有极大子模. 若N是模M的极大子模，则商模M/N是单模.

极小子模(minimal submodule)　与极大子模是互为对偶的概念. 若N是A模M的子模，并且不存在严格包含在N内的M的非零子模(即，若N'是M的非零子模，且$N'\subseteq N$，则一定有$N'=N$成立)，则称N为M的极小子模. A模M是单模的充分必要条件为M是它的极小子模.

本质子模(essential submodule)　亦称大子模. 一类重要的子模. 它是在一定程度上可代替模本身的子模，是多余子模的对偶概念. 设K是A模M的子模，若对M的子模L，由$K\cap L=0$可断言$L=0$(即，K与M的每个非零子模都相交)，则称K为M的本质子模，记为$K\trianglelefteq M$，此时，称M是K的本质扩张. 本质子模具有遗传性，即：若N是M的本质子模，K是N的本质子模，则K也是M的本质子模.

大子模(large submodule)　即“本质子模”.

模的本质扩张(essential extension of a module)　见"本质子模".

多余子模(superfluous submodule)　亦称小子模.一类重要的子模.本质子模的对偶概念.设 K 是 A 模 M 的子模,若对 M 的子模 L,由 $K+L=M$ 可断言 $L=M$,则称 K 为 M 的多余子模.记为 $K \ll M$.

小子模(small submodule)　即"多余子模".

循环模(cyclic module)　一类特殊的有限生成模.可由一个元素生成的 A 模 M 称为循环模(A 是有单位元环),即,有 $x\in M$,使得 $M=Ax$ 成立.环 A 作为 A 模是循环模.A 模 M 是循环模的充分必要条件是 $M\cong A/I$,其中 I 为 A 的一个左理想.

阶理想(order ideal)　模的算子环的一个单侧理想.设 M 是左 A 模,$x\in M$,若 $D=\{a\in A \mid ax=0\}$,则 D 是 A 的左理想,称为 x 在 A 中的阶理想,也称为 x 在 A 中的零化子,记为 $\mathrm{Ann}_A x$.当 $A=\mathbf{Z}$ 是整数环时,对任意 A 模 M,$x\in M$,或者有 $\mathrm{Ann}_{\mathbf{Z}} x=0$,或者有 $\mathrm{Ann}_{\mathbf{Z}} x=(n)$,这里 $n>0$,并且 n 是使得 $nx=0$ 的最小正整数,n 就是由 x 生成的循环群 $\langle x\rangle$ 的阶,这就是把 $\mathrm{Ann}_{\mathbf{Z}} x$ 称为 x 的阶理想的缘故.通常把

$$l_A(M)=\{a\in A \mid ax=0, \forall\ x\in M\}$$

称为 M 在 A 中的零化子,而

$$l_A(M)=\bigcap_{x\in M}\mathrm{Ann}_A x.$$

忠实模(faithful module)　一类重要的模.若 M 是左 A 模,把所有与 M 的乘积为 0 的 A 的元的集合记为 K,即 $K=\{a\in A \mid aM=0\}$,则 K 是 A 的理想,称为 M 在 A 中的零化子.若 $K=0$,即不存在 A 的非零元素 a,使得 $aM=0$ 成立,则称 M 是忠实 A 模.无挠模一定为忠实模,但反过来不真.对任一个 A 模 M,总可以得到一个忠实模,若 M 在 A 中的零化子为 I,则 M 可成为 A/I 模,此时 A/I 模 M 就是忠实模,并且 ${}_AM$ 与 ${}_{A/I}M$ 有相同的子模格.

模的零化子(annihilator of a module)　见"忠实模"和"阶理想".

商模(quotient module)　模论的重要概念之一.模 M 与它的商模 $\overline{M}$ 之间的性质有着密切的联系.它是将 A 模 M 的元素进行陪集分类后所得到的新模.若 N 是左 A 模 M 的子模,则加群 M 可以通过对其子群 N 进行等价类划分得到商群 $\overline{M}=M/N$,用 $\bar{x}$ 表示 x 所在的陪集 $x+N$,定义 $a\in A$ 与 $\bar{x}\in\overline{M}$ 的积为

$$a\bar{x}=\overline{ax}=ax+N,$$

此积满足 A 模的条件,所以 $\overline{M}$ 也是 A 模,称为模 M 关于子模 N 的商模.

分式模(fractional module)　模论的重要概念之一.它是由模所产生的新模,是分式环概念的推广.若 A 是交换环,S 是 A 的乘法封闭子集,并且 $1\in S$,$0\overline{\in}S$,则可以得到 A 关于 S 的分式环 $S^{-1}A$.设 M 是左 A 模,积 $M\times S=\{(x,s)\mid x\in M, s\in S\}$,若存在 $s\in S$,使得 $s(s_2x_1-s_1x_2)=0$,则定义 $(x_1,s_1)\sim(x_2,s_2)$.这是一个等价关系,由此产生的商集记为 $S^{-1}M$,它的元素记为 x/s,$x\in M$,$s\in S$.再定义:

$$x_1/s_1+x_2/s_2=s_2x_1+s_1x_2/s_1s_2,$$

$$(a/s)(x/t)=ax/st,\ a/s\in S^{-1}A,$$

从而可得到 $S^{-1}A$ 模 $S^{-1}M$,称为 M 关于 S 的分式模,也称为 M 关于 S 的局部化.M 与 $S^{-1}M$ 有着密切的联系,例如:对环 A 的任何极大理想 $\mathfrak{m}$,记 $S=A\backslash\mathfrak{m}$,$S^{-1}M=M_{\mathfrak{m}}$,若对一切极大理想 $\mathfrak{m}$ 皆有 $M_{\mathfrak{m}}=0$,则 $M=0$.分式环和分式模的概念都可推广到非交换环的情况,它们分别称为商环和商模,它们与挠理论有密切联系.

挠模(torsion module)　一类重要的模.挠群的推广.设 M 是 A 模,若对 $0\neq m\in M$,有 $0\neq a\in A$,使得 $am=0$ 成立,则称 m 是 ${}_AM$ 的挠元.当 A 为整环时,${}_AM$ 中所有的挠元组成 M 的子模,称为 M 的挠子模,记为 $T(M)$.若 M 的元全都是挠元,即 $T(M)=M$,则称 M 是挠模.一个模是否具有较好的性质,在一定程度上与它的挠子模的大小有关.

挠元(torsion element)　见"挠模".

挠子模(torsion submodule)　见"挠模".

无挠模(torsion free module)　一类重要的模.它是无非平凡挠元的模.设 M 是 A 模,若除 0 外没有挠元,即 $T(M)=0$,则称 ${}_AM$ 为无挠模,此时由 $ax=0$ 一定有 $a=0$ 或 $x=0$.当 A 是整数环,对任意 A 模 M,$M/T(M)$ 是无挠的.一个 $\mathbf{Z}$ 模是平坦模的充分必要条件是它为无挠模.

模同态(module homomorphism)　模论的重要概念之一.指两个模之间的一类映射.设 M,N 是两个 A 模,f 是加群 M 到 N 的群同态,若 f 还保持 A 到 M,N 上的运算,即对任意 $a\in A$,$f(ax)=af(x)$,$x\in M$,则称 f 是模同态,也称 A 同态.常记为 $f\in\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 或 $f\in\mathrm{Hom}(M,N)$.任意两个模 M,N 之间总存在模同态,例如,设 $f(x)=0$,$x\in M$,通常称此同态为零同态.若 N 是 M 的子模,映射 $\pi: x\to\bar{x}=x+N$ 是 ${}_AM$ 到 ${}_A\overline{M}$ 的模同态,则称 π 为自然同态.模 M,N 之间的模同态集 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ 是一个加群,特别地,当 $M=N$ 时,记

$$\mathrm{End}({}_AM)=\mathrm{Hom}_A(M,N),$$

它是一个环,称为模 M 的自同态环.A 是 $\mathrm{End}({}_AM)$ 的子环.

零同态(zero homomorphism)　见"模同态".

自然同态(natural homomorphism)　见"模同态".

自同态环(endomorphism ring)　见"模同态".

模同构(module isomorphism)　一种特殊的模同态. 模 M 到 N 的同态 f 若是一一的并且是映上的,则称 f 是 M 到 N 的同构,这时称 M,N 是同构的模,记为 $M\cong N$. 两个同构的模,从模的结构来看,它们没有什么区别. 若 f 是同构,则 f 的逆映射 f^{-1} 也是同构.

稳定同构(stable isomorphism)　亦称准同构. 两个模之间的同构概念的推广. 设 M,N 是两个 A 模,若有有限生成投射 A 模 P,Q,使得

$$M\oplus P\cong N\oplus Q,$$

则称模 M 和 N 是稳定同构的. 若环 A 是半完全环,则每个有限生成 A 模稳定同构于一个没有非零投射直和项的模;并且,两个没有非零投射直和项的 A 模稳定同构的充分必要条件是它们同构. 稳定同构模在代数 K 理论中有重要作用. 两个 A 模 M,N 是稳定同构的充分必要条件是有自然数 m,n 使

$$M\oplus A^m\cong N\oplus A^n.$$

准同构(quasi-isomorphism)　见"稳定同构".

模同态的余像(coimage of a module homomorphism)　模论的重要概念之一. 它是余核的对偶概念. 从模同态 $f:M\rightarrow N$ 所得到商模 $M/\ker f$,称之为 f 的余像,记为 $\mathrm{coim} f$,它刻画着 f 单的程度.

模同态的余核(cokernel of a module homomorphism)　模论的重要概念之一. 它是与余像对偶的概念. 从模同态 $f:M\rightarrow N$ 所得到商模 $N/\mathrm{Im}\,f$,其中 $\mathrm{Im}\,f$ 为 f 的同态像,称之为 f 的余核,记为 $\mathrm{coker}\,f$,它刻画着 f 满的程度.

模同态基本定理(fundamental theorem of module homomorphism)　模论的重要定理之一. 若 M 是左 A 模,则 M 的任一商模都是 M 的同态像;反之,M 的每个同态像都与 M 的一商模是模同构的. 于是,抽象地看,一个模的同态像之全体正是这个模的商模之全体. 由此推出模同构定理:若有左 A 模同态 $f:M\rightarrow N$,则有 $\mathrm{coim}\,f\cong\mathrm{Im}\,f$.

本质单同态(essential monomorphism)　一类特殊的单同态,是多余满同态的对偶概念. 若 $f:K\rightarrow M$ 是模的单同态,并且 $\mathrm{Im}\,f$ 是 M 的本质子模,则称 f 是本质单同态. 由于 $\mathrm{Im}\,f\trianglelefteq M$,所以 f 也较接近于满同态. 一个单同态 f 是本质的充分必要条件是:对所有的同态 h,若 hf 是单的,则 h 也是单的.

多余满同态(superfluous epimorphism)　本质单同态的对偶概念. 若 $g:M\rightarrow N$ 是模的满同态,并且 $\ker g$ 是 M 的多余子模,则称 g 是多余满同态. 由于 $\ker g\ll M$,所以 g 也较接近于是单同态. 一个满同态 g 是多余的充分必要条件是对所有的同态 h,若 gh 是满的,则 h 也是满的.

双模(bimodule)　一类重要的模. 指带有两个算子环的模. 设 A,B 是环,M 是 A 模又是 B 模,若用 A 的元素去作用(乘 M 的任一元),与用 B 的元素一起去作用时其顺序是可换的,则称 M 是(A,B)双模. 例如,若 M 是左 A 模,右 B 模,并且还满足:

$$(ax)b=a(xb),\quad a\in A,b\in B,x\in M,$$

则 M 为左 A 右 B 双模,记为$_AM_B$. 任意左 A 模 M 都可作为左 A 右 **Z** 双模,又可作为左 A 右 $\mathrm{End}\,_AM$ 双模.

双同态(bihomomorphism)　一种特殊的同态. 指双模之间的同态. 设有(A,B)双模 M 和 N,若 f 是加群 M 到 N 的映射,并且 f 是 A 同态同时又是 B 同态,则称 f 是(A,B)双模 M 到 N 的一个双同态.

模的生成系(system of generators of a module)　模论的基本概念之一. 指可以表示出 A 模 M 中任一个元的 M 的一组元素. 考虑环 A 模 M 时,A 的元称为纯量,A 称为 M 的系数环或基环,运算 $A\times M\rightarrow M$ 称为纯量乘法,ax 称为 x 的纯量倍,它的全体记为 Ax. 对 M 的一簇元素 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$,形式为

$$\sum_{\lambda\in I}a_\lambda x_\lambda\quad(a_\lambda\in A,\text{仅有限项非零})$$

的元的全体 N 是包含全部 $x_\lambda(\lambda\in I)$的 M 的最小子模,它等于和

$$\sum_{\lambda\in I}Ax_\lambda,$$

称 N 由 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$所生成,而 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$称为 N 的生成系. 若 I 是可数集,且 M 由 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$生成,则称 M 为可数生成模. 当 I 是有限集,且 $M=Ax_1+Ax_2+\cdots+Ax_n$,称 M 为有限生成模,此时任 $x\in M$ 有表示式

$$x=r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n,\quad r_1,r_2,\cdots,r_n\in A.$$

模 M 是有限生成当且仅当对 M 的每一个子模集 $\{A_i\mid i\in I\}$,若有

$$\sum_{i\in I}A_i=M,$$

则存在有限子集 $I_0\subset I$,使得

$$\sum_{i\in I_0}A_i=M.$$

可数生成模(countably generated module)　见"模的生成系".

有限生成模(finitely generated module)　见"模的生成系".

自由模(free module)　一类重要的模,它的性质最接近于域上的向量空间. 对左 A 模 M 中的一组元素 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$,若对任意有限和

$$\sum_{\alpha\in I}a_\alpha x_\alpha=0\quad(a_\alpha\in A),$$

总蕴涵着 $a_\alpha=0\ (\forall\ \alpha\in I)$,则称 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$是线性无关的. 若模 M 有一线性无关的生成元系 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$,则称 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$是 M 的一组基,而有基的模 M 就称为自由

模. 除环上的任意模都是自由模;主理想整环上的自由模的子模还是自由模;任意自由模都与形如 $A^{(I)}$ 的模同构;任意模都是某个自由模的同态像.

自由模的秩(rank of a free module)　亦称自由模的维数. 刻画自由模的一个概念. 域上一个向量空间的所有基的基数(基元的个数)都是相等的,然而,一般地,一个自由模可能有基数不同的基. 但是,对相当广的一类环(如交换环)来说,不会出现这种情况. 对左 A 自由模 M,若 M 的所有的基的基数相等,这个基数就称为 M 的秩. 此时环 A 称为基数不变环,简称 IBN 环. IBN 环包括交换环、诺特环等.

自由模的维数(dimension of free module)　即"自由模的秩".

余有限生成模(finitely co-generated module)　一类特殊的模. 它是有限生成模的对偶概念. 设 M 是模,满足条件:若对 M 的每个子模集 $\{A_i|i\in I\}$ 有

$$\bigcap_{i\in I}A_i=0,$$

则存在有限子集 $I_0\subset I$ 使得

$$\bigcap_{i\in I_0}A_i=0,$$

此时称 M 是余有限生成模. 这一定义等价于:若对于任意模族 $\{U_i\}_{i\in I}$ 和任意单同态

$$0\to M\to\prod_{i\in I}U_i,$$

则存在 I 的有限子集 J 使

$$0\to M\to\prod_{i\in J}U_i$$

是单同态. 这一定义也等价于:对于任意同态族 f_i: $M\to U_i, i\in I$,若

$$\bigcap_{i\in I}\ker f_i=0,$$

则必有 I 的有限子集 J 使得

$$\bigcap_{i\in J}\ker f_i=0.$$

模的极小条件(minimum condition on a module)　模论的重要概念之一. 它是与极大条件相对偶的概念. 模 M 的子模的全体关于包含关系形成偏序集. 若模 M 的每个非空的子模集 S 在这个序下都有一个极小元(即,存在 $P\in S$,使得当 $N\in S$ 且 $N\subseteq P$,就有 $N=P$ 成立),则称 M 满足极小条件. 极小条件与降链条件(DCC 条件)是等价的. 阿廷(Artin,E.)于 1927 年提出了用降链条件来研究环,从而推广了有限维代数的一些理论.

模的极大条件(maximum condition on a module)　模论的重要概念之一. 它是与极小条件对偶的概念. 模 M 的子模的全体关于包含关系形成偏序集. 若 M 的每个非空的子模集 S 在这个序下有一个极大元(即,存在 $P\in S$,使得当 $N\in S$ 且 $P\subseteq N$,就有 $P=N$),则称模 M 满足极大条件. 极大条件与升链条件(ACC 条件)等价. 升链条件是由诺特(Noether,E.)于 1921 年在研究理想的分解时提出的.

诺特模(Noetherian module)　一种重要的模. 它是阿廷模的对偶概念. 即满足极大条件的模. 若 A 模 M 的任一子模升链 $M_1\subseteq M_2\subseteq\cdots$ 都是有限终止的,即存在 n,使得 $M_n=M_{n+1}=\cdots$,则称模 M 满足升链条件. 模 M 是诺特模的充分必要条件是它满足升链条件;也等价于,M 的每个子模是有限生成的. 若将环 A 看做左 A 模时它是诺特模,则称 A 是左诺特环(关于右的情形完全类似). 诺特环是一类概括广的重要环,它在代数几何等学科中有很大的应用价值. 域上的多元多项式及其商环(因而代数曲线、代数曲面的坐标环)都是诺特环.

模的升链条件(ascending chain condition of module)　见"诺特模".

阿廷模(Artinian module)　与诺特模对偶的概念,即满足极小条件的模. 若 A 模 M 的任一子模降链 $M_1\supseteq M_2\supseteq\cdots$ 都是有限终止的,即存在 n,使得 $M_n=M_{n+1}=\cdots$,则称模 M 满足降链条件. 模 M 是阿廷模的充分必要条件是它满足降链条件. 若将环 A 看做左 A 模时它是阿廷模,则称环 A 是左阿廷环(关于右的情形完全类似). 有单位元的阿廷环一定是诺特环.

模的降链条件(descending chain condition of module)　见"阿廷模".

模的合成列(composition series of module)　群的正规列的推广. 设 M 是非零的左 A 模,若存在一个有限的严格降链

$$M=M_0\supset M_1\supset\cdots\supset M_n=0,$$

并且 M_{i-1}/M_i 是单模($i=1,2,\cdots,n$),则称此降链是 M 的一个合成列,降链中的自然数 n(根据若尔当-赫尔德定理是惟一确定的)称为合成列的长度,并称模 M 是具有合成列的模. M 是具有合成列的模(亦即 M 是有限长)的充分必要条件是 M 是阿廷模和诺特模. 由此,对有限长的模 M,若 f 是它的一个自同态,则有 $M=\mathrm{Im}f^n\oplus\ker f^n$(菲廷引理). 对于半单模 M,长度有限的充分必要条件为 M 是有限生成的. 模的长度的作用类似于有限维向量空间的维数,并且,也有类似于"维数定理"的长度定理.

合成列的长度(length of composition series)　见"合成列".

具有合成列的模(module with compostion series)　见"合成列".

若尔当-赫尔德定理(Jordan-Hölder theorem)　关于模的合成列的惟一性定理. 若 A 模 M 有两个合成列 $M=M_0\supset M_1\supset\cdots M_n=0$ 和 $M=N_0\supset N_1\supset\cdots\supset N_p=0$,则这两个合成列一定等价(即,有 $n=p$,并且存在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个置换 σ,使对 $i=1,2,$

$\cdots,n$，都有

$$M_{i-1}/M_i \cong N_{\sigma(i)-1}/N_{\sigma(i)}).$$

若模 M 具有合成列，则它的合成列是惟一的.

余半单模(co-semisimple module) 一类特殊的模. 它是比半单模更广泛的模类. 若 A 模 M 的每一个子模都是它的一些极大子模的交，则称 M 是余半单模. 半单模一定是余半单模，但余半单模不一定是半单的. 模 M 是余半单的充分必要条件是对 M 的所有子模 K，都有 $\mathrm{rad}(M/K)=0$. 环 A 本身作为 A 模是余半单的一个充分必要条件是，所有 A 模是余半单模，此时，环 A 称为余半单环.

余半单环(co-semisimple ring) 见"余半单模".

模的迹(trace of module) 与模的生成有关的概念. 它是模的迹理想的推广. 若 $\mathscr{U}$ 是一模类，M 是一个模(M 不一定属于 $\mathscr{U}$)，则模 M 一定有由 $\mathscr{U}$ 生成的子模，并且 M 总有这样的惟一的最大子模 L，L 就称为 $\mathscr{U}$ 在 M 中的迹，记为 $\mathrm{Tr}_M(\mathscr{U})$，且有

$$\mathrm{Tr}_M(\mathscr{U}) = \sum \{\mathrm{Im}\,h \mid h: U \to M, U \in \mathscr{U}\}.$$

模类 $\mathscr{U}$ 生成模 M 的充分必要条件是

$$\mathrm{Tr}_M(\mathscr{U})=M.$$

模的余迹(reject of module) 模的迹的对偶概念. 若 $\mathscr{U}$ 是一模类，M 是一个模(M 不一定属于 $\mathscr{U}$)，则模 M 总有子模 K，使得商模 M/K 由 $\mathscr{U}$ 余生成，而且 M 一定有这样的惟一的最小子模 M' 存在，M' 就称为 $\mathscr{U}$ 在模 M 中的余迹，记为 $\mathrm{Rej}_M(\mathscr{U})$，并且有

$$\mathrm{Rej}_M(\mathscr{U}) = \bigcap \{\ker h \mid h: M \to U, U \in \mathscr{U}\}.$$

模类 $\mathscr{U}$ 余生成模 M 的充分必要条件是 $\mathrm{Rej}_M(\mathscr{U})=0$.

纯子模(pure submodule) 与模的平坦性有联系的一类子模. 设 M' 是左 A 模 M 的一类子模，若对任意右 A 模 N，序列

$$0 \to N \underset{A}{\otimes} M' \to N \underset{A}{\otimes} M$$

是正合的，则称 M' 是 M 的纯子模. 模的任意直和项一定是它的纯子模. 左 A 模的短正合序列

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

称为是纯的，若对任意右 A 模 L，都有

$$0 \to L \underset{A}{\otimes} M' \to L \underset{A}{\otimes} M$$

正合，因此，M' 是 M 的子模. 若正合序列 $0 \to M' \to M/M' \to 0$ 是纯的，则 M' 就是 M 的纯子模. 当 M 是平坦模，M' 是 M 的纯子模时，商模 M/M' 一定是平坦模. M' 是 ${}_AM$ 的纯子模的充分必要条件是：若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 M' 的元素，(a_{ij}) 是 A 的 $m \times n$ 矩阵，并且方程组

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} = y_i \ (j=1,2,\cdots,n)$$

在 M 中有解，则它在 M' 中一定也有解.

冯·诺伊曼正则模(von Neumann regular module) 简称 V 环. 一类特殊的模. 指循环子模都是直和因子的模. 设 M 是左 A 模，若它的任意循环子模是它的直和项，则称 M 是冯·诺伊曼正则模. 若有单位元的环 A 作为 A 模是冯·诺伊曼正则模，则称环 A 是冯·诺伊曼正则环. V 环上的每个模都是平坦模.

冯·诺伊曼正则环(von Neumann regular ring) 见"冯·诺伊曼正则模".

特征模(character module) 一种特殊的模. 指模到 Q/Z 的阿贝尔群同态所成的模. 设 M 是左 A 模，Q 是有理数加法群，Z 是整数加群，若

$$M^+ = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, \mathrm{Q/Z}),$$

并定义

$$f \circ r: (f \circ r)(x) = f(rx),$$

其中 $f \in M^+, r \in A, x \in M$，则有 $f \circ r \in M^+$，这样就使 M^+ 成为一个右 A 模，称 A 模 M^+ 为 M 的特征模. 若 M 是左 A 模，则 ${}_AM$ 是平坦模的充分必要条件是：${}_AM$ 的特征模 M_A^+ 是内射模.

可补模(complemented module) 半单模的推广. 设 M 是左 A 模，N 是 M 的子模，若在 M 中存在另一子模 P，使得

$$P+N=M, \quad P \cap N \ll P,$$

则称 P 为 N 在 M 中的补(complement). 若模 M 的任意子模在 M 中都有补，则称 M 是可补模. 子模的补的概念由瓦拉大拉雅(Varadarajan, K.)于 1979 年提出. 当环 A 作为 A 模是可补模时，就称 A 是可补环. 环的可补性与它的幂等元的提升有密切联系.

可补环(complemented ring) 见"可补模".

子模的补(complement of a submodule) 见"可补模".

余忠实模(co-faithful module) 一种特殊的模. 忠实模的对偶概念. 设 M 是 A 模，若它生成每一个内射 A 模，则称 M 是余忠实模. 一个模 M 是忠实的充分必要条件是，M 余生成每一个投射模；而模 ${}_AM$ 是余忠实的充分必要条件是，M 有限余生成正则模 ${}_AA$. 每一个余忠实的拟内射模一定是内射模.

一致模(uniform module) 比不可分解模更广泛的模类. 设 M 是 A 模，若它的每一个非零子模都是 M 的本质子模，则称 M 是一致模. 若 M 是一致模，则它的每一个子模是不可分解的. 模 M 是一致模的充分必要条件是，M 的内射包 $E(M)$ 不可分解. 若模 M 的子模 N 单独作为一个模时是一致模，则称 N 是 M 的一致子模. 利用一致子模可定义模的哥尔迪维数.

一致子模(uniform submodule) 见"一致模".

余一致模(co-uniform module)　一致模的对偶概念. 设 M 是 A 模,若 M 的每个真子模在 M 中是多余子模,则称 M 是余一致模. M 是余一致模的充分必要条件是,投射模 P 是不可分解的,这里 p: $P\to M$ 是 M 的投射覆盖.

本原模(primitive module)　一类特殊的模. 它是由本原幂等元生成的模. 设环 A 是一个半完全环,M 是左 A 模,若存在 A 的本原幂等元 e,使得 $M\cong Ae$,则称${}_AM$ 是本原模. 当环 A 是半单环时,本原 A 模就是单 A 模. 当环 A 是半完全环时,A 模 M 是本原模的充分必要条件是,模 M 是不可分解的投射模. 本原模在讨论半完全环的特征时有重要作用.

模的哥尔迪维数(Goldie dimension of a module)　亦称模的一致维数. 对模的一种刻画. 设 M 是 A 模,若 M 有一致子模 $U_1,U_2,\cdots,U_n$,使得 $U_1+U_2+\cdots+U_n$ 是直和并且是 M 的本质子模,则称模 M 有有限哥尔迪维数,自然数 n 与 U_i 的选取无关,把 n 称为模 M 的哥尔迪维数,记为 $\mathrm{G.dim}M=n$. 有有限哥尔迪维数的模 M 的每个子模一定包含一致子模;又,若 M_1,M_2 分别是 M 的两个子模,则

$$\mathrm{G.dim}(M_1)+\mathrm{G.dim}(M_2)=\mathrm{G.dim}(M_1+M_2)+\mathrm{G.dim}(M_1\cap M_2).$$

诺特模和它们的子模都是有有限哥尔迪维数的模. 若环 A 作为 A 模有有限哥尔迪维数,并且 A 的右零化子理想满足 ACC 条件,则称 A 是右哥尔迪环.

模的一致维数(uniform dimension of a module)　即"模的哥尔迪维数".

凝聚模(coherent module)　一类特殊的模. 它是比有限表现模更特殊的模类. 设 M 是右 A 模,若 M 是有限表现模,并且它的每个有限生成子模也是有限表现模,则称 M 是凝聚模. 利用凝聚模来讨论平坦模的直积的平坦性,这时有:每一个有限表现右 A 模是凝聚模的充分必要条件是,平坦左 A 模的每一个直积是平坦模. 若环 A 作为 A 模时是凝聚模,则称 A 为凝聚环.

凝聚环(coherent ring)　见"凝聚模".

平衡双模(balanced bimodule)　一类特殊的双模. 若 M 是左 A 右 B 双模,则

$$\lambda:\ A\to \mathrm{End}(M_B);\quad \rho:\ B\to \mathrm{End}({}_AM),$$

使得 $\lambda(r):x\to rx$; $\rho(s):x\to xs$,对任意的 $r\in A,s\in B,x\in M$ 是两个环同态,当 λ 和 ρ 都是满射时,称双模${}_AM_B$ 是平衡双模. 这时,M 的每一个 B 同态都可由左乘某个 A 的元素 r 所得到;而 M 的每一个 A 同态又可由右乘某个 B 的元素 s 所得到. 若 λ 和 ρ 都是同构映射,则称${}_AM_B$ 是忠实平衡双模. 环 A 作为左 A 右 A 双模时是忠实平衡双模.

忠实平衡双模(faithful and balanced bimodule)　见"平衡双模".

相似的模(similar modules)　关于直和具有一种等价关系的模. 设 M 和 N 是两个 A 模,若存在自然数 m,n 和 A 模 M',N' 使得

$$M\oplus M'\cong N^{(m)},\quad N\oplus N'\cong M^{(n)},$$

则称模 M 与模 N 是相似的,记为 $M\sim N$. 模的相似是一种等价关系. 若 P 是左 A 模,则 P 是投射生成元的充分必要条件是,${}_AP$ 相似于${}_AA$. 若 M 和 N 是两个相似的非零 A 模,则一定有$\mathrm{End}(M_A)$等价于$\mathrm{End}(N_A)$.

模的补足直和项(complement direct summand of a module)模的一类特殊分解. 设 M 是 A 模,K 是 M 的子模,若 $M=K\oplus N$,则称 K 是 M 的直和项. 当 N 是 M 的不可分解子模时,称 K 是 M 的极大直和项. 设 $M=\underset{I}{\oplus}M_\alpha,M_\alpha$ $(\alpha\in I)$是 M 的一簇子模,若对 M 的每个直和项 K,都存在子集 $I'\subset I$,使得

$$M=(\oplus_{I'}M_\beta)\oplus K,$$

则称这个分解是 M 的补足直和项. 又,若每个 M_α 还是不可分解的,则称此分解是 M 的补足直和项不可分分解. 若模 M 有补足直和项不可分分解,则 M 的所有不可分分解都等价,并且每个不可分分解都是补足直和项. A 模 M 的补足直和项不可分分解与 A 的局部性有密切联系.

模的直和项(direct summand of module)　见"模的补足直和项".

模的极大直和项(maximal direct summand of module)　见"模的补足直和项".

A 同态的典范分解(canonical decomposition of an A-homomorphism)　模同态的常用分解. 若 $f:M\to N$ 是一个 A 模同态,则有交换图,即 $f=l\circ\zeta\circ\eta$,其中 l 是单同态,ζ 是同构,η 是满同态,称为 f 的典范分解. 在有关模论问题的讨论中,常用到模同态的分解和这样的交换图.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle\eta}\downarrow & \searrow^{f^+} & \uparrow{\scriptstyle l} \\ M/\ker f & \xrightarrow{\zeta} & \mathrm{Im}\,f \end{array}$$

拉回模(pullback module)　应用环的同态构造的一类模. 若 M 是右 A 模,B 是一个环,并有环同态 $f:B\to A$,定义 M 与 B 的运算"$\circ$"如下:

$$m\circ b=mf(b),\quad \forall\, m\in M,b\in B,$$

则 M 作为一个右 B 模 M_B,称之为拉回 B 模. 若有右 A 模 M,N,则得到右 B 模 M,N,而且还有

$$\mathrm{Hom}_A(M,N)\subset\mathrm{Hom}_B(M,N).$$

当 A,B 是两个环,并有环同态 $f:B\to A$,利用拉回模,可以得到模范畴 Mod-A 到模范畴 Mod-B 的一个忠实函子

$$H:\ \mathrm{Mod}\text{-}A\to\mathrm{Mod}\text{-}B,$$

这时 Mod-A 就可嵌入到 Mod-B 中.

对偶模(dual module) 对偶空间的推广.若 M 是右 A 模,则所有 M 到 A 的模同态 $\mathrm{Hom}_A(M,A)$ 做成一个左 A 模,用 M^* 表示,称它为 M 的对偶模. M^* 的对偶模一般表示为 M^{**},称为 M 的双对偶. 在向量空间 U 的讨论中,对偶空间 U^* 和双对偶 U^{**} 起着重要作用,而对偶模和模的双对偶正是这两个概念在模论中的自然推广,它们对模的讨论也有重要作用.

模的双对偶(biduality of module) 见"对偶模".

稳定子模(stable submodule) 不变子空间概念的推广. 设 M 是 A 模,$f:M\to M$ 是 A 同态,N 是 M 的一个子模,若

$$\mathrm{Im}\ f=\{f(x)\mid x\in N\}\subseteq N,$$

则称 N 是模 M 的 f 稳定子模. 模的稳定子模在模的分解中有重要作用.

全不变子模(fully invariant submodule) 一类特殊的稳定子模. 设 N 是模 M 的子模,若 N 对模的任一个自同态都稳定,则称 N 是 M 的一个全不变子模. 模 M 是拟内射模的充分必要条件为,M 是它的内射包$E(M)$的全不变子模.

奇异子模(singular submodule) 一类重要的子模. 它是关于本质理想零化的子模. 设 M 是右 A 模,若 $Z(M)=\{x\in M\mid xI=0$,对 A 的某本质右理想 $I\}$,则 $Z(M)$ 是 M 的一个子模,称为奇异子模. 若 $Z(M)=0$,则称 M 为非奇异模. 环 A 作为 A 模时是非奇异模,就称 A 为非奇异环. 环的非奇异性与半素性有密切联系,例如,当环 A 是交换环时,A 是半素的充分必要条件是,A 是非奇异的.

非奇异模(nonsingular module) 见"奇异模".

非奇异环(nonsingular ring) 见"奇异模".

模的正向系(direct system of modules) 对应正向系的模系. 设 I 是一个偏序集,若对 I 的任意一对元素 i,j,一定有元素 $k\in I$,使得 $i\leqslant k,j\leqslant k$,则称 I 是正向的. 设集合 I 是正向的,$(M_i)_{i\in I}$是一族 A 模,若对每对 I 的元素 $i,j,i\leqslant j$,有模同态 $\alpha_{ij}:M_i\to M_j$,并满足:

1. α_{ii}是恒等态射;
2. 若有 $i\leqslant j\leqslant k$,则一定有 $\alpha_{jk}\alpha_{ij}=\alpha_{ik}$;

则称$(M_i,\alpha_{ij})_{i,j\in I}$为 I 上模的一个正向系.

正向集(directed set) 见"模的正向系".

模的正向极限(direct limit of module) 一种特殊的模. 模的正向系中全体模的直和的商模. 设$(M_i,\alpha_{ij})_{i,j\in I}$是正向集 I 上 A 模的一个正向系,若

$$M=\bigoplus_{i\in I}M_i,$$

D 为所有形如 $x_i-\alpha_{ij}(x_i)$的元素所生成的 M 的子模,则商模 $C=M/D$ 就称为模$(M_i)_{i\in I}$的正向极限,记为

$$\varinjlim_I M_i.$$

若 $\eta_i:M_i\to M$ 为嵌入映射,当取

$$f_i(x_i)=\eta_i(x_i)+D\ (x_i\in M_i),$$

则$(C,f_i)_{i\in I}$具有泛性,即,若$(N,g_i)_{i\in I}$,N 是 A 模,$g_i:M_i\to N$ 是模同态,并且适合 $g_i=g_j\alpha_{ij}$对$\forall\ i\leqslant j$,则存在惟一的 A 同态 $g:C\to N$,使得 $g_i=gf_i$ 对任意的 $i\in I$. 若 M 是一个 A 模,则其所有有限生成子模$(M_i)_{i\in I}$是一个正向系,并且有

$$M=\varinjlim_I M_i.$$

模的反向系(inverse system of module) 模的正向系的对偶概念. 设集合 I 是正向的,$(M_i)_{i\in I}$是一族 A 模,若对每对 I 的元素 $i,j,i\leqslant j$,有模同态 $\beta_{ji}:M_j\to M_i$,并满足:

1. β_{ii}是恒等态射;
2. 若有 $i\leqslant j\leqslant k$,则有 $\beta_{ji}\beta_{kj}=\beta_{ki}$;

则称$(M_i,\beta_{ji})_{i,j\in I}$是 I 上模的一个反向系.

模的反向极限(inverse limit of modules) 模的正向极限的对偶概念. 设$(\overline{M}_i,\beta_{ji})_{i,j\in I}$是正向集 I 上的一个 A 模的反向系,若 $\overline{M}$ 表示模 $\overline{M}_i$ 的直积,即

$$\overline{M}=\prod_{i\in I}\overline{M}_i,$$

且 $\overline{C}=\{(x_i)_{i\in I}\in\overline{M}\mid$当 $i\leqslant j$ 时,$\beta_{ji}(x_j)=x_i\}$,则 $\overline{C}$ 是 $\overline{M}$ 的子模,称为$(\overline{M}_i)_{i\in I}$的反向极限,记为

$$\varprojlim_I \overline{M}_i.$$

当 $x=\{x_i\}_{i\in I}\in\overline{C}$ 时,若定义 $\overline{f}_i(x)=x_i\in\overline{M}_i$,则$(\overline{C},\overline{f}_i)_{i\in I}$具有泛性,即,若$(\overline{N},\overline{g}_i)_{i\in I}$,$\overline{N}$ 是 A 模,$\overline{g}_i:\overline{N}\to\overline{M}_i$ 是模同态,并且适合 $\overline{g}_i=\beta_{ji}\overline{g}_j$,则存在惟一的 A 同态 $\overline{g}:\overline{N}\to\overline{C}$,使得 $\overline{g}_i=\overline{f}_i\overline{g}$.

有限表现模(finitely presented module) 亦称有限相关模. 一类特殊的有限生成模. 设 M 是 A 模,若有短正合列

$$0\to N\to F\to M\to 0,$$

其中 N 和 F 都有限生成,并且 F 为自由模,则称 M 为有限表现模. 有限生成的投射模是有限表现模;有限表现的平坦模一定是投射模. 对于环 A,若它的每个有限生成左理想作为 A 模是有限表现模,则称环 A 为左凝聚环. 类似地可定义右凝聚环. 凝聚环是比诺特环更广泛的环类,凝聚环上平坦模的直积仍平坦,反之也成立.

有限相关模(finitely related module) 即"有限表现模".

凝聚环(coherent ring) 见"有限表现模".

局部表现模(locally presented module) 一种有用的模. 设 M 是 A 模,若对任意满同态 $\alpha:{}_AN\to$

${}_AN''$，任意非零同态 $\varphi:M\to N''$ 和 M 的任意有限生成子模 M'，φ 在 M' 上的限制总可扩张为 M' 到 N 的同态，即有同态 $r:M'\to N$，使得 $\varphi|_{M'}=\alpha\circ r$ 成立，则称 M 是局部投射模．对 A 模 M，若有正合序列

$$Q\to P\to M\to 0,$$

其中 P 和 Q 都是局部投射模，则称 M 是局部表现模．当 Q,P 都是有限生成投射时，M 就称为有限表现模．若环 A 是半完全环，则 A 是序列环的充分必要条件是，每个有限表现左 A 模是局部表现 A 模的直和．

局部投射模(locally projective module)　见“局部表现模”．

单列模(uniserial module)　一类特殊的模．设 M 是模，若 M 的所有子模的集在包含关系下是线性有序的，即对 M 的任意两个子模 N 和 N'，或者 $N\subseteq N'$，或者 $N'\subseteq N$，则称 M 是单列模．单模一定是单列模．由单列模可定义序列环：若环 A 作为左 A 模时是单列模的直和，则称 A 是左序列环．类似地有右序列环．既是左序列环又是右序列环的称为序列环．半单阿廷环就是序列环．若 A 是半完全环，则环 A 是序列环的充分必要条件是，每个有限表现 A 模是单列 A 模的直和．

序列环(serial ring)　见“单列模”．

模的直积(direct product of modules)　由一些模所产生的新模．它是直和的对偶概念．若对左 A 模族 $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 做直积集

$$P=\prod_{\alpha\in I}M_\alpha,$$

它的元素 x 的第 α 个分量 x_α 属于 M_α，即

$$\prod_{\alpha\in I}M_\alpha=\{(x_\alpha)_I\,|\,x_\alpha\in M_\alpha\},$$

在 P 中定义加法为：$(x_\alpha)_I+(y_\alpha)_I=(x_\alpha+y_\alpha)_I$，定义 A 与 P 的乘积为：$a(x_\alpha)_I=(ax_\alpha)_I$，$a\in A$，则

$$P=\prod_{\alpha\in I}M_\alpha$$

成为一个左 A 模，称它为模族 $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的直积．若 ρ_α：$P\to M_\alpha$ 表示把 $(x_\alpha)_I$ 映射到 x_α 的映射，则 ρ_α 是满同态，称为标准满射．直积

$$P=\prod_{\alpha\in I}M_\alpha$$

满足如下的泛性质(特征性质)：对任意左 A 模 M 及同态 $f_\alpha:M\to M_\alpha(\alpha\in I)$，一定有惟一的模同态 f：$M\to P$，使得 $\rho_\alpha\circ f=f_\alpha(\alpha\in I)$ 成立，且满足

$$f(x)=(f_\alpha(x))_I\ \ (x\in M).$$

标准满射(natural epimorphism)　见“模的直积”．

模的直和(direct sum of modules)　与直积对偶的概念．在左 A 模族 $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的直积 $\prod\limits_{\alpha\in I}M_\alpha$ 中，除有限个 α 外，其余的 x_α 都是 0 的元素 $(x_\alpha)_I$ 的全体构成 $\prod\limits_{\alpha\in I}M_\alpha$ 的一个子模，记为 $\bigoplus\limits_{\alpha\in I}M_\alpha$(或 $\coprod\limits_{\alpha\in I}M_\alpha$)，称为左 A 模族 $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的直和．若

$$j_\alpha:\ M_\alpha\to\bigoplus_{\alpha\in I}M_\alpha$$

表示把 $x_\alpha\in M_\alpha$ 映射到除 α 分量外其余均为 0 的元 $(\cdots,0,x_\alpha,0,\cdots)\in\bigoplus\limits_{\alpha\in I}M_\alpha$ 的映射，则 j_α 是一个单同态，称为标准单射．直和 $\bigoplus\limits_{\alpha\in I}M_\alpha$ 具有如下的泛性质(特征性质)：对任意左 A 模 M 及同态 $f_\alpha:M_\alpha\to M$，由

$$f((x_\alpha)_I)=\sum_{\alpha\in I}f_\alpha(x_\alpha)$$

可定义模同态 $f:\bigoplus\limits_{\alpha\in I}M_\alpha\to M$，使得 $\forall\ \alpha\in I$，$f\circ j_\alpha=f_\alpha$ 成立，且这样的 f 是惟一的．上述的直和 $\bigoplus\limits_{\alpha\in I}M_\alpha$ 有时称为外直和．若 $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是模 M 的一族子模，用 i_α：$M_\alpha\to M(\alpha\in I)$ 表示包含映射，则存在同态

$$i:\bigoplus_{\alpha\in I}M_\alpha\to M,\ i((x_\alpha)_I)=\sum_{\alpha\in I}x_\alpha.$$

若 i 是同构，则称 M 为子模族 $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的内直和，也记为 $M=\bigoplus\limits_{\alpha\in I}M_\alpha$．$i$ 是同构等价于：任意 $x\in M$，可惟一地表示为

$$x=\sum_{\alpha\in I}x_\alpha\ \ (x_\alpha\in M_\alpha),$$

且除有限个 α 外，其余 $x_\alpha=0$．若 $M=\bigoplus\limits_{\alpha\in I}M_\alpha$，则 M 的结构就完全由它的子模族 $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 所确定，这时 M_α 称为 M 的直和因子或直和项．若对所有 $\alpha\in I$，$M_\alpha=M$，则 $\prod\limits_{\alpha\in I}M_\alpha$ 与 $\bigoplus\limits_{\alpha\in I}M_\alpha$ 分别记为 M^I 和 $M^{(I)}$．由直和的定义，对有限个模 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 的直积与直和(分别记为 $M_1\times M_2\times\cdots\times M_n$，$M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_n$)，可看成是一致的，当 $M_i=M\ (i=1,2,\cdots,n)$ 时，用 M^n 表示．

标准单射(natural monomorphism)　见“模的直和”．

模的内直和(internal direct sum of module)　见“模的直和”．

模的外直和(external direct sum of modules)　见“模的直和”．

模的直和因子(direct factor of module)　见“模的直和”．

单模(simple module)　亦称不可约模，一种最基本的模．设 M 是一个非零的 A 模，若 M 只有平凡子模，则称 M 为单模．单模一定是循环模，且它的任意非零元都是其生成元．单模之间的同态要么是零同态要么是同构(Schur 引理)．若左 A 模 M 是单模，则其自同态环 $\Delta=\mathrm{End}({}_AM)$ 是一个除环，因此，M 可看做除环 Δ 上的一个右向量空间．若 $x_i,y_i\in M$，$i=1,2,\cdots,n$，且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关，则至少有一个 $a\in A$，使得 $ax_i=y_i$ 成立，其中 $i=1,2,\cdots,n$ (单模的稠密性定理)．

不可约模(irreducible module)　即“单模”．

半单模(semi-simple module)　亦称完全可约模. 由单子模生成的模. 设 A 是有单位元的环. 若 A 模 M 是它的单子模的和,则一定是它的某些单子模的直和,此时称 M 是半单模. 除环上任意模都是半单模. 模 M 是半单的充分必要条件是,M 的每个子模都是它的直和项. 环 A 本身看做 A 模是半单的充分必要条件是,所有 A 模是半单的,此时环 A 称为(阿廷)半单环. M 是半单模的充分必要条件是 $\mathrm{rad}\, M=0$,并且 M 的循环子模满足降链条件.

完全可约模(completely reducible module)　即"半单模".

模的(贾柯勃逊)根((Jacobson) radical of module)　一类重要子模. 环的雅各布森根的推广. 若 M 是 A 模,则称 $\bigcap\{K\leqslant M \mid K$ 是 M 极大子模$\}$为模 M 的雅各布森根,记为 $\mathrm{rad}\, M$. M 有限生成的充分必要条件是,$M/\mathrm{rad}\, M$ 是有限生成,且 $\mathrm{rad}\, M$ 是 M 的多余子模. 特别地,当 $M=A$ 时,$\mathrm{rad}\, A$ 称为环 A 的雅各布森根,记为 $J(A)$,它是环 A 的双侧理想,是环 A 的最大的多余左(右)理想. 对任意有限生成右 A 模 M,若 $MJ(A)=0$,则 $M=0$,这是日本中山正(Nakayama,T.)得到的著名引理.

模的基座(socle of module)　模的根的对偶概念. 若 M 是 A 模,则称 $\Sigma\{K\leqslant M \mid K$ 是 M 的极小子模$\}$为模 M 的基座,记为 $\mathrm{Soc}\, M$. M 的基座是它的最大半单子模. 模 M 为有限余生成的充分必要条件是,$\mathrm{Soc}(M)$是 M 的本质子模并且 $\mathrm{Soc}(M)$为有限余生成的.

克鲁尔-施密特定理(Krull-Schmidt theorem)　关于模的不可分分解的惟一性定理. 若非零 A 模 M 有有限长,则 M 有有限不可分分解 $M=M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_n$,并且,若 $M=N_1\oplus N_2\oplus\cdots\oplus N_k$ 是 M 的另一个不可分分解,则 $n=k$,且有$\{1,2,\cdots,n\}$的置换 σ,使得 $M_{\sigma(i)}\cong N_i$,$i=1,2,\cdots,n$,即长度有限的任意 A 模 M 能表示成不等于$\{0\}$的有限个不可分解子模的直和,若不计顺序,则在同构意义下,这些直和因子是惟一的. 克鲁尔(Krull,W.)于 1925 年把韦德伯恩(Wedderburn,J. H. M.)和雷马克(Remak,R.)的有限群的分解惟一性定理推广到带算子的阿贝尔群上,施密特(Schmidt,O.)于 1928 年又进一步把它推广到带算子的任意群上,所以该定理全称应为"韦德伯恩-里马克-克鲁尔-施密特定理".

主不可分解模(principal indecomposable module)　一类特殊的不可分解模. 设 A 是环,L_i 是不可分解 A 模,若 $A=\oplus L_i$,则 L_i 称为主不可分解模. 每个左阿廷环都可表示为这种形式. 若环 A 是拟弗罗贝尼乌斯环,则 A 的极小左理想集与主不可分解 A 模的集合之间存在着一个双射.

准素子模(primary submodule)　一类特殊子模. 它是准素理想概念的推广. 设 A 是交换环,M 是 A 模,N 是 M 的子模,若 $N\neq M$,并且对任意 $a\in A$,由 $ax\in N$ 得到:$x\in N$,或者有正整数 m 使 $a^m M\subseteq N$,则称 N 是 M 的准素子模. 当 M 是诺特模时,它的任一不可分解子模都是准素的,且 M 的任何子模都可分解为 M 的有限个准素子模的交.

模的准素分解(primary decomposition of a module)　模的一种子模分解. 它是环的理想的准素分解概念的推广. 若 A 是交换环,N 是 A 模 M 的子模,若 N 可表示为 $N=\bigcap_1^s N_i$,其中 N_i 为 M 的准素子模,并且这些准素子模中没有多余的,即对每个 j,$N\neq\bigcap_{i\neq j}N_i$,则称 $\bigcap_1^s N_i$ 是子模 N 在模 M 内的一个准素分解. 诺特模的任一子模一定有准素分解.

模正合列(exact sequence of modules)　一种特殊的同态序列. 对 A 模之间的同态序列

$$\cdots\to M_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}M_n\xrightarrow{f_n}M_{n+1}\to\cdots,$$

若对一切 n,$\mathrm{Im}\, f_{n-1}=\ker f_n$ 都成立,则称此同态序列是正合列. 若 A 模$\{0\}$简记为 0,则

$$0\to N\xrightarrow{f}M \quad 与 \quad M\xrightarrow{g}L\to 0$$

是正合列分别意味着 f 是单同态,g 是满同态. 利用正合列来研究模是一种常用方法.

五引理(模论)(five lemma (module theory))　模论的一个重要引理. 若有模和模同态的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \to & B & \to & C & \to & D & \to & E \\ \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \delta\downarrow & & \varepsilon\downarrow \\ A' & \to & B' & \to & C' & \to & D' & \to & E' \end{array}$$

其中上、下两行均正合,则:

1. 若 α 是满的,β 和 δ 是单的,则 γ 是单的.
2. 若 ε 是单的,β 和 δ 是满的,则 γ 是满的.
3. 若 α,β,δ 和 ε 都是同构,则 γ 也是同构.

此引理揭示了这样五个模同态之间的联系,而这种联系在模论中是常常用到的.

模的短正序列(short exact sequence of modules)　特殊的正合列. 形如

$$0\to M'\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}M''\to 0$$

的正合列称为短正合列. 此时不仅意味着 f 是单同态,g 是满同态,而且 $\mathrm{Im}\, f=\ker g$. 对任意 A 模 M 和它的子模 N,总可构造出短正合序列:

$$0\to N\xrightarrow{i}M\xrightarrow{\pi}M/N\to 0,$$

其中 i 是嵌入映射,π 是自然映射. 在短正合序列

$$0\to M'\to M\to M''\to 0$$

中,M 可看成 M' 借助于 M'' 可得的扩张,M' 和 M'' 的性质与 M 的性质有着密切联系.

模的左正合列(left exact sequence of modules)　特殊的短正合列. 若 A 模序列

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \qquad (*)$$

中，$0\to M'\xrightarrow{f} M\xrightarrow{g} M''$正合，则称(*)为左正合列，若$M'\xrightarrow{f} M\xrightarrow{g} M''\to 0$正合，则称(*)为右正合列.

模的右正合列(right exact sequence of maodules) 见“模的左正合列”.

分裂正合列(split exact sepuence) 特殊的短正合列.设有正合序列

$$0\to M'\xrightarrow{f} M\xrightarrow{g} M''\to 0,$$

若还存在同态$f':M''\to M$，使得$g\circ f'=1_{M''}$成立，或者等价地，存在同态$g':M\to M'$，使得$g'\circ f=1_{M'}$成立，则称此短正合列是分裂的.对短正合列，抽象地可把M'看做M的子模，把M''看做M的商模，并且，若此序列还是分裂的，则M'，M''都可看做M的直和项，且$M\cong M'\oplus M''$.

全忠实函子(full and faithful functor) 一类特殊的函子.设F是模范畴$\mathscr{C}\to\mathscr{D}$的加性共变函子(参见“范畴”)，对$M,N\in \mathrm{ob}\mathscr{C}$，若

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(M),F(N))$$

是群单同态，则称F是忠实的.若

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,N)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(M),F(N))$$

是群同构，则称F是全忠实函子.

忠实函子(faithful functor) 见“全忠实函子”.

Hom **函子**(functor Hom) 模范畴间最重要的函子之一.对左A模M,N，模同态全体$\mathrm{Hom}_A(M,N)$是一个加群，若M是一个左A右B双模，$\forall\, b\in B, f\in \mathrm{Hom}_A(M,N), x\in M$，规定$bf:x\to f(xb)$，则$\mathrm{Hom}_A(M,N)$是一个左$B$模；若$g:N\to N_1$是左$A$同态，则左$B$模$\mathrm{Hom}_A(M,N)$与$\mathrm{Hom}_A(M,N_1)$间的映射$\mathrm{Hom}_A(M,g):f\to gf$(也记$g_*=\mathrm{Hom}_A(M,g)$)是左$B$模同态，于是，得到一个共变函子

$$\mathrm{Hom}_A({}_AM_B,-):\ A\text{-Mod}\to B\text{-Mod}.$$

类似地，当N是左A右B双模时，得到一个逆变函子

$$\mathrm{Hom}_A(-,{}_AN_B):\ A\text{-Mod}\to \text{Mod-}B.$$

还可得共变函子

$$\mathrm{Hom}_A({}_BM_A,-):\ \text{Mod-}A\to \text{Mod-}B,$$

和逆变函子

$$\mathrm{Hom}_A(-,{}_BN_A):\ \text{Mod-}A\to B\text{-Mod}.$$

所有这些函子统称为 Hom 函子. Hom 函子是左正合的加法函子.

投射模(projective module) 比自由模更一般的模.它是内射模的对偶概念.设P是左A模，若有左A模Q使$P\oplus Q$同构于自由A模，则P称为投射A模.这等价于：函子$\mathrm{Hom}_A(P,-)$是正合的；也等价于：对每个满同态$f:M\to N$，及每个同态$\gamma:P\to N$，一定有同态$\bar{r}:P\to M$，使得$f\circ\bar{r}=\gamma$成立.对右A模有类似的定义与性质.任意左A模M必是某一左A投射模的商模；环A作为A模当然是投射模.自由模一定是投射模，投射模一定是平坦模；反之都不一定成立.当环A是主理想整环时，每个投射模都是自由模.塞尔(Serre, J. P.)于1955年曾提出一个著名的猜测(塞尔猜测)：域F上的多项式环$F[x_1,x_2,\cdots,x_n]$上的每个有限生成的投射模是否是自由模？奎伦(Quillen, D. G.)和苏斯林(Суслин, M. Я.)几乎同时于1976年用不同方法给以解决(他们得出更强的结果，即只要限制F为主理想整环即可).另外，交换诺特局部环上每个有限生成的投射模也是自由的，这个结果首先由卡普兰斯基(Kaplansky, I.)于1958年得到.投射模在模论、同调代数、代数K理论中有重要应用.

投射模的秩(rank of a projective module) 模论的基本概念之一.它是与有限生成投射模有关的一正整数.若A是交换环，M是有限生成投射A模，它有一个含n个元的生成集，则对环A的任意素理想P，M的分式模M_P必是自由A_P模(A_P是A的分式环)且它的秩$n_P\leqslant n$，将n_P称为投射模M的p秩.若对于环A的任意两个素理想P,Q，皆有$n_P=n_Q$，则称投射模M有秩，并且把p秩n_P的公共值称为有限生成投射模M的秩.当交换环A是不可分时，每个有限生成投射A模都是有秩的.例如，当A为整环时，每个有限生成A模都是有秩的.

稳定自由模(stably free module) 亦称准自由模.模论和代数K理论中的一个基本概念，是介于自由模与投射模之间的模类.设P是一个A模，若有自然数m与n，使得$P\oplus A^{(m)}\cong A^{(n)}$，则称$P$为稳定自由模.自由模当然是稳定自由的，同时稳定自由模必然是投射模；反之都未必成立.研究自由模与投射模之间的差距，可通过它们与稳定自由模的关系来进行.

完全模(perfect module) 一类特殊的投射模.它是完全环概念的推广.设P是投射模，若P的任意直和的每个商模都有投射覆盖，则称P是完全模.若P是完全模，则P生成的每个平坦模是投射模，且

$$P\cong\bigoplus_{i\in I}Ae_i,$$

e_i为环A的幂等元；反之也成立.

半完全模(semiperfect module) 一类比完全模较广泛的模.它是半完全环概念的推广.设M是A模，若M的每个满同态像有一个投射覆盖，则称M是半完全模.每个投射阿廷模是半完全的.若$\xi:P\to M$是M的投射覆盖，则M是半完全模当且仅当P是半完全模.若P是半完全模，则有：

1. $J(P)$是P的多余子模.

2. $P/J(P)$是半单模.

3. $P/J(P)$的分解$P/J(P)=\overline{P}_1\oplus\overline{P}_2$都可提升到$P$上.

反之,若投射模P满足这三个条件,则P就一定是半完全模.

拟投射模(quasi-projective module) 拟内射模的对偶概念.它比投射模更广.设M是左A模,若对每个满同态$f:{}_AM\to{}_AN$及每个同态$r:{}_AM\to{}_AN$,一定有同态$\bar{r}:{}_AM\to{}_AM$,使得$f\circ\bar{r}=r$成立,则称M是拟投射模.投射模一定是拟投射模.若A是半完全环,则A上每个拟投射模是投射模当且仅当A是半单阿廷环.若A是阿廷主理想环,则每个拟投射左A模也是拟内射的.半单模一定是拟投射模.

模的投射覆盖(projective cover of a module) 内射包的对偶概念.设P,M是A模,其中P是投射模,若存在满同态$p:P\to M$,并且$\ker p$是P的多余子模(就是说,使得M是投射模P的同态像,并且这样的投射模P尽可能地小),则称(P,p)是模M的投射覆盖.虽然每个模都是投射模的同态像,但是,并不是所有的模都有投射覆盖,若有投射覆盖,抽象地看是惟一的.所有的A模都有投射覆盖的充分必要条件是环A是完全环;所有的有限生成A模有投射覆盖的充分必要条件是A是半完全环.

内射模(injective module) 投射模的对偶概念.设Q是左A模,若函子$\mathrm{Hom}_A(-,Q)$正合,则称模Q为内射模;这等价于:对每个单同态$f:K\to M$,及每个同态$r:K\to Q$,一定有同态$\bar{r}:M\to Q$,使得$\bar{r}\circ f=r$成立.对任意模M,一定存在内射模E,使得M是E的子模.若E是左A内射模,且E是左A模M的子模,则E是M的直和因子.若A是环,则存在充分多的左A内射模,例如,若Q是可除阿贝尔群,则$\mathrm{Hom}_Z(A,Q)$是A内射模.贝尔准则是一个很有用的判别定理:对A的每个左理想I和每个A同态$h:I\to Q$,若h都可开拓成$\bar{h}:A\to Q$,即$\bar{h}|_I=h$,则Q是内射模;反之亦然.内射模这一概念是由贝尔(Baer,R.)于1940年提出的;约翰逊(Johnson,R.E.)和黄德华于1961年将投射模、内射模这些概念推广到拟投射模和拟内射模;山度米尔斯基(Sandomierski)于1964年推广到相对投射模和相对内射模.

贝尔准则(Baer's criterion) 见"内射模".

可除模(divisible module) 一类重要的模.可除阿贝尔群的推广.若M是A模,对任意$m\in M$,和任意非零因子$a\in A$,总有$m'\in M$,使得$m=am'$,则称m为可除元.若M的元全都是可除元,则称M为可除模.内射模一定是可除模,反之不一定成立.当环A是戴德金环时,可除模也是内射模.

拟内射模(quasi-injective module) 拟投射模的对偶概念.设M是左A模,若对每个单同态$f:{}_AN\to{}_AM$及每个同态$r:{}_AN\to{}_AM$,一定有同态$\bar{r}:{}_AM\to{}_AM$,使得$\bar{r}\circ f=r$成立,则称M是拟内射模.内射模一定是拟内射的.半单模也一定是拟内射模.

模的内射包(injective hull of a module) 投射覆盖的对偶概念.设E,M是A模,其中E是内射模,若存在单同态$i:M\to E$,并且$\mathrm{Im}\,i$是E的本质子模(就是说,使得M可嵌入到内射模E内,并且这样的内射模E尽可能地小),则称(E,i)是M的内射包,记为$E(M)$.例如,$(\mathbf{Q},i)$是$\mathbf{Z}$的内射包.每个模都有内射包,并且在同构的意义下是惟一的,这就使得$E(M)$在对M的研究中发挥较好作用.

拟内射包(quasiinjective hull of a module) 模的内射包的推广.若有单同态$f:M\to E$,其中E是拟内射模,并且对任意单同态$g:M\to E'$(其中E'也是拟内射模),一定有单同态$\varphi:E\to E'$,使得$g=\varphi\circ f$成立,则称(E,f)是M的拟内射包,也称为M的极小拟内射扩张,记为$Q(M)$.对任意右A模M,若$\hat{M}=E(M)$,$\Delta=\mathrm{End}(\hat{M}_A)$,则$\Delta M$就是$M$的拟内射包.任意模都有拟内射包,并且,在同构意义下模M的拟内射包是惟一的.

极小拟内射扩张(minimal quasi-injective extension) 见"拟内射包".

模的张量积(tensor product of modules) 模论的基本概念之一.由两个模产生的一个满足一定性质的阿贝尔群和一个映射.对模M,N,L,若映射$f:M\times N\to L$满足:

$$f(x+x',y)=f(x,y)+f(x',y'),$$
$$f(x,y+y')=f(x,y)+f(x,y')$$
$$(x,x'\in M,y,y'\in N),$$

则称f为双加映射.当M是右A模,N是左A模时,若f还满足条件

$$f(xa,y)=f(x,ay)\quad(x\in M,y\in N,a\in A),$$

则称f为A平衡映射.右A模M与左A模N的张量积是指一个阿贝尔群T与一个A平衡映射$h:M\times N\to T$,它满足如下泛性质(特征性质):对每个阿贝尔群L及A平衡映射$f:M\times N\to L$,存在惟一的同态$\bar{f}:T\to L$,使得$\bar{f}\circ h=f$成立.对任意右A模M和左A模N,这样定义的张量积(T,h)是存在的.考虑以$M\times N$中元为基的自由阿贝尔群F,若S表示F中形如

$$(x+x',y)-(x,y)-(x',y),$$
$$(x,y+y')-(x,y)-(x,y')$$
$$(xa,y)-(x,ay)$$

的元全体生成的子群,其中$x,x'\in M,y,y'\in N,a\in A$;定义$T=F/S$,记$F$中元$(x,y)$在$T$中的像

$\overline{(x,y)}$为 $x\otimes y$，记

$$h: M\times N\to T,\quad h(x,y)=x\otimes y,$$

则 h 是 A 平衡映射. 并且，(T,h)是 M_A 与${}_AN$ 的一个张量积，记为 $T=M\underset{A}{\otimes}N$. $M\underset{A}{\otimes}N$ 中的元素都可表成形如 $\sum\limits_i x_i\otimes y_i$ 的有限和. 于是，对任意右 A 模 M 与左 A 模 N，M 与 N 的张量积总存在. 从定义中的泛性质知 M 与 N 的张量积在同构意义下是惟一的. 当 A 为交换环时两个 A 模的张量积仍为 A 模.

双加映射(biadditive map)　见“模的张量积”.

平衡映射(balanced map)　见“模的张量积”.

张量积函子(tensor functor)　模论的基本概念之一. 由张量积构造的函子. 若 M 是左 A 右 B 双模，对任意左 B 模 N，则在阿贝尔群 $M\underset{B}{\otimes}N$ 上可以定义一个左 A 模结构，即规定 $s(x\otimes y)=sx\otimes y$，$s\in A$. 于是，对${}_AM_B$，

$${}_AM_B\otimes_B\text{-}: {}_BN\to M\underset{B}{\otimes}N$$

是 B-Mod 到 A-Mod 的一个映射. 若对任意 $f: {}_BN_1\to{}_BN_2$，记 $M\underset{B}{\otimes}f$ 为 $M\underset{B}{\otimes}N_1$ 到 $M\underset{B}{\otimes}N_2$ 的同态：$x\otimes y\to x\otimes f(y)$，则

$${}_AM_B\underset{B}{\otimes}\text{-}: B\text{-Mod}\to A\text{-Mod}$$

是一个共变函子. 类似地，对左 B 右 A 双模${}_BN_A$，可以定义共变函子

$$\text{-}\underset{B}{\otimes}{}_BN_A: \text{Mod-}B\to\text{Mod-}A.$$

形如${}_AM_B\underset{B}{\otimes}$- 和 -$\underset{B}{\otimes}{}_BN_A$的函子统称为张量积函子. 张量积函子是右正合的加性函子.

平坦模(flat module)　一类重要的模. 右 A 模 M，若函子 $M\underset{A}{\otimes}$ -是正合的，则称 M_A 是平坦模. 类似地，对左 A 模 M，若函子-$\underset{A}{\otimes}M$ 正合，则称${}_AM$ 是平坦模. 投射模一定是平坦模，反之不一定成立. 环 A 上每个左 A 平坦模是投射模的充分必要条件是，环 A 是左完全环.

相伴定理(adjoint theorem)　关于函子 Hom 和$\otimes$的重要定理. 若 A 与 B 为两个环，M 是一个左 B 右 A 双模，N 为左 B 模，E 是左 A 模，则有群同构

$$\omega: \mathrm{Hom}_A(E,\mathrm{Hom}_B(M,N))\to\mathrm{Hom}_B(M\otimes_A E,N),$$

$$\varphi\to f,$$

$$\varphi(e)(m)=f(m\otimes e)\in N\ (\forall\, e\in E, m\in M).$$

模范畴(category of modules)　一种重要的范畴. 指所有以模和模之间的同态组成的范畴. 利用范畴的观点来讨论模和环是一种重要方法. 若 A 是环，则所有的左 A 模组成的类和所有左 A 模 M，N 之间的模同态 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$，以及模的同态的乘法运算法则构成一个范畴，称为左 A 模范畴，记为

$$A\text{-Mod}.$$

模范畴等价(equivalence of categories of modules)　对模范畴的一种刻画. 存在等价函子的模范畴称为等价的模范畴. 设 A-Mod，B-Mod 是模范畴，若存在加性共变函子

$$F: A\text{-Mod}\to B\text{-Mod}$$

和

$$G: B\text{-Mod}\to A\text{-Mod},$$

使得 GF 自然同构于 A-Mod 的恒等函子，FG 自然同构于 B-Mod 的恒等函子，则称函子 F 与 G 等价，且称模范畴 A-Mod 与 B-Mod 是等价的，记为

$$A\text{-Mod}\sim B\text{-Mod},$$

此时，也称环 A 与 B 是森田纪一相似的，记为 $B\approx A$. 两个模范畴 $\mathscr{C}$，$\mathscr{D}$ 等价的充分必要条件是，存在全忠实函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$，并且对任意 $M'\in\mathrm{ob}\mathscr{D}$，总有 $M\in\mathrm{ob}\mathscr{C}$，使得 $F(M)$同构于 M'. 模范畴的等价理论是模论的一个重要组成部分. 森田纪一(Morita Kiiti)于 1958 年讨论了两个模范畴的等价和对偶，得到了一系列深刻而又漂亮的结果. 森田纪一的工作是经典的阿廷-韦德伯恩定理在模上的推广，现在他的工作已发展成所谓的森田纪一理论.

森田纪一相似环(Morita similar ring)　见“模范畴等价”.

模的迹理想(trace ideal of a module)　模的算子环引出的一个理想. 设 M 是 A 模，若

$$\mathrm{Tr}_A(M)=\sum\{\mathrm{Im}h\mid h\in\mathrm{Hom}_A(M,A)\},$$

则 $\mathrm{Tr}_A(M)$是 A 的理想，称为 M 在 A 中的迹理想，记为 $\mathrm{Tr}(M)$. 模的迹理想与模本身有密切联系，例如，${}_AM$ 是生成子的充分必要条件是 $\mathrm{Tr}_A(M)=A$.

生成子(模)(generator (module))　模论的基本概念之一. 余生成子的对偶概念. 设 $\mathscr{U}$ 表示模类，对模 M，若在 $\mathscr{U}$ 中有模族$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$和满同态

$$\bigoplus_I U_\alpha\to M\to 0,$$

则称 M 可由 $\mathscr{U}$ 生成(若 I 有限，称 M 由 $\mathscr{U}$ 有限生成)，并把所有由 $\mathscr{U}$ 生成的模组成的集合记为 $\mathrm{Gen}\mathscr{U}$. 若模 $G\in\mathscr{U}$，并且 $\mathrm{Gen}\mathscr{U}=\mathrm{Gen}(G)$，则称 G 是 $\mathrm{Gen}\mathscr{U}$ 的一个生成子. 模范畴 A-Mod(或 Mod-A)的生成子就简称生成子. 正则模${}_AA$ 是 A-Mod 的生成子.

余生成子(模)(cogenerator (module))　模论的基本概念之一. 生成子的对偶概念. 设 $\mathscr{U}$ 表示模类，对模 M，若在 $\mathscr{U}$ 中有模族$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$和单同态

$$0\to M\to\prod_I U_\alpha,$$

则称 M 由 $\mathscr{U}$ 余生成(若 I 有限，称 M 由 $\mathscr{U}$ 有限余生成)，并把所有由 $\mathscr{U}$ 余生成的模组成的集合记为 $\mathrm{Cog}\mathscr{U}$. 若模 $C\in\mathscr{U}$，并且 $\mathrm{Cog}\mathscr{U}=\mathrm{Cog}(C)$，则称 C 是 $\mathrm{Cog}\mathscr{U}$ 的一个余生成子. 模范畴 A-Mod(或

Mod-A)的余生成子简称余生成子.

投射生成子(progenerator) 模范畴的特殊的生成子.若左 A 模 P 是有限生成投射模,并且是 A 模范畴 A-Mod 的生成子,则称${}_AP$ 是投射生成子.例如,${}_AA$ 就是一个投射生成子.投射生成子在模范畴的等价中起着重要作用.

森田纪一六元组(Morita context (or set of pre-equivalence data)) 模论的六元素集合.一个关于环、模和同态的六元组.一个集(A,A',M,M',τ,μ)称为森田纪一六元组,是指 A 和 A'是两个环,M 是 A'-A 双模,M'是 A-A'双侧模,

$$\tau:\ M'\underset{A'}{\otimes}M\to A$$

是 A-A 同态,

$$\mu:\ M\underset{A}{\otimes}M'\to A'$$

是 A'-A'同态,通常记 $\tau(x'\otimes y)=(x',y)$,$\mu(x\otimes y')=[x,y']$,τ 和 μ 还满足:$[x,y']y=x(y',y)$,$x'[x,y']=(x',x)y'$.例如,设 A 是环,M 是右 A 模,若 $A'=\mathrm{End}\,M_A$,$M'=M^*=\mathrm{Hom}_A(M,A)$,再定义

$\tau:M^*\otimes M\to A,\tau(f\otimes x)=f(x)$,

$\mu:M\otimes M^*\to A'$, $\mu(x\otimes f)(m)=xf(m)$, $m\in M$,

则(A,A',M,M',τ,μ)就是一个森田纪一六元组,称为由 M 确定的标准森田纪一六元组.

森田纪一定理Ⅰ(Morita theorem Ⅰ) 森田纪一理论的主要定理之一.若(A,A',M,M',τ,μ)是森田纪一六元组,且 τ,μ 是满同态,则:

1. $M_A,{}_{A'}M,M'_{A'},{}_AM'$都是投射生成子.

2. τ,μ 是同构.

3. $M'\cong M^*=\mathrm{Hom}_A(M,A)$,$A'\cong\mathrm{End}M_A$.

4. 函子对$-\underset{A}{\otimes}M'$和$-\underset{A'}{\otimes}M$ 定义了 mod-A 与 mod-A'等价,而 $M\underset{A}{\otimes}-$和 $M'\underset{A'}{\otimes}-$定义了 A-Mod 与 A'-Mod 等价.

5. A 的右(左)理想格同构于 $M'_{A'}({}_{A'}M)$的子模格,A'的右(左)理想格同构于 $M_A({}_AM')$的子模格;

6. A 的中心同构于 A'的中心.

上述定理称为森田纪一定理Ⅰ.若 P_A 是投射生成子,则由 P_A 确定的标准森田纪一六元组满足森田纪一定理Ⅰ的条件,从而 Mod-A 等价于

$$\text{Mod-End}P_A.$$

森田纪一定理Ⅱ(Morita theorem Ⅱ) 森田纪一理论的主要定理之一.设 A 和 A'是两个环,若 A-Mod 等价于 A'-Mod,则:

1. 有双模${}_{A'}P_A,{}_AP'_{A'}$和森田纪一六元组(A,A',P,P',τ,μ),且 τ,μ 是满同态,

$$A'\cong\mathrm{End}P_A,\quad A\cong\mathrm{End}P'_{A'}.$$

2. 若 F,G 是给出的一对等价函子,则一定有

$$F\cong-\underset{A}{\otimes}P',\quad G\cong-\underset{A'}{\otimes}P.$$

在这种情形下,由森田纪一定理Ⅰ,作为 A-A 双模 $P'\underset{A'}{\otimes}P\cong A$,而作为 A'-A'双模 $P\underset{A}{\otimes}P'\cong A'$,称这类双模${}_{A'}P_A$为可逆的.于是,两个模范畴的等价是由可逆双模确定的.

森田纪一定理Ⅲ(Morita theorem Ⅲ) 森田纪一理论的主要定理之一.若 A,A'是相似的环,则映射

$$P\to-\underset{A'}{\otimes}P$$

给出了可逆 A'-A 双模同构类的集合到 Mod-A'和 Mod-A 的等价函子的自然同构类的集合之间的双射;并且,在这个映射下,等价的合成对应于可逆双模的张量积.

此定理进一步揭示了模范畴等价中,等价函子与可逆双模之间的关系:若 Mod-A'和 Mod-A 是等价的模范畴,则由一个等价函子就确定一个可逆的 A'-A 双模;反之,由一个可逆的 A'-A 双模就确定一个等价函子;并且,同构的可逆双模所对应的等价函子也自然同构.

模范畴对偶性(duality in categories of modules) 模范畴等价的对偶概念.设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 是两个范畴,$H':\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 和 $H'':\mathscr{D}\to\mathscr{C}$ 是两个逆变函子,若有自然等价 $H''H'\cong 1_{\mathscr{C}}$ 和 $H'H''\cong 1_{\mathscr{D}}$,则称 H'与 H''是对偶函子,而称 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 是对偶范畴.模论中考虑较多的问题是:在模范畴 A-Mod 和 Mod-B 中是否有全子范畴${}_A\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}_B$,以及${}_A\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}_B$ 之间的加性逆变函子 H',H'',使得 H'与 H''是对偶函子,${}_A\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}_B$ 是对偶范畴.此性质就称为模范畴的对偶性.

对偶函子(duality functor) 见“模范畴对偶性”.

对偶范畴(duality category) 见“模范畴对偶性”.

***U* 对偶函子**(U-duality functor) 模范畴对偶性中的重要函子.若 U 是 A-B 双模,则称函子

$$\mathrm{Hom}_A(-,{}_AU_B)\quad 和\quad \mathrm{Hom}_B(-,{}_AU_B)$$

为 U 对偶函子,且都简记为$(\ )^*=\mathrm{Hom}(-,{}_AU_B)$.若左 A 模同态 $f:M_1\to M_2$,则 $f^*:M_2^*\to M_1^*$ 是右 B 同态,$f^{**}:M_1^{**}\to M_2^{**}$ 是左 A 同态,称 $M^*=\mathrm{Hom}_A(M,U_B)$为 M 的 U 对偶模,$f^*=\mathrm{Hom}(f,U)$称为 f 的 U 对偶映射,而把

$$M^{**}=\mathrm{Hom}_B(M^*,{}_AU),\quad f^{**}=\mathrm{Hom}(f^*,U)$$

分别称为 M 和 f 的二重对偶模和二重对偶映射.

***U* 对偶映射**(U-duality map) 见“U 对偶函子”.

二重对偶映射(biduality map) 见“U 对偶函子”.

二重对偶模(biduality module) 见“U 对偶

函子”.

U 自反模(U-reflexive module) 在模范畴对偶性中起着重要作用的模类. 对 A-Mod 或 Mod-B 中每个模 M,规定 $\sigma_M:M\to M^{**}$,使得任意 $m\in M,\varphi\in M^*,\sigma_M(m)(\varphi)=\varphi(m)$. 若 $M\in A$-Mod,则 σ_M 是左 A 同态;若 $M\in$ Mod-B,则 σ_M 是右 B 同态;并且,σ_M 是自然的,即,对任意 $f\in \mathrm{Hom}(M_1,M_2)$,都有 $f^{**}\sigma_M=\sigma_M f$ 成立,称 σ_M 为赋值映射. 若 σ_M 是一个同构,则称 M 是 U 自反模.

赋值映射(evaluation map) 见“U 自反模”.

U 半自反模(U-semireflexive module) 亦称 U 非挠模. 比 U 自反模更广泛的模类. 设 M 是模,若赋值映射 σ_M 是单同态,则称 M 是 U 半自反模. 若 M 是左 A 模或右 B 模,则 $M^*=\mathrm{Hom}(M,{}_AU_B)$是 U 半自反的. M 是 U 半自反模的充分必要条件是,U 余生成 M.

U 非挠模(U-torsionless) 即“U 半自反模”.

森田纪一对偶(Morita duality) 一种特殊的 U 对偶. 它是森田纪一理论的另一重要组成部分. 设 ${}_AU_B$ 是双模,称 ${}_AU_B$ 定义了一个森田纪一对偶或称函子 $\mathrm{Hom}_A(-,U)$ 和 $\mathrm{Hom}_B(-,U)$ 是森田纪一对偶,是指以下条件成立:

1. ${}_AA$ 和 B_B 都是 U 自反模.

2. U 自反模的每个子模和商模是 U 自反模.

若 ${}_AU_B$ 定义了一个森田纪一对偶,则 A 和 B 的理想格同构;每个有限生成(或有限余生成)的左 A 模(或 B 模)皆是 U 自反的;左 A 模序列 $M_1\xrightarrow{f}M_2\xrightarrow{g}M_3$ 正合的充分必要条件是,右 B 模序列 $M_3^*\xrightarrow{g^*}M_2^*\xrightarrow{f^*}M_1^*$ 正合;特别地,f 是满射(单射)的充分必要条件是 f^* 是单射(满射).

森田纪一对偶定理(Morita theorem on duality) 模范畴对偶性的重要定理. 设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 是 A-Mod 和 Mod-B 的全子范畴,且 ${}_AA\in\mathscr{C},B_B\in\mathscr{D}$,又对任意 $M\in A$-Mod$(N\in$ Mod-$B)$,若 $M\cong M'(N\cong N')$,则必有 $M\in\mathscr{C}(N\in\mathscr{D})$,这里 $M'\in\mathscr{C},N'\in\mathscr{D}$. 若 $H':\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 和 $H'':\mathscr{D}\to\mathscr{C}$ 是对偶函子,则一定存在双模 ${}_AU_B$,使得:

1. ${}_AU\cong H''(B),U_B\cong H'(A)$.

2. $H'\cong\mathrm{Hom}_A(-,U),H''\cong\mathrm{Hom}_B(-,U)$.

3. $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 中每个模都是 U 自反模.

在一个模范畴中,不可能每一个模都是 U 自反模,所以模范畴的对偶只能在全子范畴之间存在.

撰　稿　邓培民　程福长

审　阅　冯克勤　陈昭木

同 调 代 数

上复形(cocomplex) 亦称上链. 一种特殊的模同态序列. 设有 A-同态序列

$$\cdots\to X^{n-1}\xrightarrow{d^{n-1}}X^n\xrightarrow{d^n}X^{n+1}\to\cdots,\qquad(1)$$

这个序列的两个方向都是无限的,若对每个整数 n 皆有 $d^{n+1}d^n=0$,则称序列(1)为环 A 上的上复形. 把模同态 $d^n:X^n\to X^{n+1}$ 称为上边缘同态或上边缘算子. 为简便起见,用(X,d)代表复形序列(1). 如果记 $X_n=X^{-n},d_n=d^{-n}$,则序列(1)可以表示为

$$\cdots\to X_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}}X_n\xrightarrow{d_n}X_{n-1}\to\cdots,\qquad(2)$$

且 $d_nd_{n+1}=0$,把序列(2)称为环 A 上的复形或链,模同态 d_n 称为边缘同态或边缘算子.

上链(cochain) 即“上复形”.

上边缘同态(coboundary homomorphism) 见“上复形”.

上边缘算子(coboundary operator) 即“上边缘同态”.

边缘同态(boundary homomorphism) 见“上复形”.

边缘算子(boundary operator) 即“边缘同态”.

复形(complex) 见“上复形”.

上复形的平移(cocomplex translation) 亦称上复形映射或上链变换. 它是上复形间一簇满足交换图的同态映射. 设

$$X:\quad\cdots\to X^{n-1}\xrightarrow{d^{n-1}}X^n\xrightarrow{d^n}X^{n+1}\to\cdots,$$

$$X':\quad\cdots\to X'^{n-1}\xrightarrow{d'^{n-1}}X'^n\xrightarrow{d'^n}X'^{n+1}\to\cdots$$

是环 A 上的两个复形,由 X 到 X' 的一个平移 $f:X\to X'$ 是 A 同态簇$\{f^n:X^n\to X'^n\mid n\in\mathbf{Z}\}$,使得对任意整数 n,右图是交换的. 若 X,X' 是环 A 上的复形,对偶地可以定义复形的平移,复形的平移也称为复形映射或链变换.

$$\begin{array}{ccc}X^n & \xrightarrow{d^n} & X^{n+1}\\ {\scriptstyle f^n}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle f^{n+1}}\\ X'^n & \xrightarrow{d'^n} & X'^{n+1}\end{array}$$

上复形映射(complex map) 即“上复形的平移”.

上链变换(cochain transformation) 即“上复形的平移”.

复形映射(complex map) 见“上复形的平移”.

复形的平移(complex translation) 见“上复形的平移”.

链变换(chain transformation) 见“上复形的平移”.

上同调模(cohomology modules)　一种重要的模. 指由上复形给出的模. 设

$$X:\quad \cdots \to X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \to \cdots$$

是环 A 上的复形, 因为 $d^n d^{n+1}=0$, 所以 $\mathrm{Im}\,d^{n-1}\subseteq \ker d^n$, 于是 $H^n(X)=\ker d^n/\mathrm{Im}\,d^{n-1}$ 为 A 模, 称此模为上复形 X 的上同调模. 分别以 $Z^n(X)$, $B^n(X)$ 来表示 $\ker d^n$, $\mathrm{Im}\,d^{n-1}$, 把 X^n, Z^n, B^n, H^n 的元素分别称为上链、上循环、上边缘、上同调类. 若 X 是环 A 上的复形, 则对偶地可以定义复形 X 的同调模 $H_n(X)=\ker d_n/\mathrm{Im}\,d_{n+1}$, 把 X_n, Z_n, B_n, H_n 的元素分别称为链、循环、边缘、同调类.

同调模(homology modules)　见"上同调模".

上链(cochain)　见"上同调模".

上循环(cocycle)　见"上同调模".

上边缘(coboundary)　见"上同调模".

上同调类(cohomology class)　见"上同调模".

链(chain)　见"上同调模".

循环(cycle)　见"上同调模".

边缘(boundary)　见"上同调模".

同调类(homology class)　见"上同调模".

上同调函子(cohomology functor)　一种重要的函子. 指由上复形的范畴到模范畴的函子. 范畴 A-Cocomp, 它的对象是环 A 上所有上复形, 态射是复形的平移, 把这个范畴称为上复形的范畴, 它是一个阿贝尔范畴. 设 (X,d), (X',d') 是环 A 上的上复形, $f: X\to X'$ 是上复形的平移, 上同调函子 H^n: A-Cocomp$\to\mu_A$, 它将上复形 X 变成上同调模

$$H^n(X)=\ker\, d^n/\mathrm{Im}\ d^{n-1},$$

同时上复形的平移 f 变成

$$H^n(f):\ x^n+\mathrm{Im}\,d^{n-1}\to f^n(x^n)+\mathrm{Im}\,d'^{\,n-1}$$
$$(x^n\in\ker d^n).$$

上同调函子 H^n 是加性共变函子. 对偶地, 环 A 上所有复形和复形的平移组成一个范畴, 称为复形的范畴, 记为 A-Comp, 函子 H_n: A-Comp$\to\mu_A$ 称为同调函子.

上复形范畴(cocomplex category)　见"上同调函子".

复形范畴(complex category)　见"上同调函子".

同调函子(homology functor)　见"上同调函子".

右复形(right complex)　一种特殊的上复形. 设 X 是一个上复形, 若 $X^n=0$, $\forall\, n<0$, 则称 X 为右复形. 因此, 右复形具有如下形式

$$\cdots\to 0\to 0\to X^0\xrightarrow{d^0}X^1\xrightarrow{d^1}X^2\to\cdots.$$

对偶地, 把复形

$$\cdots\to X_1\xrightarrow{d_1}X_0\to 0\to 0\to\cdots$$

称为左复形.

左复形(left complex)　见"右复形".

复形的短正合列(short exact sequence of complexes)　复形范畴中的短正合列. 设 $0\to X'\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}X''\to 0$ 是复形的序列, 其中 0 代表复形 $\cdots\to 0\to 0\to 0\to\cdots$. 若交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X'_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & X_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & X''_{n+1} & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle d'_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle d_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle d''_{n+1}} & & \\
0 & \longrightarrow & X'_{n} & \xrightarrow{f_{n}} & X_{n} & \xrightarrow{g_{n}} & X''_{n} & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle d'_{n}} & & \downarrow{\scriptstyle d_{n}} & & \downarrow{\scriptstyle d''_{n}} & & \\
0 & \longrightarrow & X'_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & X_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & X''_{n-1} & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle d'_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle d_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle d''_{n-1}} & & \\
0 & \longrightarrow & X'_{n-2} & \xrightarrow{f_{n-2}} & X_{n-2} & \xrightarrow{g_{n-2}} & X''_{n-2} & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

中, 每行皆正合, 则称这个序列是复形的短正合列. 对偶地, 可以定义上复形的短正合列.

上复形的短正合列(short exact sequence of cocomplexes)　见"复形的短正合列".

同调正合列定理(exact sequence theorem in homology)　同调代数的基本定理之一. 若

$$0\to X'\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}X''\to 0$$

是复形的短正合列, 则存在模同态

$$\Delta_n:\ H_n(X'')\to H_{n-1}(X'),$$

使得序列

$$\cdots\to H_n(X')\xrightarrow{H_n(f)}H_n(X)\xrightarrow{H_n(g)}H_n(X'')$$
$$\xrightarrow{\Delta_n}H_{n-1}(X')\xrightarrow{H_{n-1}(f)}H_{n-1}(X)\to\cdots\quad(*)$$

正合. 这个结论称为同调正合列定理. 上面构造的同态 Δ_n 称为连结同态, 而把序列($*$)称为由复形的短正合列

$$0\to X'\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}X''\to 0$$

决定的长正合同调列. 对偶地, 有上同调正合列定理及长正合上同调列.

上同调正合列定理(exact sequence theorem in cohomology)　见"同调正合列定理".

长正合同调列(long exact homology sequence)　见"同调正合列定理".

长正合上同调列(long exact cohomology sequence)　见"同调正合列定理".

连结同态(connecting homomorphism)　见"同调正合列定理".

链同伦(chain homotopy) 同调代数中来自拓扑学的一个重要概念. 设 $f,g:X\to X'$ 是复形的平移,若存在 A 同态 $s_n:X_n\to X_{n+1}'$ 的族 $S=\{s_n\mid n\in \mathbf{Z}\}$,使得 $f_n-g_n=d'_{n+1}s_n+s_{n-1}d_n$, $\forall\ n$,则称 S 为由 f 到 g 的一个链同伦,这时称 f 与 g 同伦,记为 $S:f\simeq g$. 若记 $\widetilde{f}_n=H_n(f)$,则当 $f\simeq g$ 时,有 $\widetilde{f}_n=\widetilde{g}_n$, $\forall\ n$,即 f,g 在同调中诱导出相同的映射.

设 X 是复形,若 $1_X=\{1_{X_n}\mid\forall\ n\in\mathbf{Z}\}$,则 $1_X:X\to X$ 是复形的平移,即复形 X 的恒等映射. 对于复形的平移 $f:X\to X'$,若存在 $f':X'\to X$,使得 $f'f\simeq 1_X$, $ff'\simeq 1_{X'}$,则称 f 为等价. 当它存在时,就有

$$H_n(X)\cong H_n(X').$$

模上的左复形(left complex over a module) 一种特殊的复形. 设 M 是 A 模,左复形

$$\cdots\to X_1\to X_0\xrightarrow{\varepsilon}M\to 0 \qquad (1)$$

称为模 M 上的左复形,把 A 同态 ε 称为增广同态. 若序列(1)是正合列,则称为模 M 上的零调左复形. 对偶地,模 M 上的右复形是指右复形

$$0\to M\xrightarrow{\varepsilon}Y^0\to Y^1\to Y^2\to\cdots, \qquad (2)$$

若序列(2)是正合列,则称为模 M 上的零调右复形.

模上的右复形(right complex over a module) 见"模上的左复形".

增广同态(augmentation homomorphism) 见"模上的左复形".

模上的零调左复形(acyclic left complex over a module)见"模上的左复形".

模上的零调右复形(acyclic right complex over a module) 见"模上的左复形".

投射分解(projective resolution) 一种特殊的左复形. 它是内射分解的对偶概念. 设 M 是 A 模,M 上的零调投射左复形称为 M 的投射分解,它是一个正合序列

$$\cdots\to P_2\to P_1\to P_0\xrightarrow{\varepsilon}M\to 0,$$

其中每个 P_n 都是 A 投射模. 每个模 M 都有投射分解,并且,除投射等价外是惟一确定的.

内射分解(injective resolution) 投射分解的对偶概念. 设 M 是 A 模,M 上的零调内射右复形称为 M 的内射分解,它是一个正合序列

$$0\to M\xrightarrow{\varepsilon}Q^0\to Q^1\to Q^2\to\cdots,$$

其中每个 Q^n 都是 A 内射模. 每个模 M 都有内射分解,并且,除内射等价外是惟一确定的.

自由分解(free resolution) 一种特殊的投射分解. 设 M 是 A 模,若有正合序列

$$\cdots\to F_2\to F_1\to F_0\xrightarrow{\varepsilon}M\to 0, \qquad (*)$$

其中每个 F_n 都是 A 自由模,由序列(1)决定的投射分解称为模 M 的自由分解. 每个模 M 都有自由分解. 若在 M 的自由分解($*$)中,每一个 F_n 都是有限生成 A 自由模,且分解($*$)长度有限(只有有限个 F_n),则($*$)又称为 M 的有限自由分解(FFR). 有有限自由分解的 M 必为有限生成模.

有限自由分解(finite free resolution) 见"自由分解".

右导出函子(right derived functor) 一类重要的函子. 左导出函子的对偶概念,是由函子 T 导出的新函子. 设 $T:\mu_A\to\mu_B$ 是加性共变函子,M 是任意 A 模,

$$0\to M\xrightarrow{\varepsilon}Q^0\xrightarrow{d^0}Q^1\xrightarrow{d^1}Q^2\to\cdots$$

是 M 的内射分解,由 T 得到右复形

$$0\to T(Q^0)\xrightarrow{T(d^0)}T(Q^1)\xrightarrow{T(d^1)}T(Q^2)\to\cdots. \qquad (1)$$

以 $R^nT(M)$ 表示(1)的上同调模,即

$$R^nT(M)=\ker T(d^n)/\operatorname{Im}T(d^{n-1}). \qquad (2)$$

这些 $R^nT(M)$ 与选取 M 的内射分解无关,同时,对任何模同态 $f:M\to M'$,可以定义出一个 B 同态

$$R^nT(f):\ R^nT(M)\to R^nT(M'),$$

使得 $R^nT:\mu_A\to\mu_B$ 是一个加性共变函子,称为由 T 所导出的右导出函子. 若 Q 是内射模,则当 $n>0$ 时,$R^nT(Q)=0$. 若 T 是左正合的,则 R^0T 与 T 自然等价. 若 $T:\mu_A\to\mu_B$ 是加性逆变函子,M 是任意 A 模,则用 M 的投射分解,得到加性逆变函子 $R^nT:\mu_A\to\mu_B$,称之为逆变函子 T 的右导出函子.

左导出函子(left derived functor) 一类重要的函子. 右导出函子的对偶概念. 设 $T:\mu_A\to\mu_B$ 是加性共变函子,M 是任意 A 模,

$$\cdots\to P_2\xrightarrow{d_2}P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{\varepsilon}M\to 0$$

是 M 的投射分解,由 T 得到左复形

$$\cdots\to T(P_2)\xrightarrow{T(d_2)}T(P_1)\xrightarrow{T(d_1)}T(P_0)\to 0. \qquad (1)$$

以 $L_nT(M)$ 表示(1)的同调模,即

$$L_nT(M)=\ker T(d_n)/\operatorname{Im}T(d_{n+1}). \qquad (2)$$

这些 $L_nT(M)$ 与选取 M 的投射分解无关,同时,对任何模同态 $f:M\to M'$,可以定义出一个 B 同态

$$L_nT(f):\ L_nT(M)\to L_nT(M'),$$

使得 $L_nT:\mu_A\to\mu_B$ 是一个加性共变函子,称为由 T 所导出的左导出函子. 若 P 是投射模,则当 $n>0$ 时,$L_nT(P)=0$. 若 T 是右正合的,则 L_0T(即函子 T 的零阶左导出函子)与 T 自然等价. 若 $T:\mu_A\to\mu_B$ 是加性逆变函子,M 是任意 A 模,则由 M 的内射分解,得到加性逆变函子 $L_nT:\mu_A\to\mu_B$,称之为逆变函子 T 的左导出函子.

导出函子的长正合列(long exact sequence of a derived functor) 一种重要的正合列. 导出函子作用于模的短正合列得到的正合列,在同调代数中占有重要地位. 若 $T:\mu_A\to\mu_B$ 是加性共变函子,则对每

个 A 模的短正合列 $0\to M'\to M\to M''\to 0$，必存在连结同态

$$\Delta^n: R^nT(M'')\to R^{n+1}T(M'),$$
$$\Delta_n: L_nT(M'')\to L_{n-1}T(M'),$$

使得下面两个序列都是正合序列：

$$\cdots\to R^nT(M')\to R^nT(M)\to R^nT(M'')$$
$$\xrightarrow{\Delta^n} R^{n+1}T(M')\to R^{n+1}T(M)\to\cdots;\qquad(1)$$
$$\cdots\to L_nT(M')\to L_nT(M)\to L_nT(M'')$$
$$\xrightarrow{\Delta_n} L_{n-1}T(M')\to L_{n-1}T(M)\to\cdots,\qquad(2)$$

称它们为导出函子的长正合列. 对于加性逆变函子，也有类似结果.

函子 Ext(functor Ext)　一种重要的函子. 指函子 Hom 的右导出函子. 设 M 是给定的右 A 模，若 $T=\mathrm{Hom}_A(M,-)$，则 $T:\mu_A\to\mu_Z$ 是加性共变函子 $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ 的右导出函子，以 $\mathrm{Ext}_A^n(M,-)$ 表示，它是加性共变函子. 函子 $\mathrm{Ext}_A^0(M,-)$ 和 $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ 是自然等价的，因此，若 $0\to N'\to N\to N''\to 0$ 是右 A 模的短正合列，则有长正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_A(M,N')\to\mathrm{Hom}_A(M,N)$$
$$\to\mathrm{Hom}_A(M,N'')\xrightarrow{\Delta^0}\mathrm{Ext}_A^1\to\cdots.\qquad(1)$$

函子 $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ 的右导出函子以 $\mathrm{Ext}_A^n(-,N)$ 表示，它是加性逆变函子. 于是，对 μ_A 中的任何两模 M 与 N，$\mathrm{Ext}_A^n(M,N)$ 就有两种求法：一个是先取 M 的投射分解 (P,d)，再取上复形 $\mathrm{Hom}_A(P,N)$ 的上同调模；另一个是先取 N 的一个内射分解 (Q,d)，再取上复形 $\mathrm{Hom}_A(M,Q)$ 的上同调模. 由这两种方法所求的上同调模是自然同构的. 函子 $\mathrm{Ext}_A^0(-,N)$ 和 $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ 是自然等价的，因此，若 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是右 A 模的短正合列，则有长正合 Ext 列

$$0\to\mathrm{Hom}_A(M'',N)\to\mathrm{Hom}_A(M,N)$$
$$\to\mathrm{Hom}_A(M',N)\xrightarrow{\Delta^0}\mathrm{Ext}_A^1(M'',N)\to\cdots.\qquad(2)$$

考虑模扩张与 Ext 的关系：模 M 通过 N 的一个扩张是一个模的短正合序列

$$(S)\,0\to N\to X\to M\to 0;$$

设 M 通过 N 的另一扩张为

$$(S')\,0\to N\to X'\to M\to 0,$$

若存在模同构 $f:X\to X'$，使得右图交换，则称 S 与 S' 是等价扩张. M 通过 N 的扩张的等价类的集合 $E(M,N)$ 与 $\mathrm{Ext}_A^1(M,N)$ 是一一对应的. 用同样的方法，$\mathrm{Ext}_A^n(M,N)$ 与 n 阶扩张

$$O\to N\to X\ (\text{上}),\ X'\ (\text{下})\to M\to O,\quad f: X\to X'$$

$$0\to N\to X_{n-1}\to\cdots\to X_0\to M\to 0\ (\text{正合})$$

的等价类集合一一对应. 由于这个原因，函子 Ext 才用“扩张”前三个字母作为它的记号.

长正合 Ext 列(long exact Ext sequence)　见“函子 Ext”.

函子 Tor(functor Tor)　一种重要的函子. 指函子 $\otimes$ 的左导出函子. 设 M 是一个(固定的)右 A 模，若 $T=M\otimes_A-$，则 $T:{}_A\mu\to\mu_Z$ 是加性共变函子，$M\otimes_A-$ 的左导出函子以 $\mathrm{Tor}_n^A(M,-)$ 表示，它是加性共变函子. 函子 $\mathrm{Tor}_0^A(M,-)$ 和 $M\otimes_A-$ 是自然等价的，因此，若 $0\to N'\to N\to N''\to 0$ 是左 A 模的短正合列，则有长正合列

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_1^A(M,N'')\xrightarrow{\Delta_1}M\otimes_AN'$$
$$\to M\otimes_AN\to M\otimes_AN''\to 0.\qquad(1)$$

函子 $-\otimes_AN$ 的左导出函子以 $\mathrm{Tor}_n^A(-,N)$ 表示，它是加性共变函子. 于是，对任何右 A 模 M 与左 A 模 N，$\mathrm{Tor}_n^A(M,N)$ 就有两种求法：一个是先取 M 的投射分解 (P,d)，再取复形 $P\otimes_AN$ 的同调模；另一个是先取 N 的一个投射分解 (Q,d)，再取复形 $M\otimes_AQ$ 的同调模. 然而，由这两种方法所求的同调模是自然同构的. 函子 $-\otimes_AN$ 和 $\mathrm{Tor}_0^A(-,N)$ 是自然等价的，因此，若 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是右 A 模的短正合列，则有长正合序列

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_1^A(M'',N)\to M'\otimes_AN$$
$$\to M\otimes_AN\to M''\otimes_AN\to 0.\qquad(2)$$

函子 Tor 与模的挠性质有一定的关系，由于这个原因，函子 Tor 才用 torsion 前三个字母作为它的记号.

长正合 *Tor* 列(long exact Tor sequence)　见“函子 Tor”.

模的投射维数(projective dimension of a module)　亦称模的同调维数. 对模的一种重要刻画. 内射维数的对偶概念，是模 M 的投射分解的最小长度. 设 M 是左 A 模且 $M\neq 0$，若存在左 A 模的正合列

$$0\to P_n\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to M\to 0,\qquad(*)$$

其中每个 P_i 皆是投射模，且不存在与$(*)$类型相同而项数更小的正合列，则称 M 的左投射维数为 n，记为 $\mathrm{l.pd}_AM=n$. 若$(*)$这样的序列不存在，则规定 $\mathrm{l.pd}_AM=\infty$；若 $M=0$，则规定 $\mathrm{l.pd}_AM=-1$. 模 M 的左投射维数也称为左同调维数，记为 $\mathrm{l.dh}_AM$. $\mathrm{l.pd}_AM\leqslant n\ (n\geqslant 1)$ 等价于 $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M,N)=0,\forall N$. 非零左 A 模 P 是投射模的充分必要条件为 $\mathrm{l.pd}_AP=0$. 同样地，若 N 是右 A 模，则可以定义 N 的右投射维数 $\mathrm{r.pd}_AN$，也称为 N 的右同调维数 $\mathrm{r.dh}_AN$. 卡普兰斯基(Kaplansky, I.)证得：若 A 是交换环，则每个 A 模的投射维数为 0 或 ∞ 当且仅当 A 是有限个局部环 A_i 的直和，且每个 A_i 含有 T 幂零的极

大理想.

模的同调维数(homological dimension of a module) 即"模的投射维数".

环的整体维数(global dimension of a ring) 环的一种同调维数.对环的一种重要刻画.环 A 的左整体维数

$$\mathrm{l.gl.dim}\,A = \sup\{\mathrm{l.pd}_A M \mid M \in {}_A\mu\},$$

它的右整体维数

$$\mathrm{r.gl.dim}\,A = \sup\{\mathrm{r.pd}_A M \mid M \in \mu_A\}.$$

有的环其左、右整体维数并不相等,但也有的环其左、右整体维数相等,这时其左、右维数之值都称为整体维数,记以 $\mathrm{gl.dim}\,A$. 奥斯兰德(Auslander, M.)于 1955 年证明:$\mathrm{l.gl.dim}\,A$ 等于左 A 循环模的投射维数的上确界,从而缩小了计算中模的范围. $\mathrm{l.gl.dim}\,A=0$ 与 $\mathrm{r.gl.dim}\,A=0$ 都是 A 为阿廷半单环的充分必要条件.若 $\mathrm{l.gl.dim}\,A\leqslant 1$,则称 A 是左遗传的,这等价于环 A 的每个左理想都是投射模.环 A 的整体维数与 A 上 n 级全矩阵环的整体维数是相等的.

模的内射维数(injective dimension of a module) 对模的一种重要刻画.与模的投射维数对偶的概念,是该模的内射分解之最小长度.设 M 是左 A 模且 $M\neq 0$,若存在左 A 模的正合列

$$0 \to M \to Q_0 \to Q_1 \to \cdots \to Q_n \to 0, \qquad (1)$$

其中每个 Q_i 皆是内射模,且不存在与(*)类型相同而项数更小的正合列,则称 M 的左内射维数为 n,记为 $\mathrm{l.Id}_A M=n$. 若(1)这样的序列不存在,则规定 $\mathrm{l.Id}_A M=\infty$;若 $M=0$,则规定 $\mathrm{l.Id}_A M=-1$. $\mathrm{l.Id}_A M\leqslant n(n\leqslant 1)$ 等价于 $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(N,M)=0,\forall\, N$. 非零左 A 模 Q 是内射模的充分必要条件为 $\mathrm{l.Id}_A Q=0$. 同样地,若 N 是右 A 模,则可以定义 N 的右内射维数 $\mathrm{r.Id}_A N$. 左(右)A 模的内射维数的上确界与环 A 的左(右)整体维数是相等的.

模的平坦维数(flat dimension of a module) 对模的一种重要刻画.模的平坦分解之最小长度.设 M 是左 A 模且 $M\neq 0$,若存在左 A 模的正合列

$$0\to F_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to M\to 0, \qquad (*)$$

其每个 F_i 皆是平坦模,且不存在与(*)类型相同而项数更小的正合列,则称 M 的左平坦维数为 n,记为 $\mathrm{l.Fd}_A M=n$. 若(*)这样的序列不存在,规定 $\mathrm{l.Fd}_A M=\infty$;若 $M=0$,规定 $\mathrm{l.Fd}_A M=-1$. 模 M 的左平坦维数也称为弱同调维数,记为 $\mathrm{w.l.dh}_A M$. $\mathrm{l.Fd}_A M\leqslant n(n\geqslant 1)$ 等价于 $\mathrm{Tor}_{n+1}^A(N,M)=0,\forall\, N$. 非零左 A 模 M 是平坦模的充分必要条件为 $\mathrm{l.Fd}_A M=0$. 对于任意的左 A 模 M,皆有 $\mathrm{l.Fd}_A M\leqslant \mathrm{l.pd}_A M$. 巴斯(Bass, H.)于 1959 年证明:对任意左 A 模 M 皆有 $\mathrm{l.Fd}_A M=\mathrm{l.pd}_A M$ 的充分必要条件是 A 为左完全环.同样地,若 N 是右 A 模,则可以定义 N 的右平坦维数 $\mathrm{r.Fd}_A N$,也记为 $\mathrm{w.r.dh}_A N$.

模的弱同调维数(weak homological dimension of a module) 见"模的平坦维数".

环的弱整体维数(weak global dimension of a ring) 环的一种同调维数.环 A 的弱整体维数

$$\mathrm{w.gl.dim}\,A = \sup\{\mathrm{l.Fd}_A M \mid M \in {}_A\mu\} = \sup\{\mathrm{r.Fd}_A N \mid N \in \mu_A\}.$$

与环的整体维数类似,$\mathrm{w.gl.dim}\,A$ 等于其循环模的平坦维数的上确界.同时,

$$\mathrm{w.gl.dim}\,A \leqslant \min(\mathrm{l.gl.dim}\,A, \mathrm{r.gl.dim}\,A).$$

卡普兰斯基(Kaplansky, I.)于 1958 年证明了这些值一般都不相等. $\mathrm{w.gl.dim}\,A=0$ 当且仅当 A 是在冯·诺伊曼意义下的正则环,这等价于每个左(右)A 模都平坦. $\mathrm{w.gl.dim}\,A\leqslant 1$ 的充分必要条件是 A 的左理想全平坦.半遗传环(有限生成理想为投射模的环)的弱整体维数$\leqslant 1$. 对诺特环,弱整体维数与左、右整体维数是相同的.环的弱整体维数也常被简称环的弱维数.

环的弱维数(weak dimension of a ring) 即"环的弱整体维数".

第一换环定理(first change of ring theorem) 关于同调维数的一个定理.若 λ 为环 A 的中心中的元素,且不为零因子,$B=A/(\lambda)$,M 为一个左 B 模,则当 $\mathrm{l.pd}_B M=n<\infty$ 时,有 $\mathrm{l.pd}_A M=n+1$. 因此,若 $\mathrm{l.gl.dim}B<\infty$,则 $\mathrm{l.gl.dim}\,A\geqslant \mathrm{l.gl.dim}\,B+1$,其中,对任意 $a\in A, x\in M$,其积为 $ax=\bar{a}x$,$\bar{a}$ 表示在自然同态 $A\to A/(\lambda)$ 下 a 所取的像.

第二换环定理(second change of ring theorem) 关于同调维数的一个定理.若 λ 为环 A 的中心中的元素,且不为零因子,$B=A/(\lambda)$,M 为左 A 模,且 $\lambda x=0$ 时必有 $x=0(\forall\, x\in M)$,则 $M/\lambda M$ 为一个左 B 模,且 $\mathrm{l.pd}_B(M/\lambda M)\leqslant \mathrm{l.pd}_A M$.

第三换环定理(third change of ring theorem) 关于同调维数的一个定理.若 A 是左诺特环,且 $J(A)$ 是环 A 的雅各布森根,$\lambda\in J(A)$ 为中心元素,且不为零因子,M 是有限生成的左 A 模,$\lambda x=0$ 时必有 $x=0(\forall\, x\in M)$,记 $B=A/(\lambda)$,则

$$\mathrm{l.pd}_B M/\lambda M = \mathrm{l.pd}_A M.$$

希尔伯特合冲定理(Hilbert syzygy theorem)关于多项式环同调维数的著名定理.设 K 是一个域,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 K 上的未定元,则

$$\mathrm{l.gl.dim}\,K[x_1,x_2,\cdots,x_n] = n.$$

更一般地,若 R 为任意环,则

$$\mathrm{l.gl.dim}R[x_1,x_2,\cdots,x_n] = n + \mathrm{l.gl.dim}R.$$

对于环的弱整体维数,也有类似的结果.

诺特环的同调维数(homological dimension of

Noetherian rings) 同调维数对诺特环的重要应用. 设 A 始终表示交换诺特环. 此时, 环 A 的三种维数是相等的, 即

$$\mathrm{l.gl.dim}\,A=\mathrm{r.gl.dim}\,A=\mathrm{w.gl.dim}\,A.$$

对于有限生成模 M, 有 $\mathrm{Fd}_A M=\mathrm{pd}_A M$. 当 $\mathfrak{m}$ 是 A 的任一个极大理想时, 有 $\mathrm{gl.dim}\,A=\sup.\mathrm{gl.dim}\,A\mathfrak{m}$ 成立, 从而问题归结为考察局部环. 若 A 是局部环, 且 $\mathrm{gl.dim}\,A<\infty$, 则 A 必是正则局部环,

$$\mathrm{gl.dim}\,A=\dim{}_k\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,$$

其中 $k=A/\mathfrak{m}$ 是域. 奥斯兰德(Auslander, M.)与布克斯鲍姆(Buchsbaum, D. A.)于 1959 年证明了正则局部环是单一分解环. 对于交换诺特半局部环 A, 若 $\mathrm{gl.dim}\,A<\infty$, 则 A 是有限个单一分解环的直和. 对于交换诺特环 A, $\mathrm{gl.dim}\,A<\infty$ 当且仅当 $\mathrm{K.dim}A<\infty$, 且 $A_{\mathfrak{m}}$ 是正则局部环, 其中 $\mathfrak{m}$ 是环 A 的任意极大理想, K. dim 表示克鲁尔维数. 对于交换诺特半局部环, $\mathrm{gl.dim}\,A<\infty$ 当且仅当 $\mathrm{gl.dim}\,A=\mathrm{I}(J/J^2)$, 这里 J 是环 A 的雅各布森根, $\mathrm{I}(J/J^2)$ 是模 J/J^2 的长度. 而交换诺特局部环 A, $\mathrm{gl.dim}\,A=n$ 的充分必要条件为 $\mathrm{pd}_A A/\mathfrak{m}=n$, 这里 $\mathfrak{m}$ 是环 A 的极大理想. 由于代数几何等学科的需要, 对交换诺特环的同调维数已进行了详细的研究.

G 模(G-module) 一种重要的模. 它是以群为算子区的模. 设 G 为一个乘法群, M 是加法交换群, 若对每个 $\sigma\in G$ 和 $x\in M$, 都有惟一确定的积 $\sigma x\in M$, 并且对任意 $x,y\in M$, $\sigma,\tau\in G$, 满足条件:

1. $\sigma(x+y)=\sigma x+\sigma y$;
2. $\sigma(\tau x)=(\sigma\tau)x$;
3. $1x=x$, 其中 1 是群 G 的单位元素;

则称 M 为一个左 G 模. 设 M 是左 G 模, 若 $\sigma x=x$, $\forall\,\sigma\in G, x\in M$, 则称 M 是平凡左 G 模. 设 G 是一个群, 以 $\mathbf{Z}G$ 表示整数环 $\mathbf{Z}$ 上的群环. 若对任意 $\lambda=\sum n_\sigma\sigma\in\mathbf{Z}G$, $x\in M$, 规定 $\lambda x=\sum n_\sigma(\sigma x)$, 则 M 是左 $\mathbf{Z}G$ 模. 反过来, 若 M 是左 $\mathbf{Z}G$ 模, 规定 $\sigma x=(1\sigma)x$, 这里 $\sigma\in G$, $x\in M$, $1\in\mathbf{Z}$, 则 M 也是左 G 模. 因此, 没有必要区分这两类模, 这就是说, G 模就是 $\mathbf{Z}G$ 模, $\mathbf{Z}G$ 模也就是 G 模.

平凡 G 模(trivial G-module) 见"G 模".

群的第 n 个上同调群(n-th cohomology group of a group) 群同调理论中的重要研究对象. 设 M 是左 G 模, 视整数加法群 $\mathbf{Z}$ 为平凡左 G 模. 称

$$H^n(G,M)=\mathrm{Ext}^n_G(\mathbf{Z},M)$$

为 G 的以 M 为系数的第 n 个上同调群.

$$H^n(G,-):{}_G\mu\to\mu_{\mathbf{Z}}$$

是加性共变函子. 若 M 是左 G 内射模, 则 $H^n(G,M)=0, \forall\,n\geqslant 1$. 对任意左 G 模的短正合列

$$0\to M'\to M\to M''\to 0,$$

必有长正合列

$$0\to H^0(G,M')\to H^0(G,M)$$
$$\to H^0(G,M'')\to H^1(G,M')\to\cdots.$$

群的第 n 个同调群(n-th homology group of a group) 群同调理论中的重要研究对象. 设 M 是左 G 模, 取 $\mathbf{Z}$ 为平凡右 G 模. 称 $H_n(G,M)=\mathrm{Tor}^G_n(\mathbf{Z},M)$ 为 G 的以 M 为系数的第 n 个同调群. 但是, 以右 G 模 N 为系数的 n 阶同调群为

$$H_n(G,N)=\mathrm{Tor}^G_n(N,\mathbf{Z}).$$

$H_n(G,-):{}_G\mu\to\mu_{\mathbf{Z}}$ 是加性共变函子. 若 M 是左 G 投射模, 则 $H_n(G,M)=0, \forall\,n\geqslant 1$. 对任意左 G 模的短正合列 $0\to M'\to M\to M''\to 0$, 必有长正合列

$$\cdots\to H_1(G,M'')\to H_0(G,M')$$
$$\to H_0(G,M)H_0(G,M'')\to 0.$$

上同调群 H^0(cohomology group H^0) 同调代数的基本概念之一. 指 G 模的第 0 个上同调群. 设 M 是左 G 模, 若

$$M^G=\{x\mid x\in M,\sigma(x)=x,\forall\,\sigma\in G\},$$

则 $H^0(G,M)\cong M^G$. 因此, $H^0(G,M)$ 是 G 的不变元所成的子模 M^G.

同调群 H_0(homology group H_0) 同调代数的基本概念之一. 指 G 模的第 0 个同调群. 设 M 是左 G 模, I 是群环 $\mathbf{Z}G$ 的增广理想, 若 $IM=\{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n\mid\lambda_i\in I, x_i\in M\}$, $M_G=M/IM$, 则 $H_0(G,M)\cong M_G$. 因此, $H_0(G,M)$ 是 M 的使得 G 的运算是平凡的最大商模 M_G.

$\mathbf{Z}$ 的标准齐次 G 自由分解(standard homogeneous G-free resolution of $\mathbf{Z}$) 平凡 G 模 $\mathbf{Z}$ 的一种标准自由分解. 设 F_n 是 $\mathbf{Z}$ 自由模, $\{\langle\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\rangle\mid\sigma_i\in G\}$ 是它的一个 $\mathbf{Z}$ 基. 若对任意 $\sigma\in G$, 规定

$$\sigma\langle\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_n\rangle=\langle\sigma\sigma_0,\sigma\sigma_1,\cdots,\sigma\sigma_n\rangle,$$

则 F_n 是左 G 自由模, $\{\langle 1,\sigma_1,\cdots,\sigma_n\rangle\mid\sigma_i\in G\}$ 是它的一个 G 基. 定义 $d_n:F_n\to F_{n-1}$ 和 $\varepsilon:F_0\to\mathbf{Z}$, 使得

$$d_n(\langle\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_n\rangle)$$
$$=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\langle\sigma_0,\cdots,\hat{\sigma}_r,\cdots,\sigma_n\rangle,$$
$$\varepsilon(\langle\sigma_0\rangle)=1,$$

其中 $\langle\sigma_0,\cdots,\hat{\sigma}_r,\cdots,\sigma_n\rangle=\langle\sigma_0,\cdots,\sigma_{r-1},\sigma_{r+1},\cdots,\sigma_n\rangle$. 于是, 得到左 G 模的正合列

$$\cdots\to F_n\xrightarrow{d_n}F_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}F_{n-2}\to\cdots$$
$$\to F_1\xrightarrow{d_1}F_0\xrightarrow{\varepsilon}\mathbf{Z}\to 0,\qquad(*)$$

把正合列(*)称为 $\mathbf{Z}$ 的标准齐次 G 自由分解.

$\mathbf{Z}$ 的标准非齐次 G 自由分解(standard non-homogeneous G-free resolution of $\mathbf{Z}$) 平凡 G 模 $\mathbf{Z}$ 的一种标准自由分解. 设 F_n 是左 G 自由模, $\{[\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n]\mid\sigma_i\in G\}$ 是它的一个 G 基. F_0 有一个 G 基, 仅

含一个元素，记为[ ]. 规定 $d_n: F_n \to F_{n-1}$，使得

$$\begin{aligned} & d_n([\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n]) \\ & = \sigma_1[\sigma_2,\cdots,\sigma_n] \\ & \quad + \sum_{r=1}^{n-1}(-1)^r[\sigma_1,\cdots,\sigma_{r-1},\sigma_r\sigma_{r+1},\sigma_{r+2},\cdots,\sigma_n] \\ & \quad + (-1)^n[\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n-1}], \end{aligned}$$

其中 $n=1$ 时，$d_1([\sigma_1])=\sigma_1[\ ]-[\ ]$，同时，规定 ε: $F_0 \to \mathbf{Z}$，使得 $\varepsilon([\ ])=1$. 于是，得到左 G 模的正合列

$$\cdots \to F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} F_{n-2} \to \cdots$$
$$\to F_1 \xrightarrow{d_0} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0, \qquad (*)$$

把正合列(*)称为 $\mathbf{Z}$ 的标准非齐次 G 自由分解. 平凡 G 模 $\mathbf{Z}$ 的标准齐次 G 自由分解与标准非齐次 G 自由分解可以互相转化.

交叉同态(crossed homomorphism)　亦称导映射. 一种特殊的映射. 设 M 是左 G 模，$f: G \to M$ 是一个映射. 若对任意 $\sigma,\tau \in G$，都有 $f(\sigma\tau)=\sigma f(\tau)+f(\sigma)$，则称映射 f 为由群 G 到左 G 模 M 的交叉同态. 若 f,g 是两个交叉同态，对任意 $\sigma \in G$，规定

$$(f+g)(\sigma)=f(\sigma)+g(\sigma),$$

则由 G 到 M 的所有交叉同态组成一个加法交换群，记为 $D(G,M)$. 设 $f: G \to M$ 是一个映射. 若存在一个元素 $x \in M$，使得对任意 $\sigma \in G$，都有 $f(\sigma)=\sigma x - x$，则称映射 f 为由群 G 到左 G 模 M 的主交叉同态或主导映射. 由 G 到 M 的所有主交叉同态组成 $D(G,M)$ 的一个子群，记为 $ID(G,M)$.

导映射(derivation)　即“交叉同态”.

主交叉同态(principal crossed homomorphism)　见“交叉同态”.

主导映射(principal derivation)　见“交叉同态”.

上同调群 H^1(cohomology group H^1)　同调代数的一个重要概念. 指 G 模的第一个上同调群. 若 M 是任意左 G 模，则

$$H^1(G,M) \cong D(G,M)/ID(G,M),$$

其中 $D(G,M)$ 是导映射群，$ID(G,M)$ 是主导映射群. 若 M 是平凡左 G 模，则

$$H^1(G,M) \cong D(G,M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(G/[G,G],M),$$

其中 $[G,G]$ 是群 G 的换位子群.

同调群 H_1(homology group H_1)　同调代数的一个重要概念. 指 G 模的第一个同调群. 这里仅给出平凡 G 模的第一个同调群的计算公式. 若 G 是群，M 是平凡左 G 模，则

$$H_1(G,M) \cong (I/I^2) \otimes_{\mathbf{Z}} M \cong (G/[G,G]) \otimes_{\mathbf{Z}} M,$$

其中 I 是群环 $\mathbf{Z}G$ 的增广理想，$[G,G]$ 是群 G 的换位子群. 特别地，

$$H_1(G,\mathbf{Z}) \cong G/[G,G] \equiv G^{ab},$$

即 $H_1(G,\mathbf{Z})$ 为 G 的阿贝尔化. 因此 H_1 与代数 K 理论中的 K_1 群有密切的联系.

上同调群 H^2(cohomology group H^2)　同调代数的一个重要概念. 指 G 模的第二个上同调群. 若 G 是群，M 是左 G 模，则

$$H^2(G,M)=\frac{\text{因子系群}}{\text{主因子系群}}.$$

考虑群扩张与第二个上同调群 $H^2(G,M)$ 的关系. 把 M 的加法运算改为乘法，并把 σx 记为 x^σ. 于是，交换群 M 为左 G 模是指 $(xy)^\sigma=x^\sigma y^\sigma$，$(x^\tau)^\sigma=x^{\sigma\tau}$，$x^1=x$，其中 $x,y \in M$，$\sigma,\tau \in G$，1 是群 G 的单位元素. 设 G 是群，M 是阿贝尔群，M 的运算记为乘法，群 G 通过群 M 的一个扩张是指一个正合序列

$$1 \to M \xrightarrow{i} \Pi \xrightarrow{p} G \to 1,$$

其中 $M \xrightarrow{i} \Pi$ 是包含映射. 应用群 G 通过群 M 的扩张，可以决定 G 在 M 上的一个作用，使得 M 组成左 G 模，称为这个扩张的相伴的模. 若 G 是群，M 是左 G 模，则以 M 为相伴模的 G 通过 M 的扩张的等价类集与 $H^2(G,M)$ 一一对应.

格鲁恩伯格分解(Gruenberg resolution)　同调代数中的一类分解. 它是平凡左 G 模 $\mathbf{Z}$ 的一种自由分解. 设 G 是群，把 $\mathbf{Z}$ 看做平凡 G 模，于是得群的正合序列 $1 \to R \to F \xrightarrow{\pi} G \to 1$，其中 F 是自由群，R 是 F 的子群. 若 X 和 Y 分别是 F 和 R 的基，则有 $\mathbf{Z}$ 的左 G 自由分解

$$\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0, \qquad (*)$$

其中 $P_{2n}=L^n/L^{n+1}$ 是有基

$$\{(y_1-1)\cdots(y_n-1)+L^{n+1} \mid y_i \in Y\}$$

的左 G 自由模，$P_{2n-1}=L^{n-1}/L^nI$ 有基

$$\{(y_1-1)\cdots(y_{n-1}-1)(x-1) + L^nI \mid y_i \in Y, x \in X\},$$

$d_k: P_k \to P_{k-1}$ 是陪集映射的扩大. 其中 L 是 $\mathbf{Z}F$ 到 $\mathbf{Z}G$ 的环同态 $\pi: \sum n_i f_i \to \sum n_i \pi(f_i)$ 的核，$f_i \in F$，I 为 $\mathbf{Z}F$ 的增广理想. 称(*)为关于 G 表示为 F/R 的格鲁恩伯格分解.

霍普夫公式(Hopf's formula)　同调代数的一个重要公式. 计算第二个同调群 $H_2(G,\mathbf{Z})$ 的公式. 若 G 是群，把 $\mathbf{Z}$ 看做平凡左 G 模，则

$$H_2(G,\mathbf{Z}) \cong (R \cap [F,F])/[F,R], \qquad (*)$$

称(*)为霍普夫公式，其中，F 是自由群，R 是 F 的子群且 $F/R \cong G$.

分次模(graded module (in homological algebra))　同调代数的基本概念之一. 指由一些 A 模所组成的序列. $M=\{M_p \mid p \in \mathbf{Z}\}$ 称为一个(单)分次模，其中 M_p 均为 A 模. 环 A 上的一个复形 (X,d)

$$\cdots \to X_{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} X_p \xrightarrow{d_p} X_{p-1} \to \cdots,$$

若不考虑边缘同态 d，则决定一个分次模 $X=\{X_p \mid$

$p\in\mathbf{Z}\}$. 若 $N=\{N_p \mid p\in\mathbf{Z}\}$ 也是一个分次模，n 是一个固定的整数，则模同态 $f_p: M_p\to N_{p+n}$ 的集合 $f=\{f_p \mid p\in\mathbf{Z}\}$ 称为由 M 到 N 的 n 次的分次模映射. 这个映射常表成 $f[n]: M\to N$. 若分次模 $C=\{C_p \mid p\in\mathbf{Z}\}$ 中，对每个 $p\in\mathbf{Z}$ 都有 $C_p\subseteq M_p$，称 C 为 M 的分次子模，而分次模 $\{M_p/C_p \mid p\in\mathbf{Z}\}$ 称之为它们的分次商模. 模范畴 μ_A 中所有的分次模连同分次模映射构成一个阿贝尔范畴.

分次模映射(graded module map)　见“分次模”.

分次子模(graded submodule)　见“分次模”.

分次商模(graded quotient module)　见“分次模”.

双分次模(bigraded module)　分次模概念的推广. 指一些双指标的 A 模所组成的序列. 若 $M=\{M_{pq} \mid p,q\in\mathbf{Z}\}$ 是由 A 模 M_{pq} 所组成的序列，$\mathbf{Z}$ 是整数集，称 $M=\{M_{pq} \mid p,q\in\mathbf{Z}\}$ 为一个双分次模或称为双次模. 若 $N=\{N_{pq} \mid p,q\in\mathbf{Z}\}$ 也是一个双分次模，m 与 n 为一对整数，则模同态 $f_{pq}: M_{pq}\to N_{p+m,q+n}$ 的集合 $f=\{f_{pq} \mid p,q\in\mathbf{Z}\}$ 称为由 M 到 N 的 $[m,n]$ 次的分次模映射.

$[m,n]$ 次的分次模映射(mapping of graded modal with $[m,n]$ degree)　见“双分次模”.

正合偶(exact couple)　由两个双分次模所组成的正合三角形. 它是马西(Massey, W. S.)提出的，是谱序列理论一个重要概念. 若 $D=\{D_{pq}\}$ 与 $E=\{E_{pq}\}$ 为两个双分次模，$\varphi: D\to D$，$\psi: D\to E$ 与 $\theta: E\to D$ 是分次模映射，依次有次数 $[n_1,m_1]$，$[n_2,m_2]$ 与 $[n_3,m_3]$，

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\varphi[n_1,m_1]} & D \\ & {\scriptstyle\theta[n_3,m_3]}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle\psi[n_2,m_2]} & \\ & E & \end{array}$$

使在下列三角形的每个顶点处都正合，亦即有长正合序列

$$\cdots\to E_{p-n_3,q-m_3}\xrightarrow{\theta_{p-n_3,q-m_3}} D_{pq}\xrightarrow{\varphi_{pq}} D_{p+n_1,q+m_1}$$
$$\xrightarrow{\psi_{p+n_1,q+m_1}} E_{p+n_1+n_2,q+m_1+m_2}$$
$$\xrightarrow{\theta_{p+n_1+n_2,q+m_1+m_2}} D_{p+n_1+n_2+n_3,q+m_1+m_2+m_3}\to\cdots,$$

则称 D,E 连同 φ,ψ 与 θ 组成一个正合偶，记为 $(D,E,\varphi,\psi,\theta)$. 由正合偶可得出其导出偶，且由此可得出谱序列.

谱序列(spectral sequence)　一类特殊的双分次模序列. 在同调代数中，谱序列是一个非常重要的概念，也是计算同调的有力工具. 设 $\{E^r \mid r=1,2,3,\cdots\}$ 是双分次模 E^r 的序列，若对每个 r 都有双分次模映射 $d^r: E^r\to E^r$，使得 $d^r d^r=0$，且

$$E^{r+1}=H(E^r,d^r)=\ker d^r/\operatorname{Im} d^r,$$

则称序列 $\{E^r,d^r\}$ 为一个谱序列. 应用正合偶可以决定一个谱序列. 勒雷(Leray, J.)于 1945 年在代数拓扑中定义了谱序列的概念，科斯居尔(Koszul, J. L.)于 1947 年又把它推广到代数领域.

谱序列的极限项(limit term of a spectral sequence)　由谱序列决定的一个双分次模. 极限项在谱序列的理论中起很重要的作用. 设 $\{E^r,d^r\}$ 是一个谱序列，若取 $C^1=\ker d^1$，$B^1=\operatorname{Im} d^1$，则有

$$0\subseteq B^1\subseteq C^1\subseteq E^1,\quad E^2=C^1/B^1.$$

若再取 $C^2=\ker d^2$，$B^2=\operatorname{Im} d^2$，则有 C^1 的子分次模 B^2 与 C^2，使得

$$0\subseteq B^1\subseteq B^2\subseteq C^2\subseteq C^1\subseteq E^1,$$
$$E^3\cong C^2/B^2\cong\ker d^2/\operatorname{Im} d^2.$$

依此类推，必有

$$0\subseteq B^1\subseteq B^2\subseteq\cdots\subseteq B^n\subseteq\cdots$$
$$\subseteq C^n\subseteq\cdots\subseteq C^2\subseteq C^1\subseteq E^1,$$

且

$$E^r\cong C^{r-1}/B^{r-1}\cong\ker d^{r-1}/\operatorname{Im} d^{r-1}\ (r>1).$$

记

$$B^\infty_{pq}=\bigcup_r B^r_{pq},\quad C^\infty_{pq}=\bigcap_r C^r_{pq},\quad E^r_{pq}=C^\infty_{pq}/B^\infty_{pq}.$$

称双分次模 $\{E^\infty_{pq} \mid p,q\in\mathbf{Z}\}=E^\infty$ 为谱序列 $\{E^r,d^r\}$ 的极限项. 从直观上看，当 r 很大时，E^r 将近似地等于 E^∞.

滤子(同调代数)(filtration (in homological algebra))　一个对象的特殊的子对象的族. 设 μ 是范畴，C 是 μ 中的一个对象. 对象 C 的滤子 FC 是 C 的一个子对象的族 $\{F^pC \mid p\in\mathbf{Z}\}$，使得

$$\cdots\subseteq F^{p-1}C\subseteq F^pC\subseteq F^{p+1}C\subseteq\cdots.$$

有时也改写 F^{-p} 为 F_p. 一个 A 模 M 的滤子 FM 是 M 的一系列的子模

$$\cdots\subseteq F^pM\subseteq F^{p+1}M\subseteq\cdots\subseteq M;$$

一个分次模 $M=\{M_p \mid p\in\mathbf{Z}\}$ 的滤子 FM 是一系列的子分次模，$\{F^pM \mid p\in\mathbf{Z}\}$，且对任何 n 有一个序列

$$\cdots\subseteq F^pM_n\subseteq F^{p+1}M_n\subseteq\cdots\subseteq M_n;$$

一个复形 (X,d) 的滤子 FX 是一系列的子复形 $\{F^pX \mid p\in\mathbf{Z}\}$，且对任何 n 都有一个序列

$$\cdots\subseteq F^pX_n\subseteq F^{p+1}X_n\subseteq\cdots\subseteq X_n.$$

由复形的滤子可得一正合偶，因而可得一谱序列.

有界滤子(bounded filtration)　一种特殊的滤子. 设 $M=\{M_n \mid n\in\mathbf{Z}\}$ 是分次模，FM 是 M 的一个滤子，若对每一个 $n\in\mathbf{Z}$，有两个整数 $u=u_n$，$v=v_n$，使得当 $p\leqslant u$ 时，$F^pM_n=0$，而当 $p\geqslant v$ 时，$F^pM_n=M_n$，即对每一个 $n\in\mathbf{Z}$，都有有限链

$$0=F^uM_n\subseteq F^{u+1}M_n\subseteq\cdots\subseteq F^vM_n=M_n,$$

则称 FM 是有界滤子.

谱序列的收敛(convergence of a spectral sequence)　关于谱序列的极限. 设 $E=\{E^r\}$ 是一个谱

序列，$H=\{H_n\}$是分次模，若有 H 的滤子 F 使得

$$E_{pq}^{\infty}\cong F^pH_n/F^{p-1}H_n \quad (n=p+q),$$

则称 E 粗收敛于 H，记为

$$E\underset{p}{\rightarrow}H \quad 或 \quad E_{pq}^2\rightarrow H_{p+q}.$$

当上述滤子 F 为有界滤子时，称 E 收敛于 H，记为

$$E\underset{p}{\Rightarrow}H \quad 或 \quad E_{pq}^2\Rightarrow H_{p+q}.$$

双复形(bicomplex) 亦称二重复形. 复形概念的推广. 它是上双复形的对偶概念. 设 $M=\{M_{pq}\mid p, q\in \mathbf{Z}\}$是双分次模，$\partial[-1,0]:M\rightarrow M$ 与 $\delta[0,-1]$: $M\rightarrow M$ 是分次模映射，并且

$$\partial_{p-1,q}\partial_{pq}=0,$$
$$\delta_{p,q-1}\delta_{pq}=0,$$
$$\partial_{p,q-1}\delta_{pq}+\delta_{p-1,q}\partial_{pq}=0,$$

则称(M,∂,δ)为一个双复形，∂ 与 δ 为此双复形的微分或偏微分. 对偶地可以定义上双复形.

二重复形(double complex) 即“双复形”.

上双复形(cobicomplex) 见“双复形”.

双复形的全复形(total complex of a bicomplex) 复形概念的推广. 由双复形决定的一个复形，是上双复形的全复形的对偶概念. 设(M,∂,δ)是双复形，设

$$T_n=\bigoplus_{p+q=n}M_{pq}, \quad \tau_n: T_n\rightarrow T_{n-1},$$

使得

$$\tau_n=\sum_{p+q=n}\partial_{pq}+\delta_{pq},$$

则(T,τ)是一个复形，此复形称为双复形(M,∂,δ)的全复形，记为 $\mathrm{Tot}\,M$，其第 n 项为$(\mathrm{Tot}\,M)_n=T_n$. 有时把 $\mathrm{Tot}\,M$ 简记为 T.

上双复形的全复形(total complex of a bicomplex) 复形概念的推广. 由上双复形决定的一个复形，是双复形的全复形的对偶概念. 设(M,∂,δ)是上双复形，设

$$T^n=\prod_{p+q=n}M^{pq}, \quad \tau^n: T^n\rightarrow T^{n+1},$$

使得

$$\tau^n=\sum_{p+q=n}\partial^{pq}+\delta^{pq},$$

则(T,τ)是一个复形，此复形称为上双复形(M,∂,δ)的全复形，记为 $\mathrm{Tot}\,M$，其第 n 项为$(\mathrm{Tot}\,M)^n=T^n$，有时把 $\mathrm{Tot}\,M$ 简记为 T.

复形张量积(tensor product of complexes) 模的张量积概念的推广. 设(P,∂)是右 A 模的复形，(Q,δ)是左 A 模的复形. 若 $M_{pq}=P_p\otimes Q_q$，并且定义 $d'_{pq}=\partial_p\otimes 1_q$ 和 $d''_{pq}=(-1)^p1_p\otimes\delta_q$，其中 1_p 和 1_q 分别是 P_p 和 Q_q 的恒等映射，则(M,d',d'')是一个双复形，其复形 Tot 将表以 $P\otimes_A Q$ 或 $P\otimes Q$，称之为复形 P 与 Q 的张量积. 周伯埙于 1982 年定义了三复形的全复形，在三复形上从一些模的投射分解与内射分解，来研究全复形的同调模，并求出与函子 Tor 的一些关系. 同时，把双复形上的孔乃特定理推广到三复形上.

三复形(tricomplex) 双复形概念的推广. 设 $M=\{M_{pqr}\mid p,q,r\in\mathbf{Z}\}$是三分次模，

$$d_{pqr}: M_{pqr}\rightarrow M_{p-1,q,r},$$
$$\sigma_{pqr}: M_{pqr}\rightarrow M_{p,q-1,r},$$
$$\delta: M_{pqr}\rightarrow M_{p,q,r-1}$$

是分次模映射，并且 $dd=0,\sigma\sigma=0,\delta\delta=0,\sigma d=d\sigma$, $\sigma\delta=\delta\sigma,\delta d=d\delta$(这里把相应的足码都省掉了)，则称$(M,d,\sigma,\delta)$为一个三复形.

三复形的全复形(total complex a tricomplex) 由三复形决定的一个复形. 它是双复形的全复形概念的推广. 设(M,d,σ,δ)是三复形，若

$$T_n=\bigoplus_{p+q+r=n}M_{pqr} \quad 与 \quad \tau_n: T_n\rightarrow T_{n-1}$$

使得

$$\tau_n=\sum_{p+q+r=n}d_{pqr}+\sigma_{pqr}+\delta_{pqr},$$

则(T,τ)是一个复形，此复形称为三复形(M,d,σ,δ)的全复形.

孔乃特定理(Künneth theorem) 关于复形的张量积的同调模的著名定理. 若(X,d)与(Y,∂)分别为右 A 模与左 A 模的复形，且所有的 $\mathrm{Im}d_p$ 与所有的 $\ker d_p$ 都是平坦的，则对任何 n 都有自然的短正合列：

$$0\rightarrow\bigoplus_{p+q=n}H_p(X)\otimes H_q(Y)\rightarrow H_n(X\otimes Y)$$
$$\rightarrow\bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}_1(H_p(X),H_q(Y))\rightarrow 0.$$

由孔乃特定理得到孔乃特张量积公式：若(X,d)与(Y,∂)分别为右 A 模与左 A 模的复形，且所有的 $\ker d_p$与所有的 $H_p(X)$都是投射模，则有

$$\bigoplus_{p+q=n}H_p(X)\otimes H_q(Y)\cong H_n(X\otimes Y).$$

孔乃特公式(Künneth formula) 孔乃特定理对遗传环(比如整数环)的应用. 若 A 是左遗传环，(X,d)与(Y,∂)分别为右 A 模与左 A 模的复形，且复形(X,d)中每个 X_p 都平坦，则任何 n 都有自然的分裂短正合列：

$$0\rightarrow\bigoplus_{p+q=n}H_p(X)\otimes H_q(Y)\rightarrow H_n(X\otimes Y)$$
$$\rightarrow\bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}_1(H_p(X),H_q(Y))\rightarrow 0.$$

由孔乃特公式得到泛(万有)系数定理：设 A 是左遗传环，复形(X,d)中每个 X_p 都平坦，则对任何 A 模 M，任何 $n\in\mathbf{Z}$，都有分裂的短正合列

$$0\rightarrow H_n(X)\otimes A\rightarrow H_n(X\otimes A)$$
$$\rightarrow\mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(X,A))\rightarrow 0,$$

分裂性对 A 是自然的.

泛系数定理(universal coefficient theorem) 见“孔乃特公式”.

撰 稿 易 忠 程福长
审 阅 刘木兰 佟文廷 陈家鼐

序　与　格

序　论

序(order)　亦称序关系. 它是从数的大小、集合的包含等关系中抽象出来的概念. 偏序集和格就是研究这些关系的性质和作用而产生的理论.

1847 年和 1854 年,布尔(Boole,G.)为了研究思维规律(逻辑学、数理逻辑)首先提出了布尔代数的概念. 19 世纪末期,皮尔斯(Peirce,C. S.)和施罗德(Schröder,F. W. K. E.)在对布尔代数的公理化研究中创造性地引入了格的概念;同时,戴德金(Dedekind,J. W. R.)在研究代数数的理想时,亦独立地给出了格的公理化定义,对格的概念进行了研究,并引入了分配格的弱形式,即模格的概念. 虽然这些科学家和亨廷顿(Huntington,E. V.)的一些早期结果是很重要的,但当时并未引起数学界的注意. 伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)在 20 世纪 30 年代中期的工作开始了格论的全面发展,他和格里文克(Glivenko,V.)、门杰(Menger,K.)、冯·诺伊曼(von Neumann,J.)、坎托罗维奇(Канторович, Л. В.)、奥尔(Ore,O.)、斯通(Stone,M. H.)等人在此新领域的一系列文章引起了数学界的注意,并使格论成为代数学的一门重要分支;尤其是伯克霍夫关于"格论"的不朽著作,总结了不同时期格论的研究情况,为格论的传播和发展起了重要的推动作用.

格论的最基本概念是(偏)序、上确界和下确界,它们形成格的概念和理论. 从偏序集到格、半模格、模格、分配格、几何格、格的合同关系、合同格、布尔代数等构成格论研究的基本内容. 格等式类则是格论中的新领域之一,由偏格在任意格等式类上所生成的自由格,是格论中最重要的研究对象之一. 格论中许多应用均涉及有二元运算的(偏)序数学系统,格序群、格序幺半群、矢量格、格序环、序域及格序模等是格论中迅速发展的重要部分. 格序群、格序环中的有些概念(如直积、次直积以及格序环中的各种根等)与群、环中的相应概念相似,这里不再列出.

格论的许多概念已渗透到整个抽象代数之中,它与群论是泛代数的两个最基本的研究工具,通过对格的分析,可以揭示代数体系的某些结构(例如可用子群格 $L(G)$ 来刻画群 G 的结构). 格论在射影几何学、集合论(包括点集拓扑)、数理逻辑、泛函分析、概率论等其他许多数学分支中都有广泛的应用.

偏序集(partially ordered set (poset))　亦称半序集、部分序集,又称序集. 它是序论、序代数中最基本、最重要的概念之一. 在集合 P 上定义一个二元关系 $\leqslant$,对任意 $x,y,z\in P$,若满足下列条件:

P_1　$x\leqslant x$　(反身性);

P_2　若 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant x$,则 $x=y$　(反对称性);

P_3　若 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant z$,则 $x\leqslant z$　(传递性),

则称 P 为偏序集,记为 $(P;\leqslant)$,或简记为 P. 满足 P_1,P_2,P_3 的二元关系称为偏序关系,简称偏序,亦称半序. 集合 P 的二元关系 $<$ 适合 P_1,P_3 时,称为拟序或准序,记为 $(P;<)$,并称其为拟序集或准序集. 若 $(P;\leqslant)$ 是偏序集,Q 是 P 的一个非空子集,而且在 Q 上有一个由 $\leqslant$ 引出的自然偏序 $\leqslant_Q$,使对 $a,b\in Q$,$a\leqslant_Q b$ 当且仅当 $a\leqslant b$,则称 $(Q;\leqslant_Q)$ 为 P 的子偏序集. 设 $\leqslant_1$,$\leqslant_2$ 是定义在同一集合 P 上的两个偏序,对任意 $a,b\in P$,若 $a\leqslant_1 b$ 有 $a\leqslant_2 b$,则 $\leqslant_2$ 称为 $\leqslant_1$ 的扩张. 当 $x\leqslant y$ 且 $x\neq y$ 时,则称 x 小于 y,亦称 x 真含于 y,并记为 $x<y$. 关系 $x\leqslant y$ 亦可写成 $y\geqslant x$,读成 y 含 x(或包括 x),$(P;\leqslant)$ 和 $(P;\geqslant)$ 称为对偶的偏序集.

半序集(semi-ordered set)　即"偏序集".

部分序集(partly ordered set)　即"偏序集".

序集(ordered set)　即"偏序集".

偏序关系(partial ordering relation)　见"偏序集".

偏序(partial ordering)　见"偏序集".

半序(semi-ordering)　即"偏序".

拟序(quasi-ordering)　见"偏序集".

准序(pri-ordering)　即"拟序".

拟序集(quasi-ordered set)　见"偏序集".

准序集(pri-ordered set)　即"拟序集".

子偏序集(subposet)　见"偏序集".

偏序的扩张(extension of a partial ordering)　见"偏序集".

对偶偏序集(dual poset)　见"偏序集".

泛界(universal bound)　序与格的基本概念之一. 若偏序集 P 含有一个元素 a,使对任意 $x\in P$ 均有 $a\leqslant x$,则称 a 为 P 的最小元,用 0 表示. 对偶地,即把关系 $\leqslant$ 换为 $\geqslant$ 时,可定义 P 的最大元,并用 1 记之. 称 0 与 1(若它们存在)为偏序集 P 的泛界. 对一切 $x\in P$,由于 $0\leqslant x\leqslant 1$,所以有泛界 0 和 1 的偏序集称为有界的. 有限全序集是有界偏序集.

最小元(least element)　见"泛界".

最大元(greatest element)　见"泛界".

有界偏序集(bounded poset)　见“泛界”.

偏序集的对偶原理(duality principle of posets)　偏序集的一个重要命题.一个关系 ρ 的逆关系 $\check{\rho}$ 定义为:$x\check{\rho}y$ 当且仅当 $y\rho x$.偏序$\leqslant$的逆偏序记为$\geqslant$,偏序集$(P,\leqslant)$的对偶是偏序集$(\check{P},\geqslant)$,其中 P 与 $\check{P}$ 含有相同的元素.任意偏序的逆偏序是一个偏序.若一个关于偏序的命题对所有偏序集成立,则其对偶命题(即把其中的偏序代以逆偏序,且把 0,1 分别代以 1,0(若存在))亦成立.此命题称为偏序集的对偶原理.它在代数、射影几何及逻辑学中有广泛的应用.

偏序集的直积(direct product of posets)　构造偏序集的重要方法之一.设 P 和 Q 是偏序集,如果 $P\times Q=\{(x,y)\mid x\in P,y\in Q\}$,定义$(x,y)\leqslant(x_1,y_1)$当且仅当在 P 内 $x\leqslant x_1$,且在 Q 内 $y\leqslant y_1$,则 $P\times Q$构成偏序集,称为偏序集 P 与 Q 的直积.类似地,可定义 $n(n\geqslant 2)$个偏序集的直积.

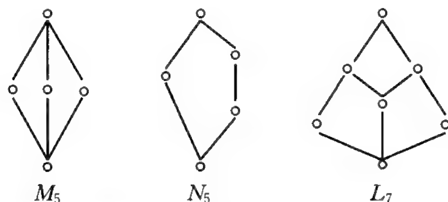
有界偏序集的中心(center of a bounded poset)　有界偏序集的一个特殊的子集合.设 e 是有界偏序集 P 的一个元素,若 e 在 P 的某个直分解中有一个分量是 1,其余分量是 0,则称 e 为 P 的中心元.P 的所有中心元的集合称为 P 的中心,记为 C.有界偏序集 P 的中心 C 是布尔格,其中 C 的两个元素的交和并表示它们在 P 中的下确界和上确界.有界格的中心是有补的中立元的集合.子群格的中心则由阶和指数互素的特征子群构成.

偏序集的中心是由伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)引入并研究的,冯·诺伊曼(von Neumann,J.)则研究了有补模格的中心.

有界偏序集的中心元(center element of a bounded poset)　见“有界偏序集的中心”.

覆盖(cover)　偏序集中元素间的一种关系.设 a,b 是偏序集 P 中的元素,$a<b$ 表示 $a\leqslant b$ 但 $a\neq b$.当 $a<b$ 且不存在 $x\in P$ 满足 $a<x<b$ 时,称 b 为 a 的覆盖,亦称 b 覆盖 a,又称 a 被 b 覆盖,记为 $a\prec b$ 或 $b\succ a$.在有限偏序集中覆盖决定了偏序关系.

示图(diagram)　亦称哈塞示图.常用来表示有限偏序集.偏序集 P 的基数称为 P 的阶,记为 $n(P)$;若 $n(P)$有限,则称 P 为有限偏序集.用 ◦ 表示有限偏序集 P 的元素,若 $a>b$,则把表示 a 的 ◦ 放在表示 b 的 ◦ 上方;若 $a\succ b$,则用直线段连结表示 a 的 ◦ 及表示 b 的 ◦ ,这样得到的图称为偏序集的示图.例图分别是偏序集 M_5,N_5 和 L_7 的示图.两个有限偏序集同构与否、对偶与否,都可从示图上看出.



哈塞示图(Hasse diagram)　即“示图”.

偏序集的阶(order of a poset)　见“示图”.

有限偏序集(finite poset)　见“示图”.

极大链(maximal chain)　序论的基本概念之一.若偏序集 P 中的链$\{a=x_0,x_1,\cdots,x_n=b\}$适合:

1. $x_0<x_1<\cdots<x_n$;

2. x_{i+1}覆盖 x_i 即 $x_{i+1}\succ x_i(i=0,1,\cdots,n-1)$;

则称它为极大链,亦称连结 a,b 的链;n 称为这个链的长.在有限长的偏序集中,若 a 与 b 是可比的,且 $a\leqslant b$,则必有从 a 到 b 的极大链.

链的长(length of a chain)　见“极大链”.

偏序集的长(length of a poset)　刻画偏序集链长的一个参数.n 元有限链的长被定义为 $n-1$.偏序集 P 的长 $l(P)$是指 P 中链的长的最小上界.当 $l(P)$有限时,称 P 为有限长;否则称为无限长.对偶地,n 元有限反链的广定义为 n;偏序集 P 的广 $w(P)$为 P 中反链的广的最小上界;当 $w(P)$有限时,称 P 为有限广.

广(width)　见“偏序集的长”.

有限广(finite width)　见“偏序集的长”.

维函数(dimension function)　亦称高函数.序与格的基本概念之一.设 P 是有最小元 0 的有限长偏序集,x 是 P 中的元素,0 与 x 之间极大链的长的最小上界称为 x 的维函数,记为$h(x)$;若 P 有泛界 1,则$h(1)=l(P)$,即 1 的高等于偏序集 P 的长.

高函数(height function)　即“维函数”.

原子(atom)　偏序集中具有特殊性质的元素.它在几何格中有特别重要的应用.设 P 是有 0 的偏序集,$a\in P$,若 $a\succ 0$,即 a 覆盖 0,则称 a 为 P 的原子.a 是原子当且仅当 $h(a)=1$,即 a 的维函数等于 1.对偶地可以定义对偶原子.

对偶原子(dual atom)　见“原子”.

分次偏序集(graded poset)　一类特殊的偏序集.设 g 为偏序集 P 到自然序的整数集链 Z 的一个单值函数,若对任意 $x,y\in P$ 满足如下条件:

1. 若 $x>y$,则 $g(x)>g(y)$(严格保序);

2. 若 x 覆盖 y,则 $g(x)=g(y)+1$;

则称 P 为分次偏序集.

半模偏序集(semimodular poset)　一类特殊的偏序集.设 P 是一个含最小元 0 的有限长偏序集,对于任意 $a,b\in P$,$a\neq b$ 时满足条件:(σ) 若存在 $c\in P$ 使得 a 和 b 都覆盖 c,则存在 $d\in P$ 使之覆盖 a 和 b,则称 P 为(上)半模偏序集.对偶地可以定义下半模偏序集.若 P 既是上半模的,又是下半模的,则称 P 是模偏序集.

模偏序集(modular poset)　见"半模偏序集".

上界(upper bound)　序论的基本概念之一.设$(P,\leqslant)$是偏序集,X是P的子集,若存在$a\in P$,使得对任意$x\in X$,都有$x\leqslant a$,则称a为X的一个上界.对偶地可以定义集合X的下界.若上述定义中的a存在,则称X为上(下)有界的;若X是上、下有界的,则称X是有界集.

下界(lower bound)　见"上界".

有界集(bounded set)　见"上界".

上确界(supremum)　序论的基本概念之一.设X是偏序集P的子集,如果X的上界的集合中有最小元,则称此最小元为X的上确界,记为$\sup X$(或$\vee X$或l. u. b. X);对偶地可以定义下确界,记为$\inf X$(或$\wedge X$或g. l. b. X).上、下确界是皮尔斯(Peirce,C. S.)首先研究的.

下确界(infimum)　见"上确界".

有向集(directed set)　亦称定向集.一类特殊的偏序集.设P是一个偏序集,若P中任两元素都有上界,则称P为上有向集.对偶地,可以定义下有向集.

定向集(oriented set)　即"有向集".

极大元(maximal element)　偏序集中的一类特殊元素.设X是偏序集P的子集,$a\in X$,对任意$x\in X$,若$a\leqslant x$有$a=x$,即X中不存在x使得$x>a$,则称a为X的极大元.对偶地可以定义极小元.

极小元(minimal element)　见"极大元".

可比元(comparable elements)　序论的基本概念之一.设P是偏序集,对$a,b\in P$,若$a\leqslant b$或$b\leqslant a$中之一成立,则称a与b是可比的;否则称a与b不可比,记为$a\parallel b$.若偏序集P中任意不同的两元a,b均不可比,则称P为非序的.非序偏序集P的序是当然的序,即对任意$a,b\in P$,若$a\leqslant b$则$a=b$.

非序偏序集(nonorder poset)　见"可比元".

全序集(totally ordered set)　亦称线性序集.又称链.一类重要的偏序集.若偏序集P适合公理P_4:若对任意$x,y\in P$,$x<y$,$y<x$,$x=y$三式中有且仅有一式成立,则称P为全序集.全序集中的关系$\leqslant$称为全序或线性序.若偏序集P的子集C作为子偏序集是全序集,则称C是P中的链;若C是非序的,则称C为P的反链.实数集及其任何子集在通常的$\leqslant$关系下是全序集.

线性序集(linear ordered set)　即"全序集".

链(chain)　即"全序集".

全序(total order)　见"全序集".

线性序(linear order)　即"全序".

反链(anti chain)　见"全序集".

佐恩引理(Zorn lemma)　基础数学中的重要命题.设$(S;\leqslant)$是一个偏序集,若它的任一非空全序子集都有上界,则S含有极大元.这就是著名的佐恩引理.佐恩引理有广泛的应用.

良序集(well-ordered set)　集合论的基本概念之一.它是由康托尔(Cantor,G. (F. P.))提出的.设P是全序集,若P的任一非空子集都有最小元,即P满足降链条件,则称P为良序集.有限全序集是良序集.著名的策梅洛良序定理指出:每个集合都可良序化.此定理与选择公理等价.

保序映射(order-preserving map)　序论中的一种重要映射.设$f:P\to Q$是偏序集P到偏序集Q的映射,对任意$a,b\in P$,若$a\leqslant b$有

$$f(a)\leqslant f(b)\ (f(a)\geqslant f(b)),$$

则称f为保序映射(反序映射).格与格之间的同态必是保序映射,而其逆一般不成立.

反序映射(antitone map)　见"保序映射".

偏序集的同构(isomorphism of posets)　偏序集间的一种重要映射.若偏序集P到Q的保序映射(反序映射)f既是单射,又是满射,则称f为P到Q的同构(对偶同构),记为$P\cong Q$($P\cong\widetilde{Q}$).若$P=Q$,则称f为自同构(自对偶同构).对偶同构亦称为反同构.

对偶同构(dual isomorphism)　见"偏序集的同构".

偏序集的反同构(anti isomorphism of posets)　见"偏序集的同构".

伽罗瓦联络(Galois connection)　偏序集之间对应的一种特殊联系.设P,Q是任意两个偏序集,令$\varphi:x\to x^*$与$\psi:y\to y^+$分别为$P\to Q$与$Q\to P$的映射,若适合:

1. 若$x\leqslant x_1$则$x^*\geqslant x_1^*$;
2. 若$y\leqslant y_1$则$y^+\geqslant y_1^+$;
3. $x\leqslant(x^*)^+$及$y\leqslant(y^+)^*$;

则称映射$\varphi:x\to x^*$与$\psi:y\to y^+$在P和Q之间定义一个伽罗瓦联络.

偏序集的升链条件(ascending chain condition of a poset)　序论的基本概念之一.设P是偏序集,若P的任一升链终止于有限项,即对任意$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots$,存在正整数$m$,使$a_m=a_{m+1}=\cdots$,则称$P$适合升链条件(ACC).$P$适合升链条件的充分必要条件是$P$的任一非空子集均有极大元.$P$满足降链条件(DCC)当且仅当$P$的对偶满足升链条件.格$L$满足升链条件,当且仅当$L$的每个理想均是主理想.

偏序集的降链条件(descending chain condition of a poset)　见"偏序集的升链条件".

撰　稿　高　亨　董克诚
审　阅　朱作桐　董荣森　漆芝南

格　　论

格(lattice)　有着广泛应用的一类偏序集.它是具有两个二元运算的代数系.设 L 是偏序集,若 L 的任两个元素均有上确界及下确界,则称 L 为格,记为 $(L;\leqslant)$,简记为 L. $a,b\in L$,$\{a,b\}$ 的上、下确界分别记为 $a\vee b$(即 $\sup\{a,b\}$)及 $a\wedge b$(即 $\inf\{a,b\}$).格亦可用恒等式来定义,它是由戴德金(Dedekind,J. W. R.)给出的.若代数系 L 有两个代数运算 $\wedge$,$\vee$,且对任意 $a,b,c\in L$,满足下列恒等式:

L_1　$a\wedge a=a,a\vee a=a$;　　(幂等律)

L_2　$a\wedge b=b\wedge a,a\vee b=b\vee a$;　　(交换律)

L_3　$a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$,

　　$a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$;　　(结合律)

L_4　$a\wedge(a\vee b)=a,a\vee(a\wedge b)=a$;　　(吸收律)

则称 L 为格,记为 $(L;\wedge,\vee)$,简记为格 L.上述两种定义是等价的.1951 年,索金(Sorkin,Ju. I.)用仅含三个变量的四个恒等式刻画了格;1972 年,沛德迈耐罕(Padmanabhan,R.)发现可用仅含三个变量的两个恒等式刻画格,但不能用少于三个变量的两个恒等式刻画格.19 世纪末,皮尔斯(Peirce,C. S.)和施罗德(Schröder,F. W. K. E.)在研究布尔代数的公理化以及戴德金研究代数数的理想时独立地提出了格的概念;1897 年,戴德金首先对格进行了研究.在 20 世纪 30 年代中期,伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)的著作开始了格论的全面发展,他的一系列文章展示了格论的重要性,并使格论成为代数学的一门重要分支.

子格(sublattice)　格论的基本概念之一.设 S 是格 L 的子集,若 S 关于 L 中的二元运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 是封闭的,即对任意 $a,b\in S$,$a\wedge b$,$a\vee b\in S$,则称 S 为 L 的子格;若子格 S 含 0,1,则称 S 为格 L 的 $\{0,1\}$-子格.若 $a,b\in L$,$a\leqslant b$,则 $[a,b]=\{x\in L\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 是 L 的子格,称为闭区间.同样可定义半开区间 $(a,b]$ 和 $[a,b)$ 以及开区间 (a,b).设 H 为格 L 的非空子集,L 中一切包含 H 的子格的交,称为 L 的由 H 生成的子格,记为 $[H]$;称 H 为 $[H]$ 的一个生成系.设 S 是格 L 的子格,若除 L 外,没有真包含 S 的子格,则称 S 为 L 的极大子格.格 L 的一切极大子格的交集 $\Phi(L)$ 称为弗拉梯尼子格.格 L 的所有子格按集合的包含关系构成格,记为 $\mathrm{Sub}(L)$.

区间(interval)　见"子格".

极大子格(maximal sublattice)　见"子格".

弗拉梯尼子格(Frattini sublattice)　见"子格".

凸子格(convex sublattice)　具有特殊性质的一类子格.设 S 是偏序集 P 的子集,$a,b\in S$,若 $a\leqslant b$,有 $[a,b]\subseteq S$,则称 S 为 P 的凸子集.设 S 是格 L 的子集,若 $a,b\in S$ 时有 $[a\wedge b,a\vee b]\subseteq S$,则称 S 为 L 的凸子格.设 H 是格 L 的非空子集,L 中包含 H 的所有凸子格的交集仍是凸子格,称为由 H 生成的 L 的凸子格.区间、半开区间、开区间都是凸子格.

凸子集(convex set)　见"凸子格".

格的直积(direct product of lattices)　构造格的重要方法之一.设 L,K 是两个格,若

$$L\times K=\{(a,b)\mid a\in L,b\in K\},$$

对 $(a,b),(a_1,b_1)\in L\times K$,定义

$$(a,b)\wedge(a_1,b_1)=(a\wedge a_1,b\wedge b_1),$$

$$(a,b)\vee(a_1,b_1)=(a\vee a_1,b\vee b_1),$$

则 $L\times K$ 构成一个格,称为格 L 和 K 的直积.设 L 和 K 是两个格,若 Θ 和 Φ 分别是 L 和 K 上的合同关系;定义 $(a,b)\equiv(c,d)(\Theta\times\Phi)$ 当且仅当 $a\equiv c(\Theta)$ 且 $b\equiv d(\Phi)$.则 $\Theta\times\Phi$ 是 $L\times K$ 上的一个合同关系;反之,$L\times K$ 上的每一个合同关系都具有这种形式.

偏格(partial lattice)　在格的子集上诱导出的一类格.假定 L 是格,$H\subseteq L$,在 H 上限制 $\wedge$,$\vee$ 如下:设 $a,b,c\in H$,若 $a\wedge b=c$(对偶地,$a\vee b=c$),则称 $a\wedge b$(对偶地,$a\vee b$)在 H 内被定义,并等于 c;若 $a,b\in H$,$a\wedge b$(对偶地,$a\vee b$)$\notin H$,则称 $a\wedge b$(对偶地,$a\vee b$)在 H 内未被定义.因此,$(H;\wedge,\vee)$ 是一个具有两个二元偏运算的集合,称之为偏格,并称 $(H;\wedge,\vee)$ 为 L 的一个相对子格.设 P 是偏序集,给予如下定义,可使 P 成为偏格:对 $a,b\in P$,$a\wedge b$ 在 P 内定义,当且仅当 $\inf\{a,b\}$ 在 P 内存在,并且 $a\wedge b=\inf\{a,b\}$;同样,$a\vee b$ 在 P 内定义,当且仅当 $\sup\{a,b\}$ 在 P 内存在,并且 $a\vee b=\sup\{a,b\}$.格的每一子集都可确定一个偏格.

相对子格(relative sublattice)　见"偏格".

半格(semilattice)　格概念的一种重要推广.适合幂等律、交换律和结合律的二元运算。的代数系称为半格.设 P 是偏序集,若对任意 $a,b\in P$,均有 $\sup\{a,b\}$(对偶地 $\inf\{a,b\}$)存在,则称 P 为并半格(对偶地称为交半格).若 S 是半格,定义整除关系 $a\mid b$,意指存在 x,使 $a\circ x=b$,则 S 关于整除关系构成偏序集,而且对任意 c,d,有 $\sup\{c,d\}=c\circ d$,因此 S 是并半格.

并半格(join semilattice)　见"半格".

交半格(meet semilattice)　见"半格".

宽(breadth)　刻画格的一个正整数.有穷格 L 的宽 $b(L)$ 被定义为满足下述条件的最小正整数 b:任意交 $x_1\wedge\cdots\wedge x_n(n>b)$ 是 b 个不同元 x_i 构成的一个子集的交.这是伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)给出的定义.设 L 是格,若 n 是具有下述性质的最小正整数:对任一有限子集 $X\subseteq L$,存在 $Y\subseteq X$,使得 $|Y|$

$\leqslant n$，且 $\bigvee X=\bigvee Y$，则称 n 是 L 的宽，其中 $|Y|$ 表示集合 Y 的基数. 这是戈莱兹(Grätzer,G.)给出的定义. 在有穷格中上述的两个定义是等价的.

格的并既约元(join-irreducible element of a lattice)　格论的基本概念之一. 研究分配格的表示理论的重要工具. 设 $a\neq 0$ 是格 L 的元，对 L 的任意元 x,y，若 $x\vee y=a$，有 $x=a$ 或 $y=a$，则称 a 为 L 的并既约元. 对偶地可定义交既约元. 既是交既约的，又是并既约的元称为双重既约元. 若格 L 的每一个链都是有限长的，则 L 的每个元 x 都可表成有限个并既约元的并，即 $x=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n$，其中 a_i 是并既约元.

格的交既约元(meet-irreducible element of a lattice)　见"格的并既约元".

格的双重既约元(double-irreducible element of a lattice)　见"格的并既约元".

格的理想(ideal of a lattice)　亦称格的幻. 格论的基本概念之一. 相当于群论中的正规子群. 格(并半格)L 的非空子集 J，若具有下列性质：

1. $a\in J$，$x\in L$，若 $x\leqslant a$，则 $x\in J$(下封闭性).

2. 若 $a\in J$，$b\in J$，则 $a\vee b\in J$(并封闭性)，

称 J 为格 L 的理想(并理想). 格 L 的子格 S 是理想当且仅当 $a\in S$ 和 $x\in L$ 有 $a\wedge x\in S$. 在格(交半格)中，理想的对偶概念称为对偶理想(交理想、滤子、对偶幻). 格的理想的概念是由斯通(Stone,M. H.)于1934—1935年引入的.

格的幻(ideal of a lattice)　即"格的理想".

格的并理想(join ideal of a lattice)　见"格的理想".

对偶理想(dual ideal)　见"格的理想".

格的滤子(filter of a lattice)　见"格的理想".

对偶幻(dual ideal)　即"对偶理想".

格的主理想(principal ideal of a lattice)　亦称格的主幻. 格的一类重要理想. 设 H 是格 L 的非空子集，L 的所有包含 H 的理想的交集称为 L 的由 H 生成的理想，记为 $(H]$. 若 $H=\{a\}$，记 $(a]=(\{a\}]$，则称 $(a]$ 为 L 的由 a 生成的主理想.

$$(a]=\{x\in L\mid x\leqslant a\}=\{x\wedge a\mid x\in L\},$$
$$(a]\wedge(b]=(a\wedge b],(a]\vee(b]=(a\vee b].$$

由 a 生成的主对偶理想记为 $[a)$.

格的主幻(principal ideal of a lattice)　即"格的主理想".

理想格(ideal lattice)　亦称幻格. 由格的理想构成的一类格. 指格 L 的一切理想的集合 $I(L)$ 按集合的包含关系偏序化所构成的格. 若

$$J,K\in I(L),\ J\wedge K=J\cap K,\ J\vee K=(J\cup K],$$

称为格 L 的理想格，其中 $(J\cup K]$ 是由 J 和 K 的并集生成的理想. 格 L 的理想格 $I(L)$ 是模格当且仅当 L 是模格. 分配格 L 的理想格 $I(L)$ 是完全布劳威尔格.

幻格(ideal lattice)　即"理想格".

格的素理想(prime ideal of a lattice)　格的一类重要理想. 异于格 L 本身的理想(对偶理想)称为真理想(真对偶理想). 设 J 是格 L 的真理想，若 $a\wedge b\in J$，则 $a\in J$ 或 $b\in J$，称 J 为格 L 的素理想. 对偶地可定义素对偶理想. 格 L 的理想 P 是素理想当且仅当补集 $L-P$ 是对偶理想. 分配格 L 的主理想 $(a]$ 是素理想当且仅当 a 是交既约元. 斯通(Stone,M. H.)于1936年发表的布尔代数的表示理论中证明：非平凡布尔格的理想是素理想当且仅当它是极大理想.

格的素幻(prime ideal of a lattice)　即"格的素理想".

格的素对偶理想(prime dual ideal of a lattice)　见"格的素理想".

格的素对偶幻(prime dual ideal of a lattice)　即"格的素对偶理想".

格的极小素理想(minimal prime ideal of a lattice)　亦称格的极小素幻. 一类特殊的素理想. 在伪补分配格中起重要作用. 格 L 的素理想 P 称为极小的，若 P 不真包含 L 的任何素理想，即素理想 $Q\subseteq P$，则 $P=Q$. 在有0的分配格 L 中，L 的任意的素理想包含一个极小素理想. 对偶地可定义极大素理想.

格的极小素幻(minimal prime ideal of a lattice)　即"格的极小素理想".

格的极大素理想(maximal prime ideal of a lattice)　见"格的极小素理想".

格的极大素幻(maximal prime ideal of a lattice)　见"格的极小素理想".

合同关系(congruence relation)　格的一种重要等价关系. 设 θ 是格 L 的等价关系，若 $a\equiv b(\theta)$ 和 $a_1\equiv b_1(\theta)$，则 $a\wedge a_1\equiv b\wedge b_1(\theta)$ 和 $a\vee a_1\equiv b\vee b_1(\theta)$(替换性质)，称 θ 为 L 的合同关系. 若在格 L 上定义 $x\equiv y(\omega)$ 当且仅当 $x=y$；对任意 x,y 有 $x\equiv y(\iota)$，则 ω 和 ι 是 L 的合同关系，称为平凡的合同关系. 若 $a\in L$，$[a]\theta=\{x\in L\mid a\equiv x(\theta)\}$ 表示包含 a 的合同类，则 $[a]\theta$ 是凸子格. 对格 L 中的任一素理想 P，均可构造出一个只含 P 及补集 $L-P$ 两个合同类的合同关系. 此种合同关系颇为重要. 它是研究格的重要工具.

平凡合同关系(trivially congruence relation)　见"合同关系".

合同格(congruence lattice)　一类重要的格. 指格的所有合同关系所构成的格. 设 $C(L)$ 表示格 L 上的所有合同关系的集合，若 $\theta,\varphi\in C(L)$，定义 $\theta\leqslant\varphi$ 当且仅当 $x\equiv y(\theta)$ 有 $x\equiv y(\varphi)$，则 $C(L)$ 关于上面定

义的≤构成一个格，称为合同格．船山(Funayama，N.)和中山正(Nakayama，T.)于1942年证明了任意格的合同格是完全布劳威尔格，也是分配的代数格．合同格的性质不仅在格论中，而且在格序代数、闭包代数、非结合格、多值逻辑等分支中都有广泛的应用．

主合同关系(principal congruence relation)　一类重要的合同关系．设 L 是格，$H\subseteq L^2=L\times L=\{(a,b)\mid a,b\in L\}$，$\theta(H)$ 表示对一切 $(a,b)\in H$ 使得 $a\equiv b$ 的最小合同关系，称 $\theta(H)$ 为由 H 生成的合同关系．若 $H=\{(a,b)\}$，记 $\theta(a,b)=\theta(\{(a,b)\})$，则称为主合同关系．若 L 是格，$H\subseteq L^2$，则

$$\theta(H)=\vee\ (\theta(a,b)\mid(a,b)\in H).$$

若 L 是分配格，$a,b,x,y\in L$，且 $a\leqslant b$，则 $x\equiv y(\theta(a,b))$ 当且仅当 $x\wedge a=y\wedge a$ 且 $x\vee b=y\vee b$．

商格(quotient lattice)　亦称因子格．由合同关系诱导出的一类格．设 θ 是格 L 上的一个合同关系，若 $L/\theta=\{[a]\theta\mid a\in L\}$ 表示 L 中由 θ 诱导的合同类的集合，定义

$$[a]\theta\vee[b]\theta=[a\vee b]\theta,$$
$$[a]\theta\wedge[b]\theta=[a\wedge b]\theta,$$

则 L/θ 关于上述定义的运算 ∨ 和 ∧ 构成格，称为 L 模 θ 的商格．格 L 的每一同态像都与 L 的一个商格同构．

因子格(factor lattice)　即“商格”．

单格(simple lattice)　一类结构简单的格．若格 L 仅有平凡的合同关系，则称 L 为单格．

本原集(primitive set)　格的一类重要的子集．设 P 是格 L 的一个非空有限子集，若 P 满足：

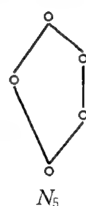
$$\wedge\ (\theta(a,a\vee b)\mid a,b\in P,a\neq a\vee b)\neq\omega$$

(参见“合同关系”和“主合同关系”)，则称 P 为本原集．这是韦洛(Wille，R.)于1972年给出的定义．

结构格(structure lattice)　一类重要的格．若 $A=(S;F)$ 是代数(意指 S 是集合，F 是 S 上运算的集合)，$\theta(A)$ 是 A 上的一切合同关系构成的集合，定义 $\theta_1\leqslant\theta_2$ 当且仅当若 $x\equiv y(\theta_1)$ 有 $x\equiv y(\theta_2)$，则 $\theta(A)$ 关于≤构成一个完备格，称为 A 的结构格．群的结构格可以决定群的直分解、子直分解．在同构意义下，单代数(即仅有平凡的合同关系的代数)有相同的结构格．

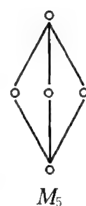
子群格(subgroup lattice)　刻画群的一类重要的格．若 $L(G)$ 是群 G 的一切子群所构成的集合，定义 $M\wedge N=M\cap N$ 是子群 M 和 N 的交集，$M\vee N=(M\cup N)$ 是子群 M 和 N 的并集生成的子群，则 $(L(G);\wedge,\vee)$ 是格，简记为 $L(G)$，称为群 G 的子群格．$L(G)$ 是有限格当且仅当 G 是有限群．若 G 是有限群，则 $L(G)$ 是分配格当且仅当 G 是循环群．若 G 是有限群，$L(G)$ 是模格，则 G 是可解群．

五边形格(pentagon-type lattice)　一类特殊的子格．它是典型的非模格．格 L 的子集 A 称为五边形格当且仅当 A 是与 N_5 同构的子格，其中 N_5 的示图如右．五边形格在模格及分配格的研究中起重要作用．



N_5

菱形格(diamond-type lattice)　一类特殊的子格．典型的非分配格，但它是模格．格 L 的子集 A 称为菱形格当且仅当 A 是与 M_5 同构的子格，其中 M_5 如右图所示．菱形格在分配格的刻画中起重要作用．



M_5

分配格(distributive lattice)　格论中重要的一类格．设 L 是格，对任意 $x,y,z\in L$，若下列条件之一成立：

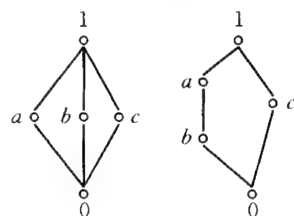
L_6　$(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)$
$\qquad=(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x)$
(自对偶中值定律)；

$L_{6'}$　$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$；

$L_{6''}$　$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$ (分配律)；

$L_{6'''}$　$(x\vee y)\wedge z\leqslant x\vee(y\wedge z)$；

则称 L 为分配格．$L_{6'}$ 和 $L_{6''}$ 是格论中最重要的恒等式，称为分配恒等式或分配律，它们是戴德金(Dedekind，J. W. R.)研究数域理想时发现的．格 L 是分配的当且仅当 L 不含菱形格和五边形格．1951年，肖兰德(Sholander，M.)用两个恒等式：$x\wedge(x\vee y)=x$ 和 $x\wedge(y\vee z)=(z\wedge x)\vee(y\wedge x)$ 表征了分配格．分配格的对偶格、子格、直积仍是分配格．分配格的理论是格论的起源和基础，它对格论的研究、发展和应用起了重大的作用．



分配恒等式(distributive identity)　见“分配格”．

格的分配元(distributive element of a lattice)　格的一类特殊元素．设 L 是格，元 $a\in L$ 称为分配的，当且仅当对任意 $x,y\in L$，有

$$a\vee(x\wedge y)=(a\vee x)\wedge(a\vee y).$$

分配元的定义是由奥尔(Ore，O.)于1935年引进的．对偶地可定义对偶分配元．格 L 的理想称为分配理想，当且仅当它作为 L 的理想格的元素是分配的．分配格中的元素是分配元．1935年，奥尔证明：若 a 是格 L 的元素，则下述命题等价：

1. a 是 L 的分配元．

2. $\varphi:x\to a\vee x(x\in L)$ 是 L 到主对偶理想 $[a)$ 上

的格同态.

3. 若定义 $x\equiv y(\theta_a)$ 当且仅当 $a\vee x=a\vee y$，则二元关系 θ_a 是合同关系.

对偶分配元(dual distributive element) 见"格的分配元".

格的分配理想(distributive ideal of a lattice) 见"格的分配元".

格的标准元(standard element of a lattice) 格的一类特殊元素. 设 a 是格 L 的元素，若对任意 $x,y\in L$，有

$$x\wedge(a\vee y)=(x\wedge a)\vee(x\wedge y),$$

则称 a 为 L 的标准元. 对偶地可定义对偶标准元. 标准元的概念是戈莱兹(Grätzer, G.)于1959年引入的. 格 L 的理想称为标准的，当且仅当它作为 L 的理想格的元素是标准的. 分配格中的元是标准元. 戈莱兹和施密特(Schmidt, E.)于1961年证明：若 a 是格 L 的元素，则下述命题等价：

1. a 是标准元.

2. 若定义 $x\equiv y(\theta_a)$ 当且仅当 $a_1\leqslant a$ 时

$$(x\wedge y)\vee a_1=x\vee y,$$

则 θ_a 是合同关系.

3. a 是分配元，且 $x,y\in L$，若 $a\wedge x=a\wedge y$ 及 $a\vee x=a\vee y$，则 $x=y$.

格的对偶标准元(dual stardard element of a lattice) 见"格的标准元".

格的标准理想(standard ideal of a lattice) 见"格的标准元".

格的中立元(neutral element of a lattice) 格的一类特殊元素. 格 L 的元 a 称为中立的，当且仅当对任意 $x,y\in L$，由 $\{a,x,y\}$ 生成的子格是分配格. 中立元的概念是伯克霍夫(Birkhoff, G. D.)于1940年引入的. 1962年，戈莱兹(Grätzer, G.)证明：格 L 的元是中立元，当且仅当对任意 $x,y\in L$，

$$(a\wedge x)\vee(x\wedge y)\vee(y\wedge a)=(a\vee x)\wedge(x\vee y)\wedge(y\vee a).$$

格 L 的理想 I 称为中立的，当且仅当 I 在 $I(L)$ 中是中立元. 分配格中的元是中立元.

格的中立理想(neutral ideal of a lattice) 见"格的中立元".

集环(ring of sets) 格论的基本概念之一. 集合的子集构成的分配格. 设 $P(A)$ 是集合 A 的一切子集所构成的集合，$P(A)$ 按集合的包含关系偏序化所构成的格称为集格. 设 $\Phi\subseteq P(A)$，若对任意 $S,T\in\Phi$，有 $S\cup T, S\cap T\in\Phi$，则称 Φ 为集环. 若对集环 Φ 的任一元 S，S 的补元 $S'\in\Phi$，则称 Φ 为集域.

集格(lattice of sets) 见"集环".

集域(field of sets) 见"集环".

模格(modular lattice) 亦称戴德金格. 格论中仅次于分配格的一类重要格. 设 L 是格，对任意 $a,b,c\in L$，若 L 满足下列条件之一：

L_5 若 $a\leqslant c$，则 $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge c$；

$L_{5'}$ $(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=a\wedge(b\vee(a\wedge c))$；

则称 L 为模格. L_5 称为模恒等式. 分配格是模格. 群的正规子群格、环的理想格都是模格. 格 L 是模格当且仅当 L 不含五边形格. 科里比亚(Kolibiar, M.)于1956年用两个恒等式

$$(x\vee(y\wedge y))\wedge y=y$$

和

$$((x\wedge y)\wedge z)\vee(x\wedge t)=((t\wedge x)\vee(z\wedge y))\wedge x$$

刻画了模格. 模格中一个非常重要的定理是戴德金的转置原理：若 L 是模格，$a,b\in L$，则 $\varphi_b: x\to x\wedge b$ 是 $[a,a\vee b]$ 到 $[a\wedge b,b]$ 的同构，其逆同构为 $\psi_a: y\to y\vee a$. 从而在模格 L 中，若 $x,y\in[a\wedge b,b]\subseteq L$，则

$$a\vee(x\wedge y)=(a\vee x)\wedge(a\vee y).$$

戴德金格(Dedekind lattice) 即"模格".

模恒等式(modular identity) 见"模格".

转置原理(transposition principle) 见"模格".

模律(modular law) 格论中的一个恒等式. 与模恒等式等价的一个恒等式. 设 L 是模格，$a,b,c\in L$，恒等式

$$a\vee(b\wedge(a\vee c))=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

称为模律.

剪切恒等式(shearing identity) 格论中的一个重要的恒等式. 与模律等价的恒等式. 设 L 是模格，$x,y,z\in L$，恒等式

$$x\wedge(y\vee z)=x\wedge((y\wedge(x\vee z))\vee z)$$

称为剪切恒等式. 它是由霍尔珀林(Halperin, I.)提出的. 剪切恒等式对格论在群论、环论以及连续几何的应用中起重要作用.

投射性(projectivity) 格论的基本概念之一. 透视性的传递扩张. 设 a,b,c,d 是格 L 的元素，a/b 表示格 L 中满足 $b\leqslant a$ 的序对 (a,b)，称 a/b 为格 L 的商. 若 $b=a\wedge d, c=a\vee d$，记为 $a/b\nearrow c/d$(若 $a=b\vee c, d=b\wedge c$，记为 $a/b\searrow c/d$)，则称 a/b 上(下)透视到 c/d. 上、下透视均可记为 $a/b\sim c/d$. 若对某个自然数 n，有

$$a/b=e_0/f_0,\ e_1/f_1,\ \cdots,\ e_n/f_n=c/d,$$

使得

$$e_i/f_i\sim e_{i+1}/f_{i+1}\ (i=0,1,\cdots,n-1),$$

则称 a/b 投射到 c/d，记为 $a/b\approx c/d$. 透视性和投射性满足对称律，它们刻画了许多重要的格，如模格等.

格的商(quotient of a lattice) 见"投射性".

透视性(perspectivity) 见"投射性".

弱投射性(weak projectivity)　格论的基本概念之一. 弱透视性的传递扩张. 设 a,b,c,d 是格 L 的元素, $b\leqslant a, d\leqslant c$, 记 $c/d\searrow_w a/b$ 当且仅当 $b\leqslant d$ 且 $c=a\vee d$; 记 $c/d\nearrow_w a/b$ 当且仅当 $c\leqslant a$ 且 $d=b\wedge c$. 若 $c/d\searrow_w a/b$ 或 $c/d\nearrow_w a/b$, 则称 c/d 弱透视至 a/b, 记为 $c/d\sim_w a/b$; 若对某个自然数 n 及

$$c/d=e_0/f_0,\ e_1/f_1,\ \cdots,\ e_n/f_n=a/b,$$

使得

$$e_i/f_i\sim_w e_{i+1}/f_{i+1}\ (i=0,1,\cdots,n-1),$$

则称 c/d 弱投射到 a/b, 记为 $c/d\approx_w a/b$. 弱透视性的定义是迪尔沃思(Dilworth, R. P.)于 1950 年引入的. 设 L 是格, $a,b,c,d\in L$, 且 $b\leqslant a, d\leqslant c$, 则 $c\equiv d(\theta(a,b))$ 当且仅当对某个序列 $c=e_0\geqslant e_1\geqslant\cdots\geqslant e_m=d$ 有 $e_j/e_{j+1}\approx_w a/b$ $(j=0,1,\cdots,m-1)$.

弱透视性(weak perspectivity)　见"弱投射性".

弱模格(weakly modular lattice)　一类特殊的格. 设 L 是格, $a,b,c,d\in L$, 若 $b<a, d<c, a/b\approx_w c/d$, 有 c/d 的真子商 c'/d' (即 $d<d'\leqslant c'<c$), 使得 $c'/d'\approx_w a/b$, 则称 L 为弱模格. 模格和相对有补格是弱模格. 在弱模格中分配元与中立元是一致的. 有限长分段有补弱模格可表示为单格的直积.

有补格(complemented lattice)　一类重要的格. 设 L 是有 0 和 1 的格, 且 $x\in L$, 若有 $y\in L$, 使 $x\wedge y=0$ 及 $x\vee y=1$, 则称 y 为 x 的补元. 若格 L 的每一元均有补元, 则 L 称为有补格. 集格是有补格.

补元(complementary element)　见"有补格".

有补模格(complemented modular lattice)　一类重要的有补格. 它与射影几何有紧密的联系. 设 L 是有补格, 若 L 也是模格, 则称 L 为有补模格. 有限长的有补模格的每一元是它所包含原子的并. 有限长的有补模格是有限长单有补模格的直积. 1946 年, 弗林克(Frink, O.)给出了有补模格的嵌入定理: 任一有补模格 L 均可嵌入到一个模几何格 K 中. 1954 年, 琼森(Jonsson, B.)证明上述嵌入可选 $\{0,1\}$-嵌入, 并使 K 满足 L 的一切恒等式.

有补模格的嵌入定理(embedding theorem of a complemented modular lattice)　见"有补模格".

相对有补格(relatively complemented lattice)　一类重要的弱模格. 若格 L 的每一区间都是有补格, 则称 L 为相对有补格. 有补模格是相对有补格, 但有补格未必是相对有补格. 任意有限长的相对有补格同构于单格的直积, 其每一元都是它所包含原子的并. 有限长的相对有补格要么是单格, 要么是直可分解格.

分段有补格(sectionally complemented lattice)　一类有简单结构的格. 设 L 是有 0 的格, 若对任意 $a\in L$, $[0,a]$ 是有补格, 则称 L 是分段有补格. 有 0 的相对有补格是分段有补格. 有限长的分段有补格可表示为单格的直积.

布尔格(Boolean lattice)　布尔代数的等价概念. 布尔(Boole, G.)研究命题演算时发现的, 也是最早研究的格. 有补的分配格称为布尔格. 若布尔格仅含一个元素, 则称为平凡布尔格. 亨廷顿(Huntington, E. V.)把布尔格表征为每一元 a 都有惟一的补元 a', 且满足 $(a\wedge b)'=a'\vee b'$ 和 $(a\vee b)'=a'\wedge b'$ 的格. 若在布尔格 $(B;\wedge,\vee)$ 中把取补记成一元运算"$'$", 把 0, 1 看做两个零元运算, 则 $(B;\wedge,\vee)$ 就成为布尔代数 $(B;\wedge,\vee,',0,1)$; 反之, 若在布尔代数中把二元运算 $\wedge,\vee$ 看成是格运算, 把一元运算"$'$"看成是格中的元取补元时, 它就成为布尔格. 因而常把布尔格与布尔代数等同起来.

平凡布尔格(trivial Boolean lattice)　见"布尔格".

布尔代数(Boolean algebra)　一种特殊的代数. 布尔(Boole, G.)于 1847 年及 1854 年研究思维规律(逻辑学、数理逻辑)时提出的, 而它作为一种特殊的格则是由戴德金(Dedekind, J. W. R.)后来提出的. 所谓布尔代数, 是指一个有序的四元组 $(B;\wedge,\vee,')$, 其中 B 是非空集合, $\wedge$ 和 $\vee$ 分别是 B 上的二元运算, 而"$'$"是定义在 B 上的一个一元运算, 并且满足下列条件: 对任意 $a,b,c\in B$

1. $a\wedge b=b\wedge a, a\vee b=b\vee a$.
2. $a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$,
   $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$.
3. $a\wedge(a\vee b)=a, a\vee(a\wedge b)=a$.
4. $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)$
   $=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$.
5. $(a\wedge a')\vee b=b, (a\vee a')\wedge b=b$.

1904 年, 亨廷顿(Huntington, E. V.)发现: 若集合 A 有一个二元运算 $\vee$ 和一个一元运算 $'$, 定义 $a\wedge b=(a'\vee b')'$, 并满足:

1. $a\vee b=b\vee a$;
2. $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$;
3. $(a\wedge b)\vee(a\wedge b')=a$;

则 A 是布尔代数. 这是布尔代数的一个典型结果. 1967 年、1968 年, 戈莱兹(Grätzer, G.)和莫肯济(Mckenzie, R. N.)、塔尔斯基(Tarski, A.)分别独立地进一步发现布尔代数可仅用一个恒等式来定义(参见第一卷《布尔代数》同名条).

广义布尔格(generalized Boolean lattice)　布尔格的推广. 有 0 的相对有补分配格称为广义布尔格. 若把 $\wedge,\vee$ 看成二元运算, 取补看成一元运算, 0 看成零元运算时的广义布尔格, 称为广义布尔代数(参见第一卷《布尔代数》同名条).

广义布尔代数(generalized Boolean algebra) 见“广义布尔格”.

布尔环(Boolean ring) 一种特殊的环.若(结合)环 R 的每一元都是幂等元,即对任意 $a\in R$ 都有 $a^2=a$,则称 R 为布尔环.1936 年,斯通(Stone,M. H.)给出了布尔环与广义布尔格之间的联系:一个布尔环可以确定一个广义布尔格;反之,一个广义布尔格亦可确定一个布尔环.因此二者实际上是一个代数系.

纽曼代数(Newman algebra) 较布尔代数更为广泛的代数类.它是纽曼(Newman,M. H. A.)于 1941－1942 年对布尔代数和布尔环的一个卓越综合.设 A 是具有两个二元运算的代数系,对任意 a, $b,c\in A$,若满足下列条件:

N_1 $a(b+c)=ab+ac$;

$N_{1'}$ $(a+b)c=ac+bc$;

N_2 存在 1 使 $a1=a$;

N_3 存在 0 使 $a+0=0+a=a$;

N_4 每一个 a 至少对应一个 a',使得 $aa'=0$,且 $a+a'=1$;

则称 A 为纽曼代数.布尔代数和有单位元的布尔环(不一定是结合环)都是纽曼代数.每一个纽曼代数都是一个布尔代数和一个有单位元的布尔环(不一定是结合环)的直积.

伪补格(pseudo-complemented lattice) 有补格概念的推广.设 L 是有 0 的格,$a\in L$,若有元素 $a^*\in L$ 满足 $a\wedge a^*=0$,且 $a\wedge x=0$ 有 $x\leqslant a^*$,则称 a^* 为 a 的伪补元.每一元至多有一个伪补元.若格 L 的每一元都有伪补元,则称 L 为伪补格.因为伪补概念只涉及交运算,所以可定义伪补交半格.设 L 是有 0 的分配格,则 L 的理想格 $I(L)$ 是伪补格.

伪补元(pseudo-complemented element) 见“伪补格”.

布劳威尔格(Brouwerian lattice) 布尔格的一个重要推广.设 a,b 是格 L 的任意两个元素,若 L 中满足 $a\wedge x\leqslant b$ 的 x 所构成的集合中有最大元,记为 $b:a$,则称 L 为布劳威尔格,$b:a$ 称为 a 在 b 中的相对伪补元.在有 0 的布劳威尔格中,$0:a$ 称为 a 的伪补元,记为 a^*.满足 $(x^*)^*=x$ 或 $x\wedge x^*=0$ 的布劳威尔格是布尔格.布劳威尔格是分配格.布劳威尔格是真正介于布尔格和分配格之间的一类格.

相对伪补元(relatively pseudo-complemented element) 见“布劳威尔格”.

斯通格(Stone lattice) 一类特殊的布劳威尔格.设 L 是布劳威尔格,若下列条件之一成立:

1. $a^*\vee a^{**}=1$,对任意 $a\in L$;
2. $a^*\vee b^*=(a\wedge b)^*$,对任意 $a,b\in L$;
3. L 中所有闭元做成的布尔代数是一个子格;
4. 每一个元素 $a^*(a\in L)$是有补的;

则称 L 为斯通格.

正交格(ortholattice) 一类重要的格.非分配的布尔代数.若有界格 L 有一个一元运算 $a\to a^\perp$,且满足下列三个条件:

1. $a\wedge a^\perp=0, a\vee a^\perp=1$;
2. $(a\wedge b)^\perp=a^\perp\vee b^\perp, (a\vee b)^\perp=a^\perp\wedge b^\perp$;
3. $(a^\perp)^\perp=a$;

则称 L 为正交格.正交格是有补格.适合分配恒等式的正交格是布尔代数.经常用到的非分配正交格是有限维欧几里得空间的所有子空间构成的格,其中一元运算是取正交补子空间.一个重要的非模正交格是(离散)希尔伯特空间 $\mathscr{H}=L^2(0,1)$的所有闭子空间所构成的格,其一元运算是取正交补子空间.

正交模格(orthomodular lattice) 一类重要的正交格.若正交格 L 满足下列条件之一:

1. 若 $x\leqslant y$,且 $x\vee(x^\perp\wedge y)=y$;
2. 若 $x=(x\wedge y)\vee(x\wedge y^\perp)$,且 $y=(y\wedge x)\vee(y\wedge x^\perp)$;

则称 L 为正交模格.模正交格,即是模格的正交格,是正交模格;反之,正交模格中虽然每一正交对都是模对,但它不一定是模格.正交模格是相对有补格.

备格(complete lattice) 亦称完备格.又称完全格.一类重要的格.它是伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)于 1933 年引入的非代数概念.若格 L 的任意子集均有上确界及下确界,则 L 称为备格.非空备格是有界的;备格的定义是自对偶的.任意集合 A 的集格 $P(A)$、格 L 的合同格 $C(L)$、群 G 的子群格、环的理想格、有限格等都是备格;但实数集 R 按通常数的大小关系构成的格不是备格;若在 R 中填上 $\pm\infty$,则集 R 构成备格.

完备格(complete lattice) 即“备格”.

定点定理(fixed-point theorem) 备格的一个重要性质.若 L 是备格,f 是 L 到自身的保序映射,则存在 $a\in L$,使得 $f(a)=a$.事实上,定义

$$a=\bigvee\{b\mid b\in L, b\leqslant f(b)\},$$

则 $f(a)=a$,因此备格 L 到自身的任何保序映射都有固定点.此命题称为定点定理,是塔尔斯基(Tarski,A.)于 1942 年发现的,但到 1955 年才发表.戴维士(Davis,A. C.)于 1955 年证明:若格 L 到自身的每一保序映射都有一个固定点,则 L 是备格.

条件备格(conditionally complete lattice) 亦称条件完备格或条件完全格.是备格概念的推广.若格 L 中的任意非空有界子集都有上确界和下确界,则称 L 为条件备格.许多重要的格,如实数域格,虽然不是备格,但却是条件备格.备格与条件备格仅有的区别为是否有泛界 0 和 1.

条件完全格(conditionally complete lattice) 即"条件备格".

代数格(algebraic lattice) 亦称紧致生成格.一种应用广泛的格.设 L 是备格,$a\in L$,若对 $X\subseteq L$,$a\leqslant\bigvee X$,存在 X 的有限子集 X_1,使得 $a\leqslant\bigvee X_1$,则称 a 为 L 的紧致元.若备格 L 的任一元均为紧致元的并,则称 L 为代数格.任意格的合同格是代数格.格 L 是代数格当且仅当 L 与某个含 0 的并半格的理想格同构,这是代数格的一个很有用的性质.代数格是伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)于 1967 年引入的,但他并未假设完备性.代数格对合同格的刻画、格的表示理论和无限维代数理论的研究均有重要作用.

紧致生成格(compactly generated lattice) 即"代数格".

格的紧致元(compact element of a lattice) 见"代数格".

交连续格(meet-continuous lattice) 一类特殊的备格.设 L 是备格,若对 L 的任意有向子集 D,有

$$a\wedge(\bigvee_D x_\delta)=\bigvee_D(a\wedge x_\delta),$$

则称 L 为交连续格.完备布劳威尔格、完备代数格均是交连续格.

σ 格(σ-lattice) 一类重要的格.涉及实分析中许多特殊问题的一个专门概念.若格 L 的任意有限或可数子集都有上、下确界,则称格 L 为 σ 格.完全格是 σ 格.设 S 是 σ 格 L 的子集,若对任意有限或可数子集 $X=\{x_n\}\subseteq S$,有 $\inf X,\sup X\in S$,则称 S 为 L 的 σ 子格.设 J 是 σ 格 L 的子集,若 J 满足下列条件:

1. $a\in J,x\in L$,由 $x\leqslant a$ 得出 $x\in J$;
2. 对 J 的有限或可数子集 X,有

$$\bigvee X=\sup X\in J;$$

则称 J 为 σ 格 L 的 σ 理想或 σ 幻.

σ 子格(σ-sublattice) 见"σ 格".

σ 理想(σ-ideal) 见"σ 格".

σ 幻(σ-ideal) 即"σ 理想".

波莱尔代数(Borel algebra) 一类特殊的布尔代数.布尔 σ 格(即既是布尔格又是 σ 格)称为波莱尔格;既是布尔代数又是 σ 格的代数系,称为波莱尔代数.设 A 是波莱尔代数,若 S 既是 A 的 σ 子格,又是 A 的布尔子代数,则称 S 为 A 的波莱尔子代数.集格 $P(X)$ 的波莱尔子代数称为 X 的子集的 σ 域;$P(X)$ 的 σ 子格称为集 X 的子集的 σ 环,其中 X 是任意集合.

波莱尔格(Borel lattice) 见"波莱尔代数".

波莱尔子代数(Borel subalgebra) 见"波莱尔代数".

σ 域(σ-field) 见"波莱尔代数".

σ 环(σ-ring) 见"波莱尔代数".

格的备化(completion of a lattice) 研究格论的重要方法之一.戈莱兹(Grätzer,G.)给出格的备化定义如下:格 L 的备化是指,包含 L 作为子格的任意一个备格 $\hat{L}$,使得 L 里存在的所有的有穷或无穷的并和有穷或无穷的交在 $\hat{L}$ 里保持不变.由于连续性、实(或复)变函数论……都是建基在备化的原始雏形——有理数集到实数集的扩充上,所以备化是整个数学乃至理工科学的重要基础之一.任何格(或模格或分配格)都可嵌入到一个备格(或备模格或备分配格)里;任何弱完全分配格都可以嵌入到一个布尔代数里.

分划(cut) 格论的基本概念之一.设 X 是偏序集 L 的子集,X',X^* 分别表示 X 的上界的集与下界的集(当 X 是空集时规定 $X'=X^*=L$),称$(X')^*$ 为 X 生成的 L 的分划.可以对偶地定义对偶分划.任意偏序集 L 可以备同构地嵌入到由它的分划构成的备格 $\bar{L}$ 中.

对偶分划(dual cut) 见"分划".

容(capacity) 格的一种特殊子集.设 A 是格 L 的非空子集,L 中一切适合

$$x=\bigvee_{a\in A}(x\wedge a)$$

的元 x 的全体构成的集称为 L 的由 A 生成的容,并记为 $\bar{A}$.当 A 仅有一个元 a 时,$\bar{A}$ 也记为 $\bar{a}$;当 A 是空集$\varnothing$时,规定 L 的由$\varnothing$生成的容为$\overline{\varnothing}$,称为 L 的空容.容的概念可用来统一处理有理数集到实数集的扩充和广义布尔格、布尔格及$\wedge$(或 $\vee$)弱完全分配格的惟一备化问题,尤其是用容来建立实数理论更为简洁和完善.

空容(empty capacity) 见"容".

格的独立集(independent set of a lattice) 格的一种特殊子集.在几何格的研究中起重要作用的一个概念.设 L 是有 0 的格,I 是补集 $L-\{0\}$的子集,若对 I 的任意两个有限子集 X,Y,有

$$(\bigvee X)\wedge(\bigvee Y)=\bigvee(X\cap Y),$$

则称 I 为格 L 的独立集.若 L 是有 0 的模格,则有限子集$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subseteq L-\{0\}$是独立的,当且仅当

$$(x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_i)\wedge x_{i+1}=0\quad(i=1,2,\cdots,n-1).$$

一个有限长的半模格的非零元子集$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是独立的,当且仅当

$$h(x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_n)=h(x_1)+h(x_2)+\cdots+h(x_n),$$

其中 $h(x)$是维函数.

模对(modular pair) 格的一类特殊元素对.格 L 中元,b,x,若 $x\leqslant b$,有

$$x\vee(a\wedge b)=(x\vee a)\wedge b,$$

则称 L 的元素对$\langle a,b\rangle$为模对,记成 aMb 或$(a,b)M$;若 $y\geqslant b$,有

$$y \wedge (a \vee b) = (y \wedge a) \vee b,$$

则称$\langle a,b\rangle$为对偶模对，记成aM^*b. 对任意$a,b\in L$，若aMb就有bMa，则称L为M对称的. 格L是模格，当且仅当对任意$a,b\in L$，有aMb. 有限长格L是半模格，当且仅当L是M对称的.

对偶模对(dual modular pair)　见“模对”.

***M* 对称模对**(M-symmetric modular pair)　见“模对”.

半模格(semimodular lattice)　可以用维函数刻画的一类重要格. 设L是有限长格，若L满足条件：

(ξ)：若$a\neq b$，且a,b都覆盖$a\wedge b$，则$a\vee b$覆盖a和b，

则称L为上半模格. 若L满足条件：

(ξ')：若$a\neq b$，且$a\vee b$覆盖a和b，则a,b都覆盖$a\wedge b$，

则称L为下半模格，其中$a,b\in L$. 通常将上半模格和下半模格统称半模格. 更一般地，若L是格，则L是半模格的充分必要条件是，对任意$a,b\in L$，由aMb得bMa；对偶地，L是下半模格的充分必要条件是对任意$a,b\in L$，由aM^*b得bM^*a. 伯克霍夫(Birkhoff, G. D.)首先考虑了半模格；迪尔沃思(Dilworth, R. P.)证明：每一个有限格一定与一个半模格的某一子格同构. 若L是有限长的格，对任意$a,b,c\in L$，则下述条件等价：

1. L是上半模格.
2. b覆盖a，有$b\vee c$覆盖$a\vee c$或$b\vee c=a\vee c$.
3. $h[a]+h[b]\geqslant h[a\wedge b]+h[a\vee b]$，其中$h[x]$是高函数.

上半模格(upper semimodular lattice)　见“半模格”.

下半模格(lower semimodular lattice)　见“半模格”.

直叵分格(directly indecomposable lattice)　一类特殊的格. 若格L不能表示为两个格A与B的直积，其中A与B都至少含有两个元素，则称L为直叵分格；否则称L为直可分格. 设L是格，若L可表示为直叵分格$A_i(0\leqslant i<n)$的直积

$$L = A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_{n-1},$$

且$L=B_0\times B_1\times\cdots\times B_{m-1}$，其中$B_j(0\leqslant j<m)$是直叵分格，则$n=m$，且存在$\{0,1,\cdots,n-1\}$的一个置换$\alpha$，使得$A_i\cong B_{\alpha(i)}\ (0\leqslant i<n)$.

直可分格(directly decomposable lattice)　见“直叵分格”.

透视元(perspective element)　格的一类元素对. 它在几何格的结构定理证明中起重要作用. 设a,b是有界格的两个元素，若a和b有一个公共补元c，即$a\vee c=1=b\vee c$，$a\wedge c=0=b\wedge c$，则称a和b是透视元，记为$a\overset{c}{\sim}b$，并称c为透视轴.

透视轴(perspective axis)　见“透视元”.

几何格(geometric lattice)　一类重要的半模格. 设L是格，若L既是半模格又是代数格，且L的每一紧致元均是L的有限个原子的并，则称L为几何格. 几何格是有补格，且是相对有补格. 此定义是麦克莱恩(Maclane, S.)于1938年以交换格为名称引入并研究的. 伯克霍夫(Birkhoff, G. D.)于1935年在有限长的格上给出了几何格的定义. 几何格同构于直叵分几何格的直积；几何格是直叵分的，当且仅当其任意两个原子是透视元. 几何格中原子的透视性是传递的.

点格(point lattice)　亦称原子并格. 一类特殊的格. 设L是格，若L的每一个元素均是原子的并，则称L为点格. 几何格是点格. 有限长点格是(上)半模格当且仅当对任意$a\in L$和任意原子$p\in L$有aMp.

原子并格(atomistic lattice)　即“点格”.

原子并矩阵胚格(atomistic matroid lattice)　亦称原子联格. 几何格类的推广. 它含原子布尔格(原子布尔格是指它既是原子并格，又是布尔格). 完全的、代数的、原子并的半模格称为原子并矩阵胚格.

原子联格(atomistic matroid lattice)　即“原子并矩阵胚格”.

模几何格(modular geometric lattice)　一类特殊的几何格. 既是模格又是几何格的格称为模几何格. 任何模几何格是一个布尔代数和一些射影几何的积.

格上的赋值(valuation on a lattice)　赋值概念的推广. 格L上的一个赋值，是指L上满足下列条件的实值函数$\gamma[x]$：对任意$x,y\in L$有

$$\gamma[x]+\gamma[y]=\gamma[x\vee y]+\gamma[x\wedge y].$$

若由$x\geqslant y$得$\gamma[x]\geqslant\gamma[y]$，则称赋值为保序的；若由$x>y$得$\gamma[x]>\gamma[y]$，则称赋值为正的. 有限长模格的维函数$h[x]$是正赋值. 具有正赋值的格称为度量格；具有保序赋值的格称为伪补度量格或拟度量格. 度量格都是模格.

保序赋值(order-preserving valuation)　见“格上的赋值”.

正赋值(positive valuation)　见“格上的赋值”.

度量格(metric lattice)　见“格上的赋值”.

伪补度量格(pseudo-metric lattice)　见“格上的赋值”.

拟度量格(quasi-metric lattice)　即“伪补度量格”.

分类格(partition lattice)　亦称等价格. 由集

合的分类所构造的一类备格. 设 A 是集合, π 是 A 的一些非空子集 $A_\alpha(\alpha\in I)$ 的集合, 若对任意 $\alpha,\beta\in I$, 由 $\alpha\neq\beta$ 得 $A_\alpha\cap A_\beta=\varnothing$ 且

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=A,$$

则称 π 为集合 A 的一个分类, π 的元素称为 π 的块. 若 A 的两元 a,b 属于 π 的同一块, 则记为 $a\equiv b(\pi)$, 或 $a\pi b$. 若 Part(A)表示集合 A 的一切分类所构成的集合, 定义二元关系$\leqslant$如下: $\pi_0\leqslant\pi_1$ 当且仅当由 $x\equiv y(\pi_0)$得 $x\equiv y(\pi_1)$, 则$\leqslant$是偏序关系, Part(A)关于$\leqslant$构成一个备格, 称为 A 的分类格. 奥尔(Ore, O.)于 1942 年首先详尽研究了分类格, 并且证明: Part(A)是单几何格; 迪尔沃思(Dilworth, R. P.)等人后来给出了分类格的特性.

集合的分类(partition of a set)　见“分类格”.

集合的块(block of a set)　见“分类格”.

格同态(homomorphism of lattices)　刻画格结构的重要方法之一. 设 L_1,L_2 是格, $a,b\in L_1$, f 是 L_1 到 L_2 的映射, 若

$$f(a\wedge b)=f(a)\wedge f(b),$$

则称 f 为交同态; 对偶地可定义并同态. 若 f 既是交同态又是并同态, 则称 f 为格 L_1 到格 L_2 的格同态. 若格同态 f 是单射, 则称 f 为 L_1 到 L_2 的格嵌入. 若格同态 f 既是单射又是满射, 则称 f 为 L_1 到 L_2 的格同构. 若 L_1 和 L_2 是有界格, 且格同态 f 使得 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 则称 f 为$\{0,1\}$格同态. 同样可定义$\{0\}$格同态、$\{0,1\}$格嵌入. 格 L 到自身的格同态、格同构称为格自同态、格自同构.

交同态(meet-homomorphism)　见“格同态”.

并同态(join-homomorphism)　见“格同态”.

格嵌入(embedding of lattices)　见“格同态”.

格同构(isomorphism of lattices)　见“格同态”.

$\{0,1\}$**格同态**($\{0,1\}$-homomorphism of lattices)　见“格同态”.

格的正规自同构(normal automorphism of a lattice)　一类特殊的格自同构. 设 f 是格 L 的自同构, $s\in L$, 若 f 使格 L 的所有与 s 可比的元保持不动, 并且存在元 $w(f)\leqslant s$, 使对于元 s 的一切补元 x 适合 $(x\vee f(x))\wedge s=w(f)$, 则称 f 是格 L 的正规自同构, 其中 $w(f)$称为正规自同构 f 的轴. 于是, $x,f(x)$是 s 的补元.

正规自同构的轴(axis of a normal automorphism)　见“格的正规自同构”.

格的表示(representation of a lattice)　刻画格的结构的重要工具. 格 L 的一个表示是指它到某个分类格 Part(A)的一个格嵌入.

格的等式类(equational class of lattices)　对格的一种刻画. 由等式组决定的格类. 含有记号$\wedge$, $\vee$及用以表示格中变元的字母的式子称为格多项式. 满足一切恒等式 $p_i=q_i$ 的格的全体构成的类 $\mathscr{K}$ 称为格的一个等式类, p_i,q_i 表示格多项式, $i\in I$; 格的等式类 $\mathscr{K}$ 称为平凡的, 当且仅当它只包含一元格的全体.

格多项式(lattice polynomial)　见“格的等式类”.

格的平凡等式类(trivial equational class of lattices)　见“格的等式类”.

自由格(free lattice)　格论的重要研究工具之一. 设 P 是偏序集, $\mathscr{K}$ 是格的一个等式类, 若格 $F_{\mathscr{K}}(P)$满足下列条件:

1. $F_{\mathscr{K}}(P)\in\mathscr{K}$;

2. $P\subseteq F_{\mathscr{K}}(P)$, 且对 $a,b,c\in P$, 在 $F_{\mathscr{K}}(P)$内 $a\wedge b=c$, 当且仅当在 P 内 $\inf\{a,b\}=c$; 在 $F_{\mathscr{K}}(P)$内 $a\vee b=c$, 当且仅当在 P 内 $\sup\{a,b\}=c$;

3. 由 P 生成的子格$[P]=F_{\mathscr{K}}(P)$;

4. 设 $L\in\mathscr{K}$, $\varphi:P\to L$ 是保序映射, 且满足: $a,b,c\in P$, 当其在 P 内 $\inf\{a,b\}=c$ 时, 在 L 中有$\varphi(a)\wedge\varphi(b)=\varphi(c)$; 当在 P 内 $\sup\{a,b\}=c$ 时, 在 L 中有$\varphi(a)\vee\varphi(b)=\varphi(c)$, 则存在一个格同态

$$\psi:F_{\mathscr{K}}(P)\to L,\text{使得 }\psi(P)=\varphi(P);$$

则称 $F_{\mathscr{K}}(P)$为 $\mathscr{K}$ 上由 P 生成的自由格. 若 P 是非序集, $|P|=\mathscr{M}$, 则记 $F_{\mathscr{K}}(\mathscr{M})=F_{\mathscr{K}}(P)$, 并称 $F_{\mathscr{K}}(\mathscr{M})$为 $\mathscr{K}$ 上 $\mathscr{M}$ 个生成元的自由格; 若 $\mathscr{K}$ 是格的全体构成的等式类, 则称 $F_{\mathscr{K}}(P)$为由 P 生成的自由格, 记为$F(P)$. 上述定义中的 ψ 是惟一的; 若 $F_{\mathscr{K}}(P)$存在, 则在同构意义下 $F_{\mathscr{K}}(P)$也是惟一的; 但$F_{\mathscr{K}}(P)$不一定存在. 若 P 是偏序集, $\mathscr{K}$ 是格等式类, 则 $F_{\mathscr{K}}(P)$存在, 当且仅当下列条件成立: 在 $\mathscr{K}$ 中存在格 L 使得 $P\subseteq L$, 且对任意 $a,b,c\in P$, 在 P 中$\inf\{a,b\}=c$当且仅当在 L 中 $a\wedge b=c$; 在 P 中 $\sup\{a,b\}=c$ 当且仅当在 L 中 $a\vee b=c$.

格的自由积(free product of lattices)　格论的重要概念和研究工具. 设 $\mathscr{K}$ 是一个格等式类, 且 $L,L_i\in\mathscr{K}(i\in I)$, 若满足下列条件:

1. 每个 L_i 均是 L 的子格, 且对任意 $i,j\in I$, $i\neq j$, L_i 和 L_j 是不交的;

2. L 是由 $\bigcup_{i\in I}L_i$ 生成的;

3. 对任意格 $A\in\mathscr{K}$ 及任意一簇格同态 $\varphi_i:L_i\to A$, $i\in I$, 存在格同态 $\varphi:L\to A$ 使得在 L_i 上的限制有

$$\varphi|L_i=\varphi_i\quad(i\in I);$$

则称格 L 为格 $L_i(i\in I)$的自由 $\mathscr{K}$ 积. 若 $\mathscr{K}$ 是全体格构成的等式类, 则称 L 为格 $L_i(i\in I)$的自由积. 在上述定义中, 若 $\mathscr{K}$ 是有界格类, 且所有同态是$\{0,1\}$格同态, 则 L 称为自由 $\mathscr{K}$-$\{0,1\}$积; 若 $\mathscr{K}$ 还

是分配格等式类，则 L 称为自由{0,1}分配积.

自由$\mathscr{K}$积(free $\mathscr{K}$-product)　见"格的自由积".

自由$\mathscr{K}$-{0,1}积(free $\mathscr{K}$-{0,1}-product)　见"格的自由积".

自由$\mathscr{K}$-{0,1}分配积(free $\mathscr{K}$-{0,1}-distributive product)　见"格的自由积".

完全自由生成格(completely free generated latice)　一类重要的格. 指由偏序集完全自由生成的格. 设$(A;\wedge,\vee)$是一个偏格，$\mathscr{K}$ 是格的一个等式类，若格$F_{\mathscr{K}}(A)$满足下列条件：

1. $F_{\mathscr{K}}(A)\in\mathscr{K}$；
2. $A\subseteq F_{\mathscr{K}}(A)$，且 A 是 $F_{\mathscr{K}}(A)$的相对子格；
3. $[A]=F_{\mathscr{K}}(A)$；
4. $L\in\mathscr{K}$，且 $\varphi: A\to L$ 是格同态，φ 的扩张同态 $\psi: F_{\mathscr{K}}(A)\to L$（即 $\psi(a)=\varphi(a)$，$a\in A$）；

则称 $F_{\mathscr{K}}(A)$为 $\mathscr{K}$ 上由 A 生成的自由格.

若$F_{\mathscr{K}}(A)$存在，则 ψ 是惟一存在的，且 $F_{\mathscr{K}}(A)$也是惟一的(在同构意义下). $F_{\mathscr{K}}(A)$存在当且仅当存在格 $L\in\mathscr{K}$，使得 A 是 L 的相对子格. 若 $\mathscr{K}$ 是格的全体构成的等式类，则称 $F_{\mathscr{K}}(A)$为由 A 生成的自由格，记为$F(A)$. 设 P 是偏序集，如下定义可使 P 成为偏格：对任意 $a,b\in P$，若$\inf\{a,b\}$(对偶地，$\sup\{a,b\}$)存在，则规定 $a\wedge b=\inf\{a,b\}$(对偶地，$a\vee b=\sup\{a,b\}$)，从而$(P;\wedge,\vee)$是偏格，$(P;\wedge,\vee)$在 $\mathscr{K}$ 上生成的自由格与偏序集 P 在 $\mathscr{K}$ 上生成的自由格是一致的；若在 P 上按如下方法定义偏格 P^m：在 P^m 内 $x\wedge y=z$，当且仅当 x 与 y 可比，且 $z=\inf\{x,y\}$；在 P^m 内 $x\vee y=z$，当且仅当 x 与 y 可比，且 $z=\sup\{x,y\}$，则 $F(P^m)$称为由偏序集 P 完全自由生成的格，也记为 CF(P). 对任意偏序集 P，由 P 完全自由生成的格是存在的.

撰 稿　高 亭　董克诚
审 阅　许永华　董荣森　漆芝南

格幺半群

偏序群胚(po-groupoid)　亦称偏序广群或 M 偏序集. 具有序结构的群胚. 设 M 是具有二元乘法运算的偏序集，$a,b,x\in M$，若 $a\leqslant b$ 有 $xa\leqslant xb$ 及 $ax\leqslant bx$，则称 M 为偏序群胚. 若乘法运算是交换的或结合的，则 M 分别称为交换偏序群胚或偏序半群. 设 0 是偏序群胚 M 的元素，若对任意 $x\in M$，有 $0\leqslant x$ 且 $0x=x0=0$，则称 0 为偏序群胚 M 的零元.

偏序广群(po-groupoid)　即"偏序群胚".

M 偏序集(M-poset)　即"偏序群胚".

交换偏序群胚(commutative po-groupoid)　见"偏序群胚".

偏序半群(po-semigroup)　见"偏序群胚".

理想元(ideal element)　偏序群胚中的特殊元素. 设 M 是偏序群胚，$a\in M$，若 $aa\leqslant a$，则称 a 为子幂等元；若对任意 $x\in M$，有 $xa\leqslant a$，$ax\leqslant a$，则称 a 为理想元.

子幂等元(subidempotent element)　见"理想元".

偏序幺半群(po-monoid)　亦称偏序近群. 一种特殊的半群. 具有单位元 1(即对任意 x，$x1=1x=x$)的偏序半群称为偏序幺半群. 任意偏序群都是偏序幺半群.

格序群胚(lattice-ordered groupoid)　亦称 l 广群或 m 格. 具有格序结构的群胚. 若 M 是一个具有乘法运算的并半格，且乘法对并是相容的，即对任意 $a,b,c\in M$，有

$$a(b\vee c)=ab\vee ac,\quad (a\vee b)c=ac\vee bc,$$

则称 M 为乘法半格，亦称 m 半格. 若$(M,\cdot)$是一个格，且乘法对并是相容的，则称 M 为格序群胚.

l 广群(l-groupoid)　即"格序群胚".

m 格(m-lattice)　即"格序群胚".

乘法半格(multiplication semilattice)　见"格序群胚".

m 半格(m-semilattice)　即"乘法半格".

剩余格(residuated lattice)　一类特殊的格序群胚. 设 M 是格序群胚，若对任意 $a,b\in M$，M 中存在使得 $xa\leqslant b$ 和 $ay\leqslant b$ 成立的最大元 x 和 y，则称 M 为剩余格. 若剩余格又是半群(幺半群)，则称 M 为剩余格序半群(剩余格序幺半群). 设 L 是格，若定义 $xy=x\wedge y$，则 L 是剩余格当且仅当 L 是布劳威尔格.

剩余格序幺半群(residuated lattice-ordered monoid)　见"剩余格".

剩余格序半群(residuated lattice-ordered semigroup)　见"剩余格".

格序半群(lattice-ordered semigroup)　简称格半群，又称 l 半群. 它是具有格序结构的半群. 设 M 是一个半群，若 M 又是一个格序群胚，则称 M 为格序半群. 有单位元的格序半群称为格序幺半群，亦称格幺半群或 l 幺半群.

格半群(lattice-ordered semigroup)　即"格序半群".

l 半群(l-semigroup)　即"格序半群".

格序幺半群(lattice- ordered monoid)　见"格序半群".

格幺半群(lattice-ordered monoid l-monoid)　即"格序幺半群".

l 幺半群(lattice ordered monoid) 即“格序幺半群”.

可除幺半群(divisibility monoid) 亦称可除近群.一类重要的偏序幺半群.设 M 是偏序幺半群,若 $a\leqslant b$ 等价于 $b\in Ma$ 及 $b\in aM$,则称偏序幺半群 M 为可除幺半群.赫尔德(Hölder,O.L.)于 1901 年证明:任何阿基米德序可除幺半群可嵌入到实数加群.阿基米德序可除幺半群是交换的.

备格序幺半群(complete lattice-ordered monoid) 亦称 cl 幺半群.一类重要的格序幺半群.设 M 是具有二元乘法运算的备格,若乘法对并满足无限分配律:

$$a(\bigvee b_\beta)=\bigvee(ab_\beta) \quad 及 \quad (\bigvee a_\alpha)b=\bigvee(a_\alpha b),$$

则称 M 为备格序群胚.设 M 是一个备格序群胚,若 M 的乘法满足结合律,则称 M 为备格序半群.具有单位元的备格序半群称为备格序幺半群.有零的备格序群胚是剩余格.

cl 幺半群(cl-monold) 即“备格序幺半群”.

备格序群胚(complete lattice-ordered groupoid) 见“备格序幺半群”.

备格序半群(complete lattice-ordered semigroup) 见“备格序幺半群”.

诺特格序幺半群(Noetherian lattice-ordered monoid) 一类重要的格序幺半群.若格序幺半群 L 是整的、交换的,且作为格满足升链条件,则称 L 为诺特格序幺半群.沃德(Ward,M.)和迪尔沃思(Dilworth,R.P.)证明,在诺特环的一般理想理论中成立的许多定理对一般诺特格序幺半群也成立.

格序幺半群的准素元素(primary element of a lattice-ordered monoid) 格序幺半群的一种特殊元素.设 L 是格序幺半群,$q\in L$,若 $a,b\in L$,且 $ab\leqslant q$,有 $a\leqslant q$,或存在一个正整数 n 使得 $b^n\leqslant q$,则称 q 为 L 的(右)准素元素.

戴德金格序幺半群(Dedekind lattice-ordered monoid) 一类重要的格序幺半群.设 L 是交换的剩余格序幺半群,若 L 的负锥满足升链条件,则称 L 为戴德金格序幺半群.任意诺特格序幺半群是整戴德金格序幺半群.

整格序群胚(integral lattice-ordered groupoid) 一类具有上界的格序群胚.设 L 是有乘法恒等元 e 的格序群胚(偏序群胚),若对任意 $x\in L$,$x\leqslant e$(即 e 是 L 的上界),则称 L 为整格序群胚(整偏序群胚).设 R 是具有单位元 1 的环,R 中所有理想的集合按集合的包含关系定义的偏序和环中理想的乘法构成一个整格序群胚,其中 $e=R$ 是乘法恒等元.任意格序群的负锥是整格序群胚.每一个有补整格序群胚是一个适合 $xy=x\wedge y$ 的布尔代数.

整偏序群胚(integral po-groupoid) 见“整格序群胚”.

整格序群胚的素元(prime element of a integral lattice-ordered groupoid) 整格序群胚中的一类重要元素.设 L 是整格序群胚,e 是 L 的恒等元,若 $m\in L$,且 e 覆盖 m,则称 m 为极大元.若 p 是 L 中不等于 e 的元素,由 $x,y\in L$ 且 $xy\leqslant p$ 得 $x\leqslant p$ 或 $y\leqslant p$,则称 p 为素元.设 $p\in L$,且 $p<e$,若由 $xy=p$ 得 $x=p$ 或 $y=p$,则称 p 为不可分解元(叵分元).

整格序群胚的极大元(maximal element of an integral lattice-ordered groupoid) 见“整格序群胚的素元”.

整格序群胚的不可分解元(indecomposable element of an integral lattice-ordered groupoid) 见“整格序群胚的素元”.

逆半群的自然序(natural order on an inverse semigroup) 逆半群中一种重要的偏序关系.若 S 是逆半群,$a,b\in S$,定义 $a\leqslant b$ 当且仅当存在一个幂等元 e 使 $a=eb$,则$\leqslant$是 S 的一个偏序,称为 S 的自然序.设$(S,\leqslant)$是一个逆半群,$\leqslant$是 S 的自然序,若 $a\leqslant b$,对任意 $c\in S$,则 $ca\leqslant cb$,$ac\leqslant bc$ 及 $a^{-1}\leqslant b^{-1}$,因此$(S,\leqslant)$是偏序半群.

非负序半群(non-negatively ordered semigroup) 一类特殊的全序半群.设 S 是全序半群,$x\in S$,若 $x\leqslant x^2$($x^2\leqslant x$),则 x 称为 S 中的非负(非正)元素.若 S 的每个元素均是非负(非正)的,则 S 称为非负(非正)序半群.

非正序半群(non-positively ordered semigroup) 见“非负序半群”.

阿基米德序半群(Archimedean order semigroup) 一类重要的全序半群.设 S 是全序半群,若对任意 $x,y\in S$,存在自然数 p,q,r,t,使得 $x^p\leqslant y^q$ 和 $y^r\leqslant x^t$,则 S 称为阿基米德序半群.

严格正格序半群(strictly positive lattice-ordered semigroup) 一类特殊的格序半群.设 S 是格序半群,$a\in S$.若对任意 $b\in S$,有 $ab\wedge ba\geqslant b$,则称 a 为 S 的严格正元.若格序半群 S 中的每个元素均是严格正元,则 S 称为严格正格序半群.

严格正元(strictly positive element) 见“严格正格序半群”.

格序半群中的阿基米德等价(Archimedean equivalent on a lattice-ordered semigroup) 格序半群中的一种等价关系.设 S 是格序半群,$a,b\in S$,若存在正整数 m,n 使 $a\leqslant b^m$ 和 $b\leqslant a^n$,则称 a 与 b 是阿基米德等价的.格序半群中的阿基米德等价是一个等价关系,且它的每一个等价类均是格序半群.

实格序子幺半群(solid lattice-ordered submonoid) 一类具有特殊性质的格子幺半群.设 A 是格序半群,且是 S 的格序子幺半群.若 A 的正锥

A^+是S^+的m理想，则A称为S的实格序子幺半群.

分配格序半群(distributive lattice-ordered semigroup)　一类重要的格序半群.设S是格序半群，若作为格，$(S,\wedge,\vee)$是分配的，则S称为分配格半群.

阶格序半群(step lattice-ordered semigroup)　一类特殊的格序半群.设S是格序半群，若元素0是有限并既约的，即若$a\vee b=0$，有$a=0$或$b=0$，则称S为阶格序半群.

诣零格序半群(nil lattice-ordered semigroup)　具有格序结构的诣零半群.设S是具有零元素的诣零半群，若S本身又是格序半群，则称S为诣零格序半群.

格序半群的正理想(positive ideal of a lattice-ordered semigroup)　亦称格序半群的正幻.一类重要的理想.它是含有正元的理想.设S是格序半群，$a\in S$，若对任意$s\in S$，$as\geqslant s\leqslant sa$，则$a$称为正元素.设$A$是$S$的一个理想，若$A$至少包含一个正元，则$A$称为正理想.

格序半群的正幻(positive ideal of a lattice-ordered semigroup)　即"格序半群的正理想".

格序半群的正元素(positive element of a lattice-ordered semigroup)　见"格序半群的正理想".

撰稿　朱作桐　高亭　董克诚
审阅　董荣森　漆芝南

格　序　群

偏序群(po-group)　亦称半序群.一种具有序结构的群.自从第二次世界大战以后，随着伯克霍夫(Birkhoff, G. D.)、罗伦岑(Lorenzen, P.)等人的基础文章的发表，格序群成为一门学科.康莱德(Conrad, P.)于1960年发表的文章中提供了利用凸l子群来研究格序群类结构的工具.这个方法特别成功的例子是他的学生哈韦(Harvey, J.)、赫兰(Holland, W. C.)将哈恩(Hahn, H.)关于可换格序群的嵌入定理推广到一般的格序群.设$(G,+,0)$是群，若G又是偏序集，且偏序$\leqslant$对加法是相容的，即对任意$x,y,a,b\in G$，由$x\leqslant y$得$a+x+b\leqslant a+y+b$，则称G为偏序群.偏序群的任意子群关于此偏序群的偏序是一个偏序群.例如，若X是拓扑空间，$C(X)$为X上所有实值连续函数加群，对任意$f,g\in C(X)$，定义$f\leqslant g$当且仅当对任意$x\in X$，$f(x)\leqslant g(x)$，则$C(X)$是一个偏序群.

半序群(semi-order group)　即"偏序群".

偏序群的正元(positive element of a po-group)　偏序群中的一类重要元素.设G是偏序群，$g\in G$，若$g>0(<0)$，其中0是群G的单位元，则称g为G的正(负)元.

偏序群的负元(negative element of a pogroup)　见"偏序群的正元".

正锥(positive cone)　偏序群的正元素集.若G是偏序群，则G的正元素集$G^+=\{g\in G\mid g>0\}$及G的负元素集$G^-=\{g\in G\mid g<0\}$分别称为G的正锥及负锥.G^+满足如下条件：

1. $G^++G^+\subseteq G^+$.
2. $G^+\cap -G^+=G^+\cap G^-=\{0\}$.
3. 对任意$a\in G$有$a+G^+-a\subseteq G^+$.

反之，若P是群G的子集，G的运算记为$+$，且P满足条件1,2,3，对任意$x,y\in G$，定义$x>y$当且仅当$x-y\in P$，则由P可诱导出G的一个序，使G成为偏序群，且$P=G^+$.于是，一个偏序群的序完全由满足上述条件的子集P所确定，因此，亦称P是G的一个序.

负锥(negative cone)　见"正锥".

偏序群的序(order of a po-group)　见"正锥".

偏序群的字典式积(lexicographic product of pogroups)　构造偏序群的方法之一.设G,H是偏序群，$G\circ H=\{(x,y)\mid x\in G,y\in H\}$，若在$G\circ H$中定义：

1. $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$；
2. $(x,y)\geqslant 0$，当且仅当$x>0$或$x=0,y\geqslant 0$；

则$G\circ H$是偏序群，称为G和H的字典式积.

偏序群的直积(direct product of po-groups)　具有序结构的群的直积.设$\{G_i\mid i\in I\}$是一族偏序群，若

$$\prod_{i\in I}G_i=\{(\cdots x_i\cdots)\mid x_i\in G_i\},$$

对任意

$$x=(\cdots x_i\cdots),y=(\cdots y_i\cdots)\in\prod_{i\in I}G_i,$$

定义$x\circ y=(\cdots x_i\circ y_i\cdots)$，$x\leqslant y$当且仅当$x_i\leqslant y_i$，对任意$i\in I$，则$\prod_{i\in I}G_i$构成一个偏序群，称为$\{G_i\mid i\in I\}$的直积.序"$\leqslant$"称为逐点序.$\prod_{i\in I}G_i$中由仅有有限多个非零分量的元所构成的偏序子群，称为$\{G_i\mid i\in I\}$的直和，记为$\sum_{i\in I}G_i$.

逐点序(point wise order)　见"偏序群的直积".

偏序群的直和(direct sum of po-groups)　见"偏序群的直积".

格序群(lattice-ordered group)　亦称格群或l群.一种具有格序关系的群.若偏序群G作为偏序集是格，则称G为格序群.格群是分配格.设G既是

群又是格,则 G 是格序群当且仅当对任意 $a,b,x,y\in G$,满足:

$$a+(x\vee y)+b=(a+x+b)\vee(a+y+b),$$
$$a+(x\wedge y)+b=(a+x+b)\wedge(a+y+b).$$

除去平凡的格群外 ,没有有限格群.

格群(lattice-ordered group)　即"格序群".

***l* 群**(l-group)　即"格序群".

全序群(totally ordered group)　亦称线性序群或 O 群.一类有广泛应用的格群.若格群 G 的序是全序的,则 G 称为全序群.若 G 是全序群,则

$$G=G^{+}\cup -G^{+}.$$

线性序群(linear-ordered group)　即"全序群".

***O* 群**(O-group)　即"全序群".

有向群(directed group)　一类特殊的偏序群.设 G 是偏序群,若 G 具有性质:对任意 $a,b\in G$,存在 $c\in G$,使得

$$a\leqslant c,\quad b\leqslant c,$$

则称 G 为有向群.偏序群是有向群,当且仅当它作为偏序集是有向集.任意格群都是有向群.

离散格序群(discrete lattice-ordered group)　一类特殊的格群.正锥满足降链条件的格群称为离散格序群.在离散格序群中,所有非 0 正元素集合的极小元均是覆盖 0 的元素.

备格序群(complete lattice-ordered group)　亦称备格群,又称完备格群.是一类重要的格群.若格群 G 作为格是条件备格,则称 G 为备格序群.岩泽健吉(Iwasawa,K.)证明了备格群是交换格群.

备格群(complete lattice-ordered group)　即"备格序群".

完备格群(complete lattice-ordered group)　即"备格序群".

σ 备格序群(σ-complete lattice-ordered group)　一类特殊的格序群.若格群 G 的每一可数有界子集有上、下确界,则称 G 为 σ 备格序群.σ 备格序群是阿基米德格序群.

赋范格序群(normed lattice-ordered group)　一类重要的格序群.它是与赋范空间相联系的格群.设 G 是格群,若在 G 上定义一个非负实值函数 $\|\cdot\|$,且满足条件:由 $\|x\|=0$ 得

$$x=0;\ \|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|;$$
$$\|nx\|=|n|\,\|x\|\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots);$$

又由 $0\leqslant x\leqslant y$ 得:

$$\|x\|\leqslant\|y\|;\quad \||x|\|=\|x\|;$$

则 G 称为赋范格序群.设 G 是赋范格序群,且是向量格,若对任意实数 $\lambda,x\in G$,有 $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$;则称 G 为赋范向量格.

赋范向量格(normed vector lattice)　见"赋范格序群".

格序群中的不相交元素(disjoint element of a lattice-ordered group)　亦称格序群中的互斥元.研究格群完备化的重要概念.设 $(G,+,0,\leqslant)$ 是一个格群,a,b 是 G 中的两个正元,若 $a\wedge b=0$,则称 a 与 b 是不相交的.若 a,b 是两个不相交的元素,则

$$a+b=b+a.$$

格序群中的互斥元(disjoint element in a lattice-ordered group)　即"格序群中的不相交元素".

正部(positive part)　格群的基本概念之一.若 a 是格群 G 的元素,定义

$$a^{+}=a\vee 0,\quad a^{-}=(-a)\vee 0,$$

则分别称 a^{+} 和 a^{-} 为 a 的正部和负部.若 G 是一个格群,则对任意 $a,b\in G$,有:

1. $a=a^{+}-a^{-}$.
2. $a^{+}\wedge a^{-}=0$.
3. 若 $a=b-c$,且 $b\wedge c=0$,则 $b=a^{+},c=a^{-}$.
4. $a\leqslant b$ 当且仅当 $a^{+}\leqslant b^{+}$ 与 $a^{-}\geqslant b^{-}$.
5. $a^{+}\wedge b^{+}\leqslant(a+b)^{+}\leqslant a^{+}+b^{+}$.

负部(negative part)　见"正部".

元素的绝对值(格序群中)(absolute value of an element (in a lattice-ordered group))　格群的基本概念之一.设 a 是格群 G 的元素,称 $a^{+}+a^{-}$ 为 a 的绝对值,用 $|a|$ 表示,即 $|a|=a^{+}+a^{-}$.若 $a\in G$,则

$$|a|=a^{+}\vee a^{-}=a\vee(-a).$$

关于绝对值有以下性质:

1. $|a\vee b|\leqslant|a|\vee|b|\leqslant|a|+|b|$.
2. $|a-b|=a\vee b-a\wedge b$.
3. 弱三角形不等式:

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|+|a|,$$
$$|a+b|\leqslant|b|+|a|+|b|.$$

特别地,$|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 当且仅当格群是可换的.

强单位(strong unit)　偏序群的一类特殊元素.设 e 是偏序群 G 的元素,若对任意 $a\in G$,有正整数 $n=n(a)$,使得 $ne>a$,则称 e 为 G 的强单位.

弱单位(weak unit)　格群中的一类特殊元素,它在格群的直分解中有应用.若 c 是格群 G 的正元素,$x\in G$,由 $c\wedge|x|=0$ 得 $x=0$,则称 c 为 G 的弱单位.由定义可知,强单位必是弱单位.

凸 *l* 子群(convex l-subgroup)　格群的基本概念之一.设 G 是格群,H 是 G 的子群,若 H 也是 G 的子格,则称 H 为 G 的 l 子群.等价地,子群 H 是 l 子群,当且仅当对任意 $h\in H,h\vee 0\in H$,其中 0 是 G 的单位元.设 K 是格群 G 的 l 子群,若 K 是凸集,即对 $x,z\in K,y\in G$,由 $x<y<z$ 得 $y\in K$,则称 K 为 G 的凸 l 子群.

***l* 子群**(l-subgroup)　见"凸 l 子群".

***l* 同态**(l-homomorphism)　一类特殊的同态.

群与格的同态应用于格群. 设 G 与 H 是两个格群, φ 是 G 到 H 的群同态, 若 φ 又是 G 到 H 的格同态, 则称 φ 为 G 到 H 的 l 同态; 若 l 同态 φ 是单映射, 则 φ 称为单 l 同态; 若 φ 是满映射, 则 φ 称为满 l 同态; 若 φ 既是单映射又是满映射, 则 φ 称为 l 同构. 若 φ 是格群 G 到格群 H 的 l 同态, 则 $\varphi(G)$ 是 H 的一个 l 子群. 若 φ 是格群 G 到格群 H 的一个群同态, 则下列条件等价:

1. φ 是 l 同态.

2. 对任意 $x,y\in G$, 若 $x\wedge y=0$, 则
$$\varphi(x)\wedge\varphi(y)=0.$$

3. 对任意 $x\in G$, $\varphi(x\wedge 0)=\varphi(x)\wedge 0$.

单 l 同态(l-monohomomorphism)　见"l 同态".

满 l 同态(epi l-homomorphism)　见"l 同态".

l 同构(l-isomorphism)　见"l 同态".

l 理想(l-ideal)　亦称 l 幻. 是一类重要的凸 l 子群. 格群 G 的正规凸 l 子群, 称为 G 的 l 理想. $\{0\}$ 及 G 本身是 G 的 l 理想, 称为 G 的平凡 l 理想. 若 φ 是格群 G 到格群 H 的满 l 同态, 则:

1. φ 的核 $\ker(\varphi)$ 是 G 的 l 理想.

2. 若 N 是 G 的 l 理想, 在商群 G/N 中, 定义 $N+a\geqslant N+b$, 当且仅当存在 $k\in N$ 使 $k+a\geqslant b$, 则
$$(N+a)\vee(N+b)=N+(a\vee b);$$
$$(N+a)\wedge(N+b)=N+(a\wedge b),$$
且 G/N 是一个格群. 自然映射 $\eta:G\to G/N$ 是一个 l 同态.

3. $G/\ker(\varphi)$ 与 H 是 l 同构.

l 幻(l-ideal)　即"l 理想".

平凡 l 理想(trivial l-ideal)　见"l 理想".

平凡 l 幻(trivial l-ideal)　见"l 理想".

主 l 理想(principal l-ideal)　亦称主 l 幻. 格群中一类重要的 l 理想. 若 G 是格群, $a\in G$, 由元素 a 在 G 中生成的 l 理想称为 G 的主 l 理想, 记为 (a). $(a)=\{x\in G\mid$ 存在自然数 $n=n(x)$ 和 $g_1,g_2,\cdots,g_n\in G\}$, 使得
$$|x|\leqslant\sum_{i=1}^{n}[-g_i+|a|+g_i].$$

主 l 幻(principal l-ideal)　即"主 l 理想".

独立 l 理想(independent l-ideal)　亦称独立 l 幻. 格群中不相交元素概念的推广. 设 J 和 K 是格序群 G 的 l 理想, 若 $J\wedge K=0$, 即对于任意 $x\in J$, $y\in K$, $|x|\wedge|y|=0$, 则称 J 和 K 是独立的, 记为 $J\perp K$.

独立 l 幻(independent l-ideal)　即"独立 l 理想".

闭凸 l 子群(closed convex l-subgroup)　一类重要的凸 l 子群. 设 C 是格序群 G 的凸 l 子群, 若
$$\{c_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}\subseteq C,\quad c=\bigvee_{\lambda\in\Lambda}c_\lambda$$
在 G 中存在且 $c\in C$, 则称 C 关于无限并是封闭的. 若 C 关于无限并与无限交均是封闭的, 则称 C 为闭凸 l 子群.

极子群(polar subgroup)　一类重要的凸 l 子群. 设 C 是格群 G 的凸 l 子群, 则存在一个惟一的极大凸 l 子群 C', 使 $C\cap C'=\{0\}$, 且
$$C'=\vee\{D\in C(G)\mid D\cap C=\{0\}\},$$
其中 $C(G)$ 是 G 的凸 l 子群所成的集合. 若 $C''=(C')'$, 则称 C 为 G 的极子群.

格序群中的极(polar in a lattice-ordered group)　一类特殊的凸 l 子群. 若 X 是格群 G 的子集, $X^{\perp}=\{y\in G\mid |y|\wedge|x|=0$, 对任意 $x\in X\}$, 则称 $X^{\perp}$ 为 X 的极. $X^{\perp}$ 是 G 的凸 l 子群. 特别地, 若 $g\in G$, 记 $g^{\perp}=\{g\}^{\perp}$, $g^{\perp\perp}=\{g^{\perp}\}^{\perp}$, 则称 $g^{\perp\perp}$ 为 G 的主极子群. 若 C 是格序群 G 的凸 l 子群, 则 $C'=C^{\perp}$.

格序群的主极子群(principal polar subgroup of a lattice-ordered group)　见"格序群中的极".

闭 l 理想(closed l-ideal)　亦称闭 l 幻. 是完备格群中的一个重要概念. 设 J 为完备格群 G 的 l 理想, 若对任意有界子集 $\{x_\alpha\}\subset J$, 有 $\vee x_\alpha\in J$, 则称 J 为闭 l 理想.

闭 l 幻(closed l-ideal)　即"闭 l 理想".

主凸 l 子群(principal convex l-subgroup)　一类重要的凸 l 子群. 指格序群中由一个元素所生成的凸 l 子群. 设 G 是格序群, $g\in G$, G 中包含 g 的最小凸 l 子群, 称为 G 的主凸 l 子群, 记为 $G(g)$. 若 $g\in G$, 则 $G(g)=\{h\in G\mid |h|\leqslant n|g|$, 对某个正整数 $n\}$. 因此, $G(g)=G(|g|)$. 若 $g,h>0$, 则
$$G(g\vee h)=G(g)\vee G(h),$$
$$G(g\wedge h)=G(g)\cap G(h).$$

格序群的生成 l 子群(generated l-subgroup of a lattice-ordered group)　一类重要的 l 子群. 设 S 是格序群 $(G,+)$ 的子集合, G 中包含 S 的最小 l 子群称为由 S 生成的 l 子群. 它是由形如
$$\bigvee_I\bigwedge_J\sum_K g_{ijk}$$
的一切元素构成的, 其中 I, J 和 K 是有限指标集, 对于每个 $g_{ijk}\in S$ 或 $-g_{ijk}\in S$.

格序群的正则子群(regular subgroup of a lattice-ordered group)　一类特殊的凸 l 子群. 设 $(G,+)$ 是格序群, $C(G)$ 表示 G 的凸 l 子群集. 若 P 是 G 的不包含 $g\in G$ 的一个极大的凸 l 子群, 则称 P 为 G 的正则子群. 设
$$P^*=\bigcap\{C\in C(G)\mid C\supset P\},$$
若 P 是正则子群, 则称 P^* 为 P 的一个覆盖. 若 $g\in P^*\setminus P$, 则称 P 为 g 的一个值. 若 P 是 g 的值, 对任意 $h\in G$, 则 $-h+P+h$ 是 $-h+g+h$ 的一个值. 格

序群中的每一个元素至少有一个值.

元素的值(value of an element) 见"格序群的正则子群".

正则子群的覆盖(cover of a regular subgroup) 见"格序群的正则子群".

素子群(prime subgroup) 一类凸 l 子群. 它在格群表示论中有重要作用. 设 G 是格群, $P\in C(G)$, 若 G/P(右陪集的集)是全序的, 则 P 称为 G 的素子群. 正则子群是素子群. 若 P 是格群 G 的一个凸 l 子群, 则下列条件等价:

1. P 是素子群.
2. $\{C\in C(G)\mid C\supseteq P\}$ 对于包含关系是全序的.
3. 若 $a\wedge b\in P$, 则 $a\in P$ 或 $b\in P$.
4. 若 $a\wedge b=0$, 则 $a\in P$ 或 $b\in P$.

可投射格序群(projectable lattice-ordered group) 一类特殊的格序群. 设 G 是格群, 若对任意 $g\in G$, $G=g^{\perp\perp}\oplus g^{\perp}$, 则称 G 是可投射的. 若对 G 的每个极子群 C, $G=C\oplus C'$, 则称 G 为强可投射格序群. 若 G 的每个素子群包含一个惟一的极小素子群, 则 G 称为半可投射格序群.

强可投射格序群(strongly projectable lattice-ordered group) 见"可投射格序群".

半可投射格序群(semiprojectable lattice-ordered group) 见"可投射格序群".

哈密顿格序群(Hamiltonian lattice-ordered group) 一类特殊的格序群. 每个凸 l 子群是正规子群的格序群, 称为哈密顿格序群. 哈密顿格序群是可表示格序群.

特殊值格序群(special valued lattice-ordered group) 一类特殊的格序群. 设 G 是格序群, 若 P 是包含元素 g 的所有值的正则子群, 则称 P 是本质值的. 因为值的共轭是值, 所以任一个本质值的共轭是本质值的. 若 Q 是元素 $g\in G$ 的惟一的值, 则 Q 是本质值的, 称为特殊元素 g 的特殊值. 若格序群 G 的每个元素仅有有限个值, 则称 G 为有限值的. 对于格序群 G, 下列条件等价:

1. G 是有限值的.
2. G 中每个元可以表为两两不相交的有限个特殊元的积.
3. 每个值是特殊的.

本质值(essential value) 见"特殊值格序群".

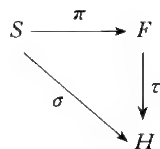
有限值格序群(finite-valued lattice-ordered group) 见"特殊值格序群".

格序置换群(lattice-ordered permutation group) 亦称 l 置换群. 一类重要的格序群. 若 T 是全序集, $A(T)$ 是 T 上全体保序置换对映射的合成构成的乘法群, 对任意 $f,g\in A(T)$, 定义 $f\leqslant g$ 当且仅当 $\alpha f\leqslant \alpha g$, 对一切 $\alpha\in T$, $\alpha(f\wedge g)=\min\{\alpha f,\alpha g\}$, $\alpha(f\vee g)=\max\{\alpha f,\alpha g\}$, 则群 $A(T)$ 构成一个格序群. 若格序群 G 是 $A(T)$ 的 l 子群, 则 (G,T) 称为格序置换群. 赫兰(Holland, W. C.)于 1963 年证明, 每个格序群是 $A(T)$ 的一个格序子群, 对某个全序集 T.

***l* 置换群**(l-permutation group) 见"格序置换群".

自由格序群(free lattice-ordered group) 一类重要的格序群. 设 S 是一个集合, π 是 S 到格序群 F 的单映射. 若:

1. F 是由 $S\pi$ 生成的 l 群;
2. 若 σ 是 S 到任意格序群 H 的映射, 则存在 F 到 H 的 l 同态 τ, 使 $\pi\circ\tau=\sigma$, 即图是可换的; 则称 (F,π) 为 S 上的自由格序群, S 为 F 的自由生成元集. 任意基数 α 的集合 S 上的自由格序群 F_α 是存在的, 且在同构的意义下是惟一的. 若 (F,π) 是偏序群 G 上的自由格序群, 则:



1. 若 G 是交换群, 则 F 也是交换群, 若 S 是 G 的生成元集, 则 $S\pi$ 是格序群 F 的生成元集.
2. 若 (F,π) 是平凡序自由群 G 上的自由格序群, S 是 G 的自由生成元集, 则 $S\pi$ 是自由格序群 F 上的自由生成元集.

若 (F,π) 是格序群 G 上的自由格群, 则下列命题等价:

1. $G\pi=F$.
2. G 是全序群.
3. G 到格序群的保序同态是一个 l 同态.

阿基米德格序群(Archimedean lattice-ordered group) 一类重要的交换格序群. 设 G 是一个格序群, 若对任意 $a,b\in G$, $na\leqslant b$ 对所有的正整数 n, 有 $a\leqslant 0$, 则称 G 是阿基米德格序群, 简称阿氏格群. 伯诺(Bernau, S. J.)于 1965 年证明, 阿氏格群是交换格群; 反之未必成立, 如 $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$($\mathbf{Z}$ 是整数集)按字典序是交换格群, 但不是阿氏格群. 肖德(Höder, O.)定理: 若 G 是全序群, 则下列命题等价:

1. G 是阿基米德格序群.
2. G 是序同构于实数加群的一个子群.
3. G 无真凸子群.

阿氏格群(Archimedean lattice-ordered group) 阿基米德格序群的简称.

交换格序群(commutative lattice-ordered group) 亦称阿贝尔格序群. 一类重要的格序群. 设 G 是格序群, 若 G 是交换群, 则 G 称为交换格序群. 阿基米德格序群是交换的, 交换格序群是可表示格序群.

整闭偏序群(integrally closed po-group) 一

类特殊的阿基米德偏序群. 偏序群 G 称为整闭的，是指：对任意 $a,b\in G$，若 $na\leqslant b(n=1,2,\cdots)$，则 $a\leqslant 0$. 整闭偏序群是阿基米德偏序群. 备格群的任意子群是整闭偏序群，从而是阿基米德偏序群.

可表示格序群（representable lattice-ordered group） 交换格序群的推广. 设 G 是格序群，若 G 是全序群 G_λ 的次直积，则称 G 是可表示格序群. 每个可换格序群、幂零格序群都是可表示的. 格序群 G 是可表示的，当且仅当 G 有一族交为零的正规素子群. 若 $(G,+)$ 是一个格序群，则下列命题等价：

1. G 是可表示的.
2. 对任意 $a,b\in G$，$2(a\wedge b)=2a\wedge 2b$.
3. 对任意 $a,b\in G$，$a\wedge(-b-a+b)\leqslant 0$.
4. G 的每个极子群是正规的.
5. G 的每个极小素子群是正规的.
6. 若 $0<a\in G$，则对所有的 $b\in G$，
$$a\wedge(-b+a+b)>0.$$

正规值格序群（normal-valued lattice-ordered group） 一类特殊的格序群. 最大的真格序群簇. 设 $(G,+)$ 是格序群，P 是 G 的正则子群，P^* 是 P 的覆盖. 若 P 是 P^* 的正规子群，即对任意 $x\in P^*$，$-x+P+x=P$，则称 P 是 G 的正规值子群. 若 G 中所有正则子群都是正规值的，则称 G 是正规值格序群. 可换格序群、可表示格序群是正规值的. 但是，格序群并不一定都是正规值的，例如，$A(R)$ 就不是正规值格序群. 设 G 是格序群，$a,b\in G^+$，若对任意正整数 n，$nb\leqslant a$，则称 a 无限大于 b，记为 $b\ll a$. 设 G 是格序群，则下列条件等价：

1. G 是正规值的.
2. 对所有的 $a,b\in G^+$，$a+b\leqslant 2b+2a$.
3. 对任意 $a,b\in G$，$-a-b+a+b\ll|a|\vee|b|$.
4. 对 G 的所有凸 l 子群 A 和 B，
$$A+B=B+A=A\vee B,$$

其中 $A\vee B$ 是由 A 与 B 所生成的凸 l 子群.

正规值子群（normal-valued subgroup） 见“正规值格序群”.

格序群簇（variety of lattice-ordered groups） 格序群的特殊的类. 满足一组等式的所有格序群的类. 若 $\mathscr{U}$ 是格序群的类，则 $\mathscr{U}$ 是一个簇当且仅当它具有下列三个性质：

1. 若 $G\in\mathscr{U}$，H 是 G 的 l 子群，则 $H\in\mathscr{U}$.

2. 若 $G\in\mathscr{U}$，H 是一个格序群，φ 是一个 l 同态，使得 $\varphi(G)=H$，则 $H\in\mathscr{U}$.

3. 若 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 中的一类格序群，则 $\prod\mathscr{V}\in\mathscr{U}$.

由等式 $xy=yx$ 定义的可换簇记为 $\mathscr{A}$；由等式 $(x\wedge y)^2=x^2\wedge y^2$ 定义的可表示簇记为 $\mathscr{R}$；由等式 $x=x$ 定义的格序群簇记为 $\mathscr{L}$；由等式 $x=1$ 定义的只含一个元素的格序群平凡簇记为 $\mathscr{E}$ 及用 $\mathscr{N}$ 表示最大的真格群簇——正规值簇，则有下列包含关系
$$\mathscr{L}\supset\mathscr{N}\supset\mathscr{R}\supset\mathscr{A}\supset\mathscr{E}.$$

格序群的本质扩张（essential extension of a lattice-ordered group） 一类特殊的格序群. 若 H 是格序群 G 的 l 子群，若 G 的每个非零凸 l 子群与 H 有非零交，则称 H 是 G 的大 l 子群，亦称 G 是 H 的本质扩张. 它等价于，对所有 $g\in G^+$，存在 $h\in H^+$ 和正整数 n，使得 $h\leqslant ng$. 若 H 是格序群 G 的大 l 子群，A 是 H 中有上确界 g 的子集，则 g 也是 A 在 G 中的上确界. 特别地，若 G 是阿基米德格序群，则称 G 为 H 的阿基米德本质扩张.

格序群的大 l 子群（large l-subgroup of an l-group） 见“格序群的本质扩张”.

侧完备格序群（laterally complete lattice-ordered group） 一类重要的格序群. 两两不相交的元素集有上确界的格序群，称为侧完备的. 强可投射且侧完备的格序群，称为直交完备的. 若格序群 H 是格序群 G 的一个极小直交完备的本质扩张，则 H 称为 G 的直交完备化. 可表示格序群的直交完备化是存在的. 任意格序群都有惟一的侧完备化.

直交完备格序群（orthogonally complete lattice ordered group） 见“侧完备格序群”.

格序群的直交完备化（orthocompletion of a lattice-ordered group） 见“侧完备格序群”.

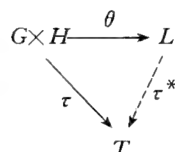
本质闭包（essential closure） 一类特殊的本质扩张. 设 G 是阿基米德格序群，若 G 没有真阿基米德本质扩张，则 G 称为本质闭的. 阿氏格序群的本质闭的本质扩张，称为它的一个本质闭包. 康莱德（Conrad, P.）于 1971 年证明，每个阿氏格序群均存在惟一的本质闭包.

本质闭格序群（essential closed lattice-ordered group） 见“本质闭包”.

格序群的戴德金完备化（Dedekind completion of a lattice-ordered group） 一种重要的完备化. 设 G 是格群 $G^\wedge$ 的一个 l 子群，若 $G^\wedge$ 是完备的，且 $G^\wedge$ 中每一元素是 G 中某子集的上确界，则 $G^\wedge$ 称为格序群 G 的一个戴德金完备化. 每个阿基米德格序群均有惟一的戴德金完备化.

格序群的 l 张量积（l-tensor product of lattice-ordered groups） 格序群的一个重要概念. 指格序群范畴中满足泛映射问题的一类元素对. 设 G,H 与 L 是格序群，$\theta:G\times H\to L$ 是一个双线性映射. 若对任意 $0\leqslant h\in H$，$(\cdot,h)\theta$ 是 l 同态和对任意 $0\leqslant g\in G$，$(g,\cdot)\theta$ 是 l 同态，则称 θ 为 l 双线性映射. 格序群 G 和 H 的 l 张量积 (L,θ) 是一个格群 L 与一个 l 双线性映射 $\theta:G\times H\to L$ 且满足泛性质：对任意格序群 T 与 l 双线性映射 $\tau:G\times H\to T$，存在惟一的 l 同态 $\tau^*:L\to T$，使得 $\theta\tau^*=\tau$，即下图可换. 通常把

(L,θ)记为$G\otimes_l H$. 若G和H是格序群，则$G\otimes_l H$是存在的，且在同构意义下是惟一的. 格序群的l张量积有以下的性质：



1. 对任意格序群H，$\mathbf{Z}\otimes H=H$，$\mathbf{Z}$为整数加群.

2. 设G和H是格序群，$g\in G,h\in H$. 若$0<gh\in G\otimes_l H$，则存在$0<g_i\in G$和$0<h_i\in H(i=1,2)$，使得$gh=g_1h_1+g_2h_2$.

3. 若G和H是格序群，$0<x\in G\otimes_l H$，则存在$0<g\in G$和$0<h\in H$，使得$x\leqslant gh$.

l双线性映射(l-double linear mapping)　见“格序群的l张量积”.

全序群的绝对凸子群(absolutely convex subgroup of an o-group)　全序群的一类特殊的凸子群. 设H是全序群G的子群，若H对G的任意全序都是凸的，则称H为绝对凸子群. 若H对G的某个全序是凸子群，则称H为G的相关凸子群. 全序群的所有相关凸子群的交是G的一个绝对凸子群.

相关凸子群(relatively convex subgroup)　见“全序群的绝对凸子群”.

阿基米德等价(Archimedean equivalent)　亦称a等价. 格序群类中的一个概念. 设G是一个格序群，$g,h\in G$. 若存在正整数m,n，使$g\leqslant mh,h\leqslant ng$，则称$g,h$是阿基米德等价. 若$g,h$是阿基米德等价，则主凸$l$子群$G(g)$和$G(h)$是相等的. 设$G$是格序群$H$的$l$子群，若对任意$h\in H^+$，存在$g\in G^+$，使$h$和$g$是$a$等价的，则称$H$是$G$的阿基米德扩张；若$H$不再有$a$扩张，则称$H$是$a$闭的.

a等价(a-equivalent)　即“阿基米德等价”.

阿基米德扩张(Archimedean extension)　见“阿基米德等价”.

a扩张(a-extension)　见“阿基米德等价”.

完全格同态(complete lattice homomorphism)　一种特殊的格同态. 设ψ是格序群G到H的格同态. 若ψ保持所有的交与并，则称ψ是完全的. 比尔-温伯格定理：l群G的凸l子群C是闭的充分必要条件是G到格G/C的格同态是完全的.

康莱德根(Conrad radical)　格群的一个重要l理想. 设G是格序群，则G的一切本质值的交是一个l理想，称其为G的康莱德根，记为$R(G)$.

根系(root system)　格序群的特殊子集合. 设Γ是偏序集，若对任意$\gamma\in\Gamma$，$\{\alpha\in\Gamma\mid\alpha\geqslant\gamma\}$是全序的，则称$\Gamma$是一个根系. 若$G$是格群，则$G$的全体正则子群集$\Gamma(G)$是根系；$G$的全体素子群集$K(G)$是一个根系.

可迁l置换群(transitive l-permutation group)　亦称可迁格序置换群. 是一类重要的l置换群. 设T是全序集，H是$A(T)$的l子群，记为(H,T)，若对所有的$t,s\in T$，存在$h\in H$，使$th=s$，则称H为可迁的；若对任意$s_1,s_2,t_1,t_2\in T$，且$s_1<s_2,t_1<t_2$，存在$h\in H$使$s_ih=t_i,i=1,2$，则称H是O-2可迁的；一般地，设$s_i,t_i\in T$，且$s_1<s_2<\cdots<s_n,t_1<t_2<\cdots<t_n$，若存在$h\in H$使$s_ih=t_i,i=1,2,\cdots,n$，则称$H$是$O$-$n$可迁的. 若$H$是$A(T)$的$O$-2可迁$l$子群，则$H$是$O$-$n$可迁的，对任意正整数$n$.

可迁格序置换群(transitive lattice-ordered permutation group)　即“可迁l置换群”.

格群的圈积(wreath product of l-groups)　研究格群的重要方法之一. 设$(H,1)$是格群，(G,T)是$A(T)$的l子群. 设$\overline{W}=\{(\langle h_t\rangle,g)\mid g\in G$，对任意$t\in T,h_t\in H\}$，其中$\langle h_t\rangle$看做分量属于$H$的向量，指标集为$T$，若在$\overline{W}$中定义一个二元运算如下：

$$(\langle h_t\rangle,g)(\langle k_s\rangle,d)=(\langle a_t\rangle,gd),$$

对所有的$t\in T,a_t=h_tk_{tg}$，则$\overline{W}$是一个群. 若在$\overline{W}$中如下地定义偏序：$(\langle h_t\rangle,g)$是正的当且仅当$g\geqslant 1$且对满足$tg=t$的$t,h_t\geqslant 1$，则$\overline{W}$是一个格序群. 称$\overline{W}$为H与G的大圈积，记为$H\overline{W}_rG$. 若HW_rG是$H\overline{W}rG$中只有有限多个$t,h_t\neq 1$的元素$(\langle h_t\rangle,g)$的集合，则HW_rG是$H\overline{W}_rG$的一个l子群，称为H与G的小圈积.

格群的大圈积(large wreath product of l-groups)　见“格群的圈积”.

格群的小圈积(small wreath product of l-groups)　见“格群的圈积”.

l群的挠类(torsion class of l-groups)　一类特殊的l群类. 设$\mathscr{T}$是l群类，$\mathscr{T}$称为一个挠类，若$\mathscr{T}$满足：

1. $\mathscr{T}$中l群的同态像属于$\mathscr{T}$.

2. 对任意l群G，G中属于$\mathscr{T}$的凸l子群的任意并属于$\mathscr{T}$，

若$\mathscr{T}$是一个挠类，$\mathscr{T}(G)$表示G的属于$\mathscr{T}$的所有凸l子群的并，则$\mathscr{T}(G)$是G的l理想，称为G的挠根. 若$\mathscr{T}$是挠类，则：

1. 若C是G的l子群，则$\mathscr{T}(C)\subseteq\mathscr{T}(G)$.

2. 若$\varphi:G\to H$是满l同态，则

$$\varphi(\mathscr{T}(G))\subseteq\mathscr{T}(H).$$

3. $\mathscr{T}(\mathscr{T}(G))=\mathscr{T}(G)$.

反之，若对每个l群G，存在G的满足上述条件1,2,3的凸l子群$D(G)$，$\mathscr{T}=\{G\mid D(G)=G\}$，则$\mathscr{T}$是一个挠类，且对每个$l$群$G$，$\mathscr{T}(G)=D(G)$.

l群的挠根(torsion radical of an l-group)　见“l群的挠类”.

l群的遗传类(hereditary class of l-groups)　一类重要的挠类. 设$\mathscr{T}$是l群的挠类. 若$G\in\mathscr{T}$，则G的凸l子群也属于$\mathscr{T}$，称$\mathscr{T}$为遗传类. $\mathscr{T}$是遗

传的当且仅当 $\mathscr{T}(C)=C\cap\mathscr{T}(G)$，对 G 的每个凸 l 子群 C.

***l* 群的无挠类**(torsion-free class of l-groups) 一类特殊的 l 群类. 设 $\mathscr{T}$ 是 l 群类，若 $\mathscr{T}$ 关于：

1. 凸 l 子群封闭；

2. 次直积是封闭的；

则 $\mathscr{T}$ 称为一个无挠类. 设 $\mathscr{T}$ 是一个挠类，若 $\hat{\mathscr{T}}=\{G\mid\mathscr{T}(G)=\{e\}\}$，则 $\hat{\mathscr{T}}$ 是一个无挠类.

***l* 群的子商**(subquotient of an l-group) 格序群的一种特殊的商群. 若 G 是格群，$A\subseteq B$ 是 G 的凸 l 子群，且 A 是 B 的正规子群，则商 B/A 称为 G 的子商. 若 $A\subseteq A_1\subseteq B_1\subseteq B$，则称子商 B/A 支配子商 B_1/A_1.

***l* 群的极挠类**(polar tersion class of l-groups) 极子群的推广. 设 $\mathscr{T}$ 是 l 群的挠类，$\mathscr{T}^{\perp}$ 表示满足 $\mathscr{T}\cap\mathscr{T}^{\perp}=\{e\}$ 的最大挠类，若 $\mathscr{T}=(\mathscr{T}^{\perp})^{\perp}$，则 $\mathscr{T}$ 称为一个极挠类. 马廷尼兹(Martinez, J.)于 1975 年证明了以下事实：若 $\mathscr{T}$ 是挠类，则 $\mathscr{T}^{\perp}=\{G\mid G$ 在 $\mathscr{T}$ 中没有非平凡的子商$\}$；$\mathscr{T}^{\perp\perp}=\{G\mid G$ 的每个非平凡子商支配 $\mathscr{T}$ 中的一个非平凡子商$\}$.

格序群的根类(radical class of lattice ordered-groups) 一种重要的格序群类. 设 $\mathscr{T}$ 是一个格序群类，若 $\mathscr{T}$ 满足：

1. 对于任意 l 群 G，G 中属于 $\mathscr{T}$ 的凸 l 子群的任意并属于 $\mathscr{T}$；

2. 当 $G\in\mathscr{T}$ 时，有 G 的凸 l 子群属于 $\mathscr{T}$；

则 $\mathscr{T}$ 称为一个根类. 格序群根类的概念是贾库比(Jakubik, J.)于 1982 年引进的.

病态 *l* 置换群(pathologically l-permutation group) 一类重要的格序置换群. 设(F,T)是一个 l 置换群，$f\in F$. 若 $\alpha f\neq\alpha$，对 $\alpha\in T$，则 α 称为 f 的支撑；若不存在 $f\neq e$ 使 f 的支撑集是有界的，则(F,T)称病态的. 格拉斯-木克尼瑞定理断言：秩为 η 的自由 l 群 $F_\eta(\eta>1)$在有理数集 $\mathbb{Q}$ 上有一个忠实病态的可迁表示.

格群在全序集上的作用(action of a lattice-group on a totally ordered set) 刻画格群结构的重要方法. 设 T 是全序集，G 是格序群. 若 $\theta: G\to A(T)$是 l 同态，则称(G,T,θ)为 G 在 T 上的作用. θ 的核 $\ker\theta$ 称为 G 的惰子群. 若 $g\in\ker\theta$，则$\alpha(g\theta)=\alpha$，对任意 $\alpha\in T$. 若 θ 是单 l 同态，即 $\ker\theta=\{e\}$，则称为用是忠实的，亦称(G,T,θ)是 G 的一个表示. 若(G,T,θ)是一个作用，则$(G/\ker\theta,T,\theta^*)$是一个忠实作用，其中$(\ker(\theta)g)\theta^*=g\theta$，对每个 $g\in G$. (G,T,θ)是 G 的一个作用当且仅当存在映射 $\varphi: T\times G\to T$，对任意 $\alpha\in T,g\in G$，记$(\alpha,g)\varphi=\alpha g$，且满足：

1. $\alpha e=\alpha$，e 是群 G 的单位元.

2. 若 $\alpha<\beta$，则 $\alpha g<\beta g$.

3. $\alpha(fg)=(\alpha f)g$，对任意 $f,g\in G$.

惰子群(lazy subgroup) 见“格群在全序集上的作用”.

格序群的忠实作用(faithful action of a lattice ordered group) 见“格群在全序集上的作用”.

格序群的表示(representation of a lattice-ordered group) 见“格群在全序集上的作用”.

格序群的忠实表示(faithful representation of a lattice-ordered group) 见“格群在全序集上的作用”.

齐次链(homogeneous chain) 亦称齐次全序集. 一类特殊的全序集. 设 T 是一个链，若 l 置换群$(A(T),T)$是可迁的，则 T 称为一个齐次链.

齐次全序集(homogeneous total-ordered set) 见“齐次链”.

格序置换群的$O(l)$同态($O(l)$-homomorphism of lattice-ordered permutation groups) 亦称格序置换群的序(格序)同态. 格序群的 $O(l)$同态的推广. 设(G,T)和(H,S)是序(l)置换群. 设 $\varphi: T\to S$ 是保序同态，$\psi: G\to H$ 是 $O(l)$同态. 若

$$(\alpha\varphi)(g\psi)=(\alpha g)\varphi,\quad \alpha\in T,g\in G,$$

则(ψ,φ)称为(G,T)到(H,S)的 $O(l)$同态；若 φ 是单映射，ψ 是一个 $O(l)$嵌入，则称 $O(l)$置换群(G,T)嵌入到(H,S)中；若 φ 和 ψ 是全单映射，则称(G,T)和(H,S)是 $O(l)$同构.

凸同余(convex congruence) 全序集上的一类重要的等价关系. 设(G,T)是一个作用，E 是 T 上的一个等价关系，若每个等价类是凸集，且当 $\alpha E\beta$ 时，有$(\alpha g)E(\beta g)$，对任意 $\alpha,\beta\in T,g\in G$，则称 E 为 T 上的凸同余. 设(G,T)是一个作用，E 是 T 上的一个凸同余. 若对任意 $\sigma\in\alpha E,\tau\in\beta E$，定义 $\alpha E<\beta E$ 当且仅当 $\sigma<\tau$，则$(T/E,<)$是一个全序集. 若对任意 $\alpha\in T,g\in G$，定义$(\alpha E)g=(\alpha g)E$，则$(G,T/E)$是 G 的一个作用.

稳定子群(stabiliser subgroup) 亦称无向群. 一类重要的素子群. 设(G,T)是一个作用，$\Delta\subseteq T$，若 $G_\Delta=\{g\in G\mid\delta g=\delta$，对任意 $\delta\in\Delta\}$，则 G_Δ 是 G 的一个子群，称为 G 的稳定子群. 若 $\Delta=\{\alpha\}$，记

$$G_\alpha=G_{\{\alpha\}},\quad G_{(\Delta)}=\{g\in G\mid\Delta g=\Delta\},$$

则 $G_{(\Delta)}$也是 G 的子群，且 $G_\Delta\subseteq G_{(\Delta)}$. 若$(G,T)$是序$(l)$置换群，则 G_Δ和 $G_{(\Delta)}$是 G 的凸(l)子群. 设(G,T)是一个作用，若 $\alpha\in T,g\in G$，则 $g^{-1}G_\alpha g=G_{\alpha g}f$.

无向群(isotropy subgroup) 即“稳定子群”.

块(block) 一种重要的等价类. 设(G,T)是一个作用，且$\varnothing\neq\Delta\subseteq T$. 若 Δ 是一个凸集，且对任意 $g\in G$，$\Delta g=\Delta$ 或者 $\Delta g\cap\Delta=\varnothing$，则称 Δ 是一个块. 设(G,T)是一个作用，则(G,T)的凸同余的等价类是一个块；反之，每个块是(G,T)的一个凸同余的

等价类.

稳定子群的长轨道(long orbit of a stabiliser subgroup)　稳定子群的一种特殊轨道. 设(G,T)是G的一个作用,Δ是一个G_α轨道,$\alpha\in T$,若$|\Delta|>1$,则Δ称为G_α的一个长轨道;若$\Delta>\{\alpha\}(\Delta<\{\alpha\})$,则$\Delta$称为正的(负的). 若$(G,T)$是$O$-2可迁$l$置换群,则$G_\alpha$分别有一个正的和一个负的$G_\alpha$轨道,且它们都是长轨道.

可迁群的本原作用(primitive action of a transitive group)　群作用的一种特征. 设(G,T)是一个可迁的作用. 若(G,T)只有平凡的同余,则称为用(G,T)是本原的;若$(A(T),T)$是本原的,则全序集T称为本原的.

可离性质(separation property)　群作用的一个特性. 设(G,T)是G在全序集T的一个作用,$\Delta\subseteq T$是T的一个非空有界区间,α,β是T中不同的点,若存在$g\in G$,使$\alpha g,\beta g$只有一个点属于Δ,则称(G,T)满足可离性质. 若$|T|=1$,则(G,T)满足可离性质.

同余覆盖(cover of congruences)　刻画可迁作用的工具. 设$\mathscr{C}\subsetneq\mathscr{K}$是可迁作用$(G,T)$的同余. 若不存在$(G,T)$的满足$\mathscr{C}\subsetneq\mathscr{D}\subsetneq\mathscr{K}$的同余$\mathscr{D}$,则称$\mathscr{K}$覆盖$\mathscr{C}$. 若$\Delta$是一个$\mathscr{K}$类,则$(G_{(\Delta)},\Delta)$是一个可迁作用,$\mathscr{C}'=\mathscr{C}|_{\Delta\times\Delta}$是$(G_{(\Delta)},\Delta)$的一个同余. 若$L$是$(G_{(\Delta)},\Delta/\mathscr{C}')$的惰子群,令

$$\hat{G}_{(\Delta)}=G(\Delta)/L\cong G_{(\Delta)}|\Delta,$$

则$(\hat{G}_{(\Delta)},\Delta/\mathscr{C}')$是一个忠实可迁作用,称为$(G,T)$在$\Delta$上的关于$(\mathscr{C},\mathscr{K})$的分量. 设$(G,T)$是有同余$\mathscr{C}\subsetneq\mathscr{K}$的可迁作用. (G,T)对于$(\mathscr{C},\mathscr{K})$的分量是本原的当且仅当$\mathscr{K}$覆盖$\mathscr{C}$. (G,T)满足上述条件的分量称为本原分量.

本原分量(primitive component)　见“同余的覆盖”.

凝聚格序置换群(coherent l-permutation group)　一类特殊的可迁格序置换群. 设(G,T)是格序置换群,又$\alpha<\beta,\alpha,\beta\in T$,若存在$g\in G^+$使得$\alpha g=\beta$,其中$G^+=\{g\in G|g\geqslant e\}$,$e$为$G$的单位元,则$(G,T)$称为凝聚格序置换群. 设$(G,T)$是凝聚格序置换群,$\alpha,\beta_1,\beta_2\in T$,且$\alpha<\beta_1<\beta_2$,若存在$g\in G_\alpha$使$\beta_1 g\geqslant\beta_2$,且$f\in G_{\beta_2}$使$\beta_1 f\leqslant\alpha$,则称$(G,T)$是弱2可迁的.

弱2可迁(weakly 2-transitive)　见“凝聚格序置换群”.

弱本原l置换群(weakly primitive l-permutation group)　一类特殊的l置换群. 设$\mathscr{C}$是l置换群(G,T)的一个非平凡同余,$L(\mathscr{C})=\{g\in G\mid\alpha g\mathscr{C}\alpha$, 对任意$\alpha\in T\}$,则$L(\mathscr{C})$是$G$的一个$l$理想,$(G,T/\mathscr{C})$是一个$l$置换群当且仅当$L(\mathscr{C})=\{e\}$,$e$是$G$的单位元. 若$L(e)=\{\mathscr{C}\}$,则$(G,T)$称为弱本原$l$置换群.

肥块(fat block)　序置换群中的一个概念. (G,T)是序置换群,Δ是(G,T)的一个块. 设$F(\Delta)$是T的包含Δ而与Δg不相交的最大凸子集,其中$\Delta g\neq\Delta$,若$\{\Delta g|\Delta g>\Delta\}$没有最大元,且$F(\Delta)=\Delta$,则称$\Delta$为一个肥块.

扩张块(extensive block)　一类特殊的块. 设(G,T)是序置换群,$\Lambda_1\subseteq\Lambda\subseteq T$. 对任意$\lambda\in\Lambda$,若存在$\lambda_1\in\Lambda_1$使$\lambda_1>\lambda(\lambda_1\leqslant\lambda)$,则称$\Lambda_1$在$\Lambda$中是共最后的(共起初的);若$\Lambda_1$在$\Lambda$中是共最后的也是共起初的,则称$\Lambda_1$在$\Lambda$中是共端点的. 若$\Delta$是$(G,T)$的一个块,对任意$\delta\in\Delta$,$\delta G_{(\Delta)}$在$\Delta$中是共端点的,则称$\Delta$为一个扩张块.

自然块(natural block)　一类特殊的块. 设Δ是序置换群(G,T)的一个块,若Δ是扩张块或是肥块,则称Δ为自然块. 若(G,T)是可迁的,则G的所有块是自然的.

序(格序)置换群的有界元(bounded element of an ordered (lattice -oredered) permutation group)　序置换群的一类元素. 设(G,T)是序置换群,$e\neq g\in G$. 若存在$\alpha,\beta\in T$使得$\alpha<\text{supp}(g)<\beta$,其中

$$\text{supp}(g)=\{\alpha\in T|\alpha g\neq\alpha\}$$

是g的支撑区间,则称g是有界的;若存在$\alpha\in T$使得$\text{supp}(g)<\alpha(\text{supp}(g)>\alpha)$,则称$g$是上有界(下有界);若$\text{supp}(g)$在$T$中是共端点的,则称$g$是无界的.

序(格序)置换群的上有界元(above bounded element of an ordered (l-)permutation group)　见“序(格序)置换群的有界元”.

序(格序)置换群的下有界元(below bounded element of an ordered (l-)permutation group)　见“序(格序)置换群的有界元”.

自然同余(natural congruence)　序置换群中的一类同余. 设$\mathscr{C}$是序(格序)置换群的一个同余. 若$\mathscr{C}$的所有等价类是自然块,则称$\mathscr{C}$是自然的. 设$\mathscr{C}$是(G,T)的一个自然同余,Δ_1,Δ_2是$\mathscr{C}$等价类,若存在$g\in G$使$\Delta_1 g=\Delta_2$,则$\mathscr{C}$称为齐次的;若(G,T)没有非平凡的自然同余,则(G,T)称为本原的.

齐次自然同余(homogenous natural congruence)　见“自然同余”.

本原序(格序)置换群(primitive ordered (lattice-ordered) permutation group)　见“自然同余”.

自然偏同余(natural partial congruence)　在全序集的子集上的同余. 设(G,T)是序置换群,$T'\subseteq T$,又$\mathscr{C}$是T'上的一个等价关系,$T'G=T'$. 若$\alpha\mathscr{C}\beta$,有$\alpha g\mathscr{C}\beta g$,对$\alpha,\beta\in T'$,$g\in G$,且每个等价类是$(G,T)$的一个自然块,则称$\mathscr{C}$为一个自然偏同

余. 若(G,T)是可迁的,且$T'=T$,则每个自然偏同余是一个同余.

值(value)　一类特殊的自然偏同余对. 设(G,T)是一个序置换群. 若$K(G,T)$是自然偏同余对$(\mathscr{C}_K,\mathscr{C}^K)$的集合,且满足:

1. $\mathscr{C}^K$覆盖$\mathscr{C}_K$,即$\mathscr{C}_K\subsetneq\mathscr{C}^K$,且不存在满足$\mathscr{C}_K\subsetneq\mathscr{D}\subsetneq\mathscr{C}^K$的自然偏同余$\mathscr{D}$;

2. $\mathscr{C}^K$是齐次的;

则$K(G,T)$的元素称为值.

格序单群(lattice-ordered simple group)　亦称l单群. 单群在格序群范畴中的推广. 没有真l理想的格序群称为格序单群或l单群. 若全序集T是2齐次的,则$A(T)$的换位子群$B(T)$是l单的.

***l*单群**(l-simple group)　即"格序单群".

***l*群的生成子**(generators of an l-group)　刻画自由l群的一类重要的集合. 设G是一个l群,若F是集$\{x_i|i\in I\}$上的自由群,且$\eta:F\to G$是映上的l同态,则η的核K是F的l理想,且$G\cong F/K$. 称$\{x_i|i\in I\}$为G的生成子集,K为G的相关子群.

***l*群的相关子群**(relation subgroup of an l-group)　见"l群的生成子".

***l*群的表示**(presentation of an l-group)　群表示在l群范畴的推广. 若G是具有生成子$\{x_i|i\in I\}$和关系$\Gamma_j(x)=e(j\in J)$的一个l群,F是$\{x_i|i\in I\}$上的自由l群,K是F的由$\{\Gamma_j(x)\,|\,j\in J\}$生成的$l$理想,则$l$群$F/K$称为$G$的一个表示. 又,若$I$和$J$是有限集,则$l$群$G$称为有限相关的.

有限相关*l*群(finitely presented l-group)　见"l群的表示".

基本元素(basic element)　格序群中的一种特殊元素. 设G是格序群,$e<s\in G$,e是G的单位元,若$\{x\in G|e\leqslant x\leqslant s\}$是全序的,则称$s$为$G$的一个基本元素. 若$G$是格序群,$e<s\in G$,则下列命题等价:

1. s是基本元素.

2. 由s生成的主凸l子群$G(s)$是O群.

3. $s^{\perp\perp}$是一个极小极子群.

4. $s^{\perp}$是包含s的极大凸O子群.

基本子群(basic subgroup)　格序群的一种凸l子群. 设S是l群的一个子集,若S是G中两两不相交的基本元素的极大子集,则称S是基本的. 若$B=\vee\{s^{\perp\perp}|s\in S\}$,则称$B$是$G$的基本子群.

η_α群(η_α-group)　一类全序交换群. 设S是一个全序集,η_α是一个基数,其中$\alpha>0$,若对任意$A,B\subseteq S$,且$A<B$和$|A|,|B|<\eta_\alpha$,存在$x\in S$使$A<x<B$,则S称为η_α集. 设G是一个全序交换群且是一个η_α集,则称G为一个η_α群. 若

$$\sum_{\beta<\alpha}2\,\eta^{\beta}<\eta_\alpha,$$

则称η_α是可容许的. 若

$$|\bigcup_{\lambda\in\Lambda}S_\lambda|<\eta_\alpha,\quad |S_\lambda|,|\Lambda|<\eta_\alpha,$$

则称η_α是正则的. 若η_α是一个可容许正则基数,则基数η_α的η_α群是存在的.

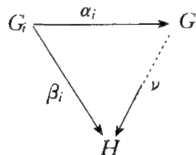
η_α集(η_α-set)　见"η_α群".

可容许集(admissible set)　见"η_α群".

正则集(regular set)　见"η_α群".

序稠格序群(order dense lattice-ordered group)　一类特殊的l子群. G是格序群H的l子群,若对任意$h\in H^+$,存在$g\in G$使$0<g\leqslant h$,则称G在H中是序稠的.

格序群的自由积(free product of lattice-ordered groups)　刻画格序群范畴的重要函子. 设$\mathscr{U}$是一个格序群簇,$\{G_i|i\in I\}$是$\mathscr{U}$的一个元素族,$G\in\mathscr{U}$,记${}^{\mathscr{U}}\bigcup_{i\in I}G_i$,$\{\alpha_i:G_i\to G\,|\,i\in I\}$是一簇内射$l$同态,若使得下列条件成立,则${}^{\mathscr{U}}\bigcup_{i\in I}G_i,\alpha_i$称为$\{G_i|i\in I\}$的$\mathscr{U}$自由积:



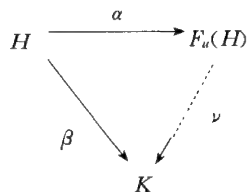
1. $\bigcup_{i\in I}\alpha_i(G_i)$生成$G$.

2. 若$H\in\mathscr{U}$,$\{\beta_i:G_i\to H\}$是任意l同态族,则存在惟一l同态$\nu:G\to H$,使$\beta_i=\alpha_i\nu\ (i\in I)$,即图可换.

偏序群的自由扩张(free extension of a partialely ordering group)　刻画格序群范畴的重要函子. 设$\mathscr{U}$是一个偏序群类,$H\in\mathscr{U}$. 若$\mathscr{F}_{\mathscr{U}}(H)\in\mathscr{U}$,且存在单序同态$\alpha:H\to\mathscr{F}_{\mathscr{U}}(H)$使下列条件成立,则称$(\mathscr{F}_{\mathscr{U}}(H),\alpha)$为$H$的自由扩张:

1. $\alpha(H)$生成$\mathscr{F}_{\mathscr{U}}(H)$.

2. $K\in\mathscr{U}$时,$\beta:H\to K$是一个序同态,若存在惟一的序同态$\nu:\mathscr{F}_{\mathscr{U}}(H)\to K$使$\alpha\nu=\beta$,即图可换.



当H是一个序群,则$\mathscr{F}_{\mathscr{L}}(H)$存在当且仅当在$H$中存在一个包含$H^+$的右序,其中$\mathscr{L}$表示所有$l$群的类.

自由格序群的秩(rank of a free lattice-ordered group)　自由l群中的一个重要概念. 设F是集合X上的自由l群,集合X的基数称为F的秩,它与集合X的选择无关.

自由生成格(freely generated lattice)　一类重要的格. 设L是一个格,S是L的交既约元素组成的子集. 若L的每个元素是S的一个滤子的交,则称S生成L. 若对于S的每对滤子S_1,S_2,当$\wedge S_1=\wedge S_2$,有$S_1=S_2$,则称L是由S自由生成的. 若S生成格L,则下列命题等价:

1. L 是由 S 自由生成的.

2. L 满足一般的分配律

$$\bigwedge_{\delta\in\Delta}\bigvee_{a\in A_\delta}u_{\delta,a}=\bigvee_{\tau\in F}\bigwedge_{\delta\in\Delta}u_{\delta,\tau(\delta)}$$

和它的并-交的对偶,其中 $\delta\in\Delta$,A_δ 是一个集合,F 是 Δ 到 $\bigcup_{\delta\in\Delta}A_\delta$ 中的映射集,使 $\tau(\delta)\in A_\delta$.

3. $b\vee(\wedge_\lambda a_\lambda)=\wedge_\lambda(b\vee a_\lambda)$,对于任意 $a_\lambda,b\in S$.

稠凸格序子群(dense convex lattice-ordered subgroup) 一类特殊的凸格序子群. 设 $\mathscr{F}$ 是一个格序群类,G 是格序群 H 的一个凸 l 子群. 若 G 在 H 中是序稠的,且 $G\in\mathscr{F}$,则 $H\in\mathscr{F}$,称 G 是 H 的稠凸 l 子群.

格序群的分配根(distributive radical of an l-group) 刻画格序群的方法之一. 设 G 是格序群,G 的所有闭素子群的交称为 G 的分配根,记为 $D(G)$. 格序群 G 是完全分配的当且仅当 $D(G)=\{e\}$,e 是 G 的单位元. 此结论是伯德(Byrd,R)和劳德(Lloyd,J)于1967年给出的.

伪格序群(pseudo-lattice-ordered group) 亦称伪 l 群. 一类特殊的交换格序群. 设 G 是交换格群,$a,b\in G^+$,若 $c\leqslant a,b$,有 $nc\leqslant a,b$,对任意正整数 n,则称元素 a,b 是伪不相交的;若对任意 $g\in G$,$g=a-b$,其中 a,b 是伪不相交的,则称 G 是伪格序群. l 群是伪 l 群.

伪 l 群(pseudo l-group) 即"伪格序群".

格序群的根(radical of a lattice-ordered group) 亦称 l 群的根. 是刻画格群的重要工具之一. 设 G 是格序群,$g\in G$,若 $Rg=\vee\{M_a|a$ 是 g 的一个值$\}$,则 $R(G)=\bigcap\{Rg|0\neq g\in G\}$称为 G 的根.

序群的序正合列(order exact sequence of po-groups) 对序群的一种刻画. 设

$$\{0\}\to A\xrightarrow{\alpha}B\xrightarrow{\beta}C\to\{0\}$$

是序群的短正合列,即 α 是单序映射,β 是满序映射,且 $\mathrm{Im}\alpha=\ker\beta$. 若

$$\alpha(A^+)=\alpha(A)\cap B^+,\quad \beta(B^+)=C^+,$$

则序列称为序正合列;若 $B^+=\{b\in B|\beta(b)>0$ 或 $b\in\alpha(A^+)\}$,则序列称为字典序正合列. 字典序正合列是序正合的.

序群的字典式正合列(lexicographically exact sequence of po-groups) 见"序群的序正合列".

Z 子群(Z-subgroup) 一类特殊的凸 l 子群. 设 G 是格序群,$C(G)$是 G 的凸 l 子群集,$C\in C(G)$. 若 $g\in C$,则 $g^{\perp\perp}\subseteq C$,则称凸 l 子群 C 为 Z 子群. 若 $Z(G)$表示群 G 的 Z 子群集,则 $Z(G)$是一个完全的布劳威尔格.

可裂子群(split subgroup) 一类特殊的 l 子群. 设 G 是一个 l 群,A 是 G 的一个 l 子群. 若对任意 $0<g\in G$,$g=g_1+g_2$,其中 $g_1\in A$,且 $g_1\wedge g_2=0$,g_2 的每个值包含 A,则称 A 是 G 的一个可裂子群. 若 A,B 是 G 的可裂子群,则 $A\cap B$ 和 $A\vee B$ 也是 G 的可裂子群.

右序群(right ordered group) 一种特殊的全序群. 设$(G,<)$是一个群,且是一个偏序集,$a,b,c\in G$,若 $a\leqslant b$,则 $ac\leqslant bc$,称 G 为右偏序群;若偏序$<$是全序的,则 G 称为右序群.

正则格序置换群(regular lattice-ordered permutation group) 一类重要的格序置换群. 设(G,T)是一个 l 置换群,T 是全序集,若对任意 $a,b\in T$,存在惟一的 $g\in G$ 使 $ag=b$,则称(G,T)是正则的. 若$(A(T),T)$是正则的,则 $A(T)$是 l 同构于实数群的一个子群,且作为序集,$A(T)\cong T$.

斯葵木哥格群(Scrimger group) 一种特殊的格序群. 若 n 是任意正整数,$G_n=\mathbf{Z}^n\times\mathbf{Z}$,定义

$$(F,r)(H,s)=(F+H^r,r+s),$$

其中 $H^r(t)=H(t')$,t'满足 $1\leqslant t'\leqslant n$ 且 $t'\equiv t-r(\mathrm{mod}\,n)$,则$(G_n,\cdot)$是一个群. 若定义$(F,r)\geqslant e\Leftrightarrow$ 或者 $r>0$ 或者 $r=0$,$F(t)\geqslant 0$,对任意 $1\leqslant t\leqslant n$. 则$(G_n,\leqslant)$是一个格序群,称为斯葵木哥格群.

撰　稿　朱作桐　闵佑林　高　亭　董克诚

审　阅　董荣森　漆芝南

格　序　环

格序环(lattice-ordered ring) 亦称格环,又称 l 环. 具有序关系和两个二元代数运算的代数系. 设 R 是环,若 R 在关系$\leqslant$下是偏序集,并满足下列条件:对任意 $x,y,a\in R$,

1. $x\leqslant y$ 则 $a+x\leqslant a+y$;

2. $x\geqslant 0$ 及 $y\geqslant 0$ 则 $xy\geqslant 0$;

则称 R 为偏序环;在关系$\leqslant$下是格的偏序环称为格序环. 格环在$(+,\leqslant)$下是交换格群;偏序环在$(+,\leqslant)$下是交换偏序群. 在格群 G 中,若对一切 $a,b\in G$,定义 $ab=0$,则 G 成为格环,称为零环.

格环(lattice ring) 即"格序环".

l 环(l-ring) 即"格序环".

偏序环(po-ring) 见"格序环".

偏序环的序(order of a po-ring) 偏序环的正元素集. 若 R 是偏序环,则 $R^+=\{r\in R|r\geqslant 0\}$是 R 作为偏序加群的正锥,称为 R 的序,又称为 R 的正锥. R^+满足下列条件:

1. $R^++R^+\subseteq R^+$.

2. $R^+\cap -R^+=\{0\}$.

3. $R^+R^+\subseteq R^+$.

反之,若 P 是任一环 R 的子集,且 P 满足条件

1,2,3,对任意 $x,y\in R$,定义 $x\geqslant y$ 当且仅当 $x-y\in P$,则 P 诱导出 R 的一个序,使 R 是一个偏序环,且 $P=R^+$. 因此,一个偏序环的序完全由满足上述条件的子集 P 所确定,称 P 是 R 的一个序.

偏序环的正锥(positive cone of a po-ring) 即"偏序环的序".

矩阵格序环(matrix lattice-ordered ring) 具有格序结构的矩阵环. 设 $M_n(K)$是序域 K 上 n 阶全阵环,若定义$(a_{ij})_{n\times n}\leqslant(b_{ij})_{n\times n}$,当且仅当

$$a_{ij}\leqslant b_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n),$$

则 $M_n(K)$是格环,称为矩阵格序环.

单格序环(simple lattice-ordered ring) 一类特殊的格环. 设 R 是格环,若 R 不含非平凡的 l 理想(即 l 理想仅有$\{0\}$和 R),则称 R 为单的. 具有乘法单位元 1 的非零格环至少有一极大 l 理想 M,使 R/M 是单格序环.

格序环的 l 理想(l-ideal of a lattice-ordered ring) 亦称格序环的 l 幻. 环的理想在格序环中的推广,格环的重要概念之一. 设 J 是格环 R 的环理想,若对任意 $x\in J,t\in R$,由$|t|\leqslant|x|$有 $t\in J$,则称 J 为 R 的 l 理想.

格序环的 l 幻(l-ideal of a lattice-ordered ring) 即"格序环的 l 理想".

格序环的素根(prime radical of a lattice-ordered ring) 一类特殊 l 理想的交集. 设 P 是格环 R 的 l 理想,且 $P\neq R$,对 R 的任意两个 l 理想 I,J,若 $IJ\subseteq P$ 有 $I\subseteq P$ 或 $J\subseteq P$,则称 P 为 R 的素 l 理想(素 l 幻). 与环论中类似,可定义半素 l 理想、半素 l 环、素 l 环等概念. 格环 R 的一切素 l 理想的交集称为 R 的素根,亦称 P 根. 格环 R 的素根等于 R 的一切半素 l 理想的交集.

素 l 理想(prime l-ideal) 见"格序环的素根".

素 l 幻(prime l-ideal) 见"格序环的素根".

半素 l 理想(semiprime l-ideal) 见"格序环的素根".

素 l 环(prime l-ring) 见"格序环的素根".

P 根(P-radical) 即"格序环的素根".

格序环的 L 根(L-radical of a lattice-ordered ring) 环中根概念在格环中的推广. 设 R 是格环,R 中所有极大真 l 理想 M_α 的交集$\bigcap\limits_\alpha M_\alpha$称为 R 的 L 根. $R/\bigcap\limits_\alpha M_\alpha$是单格序环的次直积.

格序环的 l 根(l-radical of a lattice-ordered ring) 一类重要的 l 理想. 设 R 是格环,若 N 是 R 中所有满足下列条件的元素 a 的集合:对某个正整数 $n=n(a)$以及一切 $x_0,x_1,\cdots,x_n\in R$,

$$x_0|a|x_1|a|x_2\cdots x_{n-1}|a|x_n=0,$$

则 N 是 R 的 l 理想,称为 R 的 l 根. R 的 l 根是 R 的所有幂零 l 理想的并. R 的所有诣零 l 理想的并称为 R 的上 l 根. 格环的 l 根的概念是伯克霍夫(Birkhoff, G. D.)与皮尔斯(Peirce, C. S.)于 1956 年提出的.

格序环的上 l 根(upper l-radical of a lattice-ordered ring) 见"格序环的 l 根".

l 表示(l-representation) 刻画格环的重要工具. 若 G 是满足加法交换的偏序群,$E(G)$表示 G 的群自同态环,$\theta\in E(G)$,定义 $\theta\geqslant 0$ 当且仅当 $\theta(G^+)\subseteq G^+$,则 $E(G)$成为偏序环,称为 G 的群自同态偏序环. 格环 R 到某个交换格群 G 的群自同态偏序环 $E(G)$的 l 同态(即保持$+,\cdot,\wedge,\vee$运算)称为 R 的一个 l 表示.

自同态偏序环(po-ring of endomorphisms) 见"l 表示".

p 表示(p-representation) 特殊的 l 表示. 设 R 是偏序环,$\theta:a\to\theta_a(\theta_a:x\to xa)$是 R 到自同态偏序环 $E=E(R;+)$的环同态,若 $a\in R^+$,有 $\theta_a(E^+)\subseteq E^+$(即 $a\in R^+$则 $\theta_a\in E^+$),则称 θ 为 R 的 p 表示. 若 $\theta:a\to\theta_a$ 是单射,且 $a\in R^+$当且仅当 $\theta_a\in E^+$,则 R 的 p 表示 θ 称为忠实的. p 表示是 l 表示,当且仅当 $\theta_{a\vee b}=\theta_a\vee\theta_b,\theta_{a\wedge b}=\theta_a\wedge\theta_b$.

忠实的 p 表示(faithful p-representation) 见"p 表示".

阿基米德格序环(Archimedean lattice-ordered ring) 一类重要的格环. 若格环(偏序环)L 作为格群(偏序群)是阿基米德的,则称 L 为阿基米德格序环(偏序环),简称阿氏格环(偏序环).

阿氏格环(Archimedean lattice-ordered ring) 即"阿基米德格序环".

分配格序环(distributive lattice ordered ring) 亦称 d 环,一类满足乘法对交、并的分配律的格环. 设 R 是格环,若对任意 $x,y\in R$,$|xy|=|x||y|$,则称 R 为分配格序环. R 为分配格序环的充分必要条件为:对任意 $a,b,c\in R,a\geqslant 0$,有 $a(b\vee c)=ab\vee ac$ 且$(b\vee c)a=ba\vee ca$. f 环是 d 环.

d 环(d-ring) 即"分配格序环".

正则格序环(regular lattice-ordered ring) 一类重要的格环. 设 R 是格序环,若环 R 的正则表示是 l 表示,则称 R 为正则格序环. 格序环 R 是正则格序环,当且仅当若 $a\wedge b=0$,则 $\theta_a\wedge\theta_b=0$,其中 θ 是正则表示. 任意序域 K 上的矩阵格序环 $M_n(K)$以及 f 环都是正则格序环.

平方阿基米德环(square-Archimedean ring) 一类特殊的格环. 若格环 R 满足下列条件:对任意给定的 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$,存在正整数 $n=n(x,y)$,使得

$$xy+yx\leqslant n(x^2+y^2),$$

则称 R 为平方阿基米德环,简称平方阿氏环. 平方

阿基米德环的素根、l 根、上 l 根一致.

平方阿氏环(square-Archimedean ring)　即"平方阿基米德环".

备格序环(complete lattice-ordered ring)　一类重要的格环.若格环 R 作为交换格群是备(σ 备)格群,则称 R 为备(σ 备)格序环.备格环和 σ 备格环的理论在算子理论中有应用.

σ 备格序环(σ-complete lattice-ordered ring)　见"备格序环".

f 环(f-ring)　亦称函数环.一类可用方程式定义的重要格环,具有比正则性更强的特征性质.设 R 是格环,若 R 满足下列条件:对任意 $a,b,c\in R$,由 $a\wedge b=0$ 且 $c\geqslant 0$ 得 $ca\wedge b=0(ac\wedge b=0)$,则称 R 为左(右)f 环.若 R 既是左 f 环又是右 f 环,则称 R 为 f 环.全序环是 f 环.格环 R 是 f 环,当且仅当 R 是全序环的次直积.阿氏 f 环是交换的、结合的格环.若

$$R=\left\{\begin{pmatrix} m & n\\ 0 & 0\end{pmatrix}\middle| m,n\in \mathbf{Z}\right\},$$

$$R^{+}=\left\{\begin{pmatrix} m & n\\ 0 & 0\end{pmatrix}\middle| m,n\in \mathbf{Z}^{+}\right\},$$

则 R 对通常的运算是一个格环.若

$$\begin{pmatrix} m_1 & n_1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} m_2 & n_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0,$$

可设 $n_1=0=m_2$,记

$$\begin{pmatrix} k & l\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in R^{+},$$

则

$$\left[\begin{pmatrix} k & l\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]\wedge\begin{pmatrix} 0 & n_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} k\,m_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 & n_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\wedge\left[\begin{pmatrix} k & l\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & n_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix} m_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 & k\,n_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0,$$

从而 R 是一个左 f 环. $\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in R^{+}$,

$$\left[\begin{pmatrix} m_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]\wedge\begin{pmatrix} 0 & n_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} m_1 & m_1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 & n_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & m_1\wedge n_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}>0,$$

因此 R 不是一个 f 环.

格序环的函数环(functional ring in a lattice-ordered ring)　即"f 环".

左(右)f 环(left (right) f-ring)　见"f 环".

格序环的 f 理想(f-ideal of a lattice-ordered ring)　亦称格序环的 f 幻.研究格环的根的工具.设 I 是格环 R 的 l 理想,若 R/I 是 f 环,则称 I 是 R 的 f 理想.

格序环的 f 幻(f-ideal of a lattice-ordered ring)　即"格序环的 f 理想".

超单位(superunit)　格环中的一种特殊元素.可用它来研究某些 f 环.设 e 是格环 R 的元素,若对每个 $x\in R^{+}$,$ex\geqslant x$ 及 $xe\geqslant x$,则称 e 为 R 的超单位.

超模极大 l 理想(super modular maximal l-ideal)　亦称超模极大 l 幻.f 环的一类特殊的极大 l 理想.设 M 是 f 环 A 的极大 l 理想,若 A/M 有一个超单位,则称 M 为 A 的超模极大 l 理想.f 环 A 的超模极大 l 理想全体在包核拓扑下形成一个局部紧豪斯多夫(Hausdorff,F.)空间 $\mu(A)$.若 f 环 A 的所有超模极大 l 理想的交是零,则称 A 为超模半单的或 s 半单的.

超模极大 l 幻(super modular maximal l-ideal)　即"超模极大 l 理想".

超模半单 f 环(super modular semisimple f-ring)　见"超模极大 l 理想".

几乎 f 环(almost f-ring)　具有某些特殊性质的格环.若结合格环 R,即作为环是结合环,满足:$a\wedge b=0$,有 $ab=0$,则称 R 为几乎 f 环.具有正单位元 1 的结合格环 R 是几乎 f 环,当且仅当 1 是弱单位.f 环是几乎 f 环;但几乎 f 环未必是 f 环.不含非零幂零元的几乎 f 环是 f 环;几乎 f 环的每一个元素的平方都为正的.

D 整环(D-domain)　一类具有序结构的整环.设 R 是一个没有零因子的交换格环,若满足下述条件:

1. R 的特殊元素的集合 S 是非空的;
2. 用 S 的元左乘、右乘的乘法是格同态;

则称 R 为 D 整环.若 R 是交换格整环,则 R 是 D 整环的充分必要条件为:$S_1=\{0\neq s\in R^{+}\mid$用 s 做乘法是格同态$\}$是非空的且 $S=S_1$.特别地,D 整环中的特殊元素构成一个乘法闭子集.

(* *)环((* *)-ring)　一类特殊的偏序环.设 R 是一个偏序环,若 R 满足性质(* *):$0\leqslant x\leqslant y$,有 $xy\in yR^{+}$,则称 R 为(* *)环.交换偏序环、右凸 f 环是(* *)环.

凸格序环(convex lattice-ordered ring)　一类重要的格环.每个右理想是一个凸 l 子群的格环,称为右凸格序环.正则 f 环和左内射 f 环是右凸的.类似地有左凸格环的定义.一个既是右凸又是左凸的格环,称为凸格序环.

内射 f 环(injective f-ring)　一类特殊的 f 环.设 R 是环,若${}_RR(R_R)$是一个内射 R 模,则称 R 为左(右)内射环.若 f 环 R 是内射的,则称 R 为内

射 f 环. 设 R 是一个 f 环,若 R^+ 中的任意两两不相交的元素集都有最小的上界,则称 R 为侧完备的. 正则 f 环是内射的当且仅当它是侧完备的.

左内射环(left injective ring) 见"内射 f 环".

右内射环(right injective ring) 见"内射 f 环".

侧完备 f 环(laterally complete f-ring) 见"内射 f 环".

f 环的遗传类(hereditary classes of f-ring) f 环的一个重要概念. 指对 l 理想封闭的 f 环类. 设 $\mathscr{C}$ 是一个 f 环类,若对任意环 R 属于 $\mathscr{C}$,R 的同态像也属于 $\mathscr{C}$,则 $\mathscr{C}$ 称为同态封闭类. 若对任意 R 属于 $\mathscr{C}$,R 的每一个 l 理想也属于 $\mathscr{C}$,则 $\mathscr{C}$ 称为遗传的.

同态封闭类(homomorphism closed class) 见"f 环的遗传类".

f 环的根类(radical class of f-rings) f 环类的重要子类. 设 $\mathscr{F}$ 是 f 环类 $\mathscr{C}$ 的一个子类,若 $\mathscr{S}\mathscr{F}=\{R\in\mathscr{C}\mid R$ 没有非零 l 理想属于 $\mathscr{F}\}$,则 $\mathscr{S}\mathscr{F}$ 称为半单类. 若 $\mathscr{F}$ 是 f 环类 $\mathscr{C}$ 的一个非空子类,且满足:

1. $\mathscr{F}$ 是同态闭的;
2. $R\notin\mathscr{F}$,R 有非零的同态像属于 $\mathscr{S}\mathscr{F}$;

则 $\mathscr{F}$ 称为一个根类. 若 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个根类,则 $\mathscr{C}$ 中每个 f 环 R 包含惟一的满足以下条件的 l 理想 $\mathscr{F}(R)$:

1. $\mathscr{F}(R)$是 R 在 $\mathscr{F}$ 中的最大的 l 理想.
2. $\mathscr{F}(R)$是 R 的最小的 l 理想,使$R/\mathscr{F}(R)$属于 $\mathscr{S}\mathscr{F}$.

l 理想 $\mathscr{F}(R)$称为 $\mathscr{F}$ 根.

半单类(semisimple class) 见"f 环的根类".

$\mathscr{F}$ 根($\mathscr{F}$-radical) 见"f 环的遗传类".

格序代数(lattice-ordered algebra) 具有格序结构的代数. 设 F 是可换偏序环,R 是格环,若 R 是 F 上的代数,且是 F 上的 f 模,则称 R 为 F 上的格序代数. 设 $R\in\mathscr{C}$ 是有向偏序域 F 上的格序代数,若 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个根类,则 $\mathscr{F}(R)$是 R 的子代数.

特殊子类(special subclass) 格环类的一个子类. 设 $\mathscr{U}$ 是格环类 $\mathscr{C}$ 的一个子类,称 $\mathscr{U}$ 为 $\mathscr{C}$ 的一个特殊子类. 若:

1. $\mathscr{U}$ 中的每个格环是 l 素的.
2. $\mathscr{U}$ 是遗传的.
3. 若 $A\in\mathscr{U}$,$R\in\mathscr{C}$,且 A 是 R 的 l 理想,则 $R/A^*\in\mathscr{U}$,其中 $A^*=l_l(A)\cap r_l(A)$.

撰　稿　朱作桐　高　亭　董克诚
审　阅　许永华　漆芝南

格　模

偏序模(partially ordered module) 简称 po 模. 具有序结构的模. 设 R 是有单位元的偏序环,R^+ 是 R 的序(或正锥),M 是一个左 R 模,$P\subseteq M$,若

$$P+P\subseteq P,\ R^+P\subseteq P,\ P\cap(-P)=\{0\},$$

则称 P 是 M 的一个序. 若 M 中存在序 P,则称 M 是一个偏序模. 若 M 的序 P 是全序的,即 $M=P\cup -P$,则称 M 是全序模. 对于右 R 模也有类似的定义.

偏序模的序(order of an po-module) 见"偏序模".

全序模(totally ordered module) 见"偏序模".

孤立模(isolated module) 一类重要的偏序模. 设 M 是偏序环 R 上的偏序模,P 是 M 的序. 对任意 $\lambda\in R$,$\lambda>0$,若 $\lambda x\in P$,有 $x\in P$,则 P 称为 M 上的一个孤立序,相应地称 M 为孤立模. 全序 f 模 M 是孤立的当且仅当 M 是无挠的.

孤立序(isolated order) 见"孤立模".

格序模(lattice-ordered module) 亦称 l 模. 简称格模. 有序代数系的研究对象. 设 R 是一个格环,若 $M_R({}_RM)$是一个右(左)模且 M 是一个格群,使得

$$M^+R^+(R^+M^+)\subseteq M^+,$$

其中 M^+ 与 R^+ 分别是格群 M 与格环 R 的正锥,则 M 称为 R 的右(左)格序模.

格模(lattice-ordered module) 即"格序模".

右格序模(right lattice-ordered module) 见"格序模".

左格序模(left lattice-ordered module) 见"格序模".

l 模(l-module) 即"格序模".

l 零化子(l-annihilator) 模的零化子概念的一种应用. 设 M 是格环 R 上的右格模,A 是 M 的一个非空子集. 若 $r_l(A)=\{x\in R\mid |a||x|=0$,对任意的 $a\in A\}$,则称 $r_l(A)$为 A 的右 l 零化子. 若 M 是左格模,则类似地可定义 A 的左 l 零化子 $l_l(A)$. 一个既是左 l 零化子又是右 l 零化子的 $r_l(A)$称为 l 零化子. $r_l(A)$是 R 的右 l 理想,且是包含在 $r(A)=\{x\in R\mid ax=0$,对所有的 $a\in A\}$中的最大凸 l 子群. 若 A 是 M 的格子模,则 $r_l(A)$是 R 的 l 理想.

右 l 零化子(right l-annihilator) 见"l 零化子".

左 l 零化子(left l-annihilator) 见"l 零化子".

凸 l 子模(convex l-submodule) 一类重要的子模. 设 M_R 是环 R 上的格模,N 是 M 的 R 子模. 若 N 是 M 的凸 l 子群,则称 N 为 M 的凸 l 子模. 若

M/N 是全序的，则 N 称为 M 的素子模. 若 $R=\mathsf{Z}$，则这些定义与格群的相应定义一致. 对于$_RM$ 亦有类似的定义.

素子模(prime submodule)　见“凸 l 子模”.

分配格模(distributive lattice-ordered module)　一类重要的格模. 设 M_R 是格模，若对任意 $x,y\in M,r\in R^+$，有：

1. $(x\vee y)r=xr\vee yr$；
2. $(x\wedge y)r=xr\wedge yr$；

则称 M_R 为分配格模. 即对于 $r\in R^+$ 的乘法是 M 的格同态. 对于格模$_RM$ 也有类似的定义. 因为对于 $r\in R^+$ 的乘法是 M 的群同态，且对于任意 $a,b\in M$，有

$$-(a\vee b)=-a\wedge -b,\quad -(a\wedge b)=-a\vee -b,$$

所以上述定义中可将条件 1,2 之一省去，即，只要求对于 $r\in R^+$ 的乘法是 M 的并同态(或交同态)，就等价于要求这个乘法是格同态.

f 模(f-module)　一类重要的格模. 设 M_R 是偏序环(格环)R 上的格模. 对任意 $r\in R^+,a,b\in M^+$，若 $a\wedge b=0$，有 $ar\wedge b=0$，则 M 称为右 f 模. 对左 R 模也有类似的定义. 例如：

1. 交换格群是全序环 Z 上的 f 模.
2. 任意一个向量格是 f 模.
3. 若

$$R=\left\{\begin{pmatrix} m & 0\\ n & 0\end{pmatrix}\,\middle|\, m,n\in \mathsf{Z}\right\},$$

定义

$$R^+=\left\{\begin{pmatrix} m & 0\\ n & 0\end{pmatrix}\,\middle|\, m,n\in \mathsf{Z}^+\right\},$$

则 R 是格序环. 若 $M=R$，则 M 是 R 上的格模.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in M,\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\in R^+.$$

由于

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]\wedge\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

因此，$_RM$ 不是 f 模. 若 M 是有单位元的有向环 R 上的格模，则下列命题等价：

1. M 是 f 模.
2. 对任意 $x,y\in M,0\leqslant\lambda\in R$，
   $\lambda(x\vee y)=\lambda x\vee\lambda y,\lambda(x\wedge y)=\lambda x\wedge\lambda y$.
3. M 是全序模的次直积.
4. M 的每个极小素子群是一个子模.

右 f 模(right f-module)　见“f 模”.

左 f 模(left f-module)　见“f 模”.

无挠 f 模(torsion-free f-module)　f 模的子类. 设$_RM$ 是 f 模，若 $\lambda x=0$，有 $\lambda=0$ 或 $x=0$，其中 $\lambda\in R,x\in M$，则称 M 为无挠 f 模. 若 R 是全序环，则每个无挠 f 模是无挠全序模的次直积；一个 f 模是无挠的充分必要条件是，它为孤立模. 若 M 是全序环 R 上的无挠 R 模，则对任意 $x\in M,R^+x$ 是 M 的一个序.

自可裂 f 模(self splitting f-module)　一类特殊的 f 模. 设 M 是 f 模. 若对任意序对 $(m_1,m_2)\in M\times M$，存在 $n\in M$，使得 $n\wedge m_1^-=(m_1^+-n)^+=(m_2-n)^+\wedge n=0$，其中“+”,“−”分别表示元素的正部与负部，则称 f 模 M 是自可裂的. 若 M 是全序模，$(m_1,m_2)\in M\times M$，记

$$n=\begin{cases} m_1\vee m_2 & (m_1\geqslant 0),\\ 0 & (m_1<0),\end{cases}$$

当 $m_1\geqslant 0$，有 $n\wedge m_1^-=n\wedge 0=0,0\leqslant(m_1^+-n)^+\leqslant(n-n)^+=0$ 和 $0\leqslant(m_2-n)^+\wedge n\leqslant(n-n)^+\wedge n=0$；当 $m_1<0$，有 $n\wedge m_1=0\wedge m_1^-=0,(m_1^+-n)^+=m_1^+=0$ 和 $(m_2-n)^+\wedge n=m_2^+\wedge 0=0$，则 M 是自可裂 f 模.

自由 f 模(free f-module)　一类重要的 f 模. 与自由模具有相似泛性质的 f 模类. 设 R 是有单位元的左 f 环，M 是 R 上的偏序模，F 为 f 模，若：

1. 存在 O 单同态 $\psi:M\to F$；
2. 当 K 是 f 模，$\varphi:M\to K$ 是 O 同态；

则存在惟一的 l 同态 $\varphi':F\to K$，使得 $\psi\varphi'=\varphi$，即图 1 是可换的，此时称 f 模 F 为 M 上的自由 f 模，其中 O(单)同态即为保序的(单)模同态，l 同态表示既为格同态又为模同态. 类似于自由格群. 设 R 是有单位元的左 f 环，X 是集合，F 为 f 模，若：

1. 存在内射 $\nu:X\to F$；
2. 若 K 是一个 f 模，$\varphi:X\to K$ 是一个映射；

则存在惟一的 l 同态 $\varphi':F\to K$，使 $\nu\varphi'=\varphi$，即图 2 是

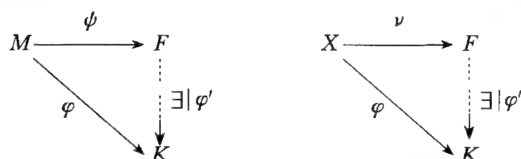


图1

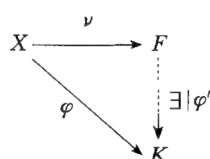
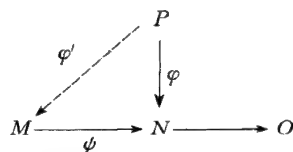


图2

可换的，此时称 f 模为 X 上的自由 f 模. 模 M 上的自由 f 模若存在，则是惟一的，且任意集合 X 上的自由 f 模是存在的. 对于右 f 环也有类似的结果.

投射 f 模(projective f-module)　具有格序结构的投射模. 设 P 是有单位元的左 f 环上的左 f 模. 若给定 f 模 M,N，满 l 同态 $\psi:M\to N$ 和 l 同态 $\varphi:P\to N$，存在 l 同态 $\varphi':P\to M$，使得 $\varphi'\psi=\varphi$，即下图是可换的，则称 P 为投射 f 模，其中的满 l 同态要求正锥满足 $\psi(M^+)=N^+$. 对于投射 f 模有类似于模论的下列结果：



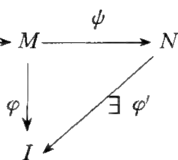
1. 每个集 S 上的自由 f 模是投射的.

2. f 模的直和是投射的充分必要条件为每个直和项是投射 f 模.

3. 每个 f 模是自由 f 模的 l 同态像.

l 收缩(l-retract)　由 l 同态诱导出的概念. 设 M,N 是 f 模,若存在 l 同态 $\sigma:M\to N$ 和 $\gamma:N\to M$,使得 $\sigma\gamma=1_N$,则称 N 为 M 的一个 l 收缩,其中 1_N 表示 N 的恒等 l 同态. f 模是投射的充分必要条件是,它为自由 f 模的一个收缩.

$\aleph_\alpha$-l 内射 f 模($\aleph_\alpha$-l-injective f-module)　投射 f 模的对偶概念. 设 R 是左 f 环,$\aleph_\alpha$ 是一个无限基数,I 是 R 上的 f 模. 若给定 R 上的 f 模 M 和 N 且 $|M|$,$|N|<\aleph_\alpha$,单 l 同态 $\psi:M\to N$ 及 l 同态 φ:$M\to I$,存在 l 同态 φ':$N\to I$. 使 $\psi\varphi'=\varphi$,即图中是可换的,则称 I 为 $\aleph_\alpha$-l 内射 f 模.



D_f 模(D_f-module)　一类特殊的格模. 设 G 是格群,α 是 G 的自同态. 对任意 $x,y\in G$,若由 $x\wedge y=0$ 可得 $x\alpha\wedge y=0$,则称 α 是 G 的一个 p 自同态. 设 D 是有向偏序环,若 G 是可换格群又是 D 模,且对任意 $d\in D^+$(D 的正锥)及 $g\in G$,映射 $g\to gd$ 是 G 的一个 p 自同态,则称 G 为 D_f 模. 例如,每个交换格群关于整数环 $\mathbf{Z}$ 就是一个 D_f 模.

p 自同态(p-endomorphism)　见"D_f 模".

有限值 f 模(finitely valued f-module)　有限值格序群的概念在 f 模中的推广. 设 M_R 是 f 模,且 $x\in M$,若 N 是 M 中不包含 x 的凸 l 子模集中的极大元素,则称 N 为 x 的 R 值. 若 N 是 x 在 M 中的惟一的 R 值,则称 N 是 R 特殊的. 若 M_R 的每个元素只有有限个 R 值,则称 M 为有限值 f 模.

元素的 R 值(R-value of an element)　见"有限值 f 模".

元素的 R 特殊值(R-special value)　见"有限值 f 模".

矢量格(vector lattice)　亦称向量格. 具有偏序关系的矢量空间. 设 E 是实数域上的矢量空间,若 E 作为加群(是可换的)是偏序群,且对任意 $x\in E,\lambda\in\mathbf{R}$(实数域),当 $x\geqslant0,\lambda\geqslant0$ 时,有 $\lambda x\geqslant0$,则称 E 为偏序矢量空间(亦称部分序矢量空间);若偏序矢量空间 E 是格,则称 E 为矢量格;若矢量格 E 是备格(σ 备格),则称 E 为备(σ 备)矢量格.

向量格(vector lattice)　即"矢量格".

偏序矢量空间(partially ordered-vecter space)　见"矢量格".

备矢量格(complete vector lattice)　见"矢量格".

σ 备矢量格(σ-complete vector lattice)　见"矢量格".

向量格的素理想(prime ideal of a vector lattice)　亦称向量格的素幻. 向量格中一类重要的子空间. 设 I 是向量格 V 的子空间,若对 $|x|\leqslant|y|$ 及 $y\in I$,有 $x\in I$,则 I 称为 V 的理想. 若 I 是向量格 V 的真理想,若 $x\wedge y\in I$,有 $x\in I$ 或 $y\in I$,则 I 称为 V 的素理想. 若 I 是向量格 V 的理想,则 V/I 是一个向量格. 若 P 是向量格 V 的理想,则下列条件等价:

1. P 是素理想.
2. 若 $x\wedge y=0$,则 $x\in P$ 或 $y\in P$.
3. 商向量格 V/P 是全序的.
4. 若 $I\cap J\subseteq P$,其中 I 和 J 是 V 的理想,则 $P\supseteq I$ 或 $P\supseteq J$.

向量格的素幻(prime ideal of a vector lattice)　即"向量格的素理想".

阿基米德向量格(Archimedean vector lattice)　一类重要的向量格. 若向量格 V 作为格群是阿基米德格群,则称 V 是阿基米德向量格.

赋范向量格(normed vector lattice)　具有格序结构的赋范空间. 设 G 同时是赋范格群和向量格,若对任意实数 $\lambda,x\in G$ 有 $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$,则 G 称为赋范向量格. 若 G 是巴拿赫空间同时又是一个赋范向量格,则 G 称为巴拿赫格. 设 G 是一个巴拿赫格,若 $x\wedge y\geqslant0$,有 $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$,则称 G 为 l 空间.

巴拿赫格(Banach lattice)　见"赋范向量格".

l 空间(l-space)　见"赋范向量格".

正理想(positive ideal)　亦称正幻. 研究向量格的重要概念. 设 V 是向量格,K 是正锥 V^+ 的非空真子集,若 K 对 V 的加法与对非负纯量的乘法是封闭的,且若 $0\leqslant x\leqslant y\in K$,有 $x\in K$,则 K 称为 V 的正理想. 对 V 的任意理想 I,映射 $I\to I\cap V^+$ 是 V 的理想集到正理想集之间的一一映射. 设 K-K 表示 K 在此映射下的逆像,若 K-K 是 V 的素理想,则 K 称为素正理想.

正幻(positive ideal)　即"正理想".

素正理想(prime positive ideal)　见"正理想".

Γ 序 K 模(Γ-ordered K-module)　序模概念的推广. 设 M 是全序交换群,K 是环,且 M 是 K 模. 若 $\Gamma\subseteq K$,且 $\Gamma M^+\subseteq M^+$,则 M 称为 Γ 序 K 模. 若 M 是全序环 K 上的全序模,则 M 是 K^+ 序 K 模. 例如,设 A 是一个交换全序群,Γ 是 A 的序自同态集,K 是由 Γ 生成的 A 的自同态环,则 A 是一个 Γ 序 K 模.

凸 f 模(convex f-module)　一类特殊的 f 模. 设 $_RM$ 是偏序环 R 上的 f 模,若 M 的每个子模都是凸 l 子模,则 M 称为凸 f 模. 若 R 是一个 f 环,$_RR$

是凸 f 模，则 R 称为左凸 f 环. f 环中的每个理想是右凸 l 子群，但未必是左凸的；同样左凸 f 环也未必是右凸的.

左凸 f 环(left convex f-ring)　见“凸 f 模”.

撰　稿　朱作桐　高　亭　董克诚
审　阅　董荣森　漆芝南

双 B 代 数

双 B 代数(BCK-algebra and BCI-algebra or Two-B-algebras)　BCK 代数与 BCI 代数的简称. 它是序代数中一门新兴的有广泛应用的分支学科. 1966 年，日本数学家井关清志(Iseki，K.)等人提出 BCK 代数，同年井关清志又得出 BCI 代数. 任何 BCK 代数都是 BCI 代数，且存在不是 BCK 代数的 BCI 代数. 双 B 代数来源于集合论与命题演算. 在集合论中，对于幂集，若同时考虑集的并、交、差三种运算，则它是一个布尔代数；若仅考虑集的并与交两种运算时，则它是一个分配格；当仅考虑集的差运算时，这就产生了 BCK 代数的概念. BCK 代数与 BCI 代数虽然都在同一年被提出，但是，1980 年以前仅对 BCK 代数进行研究，1980 年后才开始研究 BCI 代数，中国学者也开始对双 B 代数进行研究.

BCK 代数的研究包括：可换 BCK 代数、有界 BCK 代数、关联与正关联 BCK 代数、模糊 BCK 代数等理论. 而 BCI 代数的研究有：结合 BCI 代数、优 BCI 代数、诣零 BCI 代数、理想 BCI 代数、自由 BCIZ 代数等理论. 并且，还有根性、半单性等双 B 代数结构理论的研究. 双 B 代数与格论、半群、格序群等理论有天然的联系. 许多学者利用群论、环论、范畴论、拓扑学、逻辑学等学科的思想方法来研究双 B 代数. 而双 B 代数的理论又在集合论、数理逻辑、数论等许多学科有广泛的应用.

BCK 代数(BCK-algebra)　一种有序代数系统. 它是从逻辑蕴含规律中抽象出来的，带有常元和一个二元运算. 代数结构 $\langle X;*,0\rangle$，若 $\forall\ x,y,z\in X$，满足：

1. $(x*y)*(x*z))*(z*y)=0$；
2. $x*y=y*x=0\Rightarrow x=y$；
3. $x*(0*y)=x$；

则称 $\langle X;*,0\rangle$ 为 BCK 代数. 若在 BCK 代数中定义：

$$x\leqslant y\Leftrightarrow x*y=0,$$

则 $\langle X;\leqslant\rangle$ 是以 0 为最小元的偏序集. 运算 $*$ 与通常的减法有类似的性质，例如：

$$x*0=x;\quad (x*y)*z=(x*z)*y;$$

若 $x\leqslant y$，则 $x*z\leqslant y*z$，$z*y\leqslant z*x$.

BCI 代数(BCI-algebra)　一种较 BCK 代数广泛的代数结构. 代数结构 $\langle X;*,0\rangle$，若 $\forall\ x,y,z\in X$ 满足：

1. $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$；
2. $x*0=x$；
3. $x*y=y*x=0$ “$\Rightarrow$” $x=y$；

则称 $\langle X;*0\rangle$ 为 BCI 代数. 若在 BCI 代数中定义：$x\leqslant y\Leftrightarrow x*y=0$，则 BCI 代数是以 0 元为极小元的偏序集，亦有与通常减法相类似的性质.

***p* 半单 BCI 代数**(p-semisimple BCI-algebra)　一类重要的 BCI 代数. 若 X 是 BCI 代数，则分别称

$$P(X)=\{x\in X\mid 0*x=0\}$$

与

$$Q(X)=\{x\in X\mid 0*(0*x)=x\}$$

为 X 的 BCK 部分与 p 半单部分. $P(X)$ 是 X 的子代数又是 X 的理想. $Q(X)$ 是 X 的子代数，未必是理想. 若 $Q(X)$ 是 X 的理想，则 $X=P(X)\oplus\varphi(X)$. 若 $Q(X)=X$，则称 X 为 p 半单 BCI 代数. X 是 BCK 代数当且仅当 $Q(X)=\{0\}$. $\langle X;*,0\rangle$ 是 p 半单 BCI 代数当且仅当 X 是阿贝尔群的逆结构 $\langle X;-,0\rangle$.

BCI 代数的 BCK 部分(BCK-part of BCI-algebra)　见“p 半单 BCI 代数”.

BCI 代数的 *p* 半单部分(p-semisimple part of BCI-algebra)　见“p 半单 BCI 代数”.

结合 BCI 代数(associative BCI-algebra)　一类重要的 BCI 代数. 它是关于运算 $*$ 满足结合律的 BCI 代数. 设 $\langle X;*,0\rangle$ 是 BCI 代数，$\forall\ x,y,z\in X$，若 $(x*y)*z=x*(y*z)$ 成立，则称 X 为结合 BCI 代数. $\langle X;*,0\rangle$ 是结合的当且仅当 $\langle X;*,0\rangle$ 是一个对合群.

优 BCI 代数(well BCI-algebra)　一类重要的 BCI 代数. 它是所有理想均为子代数的 BCI 代数. 在 BCI 代数中，子代数与理想是两个无关的概念. 若它的所有理想均为子代数，则称之为优 BCI 代数. 任何有限 BCI 代数均是优的，任一 BCK 代数及结合 BCI 代数均是优的. 在优 BCI 代数中每一个理想都是闭理想.

有界 BCI 代数(bounded BCI-algebra)　一类重要的 BCI 代数. 它是有上界的 BCI 代数. 若 BCI 代数 $\langle X;*,0\rangle$ 中有上界元 1，即 $\forall\ x\in X$ 有 $x\leqslant 1$，则称 X 为有界 BCI 代数. 每一个有界 BCI 代数都是 BCK 代数. 在有界可换 BCK 代数中可引入 X 的元素间的“交”与“并”的定义：$\forall\ x,y\in X$，

$$x\wedge y=y*(y*x),\quad x\vee y=N(Nx\wedge Ny),$$

其中 $Nx=1*x$，从而 $\langle X;\wedge,\vee\rangle$ 是分配格.

可换 BCK 代数(commutative BCK-algebra)　一类重要的 BCK 代数. 它是关于下半格运算 $\wedge$ 交换

的 BCK 代数.可换 BCK 代数⟨X;$*$,0⟩不是指对原运算$*$的可交换性,而是利用$*$定义一个新运算:

$$x\wedge y=y*(y*x),$$

且有 $x\wedge y\leqslant x,y$.若 $x\wedge y=y\wedge x$,则称⟨X;$*$,0⟩为可换 BCK 代数.可换 BCK 代数⟨X;$*$,0⟩关于$\wedge$运算构成一个下半格.可换 BCK 代数是 1975 年由日本数学家田中昭太郎(Shotaro Tanaka)提出的.

可换 BCI 代数(commutative BCI-algebra) 可换 BCK 代数的一种推广.设 X 是 BCI 代数,若$\forall$ $x,y\in X$,有

$$x*(x*y)=y*(y*(x*(x*y))),$$

则称 X 为可换 BCI 代数.可换 BCK 代数与 p 半单 BCI 代数都是可换 BCI 代数,反之不真.设 X 是 BCI 代数,X 的极小元 a(即若 $x*a=0$ 则 $x=a$)所确定的子集 $V(a)=\{x\in X\mid a\leqslant x\}$称为 X 的分支.若 BCI 代数的每个分支$V(a)$都有最大元 m_a,则称 X 为局部有界的.局部有界可换 BCI 代数 X 的每个分支 $V(a)$都是一个分配格.

BCI 代数的分支(branch of BCI-algebra) 见"可换 BCI 代数".

局部有界 BCI 代数(local bounded BCI-algebra) 见"可换 BCI 代数".

拟可换 BCI 代数(quasi-commutative BCI-algebra) 交换和正关联 BCI 代数的一种共同推广.设⟨X;$*$,0⟩为 BCI 代数,记

$$Q_{00}(x,y)=x*(x*y);$$
$$Q_{m+1,n}(x,y)=Q_{mn}(x,y)*(x*y);$$
$$Q_{m,n+1}(x,y)=Q_{mn}(x,y)*(y*x).$$

若$\forall$ $x,y\in X$,存在着非负整数 m,n,s,t,使 $Q_{mn}(x,y)=Q_{st}(y,x)$,则称 X 为$(m,n;s,t)$型拟可换 BCI 代数.存在任意型的拟可换 BCI 代数,且每个有限 BCK 代数都是拟可换的.

正关联 BCK 代数(positive implicative BCK-algebra) 一类重要的 BCK 代数.设⟨X;$*$,0⟩是 BCK 代数,若$\forall$ $x,y,z\in X$ 有

$$(x*z)*(y*z)=(x*y)*z$$

(该条件等价于$(x*y)*y=x*y$),则称 X 为一个正关联 BCK 代数.

正关联 BCI 代数(positive implicative BCI-algebra) 正关联 BCK 代数的一种推广.设 X 是 BCI 代数,若$\forall$ $x,y\in X$,有

$$(x*(x*y))*(y*x)=x*(x*(y*(y*x))),$$

则称 X 为正关联 BCI 代数.正关联 BCK 代数与 p 半单 BCI 代数都是正关联 BCI 代数,反之不真.纯 BCI 代数 X 是正关联的当且仅当 X 的 BCK 部分与 p 半单部分都是正关联的.

多重正关联 BCK 代数(multiply positive implicative BCK-algebra) 正关联 BCK 代数的一种推广.设 X 是 BCK 代数,若对任意 $x,y\in X$,存在自然数 $n=n(x,y)$(与 x,y 有关),使得

$$x*y^n=x*y^{n+1},$$

则称 X 是多重正关联 BCK 代数.若有一个固定的自然数 n,使得对 X 的任意元 x,y 均有 $x*y^n=x*y^{n+1}$,则称 X 为 n 级正关联 BCK 代数.这里

$$x*y^n=(\cdots((x*\overbrace{y)*y)*\cdots)*y}^{n\text{个}}.$$

X 是正关联 BCK 代数当且仅当 X 是 1 级的.X 是 n 级的必是多重的,反之不真.设 X 是有条件(s)(参见"具条件(s)的 BCI 代数")的 n 级正关联 BCK 代数,则⟨X;$+$,0⟩是上半格.

***n* 级正关联 BCK 代数**(n-fold positive implicative BCK-algebra) 见"多重正关联 BCK 代数".

关联 BCK 代数(implicative BCK-algebra) 比正关联 BCK 代数条件较强一类 BCK 代数.若在 BCK 代数⟨X;$*$,0⟩中,$\forall$ $x,y\in X$ 有:$x*(y*x)=x$,则称 X 为关联 BCK 代数.若 X 是有界关联 BCK 代数,则⟨X;$\wedge$,$\vee$⟩是布尔代数.若 X 是 BCK 代数,则 X 是关联的当且仅当 X 是可换的,同时又是正关联的.

关联 BCI 代数(implieative BCI-algebra) 关联 BCK 代数的一种推广.设 X 是 BCI 代数,若$\forall$ $x,y\in X$,有

$$(x*(x*y))*(y*x)=y*(y*x),$$

则称 X 为关联 BCI 代数.关联 BCK 代数,p 半单 BCI 代数都是关联 BCI 代数;反之不真.BCI 代数 X 是关联的当且仅当 X 是可换的和正关联的.局部有界关联 BCI 代数 X 的每一分支都是布尔代数.

纯 BCI 代数(pure BCI-algebra) BCK 代数的"单纯"扩张(仅添加 p 半单部分).设 X 是 BCI 代数,$P(X)=\{x\in X\mid x\geqslant 0\}$;$Q(x)=\{x\in X\mid 0*(0*x)=x\}$,若 $X=P(X)\cup Q(x)$,则称 X 为纯 BCI 代数.纯 BCI 代数 X 是可换的(正关联的、关联的)当且仅当 $P(X)$与 $Q(X)$都是可换的(正关联的、关联的).

多重关联BCK代数(multiply implicative BCK-algebra) 关联 BCK 代数的一种推广.设 X 是 BCK 代数,若对任意 $x,y\in X$,存在自然数 $n=n(x,y)$,使得 $x*(y*x^n)=x$,则称 X 为多重关联 BCK 代数.若存在一个固定的自然数 n,使对任意 $x,y\in X$,均有 $x*(y*x^n)=x$,则称 X 为 n 级关联 BCK 代数.当这个固定的 $n=1$ 时,X 是关联 BCK 代数.n 级关联 BCK 代数是多重关联 BCK 代数,反之不真.

***n* 级关联 BCK 代数**(n-fold implicatice BCK-algebra) 见"多重关联 BCK 代数".

正规 BCK 代数(normal BCJ-algebra) 一类特殊的 BCK 代数.设 X 是 BCK 代数,A 是 X 的非空

子集.记：

$$A_L^* = \{x \in X | a * x = a, \forall\, a \in A\};$$

$$A_R^* = \{x \in X | x * a = x, \forall\, a \in A\};$$

分别称 A_L^* 与 A_R^* 为 A 的左的与右的稳定子，且称 $A^* = A_L^* \cap A_R^*$ 为 A 的稳定子. A 的左稳定子 A_L^* 是 X 的理想；A_R^* 与 A^* 是 X 的子代数，未必是理想. 若 BCK 代数 X 的每个单元集$\{a\}$的右稳定子 R_a 都是 X 的理想，则称 X 为正规 BCK 代数. 单 BCK 代数、可换 BCK 代数、半单 BCK 代数以及 J 半单 BCK 代数都是正规 BCK 代数.

左(右)稳定子(left (right) stabilizer)　见“正规 BCK 代数”.

拟结合 BCI 代数(quasi-associative BCI-algebra)　结合 BCI 代数的推广. BCI 代数 X，若对$\forall\, x, y \in X$ 均有 $0 * x = 0 * (0 * x)$，则称 X 为拟结合 BCI 代数. 在 BCI 代数中，条件 $0 * (0 * x) = 0 * x$ 与条件

$$(x * y) * z \leqslant x * (y * z)$$

是等价的，这就是拟结合 BCI 代数名称的由来. BCK 代数与结合 BCI 代数都是拟结合 BCI 代数，反之不真.

可分解 BCI 代数(decomposable BCI-algebra)　一类 BCI 代数. 它是可直和分解的. 设 X 是 BCI 代数，若 X 的每一个子代数都是 X 的理想，则称 X 为可分解 BCI 代数. p 半单 BCI 代数是可分解 BCI 代数，反之不真. 每一个可分解 BCI 代数 X 都可分解为它的 BCK 部分 $P(X)$与 p 半单部分 $Q(X)$的直和.

完全 BCI 代数(complete BCI-algebra)　一类 BCI 代数. 它是非空子集具有上、下确界的 BCI 代数. 设 X 是 BCI 代数，若 X 的每一个非空子集 A 在 X 中存在最小上界与最大下界，则称 X 为完全 BCI 代数. 若 X 的每一个子代数都是完全的，则称 X 为局部完全 BCI 代数. 每一个局部完全 BCI 代数都是具有条件(s)的 BCI 代数.

局部完全 BCI 代数(local complete BCI-algebra)　见“完全 BCI 代数”.

具有条件(s)的 BCI 代数(BCI-algebra with the condition (s))　一类重要的 BCI 代数. 设$\langle X; *, 0\rangle$是 BCI(BCK)代数，若对 X 的任意两个元 a, b，方程$(x * a) * b = 0$ 在 X 中有最大解，记其最大解为 $a + b$，则称 X 是一个具有条件(s)的 BCI(BCK)代数. 若 X 是具有条件(s)的 BCI 代数，则方程$(x * a) * b = 0$ 的最大解 $a + b$ 是由 a, b 所惟一确定的，即“+”是 X 的一个二元运算. $\langle X; +, 0\rangle$是一个保序交换半群，0 是半群的单位元. 井关清志(Iseki, K.)于 1977 年引进了具有条件(s)的 BCK 代数，1980 年又推广到 BCI 代数上去，并奠定了它的基础理论. 具有条件(s)的关联 BCK 代数与幂等元环是两个抽象等价系统.

具有条件(s)的 BCK 代数(BCK-algebra with the conditional)　见“具有条件(s)的 BCI 代数”.

正则 BCI 代数(regular BCI algebra)　一类特殊的 BCI 代数. 设$\langle X; *, 0\rangle$是 BCI 代数，A, B 是 X 的任意两理想，若对任意的 $x, y \in (A \cup B)$均有 $A_x \cap B_y \neq \varnothing$，则称 X 为正则 BCI 代数，其中 A_x, B_y 分别表示在 X 中关于理想 A, B 的 x 与 y 的同余类. 每一个具有条件(s)的优 BCI 代数都是正则的.

拟左(右)交错 BCI 代数(quasi left (right) alternating BCI-algebra)　一类 BCI 代数. 它满足左右交错律. 若对 BCI 代数$\langle X; *, 0\rangle$中任意不同的 x, y 均有 $x * (x * y) = (x * x) * y$(或 $x * (y * y) = (x * y) * y$)，则称 X 为拟左(右)交错 BCI 代数. 一般地，拟右交错 BCI 代数一定是拟左交错 BCI 代数；反之不真. 但是，拟左交错 BCK 代数与拟右交错 BCK 代数等价，因此，称之为拟交错 BCK 代数. 两个拟交错 BCK 代数同构的充分必要条件是其阶相等. BCK 代数的所有原子连同元“0”一起组成一个拟交错的子代数.

拟交错 BCK 代数(quasi alternating BCK-algebra)　见“拟左(右)交错 BCI 代数”.

广义拟左交错 BCI 代数(generalized quasi left alternating BCI-algebra)　拟交错 BCI 代数的一种推广. 设 X 是 BCI 代数，对任意 $x, y \in X$，$x \neq y$，若满足条件 $x * (x * y) = 0 * (0 * y)$，则称 X 是广义拟左交错的. p 半单 BCI 代数及拟左交错 BCI 代数均是广义拟左交错 BCI 代数，反之不真. 有如下结构定理：若 X 是广义拟左交错 BCI 代数，则：

1. X 的 BCK 部分 $P(X)$是拟交错 BCK 代数.
2. X 是纯 BCI 代数.
3. 若 $x \in P(X)$，$y \in X - P(X)$，则

$$x * y = 0 * y.$$

若 $x \in X - P(X)$，$y \in P(X)$，则 $x * y = x$.

BCI 代数的直和(direct sum of BCI-algebra)　BCI 代数的一种分解. 设 X 是 BCI 代数，$\{A_i | i \in I\}$ 是 X 的理想族，称由并集$\bigcup_{i \in I} A_i$ 生成的理想

$$A = (\bigcup_{i \in I} A_i)$$

为 X 的和，记为 $A = \sum_{i \in I} A_i$. 若对 $\forall\, i \in I$，均有

$$A_i \cap \sum_{j \neq i \in I} A_j = 0,$$

则称 A 为$\{A_i\}_{i \in I}$的次直和，A_i 为 A 的次直和项，记为 $A = \sum_s \bigoplus_{i \in I} A_i$. 又，若 $A = \sum_s \bigoplus_{i \in I} A_i$，并对任意有限子集 $K \subseteq I$，$\forall\, a_k \in A_k$，$k \in K$，均有 $a \in A$ 使得

$$a \equiv a_k (\mathrm{mod} \sum_{i \in I-K} A_i),$$

则称 A 为 $\{A_i\}_{i\in I}$的直和，A_i 为 A 的直和项，记为 $A=\bigoplus_{i\in I}A_i$. 直和是次直和，反之不真. 直和的 BCI 代数是存在的. 在具有条件(s)的正关联 BCK 代数 X 中，X 的直和分解与 X 的半群$\langle X;+,0\rangle$分解是一致的. 若$\{A_i\}_{i\in I}$是 X 的理想族，$A=\bigoplus_{i\in I}A_i$，则

$$A=\{\sum_{i\in I}a_i \mid a_i\in A_i, a_i \text{ 几乎全为 } 0\}.$$

BCI 代数的次直和项(sub-direct sumterm of BCI-algebra)　见“BCI 代数的直和”.

BCI 代数的次直和(sub-direct sum of BCI-algebras)　见“BCI 代数的直和”.

半单 BCI 代数(semi-simple of BCI-algebras)　BCI 代数的重要子类. 指每个理想均为一次直和项的 BCI 代数. 若 BCI 代数 X 的任一理想是 X 的次直和项，则称 X 为半单的. 非零的优 BCI 代数 X 是半单的当且仅当 X 是单理想的次直和.

***J* 半单 BCI 代数**(J-semisimple BCI-algebra)　类似于环论中 J 半单环. 设 X 是 BCI 代数，称

$$J(X)=\bigcap\{M \mid M \text{ 是 } X \text{ 的极大理想}\}$$

为 X 的雅各布森根. 若 $J(X)=\{0\}$，则称 X 为 J 半单 BCI 代数. 有界正关联的对合(即 $NNx=x,\forall x\in X$)BCK 代数以及多重关联 BCK 代数都是 J 半单 BCK 代数. 每一个 J 半单 BCK 代数都是正规 BCK 代数，反之不真.

BCK 代数的原子(atom of BCK-algebra)　BCK 代数中的非零极小元. 设$\langle X;*,0\rangle$为一个 BCK 代数，若 a 是 X 的一个非零极小元，则称 a 为 X 的原子. 设 A 是 X 的原子集，若 $X=(A)$(即 X 由 A 生成)，则称 X 是由原子生成的 BCK 代数. 其生成集 A 恰好包含 X 的所有原子非零同态像和非零理想也都是由原子生成的.

原子生成的 BCK 代数(atomic generated BCK-algebra)　见“BCK 代数的原子”.

BCI 代数的元素的周期(period of element in BCI-algebra)　相似于群的元素的周期. 设 X 是 BCI 代数，$x\in X$，称使 $0*x^n=0$ 的最小自然数 n 为 x 的周期. 若这样的 n 不存在，则称 x 的周期为无限. 若 X 是 BCI 代数，则有：

1. X 是 BCK 代数当且仅当 X 的每个元素的周期都为 1.

2. X 是 p 半单 BCI 代数当且仅当 X 的每一非零元素的周期都大于 1.

3. X 是优 BCI 代数当且仅当 X 的所有元素的周期都有限.

BCI 代数的理想(ideal of BCI-algebra)　亦称 BCI 代数的幻. BCI 代数中的特殊子集. 它是含零元且不同于子代数的能诱导出商结构的子集. BCI 代数$\langle X;*,0\rangle$的一个非空子集 I，若 I 满足：

1. $0\in I$.

2. 由 $x\in I, y*x\in I$，可得 $y\in I$，

则称 I 为 X 的理想. 在 BCI 代数中，理想未必是子代数，而子代数亦未必是理想. 若理想是 X 的子代数，则称此理想是闭理想.

BCI 代数的幻(ideal of BCI-algebra)　即“BCI 代数的理想”.

BCI 代数的闭理想(closed ideal of BCI-algebra)　见“BCI 代数的理想”.

正关联理想(positive implicative ideal)　亦称正关联幻. 刻画正关联 BCI 代数的一种理想. 设 I 是 BCI 代数 X 的子集. 若满足：

1. $0\in I$;

2. 由$(x*y)*z\in I, y*z\in I$ 可得 $x*z\in I$;

则称 I 是 X 的正关联理想. 若 I 还满足：

3. $0\in I$;

4. 由$(x*(y*x))*z\in I, z\in I$ 可得 $x\in I$;

则称 I 是 X 的关联理想. 若 I 还满足：

5. $0\in I$;

6. 由$(x*y)*z\in I, z\in I$ 可得

$$x*(y*(y*x))\in I;$$

则称 I 是 X 的可换理想. BCK 代数 X 称为正关联(关联或可换)的当且仅当 X 的每一个理想是正关联(关联或可换)的.

正关联幻(positive implicative ideal)　即“正关联理想”.

BCI 代数的关联理想(implicative ideal of BCI-algebra)　见“正关联理想”.

BCI 代数的可换理想(commutative ideal of BCI-algebra)　见“正关联理想”.

广义结合理想(generalized associative ideal)　亦称 p 理想或广义结合幻. 刻画 p 半单 BCI 代数的一种理想. BCI 代数 X 的子集 A，若满足：

1. $0\in A$;

2. $\forall x,y,z\in X, y\in A$ 及

$(x*z)*(y*z)\in A$ 有 $x\in A$;

则称 A 为 X 的广义结合理想. 若还满足：

3. $0\in A$;

4. $\forall x,y,z\in X,(x*y)*z\in A$ 和 $y*z\in A$ 有 $x\in A$;

则称 A 为 X 的结合理想. 结合理想是广义结合理想，反之不真. BCI 代数是 p 半单(结合)的当且仅当它的每个理想是广义结合(结合)的.

广义结合幻(generaliged associative ideal)　即“广义结合理想”.

BCI 代数的结合理想(associative ideal of BCI-algebra)　见“广义结合理想”.

多重正关联理想(multiply positive implicative

ideal） 亦称多重正关联幻．正关联理想的推广．设 I 是 BCI 代数 X 的子集，若 I 满足下列条件，则称 I 为 X 的多重正关联理想：

1．$0\in I$．

2．若 $(x*y)*z^n$ 与 $y*z^m\in I(n,m\in\mathbb{N},x,y,z\in X)$，则存在 $k\in\mathbb{N}$，使得 $x*z^k\in I$．

在条件 2 中，若有固定自然数 n，使 $(x*y)*z^n,y*z^n\in I$ 蕴含 $x*z^n\in I$，则称 I 为 X 的 n 级正关联理想．1 级正关联理想是 X 的正关联理想．在多重正关联 BCK 代数中多重正关联理想与理想的概念一致．

多重正关联幻（multiply positive implicative ideal） 即"多重正关联理想"．

***n* 级正关联理想**（n-fold positive implicative ideal） 见"多重正关联理想"．

多重关联理想（multiply implicative ideal） 亦称多重关联幻．是关联理想的推广．设 I 是 BCI 代数 X 的子集，若 I 满足下列条件，则称 I 为 X 的多重关联理想：

1．$0\in I$．

2．对 $x,y\in X,z\in I$，若存在自然数 $n=n(x,y)$，则当 $m\geqslant n$ 时，恒有 $(x*(y*x^m))*z\in I$ 蕴含 $x\in I$．

对$\forall\ x,y\in X$，上述的 $n(x,y)\equiv 1$ 时，I 是关联理想．而当 $n(x,y)\leqslant k$（自然数）时，I 是 k 级关联理想．在 BCK 代数 X 中，每一个多重关联理想都是 X 的理想，反之不真．在多重关联 BCK 代数中，理想与多重关联理想的概念一致．

多重关联幻（multiply implicative ideal） 即"多重关联理想"．

***k* 级关联理想**（k-fold implicative ideal） 见"多重关联理想"．

自反理想（reflexive ideal） 刻画自反 BCK 代数的理想．设 X 是 BCK 代数，A 是 X 的非空子集，称 $A^*=\{x\in X|x*a=x$ 且 $a*x=a,\forall\ a\in A\}$ 为 A 的稳定子．A 的稳定子 A^* 是 X 的子代数，但未必是理想．在可换 BCK 代数中，A^* 是理想．在 BCK 代数中，若 A 是理想，则 A^* 也是理想，且 $A\subseteq A^{**}$．若 $A=A^{**}$，则称 A 为 X 的自反理想．BCK 代数 X 的每一个次直和项都是 X 的自反理想．若 BCK 代数 X 的每一个理想都是自反的，则称 X 为自反 BCK 代数．一个 BCK 代数是自反的当且仅当 X 是半单 BCK 代数．

自反幻（reflexive ideal） 即"自反理想"．

自反 BCK 代数（reflexive BCK-algebra） 见"自反理想"．

BCI 代数的对偶理想（dual ideal of BCI-algebra） 亦称 BCI 代数的对偶幻．BCI 代数的一种特殊理想．BCI 代数 X 的非空子集 D，若满足条件：

1．当 $x\in D,x*y=0$ 时，有 $y\in D$；

2．$\forall\ x,y\in D$，在 D 中存在一个元素 z，使得

$$z*x=0,\quad z*y=0;$$

则称 D 为 X 的对偶理想．

BCI 代数的对偶幻（dual ideal of BCI-algebra） 即"BCI 代数的对偶理想"．

BCI 代数的 *p* 超幂零理想（p-hypernilpotent ideal of BCI-algebra） 亦称 BCI 代数的 p 超幂零幻．BCI 代数的一种特殊理想．设有 BCI 代数 X 的理想 P 和 I，若存在一组自然数 $n_1,n_2,\cdots,n_m$ 使得 $I^{n_1,n_2,\cdots,n_m}\subseteq P$，其中

$$I^n=(\cdots((I*\underbrace{I)*I)*\cdots)*I}_{n-1\text{个}},$$

$$I^{n_1,n_2,\cdots,n_m}=(\cdots(I^{n_1}*I^{n_2})*\cdots)*I^{n_m},$$

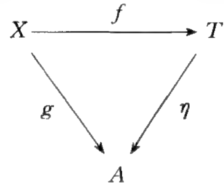
则称理想 I 为理想 P 的 p 超幂零的．

BCI 代数的 *p* 超幂零幻（p-hypernilpotent ideal of BCI-algebra） 即"BCI 代数的 p 超幂零理想"．

BCI 代数的商代数（quotient algebra of BCI-algebra） 代数的同态像．它是探讨 BCI 代数构造的一个基本概念．设 I 是 BCI 代数 X 的理想．X 关于 I 的理想同余是指：$\forall\ x,y\in X,x\equiv y(\mathrm{mod}\,I)\Leftrightarrow x*y,y*x\in I$．记包含 x 的等价类为 I_x．把集合 $X/I=\{I_x|x\in X\}$ 称为 X 关于 I 的商，并定义：$I_x*I_y=I_{x*y}$．于是，$\langle X/I;*;I_0\rangle$ 亦为 BCI 代数，称之为 X 关于理想 I 的商代数．在一般情况下 $I_0\subseteq I$．当且仅当 I 是闭理想时 $I_0=I$．

BCI 范畴（BCI-category） 一类特殊的范畴．具体地说，以 BCI 代数为对象，BCI 同态为态射的范畴称为 BCI 范畴．BCK 范畴、可换 BCK 范畴是 BCI 范畴的完全子范畴．BCI 范畴是完全的、余完全的．

自由 BCI 代数（free BCI-algebra） 一类与自由代数相仿的有生成元集的 BCI 代数．设 X 是一非空集合，BCI(BCK) 代数 T 称为由 X 生成的自由 BCI(BCK) 代数，若存在映射 $f:X\to T$，使得对任意 BCI(BCK) 代数 A 及任意映射 $g:X\to A$，均存在惟一的 BCI(BCK) 同态 $\eta:T\to A$ 使得 $g=\eta f$．任一 BCI(BCK) 代数均为自由 BCI(BCK) 代数的同态像；每一非空子集 X 都存在一个且只存在一个由 X 生成的自由 BCI(BCK) 代数（在同构意义下）．



自由 BCK 代数（free BCK-algebra） 见"自由 BCI 代数"．

撰稿 陈昭木 雷天德 蒲义书
审阅 陈昭木

泛 代 数

泛代数(universal algebra) 代数学的一个分支学科.泛代数是在群、环、域、格等代数系统研究的基础上进一步抽象得以发展起来的一般代数系统.一个泛代数 $\mathscr{U}$ 是一个二元组 $\langle A,F\rangle$,其中 A 是一个非空集合,称 A 为 $\mathscr{U}$ 的全域(universe)或支集(underlying set),F 是定义于 A 上的运算集合(F 可能是有限集,也可能是无限集).对于泛代数可以仿照群、环、域中的方式定义子代数、同态、同构概念等.

早在 1898 年,怀特海(Whitehead,A. N.)就意识到要研究泛代数.但直到 20 世纪 30 年代伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)的论文发表以前,泛代数的研究没有什么发展.这和当时近世代数的大部分分支没有得到充分的发展有关.从 1935 年到 1950 年,泛代数的大部分研究成果是按伯克霍夫的文章的方向进行的,即,研究自由代数、同态定理、同构定理、合同关系格、子代数格等.

由于数理逻辑的发展,为泛代数的研究提供了一个新的工具,特别是哥德尔完全性定理、塔尔斯基可满足性概念、紧致性定理等,使人们意识到逻辑在代数中应用的可能性.马尔茨夫(Malcev)于 1941 年发表了这方面的第一篇论文,由于战争,他的论文没有引起人们的注意.后来,塔尔斯基(Tarski,A.)、亨金(Henkin,L.)和鲁宾孙(Robinson,A.)开始这方面的研究工作.

利用模型论(数理逻辑的一个分支)研究泛代数的主要代表人物有塔尔斯基、亨金、查尔各(Charg,C. C.)、琼森(Jonsson,B.)、凯斯勒尔(Keisler,H. J.)、林敦(Lyndon,R. C.)、墨尔洛各(Morlog,H.)、斯科特(Scott,D. S.)、沃特(Varght,R. L.)等人.当然,泛代数的结果也可应用于模型论的研究.

泛代数除了在数学本身的研究中有广泛应用外,对计算机语言和语义理论的研究也有越来越大的作用.

有限元运算(finitary operation) 一种特殊映射.即由

$$A^n=\underbrace{A\times\cdots\times A}_{n\text{个}}$$

到 A 的一个映射 f 称为一个有限元运算,其中 n 是一个非负整数,n 称为 f 的型.也称 f 为 n 元运算.当 $n=0$ 时,f 称为一个零元运算.零元运算是 $A^0=\{\varnothing\}$(规定)到 A 的一个映射,$f(\varnothing)\in A$.零元运算实际是一个常元映射.

型(type) 见"有限元运算".

***n* 元运算**(n-ary operation) 见"有限元运算".

零元运算(nullary operation) 见"有限元运算".

无限元运算(infinitary operation) 一种特殊映射.设 α 是一个无限序数,A^α 到 A 的一个映射 f 称为一个无限元运算.

部分运算(partial operation) 一种特殊映射.设 A 是一个集合,$B\subseteq A^n$,f 是 B 到 A 的一个映射,则称 f 是定义于 A 上的一个部分运算.例如实数的除法是定义于实数集上的一个部分运算.

自由泛代数(free universal algebra) 一种特殊泛代数.设 K 是一个泛代数的类,$\mathscr{U}=\langle A,F\rangle\in K$,$X=\{x_i\mid i\in I\}$是 $\mathscr{U}$ 的生成集合,称 $\mathscr{U}$ 是 K 上的一个自由代数.若对任意 $\mathscr{B}=\langle B,F\rangle\in K$ 和任意 $\psi:I\to B$,存在 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{B}$ 的一个同态 φ 使得 $\psi(i)=\varphi(x_i)(i\in I)$,则称 X 为 $\mathscr{U}$ 的一个自由生成元集.

自由生成元集(set of free generated elements) 见"自由泛代数".

合同关系(congruence relation) 数论中合同关系的推广.设 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$是一个泛代数,$\theta$ 是定义于 A 上的一个二元关系,若 θ 是一个等价关系并且适合:对任意 $f_r\in F$,只要 $a_i\equiv b_i(\theta)$ $0\leqslant i\leqslant n_r$,就有

$$f_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n_r-1})\equiv f_r(b_0,b_1,\cdots,b_{n_r-1})(\theta),$$

则称 θ 是 $\mathscr{U}$ 的一个合同关系.若 A/θ 表示 θ 的所有等价类构成的集,按通常方式在 A/θ 中定义运算,则$(A/\theta,F)$也是一个泛代数,并且 $\varphi:a\to[a]_\theta$ 对任意 $a\in A$ 是$\langle A,F\rangle$到$\langle A/\theta,F\rangle$的一个同态映射,其中$[a]_\theta$ 表示 a 所在的等价类.

有向系统(directed system) 特殊的有向偏序集.若一个偏序集的任意两个元素有上界,则称此偏序集为有向偏序集.设 $P(A)$表示 A 的幂集,$\mathscr{B}\subseteq P(A)$,并且 $\mathscr{B}\neq\varnothing$.若$\langle\mathscr{B},\subseteq\rangle$是一个有向偏序集,则称 $\mathscr{B}$ 是一个有向系统,其中$\langle\mathscr{B},\subseteq\rangle$表示 $\mathscr{B}$ 关于集合包含关系构成的偏序集.

有向偏序集(directed poset) 见"有向系统".

闭包系统(closure system) 集合论的一个概念.设 A 是一个集合,$\mathscr{A}$ 是 A 的若干个子集构成的集合,若对任意 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}$,皆有$\bigcap_{\mathscr{B}}B\in\mathscr{A}$,则称 $\mathscr{A}$ 是一个闭包系统.$\mathscr{B}$ 关于包含关系构成一个完备格.

代数闭包系统(algebraic closure system) 闭包系统的子系统.若一个闭包系统 $\mathscr{A}$ 满足条件:当 $\varnothing\neq\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}$ 为一个有向系统时,有$\bigcup(x\mid x\in\mathscr{B})\in\mathscr{A}$,则称 $\mathscr{A}$ 为一个代数闭包系统.若 $\mathscr{A}$ 是一个代数闭包系统,则$\langle\mathscr{A},\subseteq\rangle$是一个代数格.

子代数格(subalgebra lattice) 泛代数的一个概念.一个泛代数的所有子代数构成的格称为它的子代数格.

合同关系格(congruence lattice) 一类特殊的

格. 设 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$是一个泛代数,$\mathscr{C}(\mathscr{U})$表示 $\mathscr{U}$ 的所有合同关系构成的集合. 若对任意 $\theta_1,\theta_2\in\mathscr{C}(\mathscr{U})$,规定 $\theta_1\leqslant\theta_2\Leftrightarrow$对任意 $x,y\in A$,当 $x\equiv y(\theta_1)$时,有 $x\equiv y(\theta_2)$,则$(\mathscr{C}(\mathscr{U}),\leqslant)$是一个完备格. 称 $\mathscr{C}(\mathscr{U})$为 $\mathscr{U}$ 的合同关系格. 利用合同关系格的性质研究泛代数的结构,对泛代数进行分类研究.

泛代数的子代数(subalgebra of universal algebra)　泛代数中的一个特殊子集. 它是与代数中子代数相平行的概念. 设 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$是一个泛代数,$\varnothing\neq B\subseteq A$,若对任意 $f_r\in F$,$a_0,a_1,\cdots,a_{n_r-1}\in B$,皆有$f_r(a_0,a_1,\cdots,a_{n_r-1})\in B$,则称 $\mathscr{B}=\langle B,F\rangle$为 $\mathscr{U}$ 的一个子代数. 值得注意的是:$\langle H,\{\cdot,e\}\rangle$是群$\langle G,\{\cdot,e\}\rangle$的一个子代数,$\langle H,\{\cdot,e\}\rangle$未必是群$\langle G,\{\cdot,e\}\rangle$的子群.

多项式泛代数(polynomial universal algebra)　由 n 元多项式构成的特殊泛代数. 设 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$是一个泛代数,$\mathscr{U}$ 上一个 n 元多项式是 A^n 到 A 的一个如下映射:

1. n 元射影映射 $e_i^n(i=1,2,\cdots,n)$是 $\mathscr{U}$ 上 n 元多项式.

2. 若 $f\in F$ 是一个 m 元运算,$p_1,p_2,\cdots,p_m$ 是 $\mathscr{U}$ 上 n 元多项式,则 $f(p_1,p_2,\cdots,p_m)$也是 $\mathscr{U}$ 上 n 元多项式.

3. 只有用 1 及 2 有限次得到的映射才是 $\mathscr{U}$ 上的 n 元多项式.

若 $\mathscr{U}$ 上全体 n 元多项式构成的集合为 $p^n(\mathscr{U})$,则 $\mathscr{B}^{(n)}(\mathscr{U})=\langle p^n(\mathscr{U}),F\rangle$是一个泛代数,称为 $\mathscr{U}$ 上 n 元多项式泛代数.

设 $F=\{f_r|r<O(\tau)\}$是运算符号的集合 ,$O(\tau)$是一个序数. $\tau=\langle n_0,n_1,n_2,\cdots,n_r,\cdots\rangle$是非负整数的一个序列. 对每个 $r<O(\tau)$,n_r 表示 f_r 的元数. 称 τ 为 F 的型. 一个泛代数 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$也称为型 τ 的一个泛代数. 一个型 τ 的 n 元多项式符号定义为:

1. 变元 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$皆为型 τ 的 n 元多项式符号.

2. 若 $p_0,p_1,\cdots,p_{n_r-1}$皆为型 τ 的 n 元多项式符号,$r<O(\tau)$,则 $f_r(p_0,p_1,\cdots,p_{n_r-1})$也是一个型 τ 的多项式符号.

3. 只有用 1 及 2 有限次得到的才是型 τ 的多项式符号.

若 $p^n(\tau)$表示所有型 τ 的 n 元多项式符号,则 $\mathscr{B}^{(n)}(\tau)=\langle P^n(\tau),F\rangle$是一个型 τ 的泛代数. 称此泛代数为 n 元多项式泛代数.

无关(泛代数中的)(independent (in universal algebra))　泛代数的一个概念. 设 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$是一个泛代数,集合$\{a_i|i\in I\}\subseteq A$,若 $I=\varnothing$或者由$\{a_i|i\in I\}$生成的泛代数$\langle[\{a_i|i\in I\}],F\rangle$是由 $\mathscr{U}$ 生成的泛代数类上的自由代数,并且$\{a_i|i\in I\}$是$\langle[\{a_i|i\in I\}],F\rangle$的自由生成元集,则称$\{a_i|i\in I\}$是无关的;若$\{a_i|i\in I\}$不是无关的,则称其为相关.

相关(泛代数中的)(dependent (in universal algebra))　见"无关(泛代数中的)".

簇(泛代数中的)(variety (in universal algebra))　一类泛代数. 设 K 是一个代数类,若 K 对子代数、同态像与直积封闭,则称 K 是一个簇. 由伯克霍夫定理,K 是一簇当且仅当 K 是一个方程类(亦称本原类). 一个类 K 是一个方程类当且仅当存在一个等式集合 Σ 使得 $K=\{\mathscr{U}|\mathscr{U}\Leftarrow\Sigma\}$,即 K 是满足 Σ 中所有等式的所有泛代数的集.

方程类(equational class)　见"簇(泛代数中的)".

本原类(primitive class)　见"簇(泛代数中的)".

函数完备代数(functionally complete algebra)　一类特殊泛单代数. 设 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$是一个泛代数,若 A 的元素个数有限(A 至少含两个元),并且定义于 A 上的每个函数皆为多项式函数,则称 $\mathscr{U}$ 为函数完备代数. 两个元素的布尔代数是函数完备布尔代数. 每一函数完备代数是单代数并且没有真子代数. 有限函数完备代数称为原代数.

原代数(primal algebra)　见"函数完备代数".

单泛代数(simple universcal algebra)　一类特殊泛代数. 若一个泛代数 $\mathscr{U}$ 仅有平凡合同关系,则称 $\mathscr{U}$ 为单泛代数.

合同关系可换代数(congruence-permutable algebra)　一类特殊代数. 若泛代数 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$的任意两个合同关系 θ_1,θ_2 适合 $\theta_1\theta_2=\theta_2\theta_1$,则称 $\mathscr{U}$ 是合同关系可换的. 若一个簇 V 的每一个代数 $\mathscr{U}$ 皆为合同关系可换的,则称 V 为合同关系可换簇或马尔茨夫类. 群、环是合同关系可换的.

合同关系可换簇(congruence permutable variety)　见"合同关系可换代数".

马尔茨夫类(Malcev class)　见"合同关系可换代数".

合同关系分配代数(congruence-distributive algebra)　一类特殊代数. 若一个泛代数 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$的合同关系格是一个分配格,则称 $\mathscr{U}$ 为合同关系分配代数.

合同关系模代数(congruence-modular algebra)　一类特殊代数. 若一个泛代数 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$的合同关系格是模格,则称 $\mathscr{U}$ 是合同关系模代数.

算术簇(arithmetical variety)　一类特殊代数. 若一个簇 V 的每一个泛代数的合同关系格既是分配格又是可换格,则称 V 是算术的. 布尔代数和阿廷代数是算术的.

马尔茨夫条件(Malcev condition)　泛代数中的一个重要的判定条件. 它是用来刻画一个方程类 V 是否是合同关系可换的. 该条件是:存在一个项 $p(x,y,z)$ 使得

$$V\models p(x,x,y)=y \text{ 且 } V\models p(x,x,z)=z.$$

该条件称为马尔茨夫条件,并且,称 $p(x,y,z)$ 为马尔茨夫项.

马尔茨夫项(Malcev term)　见"马尔茨夫条件".

泛代数的中心(the center of a universal algebra)　一个特殊的二元关系. 设 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$ 是一个泛代数,$T(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是变元为 $x,y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的项的全体,$\mathscr{U}$ 的中心是定义在 A 上的二元关系 $Z(A)$:$(a,b)\in Z(A)$ 当且仅当对任意 $p(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\in T(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 和任意 $c_1,c_2,\cdots,c_n,d_1,d_2,\cdots,d_n\in A$,

$$p(a,c_1,c_2,\cdots,c_n)=p(a,d_1,d_2,\cdots,d_n)$$
$$\Leftrightarrow p(b,c_1,c_2,\cdots,c_n)=p(b,d_1,d_2,\cdots,d_n).$$

对每一个泛代数 $\mathscr{U}$,中心 $Z(A)$ 是 A 上一个合同关系. 此处的中心定义与通常群的中心的定义一致.

全不变合同关系(fully invariant congruence)　一类特殊合同关系. 泛代数 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$ 的一个合同关系 θ 称为全不变的,是指对 $\mathscr{U}$ 的任意自同态 α,

$$(a,b)\in\theta\Rightarrow(\alpha(a),\alpha(b))\in\theta.$$

判别簇(discriminator variety)　一类特殊的单泛代数. 设 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$ 是一个泛代数. 定义于 A 上的三元函数 $t:A^3\to A$ 称为判别函数,若

$$t(a,b,c)=\begin{cases}a & (a\neq b),\\ c & (a=b).\end{cases}$$

A 上的一个能表示判别函数的项 $t(x,y,z)$ 称为判别项. 一个有判别项的代数是单代数. 若一个代数类 K 有公共的判别项 $t(x,y,z)$,则称由 K 生成的簇 $V(K)$ 为判别簇. 判别簇是算术的.

判别函数(discriminator function)　见"判别簇".

判别项(discriminator term)　见"判别簇".

开关函数(switching function)　判别项的推广. 设 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$ 是一个泛代数,定义于 A 上的如下函数称为开关函数. 即

$$S:A^4\to A,\ S(a,b,c,d)=\begin{cases}c & (a=b),\\ d & (a\neq b).\end{cases}$$

能表达开关函数的项 $S(x,y,z,w)$ 称为开关项. 一个泛代数 $\mathscr{U}$ 有开关项当且仅当 $\mathscr{U}$ 有判别项.

开关项(switching term)　见"开关函数".

优多项式(majority polynomial)　亦称优项. 研究簇的一个概念. 设 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$ 是一个泛代数,$m(x,y,z)$ 是一个三元多项式. 若

$$\mathscr{U}\models m(x,x,y)=m(x,y,x)=m(y,x,x)=x,$$

则称 $m(x,y,z)$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个优多项式. 若对于簇 V 中的每一个泛代数 $\mathscr{U}$ 皆有

$$\mathscr{U}\models m(x,x,y)=m(x,y,x)=m(y,x,x)=x,$$

则 V 是一个合同分配簇.

优项(majority term)　即"优多项式".

2/3 小项(2/3-minority term)　研究簇的一个概念. 设 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$ 是一个泛代数. $m(x,y,z)$ 是一个三元项,若

$$\mathscr{U}\models m(x,y,x)=m(x,y,y)=m(y,y,x)=x,$$

则称 $m(x,y,z)$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个 2/3 小项. 若对簇 V 的每一个泛代数皆有

$$\mathscr{U}\models m(x,y,x)=m(x,y,y)=m(y,y,x)=x,$$

则 V 是一个算术簇.

主合同关系(principal congruence)　一种特殊合同关系. 设 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$ 是一个泛代数. $a,b\in A$, $\mathscr{U}$ 的合同关系格中使 a,b 在同一个等价类的最小合同关系称为由 a 与 b 决定的主合同关系.

泛代数的自由积(free product of universal algebra)　与其他代数系自由积相平行的概念. 由已知泛代数构造的新泛代数. 设 K 是一个泛代数类, $\mathscr{U}_i=(A_i,F)\in K(i\in I)$,若:

1. $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle\in K$;
2. 对每一 $i\in I$,存在 $\mathscr{U}_i$ 到 $\mathscr{U}$ 的一个嵌入 ψ_i;
3. $A=[\bigcup(A_i\psi_i\mid i\in I)]$(即 $\bigcup(A_i\psi_i\mid i\in I)$ 是 A 的生成元集);
4. 若 $\mathscr{B}=\langle B,F\rangle\in K$,$\varphi_i$ 是 A_i 到 B 的一个同态映射$(i\in I)$,则存在 A 到 B 的一个同态映射 φ 使得

$$\varphi_i=\psi_i\varphi\ (i\in I);$$

则称 $\mathscr{U}=(A,F)$ 是 $\mathscr{U}_i(i\in I)$ 在 K 中的自由积.

平凡簇(trivial variety)　泛代数的特殊簇. 若一个泛代数 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$ 的全域 A 只含一个元素,则称 $\mathscr{U}$ 是一个平凡代数. 若一个簇 V 中的所有代数皆是平凡的,则称 V 是一个平凡簇. 若一个簇 V 不是平凡的,则 V 必含一个极小子簇.

平凡代数(trivial algebra)　见"平凡簇".

极小簇(minimal variety)　亦称方程完全簇. 一类特殊的簇. 若一个簇 V 不是平凡的,并且 V 的不等于 V 的子簇是平凡的,则称 V 为极小的. 若一个簇 V 不是平凡的,则 V 包含一个极小簇.

方程完全簇(equationally complete variety)　即"极小簇".

极大合同关系(maximal congruence)　一种特殊合同关系. 设有泛代数 $\mathscr{U}=\langle A,F\rangle$ 的一个合同关系 θ,若闭区间$[\theta,A\times A]$内只有两个合同关系,则称 θ 为极大的.

撰　稿　卢景波
审　阅　王世强

范畴论与代数 K 理论

范　畴　论

范畴论(category theory)　代数学的一个重要分支.数学的各个领域都有各自的研究对象.例如,集合论研究集合与映射;线性代数研究线性空间与线性映射;群论研究群与群同态;拓扑学研究拓扑空间与连续映射.在20世纪中期,数学家们认为有必要将各个领域中的研究对象各自合在一起成为一个整体,使之成为一种数学系统,这就是范畴思想.于是,所有的集合与映射组成集合范畴;所有的群与群同态组成群范畴.在各个范畴之间往往存在着内在联系与变换.例如,一个群模去其换位子群的商群(称为交换化)得到一个交换群,从而交换化成为群范畴到交换群范畴的一个变换,且这个变换保持着群同态及其合成.事实上,这就是函子的思想.在域 F 上的线性空间范畴中,任一线性空间 L 必有惟一的对偶空间 $L^*=\mathrm{Hom}_F(L,F)$,"$*$"可看成这个线性空间范畴到自身的一个变换.尽管当 L 为有限维时 L 与 L^* 是同构的(记这个同构为 $\tau:L\to L^*$),但这个同构不是"自然"的.即,若 L_1 与 L_2 间有一个同构 $\alpha:L_1\to L_2$,"$*$"诱导出 L_2^* 到 L_1^* 的一个同构为 α^*,但对 L_1 中的元素 x 来说,$\tau\alpha(x)$一般地并不等于 $\alpha^*\tau(x)$.这就引起"自然性"的研究.艾伦伯格(Eilenberg,S.)与麦克莱恩(MacLane,S.)于1945年发表的论文《自然等价的一般理论》为范畴论的建立作出了奠基性的工作.

在某种意义上来说,范畴论提炼了数学(甚至其他学科)各分支的共性,是比集合论更高一个层次的数学公共语言与工具.它使数学各个领域的研究通过箭头图做了一致化与简单化的处理,更加显示其本质上的东西,同时使许多数学系统的性质通过图的泛性质得到了深刻的刻画.戈德门特(Godement,R.)于1958年将范畴论应用到拓扑学,埃雷斯曼(Ehresmann,C.)于1958年将范畴论应用到微分几何,格罗腾迪克(Grothendieck,A.)与迪厄多内(Dieudonné,J.)于1960年将范畴论应用到代数几何.现在,范畴论在上述学科及同调代数、代数 K 理论、模论、环论等学科中都得到了成功的应用.应用范畴论时,关键是先搞清研究问题以什么作对象,以什么作态射(参见"范畴").研究不同范畴之间的关系时,关键在于找到适当的函子.范畴论的核心是函子理论.艾伦伯格与麦克莱恩为了搞清某些同构(等价)的"自然"变换之精确含义,于1945年引入范畴与函子的概念去定义自然变换.现在,范畴论已渗透到现代数学的各个领域(甚至已应用到计算机科学等),成为现代数学的基础.

范畴(category)　范畴论的基本概念之一.称 $\mathscr{C}$ 是一个范畴,是指 $\mathscr{C}$ 满足下述六点:

1. $\mathscr{C}$ 有一个对象类$\{A,B,C,\cdots\}$(不要求它是一个集合,即不要求它满足集合论的公理,只要求能判别出是不是它的对象),常记为 $\mathrm{Obj}\mathscr{C}$ 或简记 $\mathscr{C}$.
2. 对 $\mathscr{C}$ 的任两对象 A,B,有一个确定的集合(可为空集)$\mathrm{Hom}(A,B)$,其元素称为由 A 到 B 的态射,记为 $f\in\mathrm{Hom}(A,B)$或 $f:A\to B$.
3. 对给定的 $f\in\mathrm{Hom}(A,B)$与 $g\in\mathrm{Hom}(B,C)$有惟一的 $gf\in\mathrm{Hom}(A,C)$,称为 f 与 g 的合成.
4. $\mathrm{Hom}(A,B)$与 $\mathrm{Hom}(C,D)$有公共元是指 $A=C$ 且 $B=D$.
5. 态射合成满足结合律.
6. 对 $\mathscr{C}$ 的任意对象 A,$\mathrm{Hom}(A,A)$至少有一个元素 ε_A 使对$\forall\ \sigma\in\mathrm{Hom}(A,B)$恒有 $\sigma\varepsilon_A=\sigma=\varepsilon_B\sigma$,称 ε_A 为 A 的恒等态射(ε_B 为 B 的恒等态射).

例如,以一切集合作对象,以集合映射作态射,则得集合范畴 Set(简称集范畴).以一切拓扑空间作对象,以连续映射作态射,则得拓扑空间范畴 Top.以一切环为对象,以环同态作为态射得环范畴 Ring.类似地,可得群范畴 Group,阿贝尔群范畴 AG,环 R 上的左 R 模范畴$_R$M 等.以自然数为对象,$a\mid b$(表示 a 整除 b)时定义 $\mathrm{Hom}(a,b)$有惟一元素 φ_{ab},$a\nmid b$ 时定义 $\mathrm{Hom}(a,b)=\varnothing$(空集),也得到一个范畴.一般地,对每个拟序集都可仿此定义范畴.

态射(morphism)　范畴论的基本概念之一.通常可看成是同态与映射的推广(参见"范畴").

恒等态射(identical morphism)　见"范畴".

对象(object)　范畴论的基本概念之一.通常指一类研究对象(参见"范畴").

小范畴(small category)　一种重要的常用范畴.一个范畴的全体对象一般地只成类而不是集合.当其对象类是一个集合时就称此范畴为小范畴.例如,R 为实数集,将实数作为对象,当 $a\leqslant b$ 时,规定 $\mathrm{Hom}(a,b)=\varphi_{ab}$;当 $a>b$ 时,规定 $\mathrm{Hom}(a,b)=\varnothing$,即得一小范畴.更一般地,任何有序集(甚至拟序集)按其序仿此都可得到一个小范畴.

对偶范畴(dual category)　亦称反向范畴或逆范畴.范畴论的基本概念之一.任何范畴都有一个对

偶范畴. 设 $\mathscr{C}$ 为一个范畴,可做一个新范畴 $\mathscr{C}^{\circ}$:其对象类即 $\mathscr{C}$ 的对象类,通常 $\mathscr{C}$ 的对象 A 作为 $\mathscr{C}^{\circ}$的对象时记为 A°;对任意的对象 $A^{\circ},B^{\circ}\in\mathscr{C}^{\circ}$,定义 $\mathrm{Hom}_{C^{\circ}}(A^{\circ},B^{\circ})=\mathrm{Hom}_{C}(B,A)$,对应 $\mathscr{C}$ 中态射 f 的 $\mathscr{C}^{\circ}$中之态射记为 f°;规定 $\mathscr{C}^{\circ}$中态射 f°,g°(在可合成时)的合成 $f^{\circ}g^{\circ}$为 $\mathscr{C}$ 中相应的 g,f 之合成 gf 对应的$(gf)^{\circ}$. 这个 $\mathscr{C}^{\circ}$就称为 $\mathscr{C}$ 的对偶范畴. $\mathscr{C}^{\circ\circ}=\mathscr{C}$,即对偶范畴的对偶范畴即原范畴. 若用 $f:A\to B$ 表 $\mathscr{C}$ 中态射,则 $\mathscr{C}^{\circ}$中相应态射为 $f^{\circ}:B^{\circ}\to A^{\circ}$. 简言之,将 $\mathscr{C}$ 中一切箭头反向即得其对偶范畴 $\mathscr{C}^{\circ}$.

反向范畴(opposite category) 即"对偶范畴".

逆范畴(inverse category) 即"对偶范畴".

离散范畴(discrete category) 一种特殊的范畴. 即只有恒等态射的范畴. 若在一个对象类 $\mathscr{C}$ 中,对任意 $A\in\mathscr{C}$,规定 $\mathrm{Hom}(A,A)=\{\varepsilon_A\}$,$\varepsilon_A$ 为 A 的恒等态射,而对$\forall X\neq Y,X,Y\in\mathscr{C}$,规定 $\mathrm{Hom}(X,Y)=\varnothing$,则得一范畴,称为离散范畴. 任何集合 S 都可按此做成一个离散(小)范畴. 离散范畴 $\mathscr{C}$ 为小范畴之充分必要条件是 $\mathscr{C}$ 的对象类为一个集合.

有限范畴(finite category) 一类特殊的范畴. 只有有限个态射的范畴称为有限范畴. 由范畴的定义,$\mathscr{C}$ 为有限范畴是指 $\mathscr{C}$ 的对象只有有限个且每两个对象间的态射集都是有限集. 有限范畴一定是小范畴.

加性范畴(additive category) 亦称加法范畴. 一种常用范畴. 一个范畴 $\mathscr{C}$ 称为加性范畴. 若它满足下述条件:

1. $\mathscr{C}$ 有零对象.

2. 对任何 $A,B\in\mathscr{C}$,$\mathrm{Hom}(A,B)$为一个加法阿贝尔群.

3. 态射合成满足左、右分配律,即,若 $\sigma,\sigma'\in\mathrm{Hom}(A,B)$,$\tau,\tau'\in\mathrm{Hom}(B,C)$,则

$$(\tau+\tau')\sigma=\tau\sigma+\tau'\sigma,\quad \tau(\sigma+\sigma')=\tau\sigma+\tau\sigma'.$$

4. 任何有限个 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{C}$,上积

$$\coprod_{1\leqslant i\leqslant n}A_i$$

必存在,其中条件 4 可换为

4$'$. 对任何 $A,B\in\mathscr{C}$,上积 $A\coprod B$ 必存在.

加性范畴最典型的例子是阿贝尔群范畴 AG. 在加性范畴中有限个对象必有积;加性范畴的对偶范畴仍为加性范畴;加性范畴中态射 f 为单态射的充分必要条件是 $\ker f=0$,f 为满态射的充分必要条件是 $\operatorname{coker} f=0$.

加法范畴(additive category) 即"加性范畴".

预加性范畴(preadditive category) 亦称预加法范畴. 比加性范畴更广的一类范畴. 它只要求满足加性范畴定义中的条件 1,2,3(参见"加性范畴").

预加法范畴(preadditive category) 即"预加性范畴".

阿贝尔范畴(Abelian category) 一种特殊的加性范畴. 因此具有更丰富的性质. 一个加性范畴 $\mathscr{C}$ 称 $\mathscr{C}$ 为阿贝尔范畴. 若再满足下述三条件:

1. 任何态射 f 都有核 $\ker f$ 与上核 $\operatorname{coker} f$.

2. 任何单(满)态射都是其上核(核)的核(上核).

3. 任何态射 σ 都可分解为一个单态射 η 与一个满态射 π 的合成 $\sigma=\eta\pi$(称为 σ 的标准分解式).

阿贝尔群范畴、环 R 上的 R 模范畴都是阿贝尔范畴. 阿贝尔范畴具有加性范畴的一切性质. 阿贝尔范畴的对偶范畴仍为阿贝尔范畴. 阿贝尔范畴中既单且满的态射是单位态射. 阿贝尔范畴在同调代数及代数几何中都是最常用的一类范畴.

子范畴(subcategory) 范畴论的基本概念之一. 范畴中部分对象与态射所成的一类范畴. 设 $\mathscr{C}$,$\mathscr{D}$ 为两个范畴,称 $\mathscr{D}$ 为 $\mathscr{C}$ 的子范畴. 若它们满足条件:

1. $\mathscr{D}$ 的对象都是 $\mathscr{C}$ 的对象.

2. $\forall\ A,B\in\mathscr{D}$,$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A,B)\subseteq\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$.

3. $\mathscr{D}$ 中态射的合成是 $\mathscr{C}$ 中相应态射合成的限制.

4. $\mathscr{D}$ 中对象 X 的恒等态射 ε_X 也是 X 作为 $\mathscr{C}$ 中对象的恒等态射.

例如,阿贝尔群范畴 AG 是群范畴 **Group** 的子范畴;可换环范畴是环范畴的子范畴.

全子范畴(full subcategory) 一种特殊的子范畴. 设 $\mathscr{D}$ 为 $\mathscr{C}$ 的子范畴,若子范畴定义中的条件 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A,B)\subseteq\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ 改为 $\mathrm{Hom}_{D}(A,B)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$,则称 $\mathscr{D}$ 为 $\mathscr{C}$ 的全子范畴. 阿贝尔群范畴是群范畴的全子范畴,交换环范畴是环范畴的全子范畴. 但存在不是全子范畴的子范畴. 例如,令范畴 Φ 的对象为一切 $S_n=(0,1,2,\cdots,n)$,$n=0,1,\cdots$,态射 $S_n\to S_m$,$n\leqslant m$ 定义为 S_n 的各分量变成 S_m 中大于或等于此分量的分量,态射合成按常规合成定义. 若限制其中的态射满足 $f(0)=0$,则得到 Φ 的一个子范畴 Φ_1,但 Φ_1 不是 Φ 的全子范畴.

塞尔子范畴(Serre subcategory) 阿贝尔范畴的一种子范畴. 它在同调代数等学科中有重要应用,也是定义商范畴的基础概念. 设 $\mathscr{C}$ 为阿贝尔范畴,$\mathscr{D}$ 为 $\mathscr{C}$ 的全子范畴且满足:对 $\mathscr{C}$ 中任意的正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$,$B\in\mathscr{D}$ 当且仅当 $A\in\mathscr{D}$ 且 $C\in\mathscr{D}$(即,$B\in\mathscr{D}$ 当且仅当 B 的子对象与商对象都是 $\mathscr{D}$ 的对象). 此时称 $\mathscr{D}$ 为 $\mathscr{C}$ 的塞尔子范畴. 塞尔子范畴仍为阿贝尔范畴.

局部小范畴(locall small category) 亦称良效范畴. 一种特殊的范畴. 若 $\mathscr{C}$ 是一个范畴,其任意对象 A 的子对象的等价类(同构类)都是集合,则称 $\mathscr{C}$

为局部小范畴. 由集合论的 ZF 公理知,集合范畴 Set 就是一个局部小范畴,Set 的子范畴(称为"具体范畴")也都是局部小范畴.

良效范畴(well powered category)　即"局部小范畴".

商范畴(对关系的)(quotient category(for a relation))　代数系的商代数系及局部化的高度推广. 若 $\mathscr{C}$ 为一个范畴,二元关系 R 对 $\mathscr{C}$ 中任两个对象 A,B 的态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ 都给出一个二元关系 $R_{A,B}$,则必有一个范畴 $\mathscr{C}/R$(其对象类仍为 $\mathscr{C}$ 的对象类),以及一个函子 $Q=Q_R:\mathscr{C}\to\mathscr{C}/R$ 使:

1. 若 $f,f'\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ 且 $fR_{A,B}f'$,则 $Qf=Qf'$.

2. 若 $\mathscr{D}$ 为一个范畴,$H:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 是一个使 $fR_{A,B}f'$ 蕴含着 $Hf=Hf'$ 的函子,则有惟一的函子 $H':\mathscr{C}/R\to\mathscr{D}$ 使 $H'\circ Q=H$.

3. 函子 Q 关于对象是满单的.

由二元关系 R 必可诱导一个使 $R\subset R'$ 的最小的二元关系 R',使对任意的 A,B,R'_{AB} 都是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ 上的等价关系. 于是按 $R'_{A,B}$ 可得商集 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)/R'_{A,B}$. $\mathscr{C}/R$ 关于 A,B 的态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}/R}(A,B)$ 就取为 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(A,B)/R'_{A,B}$,态射合成按显见的方式定义,这样得出的范畴 $\mathscr{C}/R$ 称为范畴 $\mathscr{C}$(关于 R)的商范畴. 例如取 $\mathscr{C}=\mathscr{T}\mathrm{op}$(对象为拓扑空间,态射为连续映射),取 R 为同伦关系,则得 $\mathscr{C}$ 的商范畴 $\mathscr{C}/R$,它以拓扑空间 $A,B,\cdots$ 为对象,而 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}/R}(A,B)$ 则为 A 到 B 的连续映射之同伦类的集合. 对局部小的阿贝尔范畴 A,若 B 为 A 的塞尔子范畴,则可按下法定义一个范畴 A/B,其对象类即 A 的对象类;其态射集(对任意的对象 A,B)定义为

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{A/B}}(A,B)=\varinjlim_{\substack{A/A'\in\mathsf{B}\\ B'\in\mathsf{B}}}\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(A',B/B'),$$

其中,$\varinjlim$ 表集范畴中的正向极限,态射合成按显见方式定义. 这个范畴 A/B 就称为 A 关于 B 的商范畴. A/B 仍为一个阿贝尔范畴.

具体范畴(concrete category)　一种常用的重要范畴. 对象都是集合的范畴称为具体范畴,可以看成 $\mathscr{S}\mathrm{et}$(集合范畴)的子范畴,代数学中的常用范畴都是具体范畴. 用函子语言也可说,具体范畴是到 $\mathscr{S}\mathrm{et}$ 有一个忘却函子的范畴.

始对象(initial object)　范畴论的基本概念之一. 指在范畴论中起着特殊作用的一类对象,是终对象的对偶概念,它们都是零对象的推广. 设 $\mathscr{C}$ 为范畴,$A\in\mathscr{C}$. 若对一切 $B\in\mathscr{C}$,$\mathrm{Hom}(A,B)$ 都只有一个元素,则称 A 为范畴 $\mathscr{C}$ 的始对象. $\mathscr{C}$ 的任何两个始对象必是等价(同构)的. 例如,阿贝尔群范畴的始对象为 0(零群).

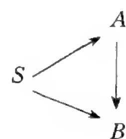
终对象(final object)　范畴论的基本概念之一. 指在范畴中起着特殊作用的一种对象,是始对象的对偶概念. 设 $\mathscr{C}$ 为范畴,$B\in\mathscr{C}$. 若对一切 $A\in\mathscr{C}$,$\mathrm{Hom}(A,B)$ 都只有一个元素,则称 B 为范畴 $\mathscr{C}$ 的终对象. $\mathscr{C}$ 的任何两个终对象必是等价(同构)的. $\mathscr{C}$ 的始(终)对象是 $\mathscr{C}^{\circ}$($\mathscr{C}$ 的对偶范畴)的终(始)对象. 例如,阿贝尔群范畴的终对象为 0(零群).

零对象(zero object)　一个特殊的对象. 它在范畴论中起着特别重要的作用. 一个范畴中同时为始对象与终对象的对象称为零对象. 一般地,一个范畴的零对象(始对象、终对象)未必存在,但对一些常用范畴,如预加性范畴(因此对加性范畴、阿贝尔范畴)是有零对象的. 若一个范畴的零对象存在,则在等价意义下是惟一的. 例如,零群 0 为阿贝尔范畴的惟一零对象.

子对象(subobject)　子代数系概念的推广. 它是商对象的对偶概念. 设 A,B 为范畴 $\mathscr{C}$ 的两个对象,若有单态射 $i:A\to B$,则称 A 为 B 的子对象. 例如在环范畴中,环 R 的子环 S 为 R 的子对象.

商对象(quotient object)　商代数系概念的推广. 它是子对象的对偶概念. 设 A,B 为范畴 $\mathscr{C}$ 的两个对象. 若有满态射 $\pi:A\to B$,则称 B 为 A 的商对象. 例如在环范畴中,若 $\pi:R\to S$ 为环的满同态,则 $\ker\pi$ 为 R 的理想且 $S\cong R/\ker\pi$,即 S 在同构意义下为 R 的商环. 用范畴语言讲,即 S 为 R 的商对象.

自由对象(free object)　自由代数系(如自由群、自由模等)概念在范畴论中的推广. 设 $\mathscr{C}$ 为一个具体范畴(即对象都是集合的范畴),S 为一个集合. 构作一个新范畴 $(S,\mathscr{C})$,其对象为集合映射 $f:S\to A$,$A\in\mathscr{C}$;其态射定义为可换图的 $\mathscr{C}$ 中态射 $A\to B$;其态射合成用自然的方式定义. 这个范畴 $(S,\mathscr{C})$ 的始对象称为范畴 $\mathscr{C}$ 关于集合 S 的自由对象. 由始对象性质知 $\mathscr{C}$ 关于 S 的自由对象在等价意义下若存在则必惟一.



投射对象(projective object)　环模范畴中投射模概念的推广. 它与内射对象是对偶的概念. 设 A 为范畴 $\mathscr{C}$ 的一个对象,若对 $\mathscr{C}$ 中的任意满态射 $f:X\to Y$ 诱导的集合映射 $\mathrm{Hom}(A,X)\to\mathrm{Hom}(A,Y)$ 都是满射,则称 A 为 $\mathscr{C}$ 的投射对象.

内射对象(injective object)　环模范畴中内射模概念的推广. 它是投射对象的对偶概念. 设 A 为范畴 $\mathscr{C}$ 的一个对象,若对 $\mathscr{C}$ 中任意的单态射 $f:X\to Y$,诱导的集合映射 $\mathrm{Hom}(Y,A)\to\mathrm{Hom}(X,A)$ 都是单射,则称 A 为 $\mathscr{C}$ 的内射对象.

单态射(monic morphism)　集合范畴 Set 中单射概念的推广. 它与满态射是互为对偶的概念. 范畴 $\mathscr{C}$ 中的态射 $f:A\to B$,若有左可消性质,即对使态射

合成有意义的态射 u,v，由 $fu=fv$ 可断定 $u=v$，则称 f 为 $\mathscr{C}$ 中的单态射. 若 gf 为单态射，则 f 必为单态射；单态射的合成仍为单态射；单位态射必为单态射，甚至左可逆态射也是单态射.

满态射(epic morphism)　集合范畴中满射概念的推广. 它是单态射的对偶概念. 范畴 $\mathscr{C}$ 中的态射 $f:A\to B$，若有右可消性质，即由态射合成 $uf=vf$ 可断定 $u=v$，则称 f 为 $\mathscr{C}$ 中的满态射. 若 fg 为满态射，则 f 为满态射；满态射的合成仍为满态射；单位态射必是满态射，甚至右可逆态射也是满态射. 在群范畴中满态射即满同态；在环范畴中满同态为满态射，但反之不真.

双态射(bimorphism)　集合范畴中双射概念的推广. 在范畴中同时为单态射与满态射的态射称为双态射. 换言之，双态射即满足左可消与右可消的态射. 在群范畴与阿贝尔群范畴等范畴中，双态射就是满单同态(同构). 单位态射一定是双态射，但反之一般不真. 在阿贝尔范畴中双态射即单位态射.

单位态射(unit morphism)　亦称可逆态射. 集合范畴中单位映射(可逆映射)概念的推广. 设 $f:A\to B$ 为范畴 $\mathscr{C}$ 中的态射. 若有态射 u 使 $uf=\varepsilon_A$(A 上的恒等态射)，则称 f 为左可逆态射，称 u 为 f 的左逆态射. 若有态射 v 使 $fv=\varepsilon_B$，则称 f 为右可逆态射，称 v 为 f 的右逆态射. 若 f 同时为左可逆态射与右可逆态射，就称 f 为单位态射. 当 f 是单位态射时，上述的 $u=v$. 因此单位态射又称为等价态射.

可逆态射(invertible morphism)　即“单位态射”.

态射的核(kernel of a morphism)　群论中同态核概念的推广(不过在群论中同态核是一个正规子群，而在群范畴中则是指此正规子群及其在群中的嵌入同态). 态射的核是态射的上核之对偶概念. 设范畴 $\mathscr{C}$ 有零对象(因而有零态射 0)，$f\in\mathrm{Hom}(A,B)$. 所谓 f 的核 $\ker f$，是指 $\mathscr{C}$ 的一个对象 K 与一个态射 $\eta\in\mathrm{Hom}(K,A)$ 组成的对 (K,η)，它满足：

1. η 为单态射.
2. $f\eta=0$.
3. 对任何 $g\in\mathrm{Hom}(D,A)$，只要 $fg=0$ 就必有 $\tau\in\mathrm{Hom}(D,K)$ 使 $\eta\tau=g$ (条件 1 可去掉，但在 3 中须强调“必有惟一的 τ”).

若 f 的核存在，则在等价意义下是惟一的. 有时为强调态射也可不提 K 而称 η 为 f 的核. 因此，单态射的核是零态射 0，零态射的核是单位态射.

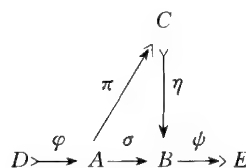
态射的上核(cokernel of a morphism)　群论中同态的上核概念的推广(不过，在群论中同态的上核是指一个商群，而在群范畴中是指此商群及群到此商群的满同态). 态射的上核是态射的核的对偶概念. 设范畴 $\mathscr{C}$ 有零对象(因而有零态射 0)，$f\in\mathrm{Hom}(A,B)$. 所谓 f 的上核 $\mathrm{coker}\,f$，是指 $\mathscr{C}$ 的一个对象 W 与一个态射 $\pi\in\mathrm{Hom}(B,W)$ 组成的对 (W,π)，它满足：

1. π 是满态射.
2. $\pi f=0$.
3. 对任何的 $g\in\mathrm{Hom}(B,C)$，只要 $gf=0$ 就必有 $\tau\in\mathrm{Hom}(W,C)$ 使 $\tau\pi=g$ (条件 1 可去掉，但在条件 3 中须强调“必有惟一的 τ”).

在等价意义下，f 的上核如存在必惟一. 有时为强调态射也可不提 W 而称 π 为 f 的上核，且记为 $\mathrm{coker}\,f=\pi$. 因此，满态射的上核是零态射 0，零态射的上核是单位态射.

态射的像(image of a morphism)　群论中同态像概念在阿贝尔范畴中的推广. 由阿贝尔范畴的定义可知：加性范畴 $\mathscr{C}$ 为阿贝尔范畴的充分必要条件是对任一态射 $\sigma\in\mathrm{Hom}(A,B)$，都有如下的可换图，其中 $\twoheadrightarrow$ 表满态射，$\rightarrowtail$ 表单态射，

$\varphi=\ker$,
$\sigma=\ker\pi$,
$\psi=\mathrm{coker}\,\sigma=\mathrm{coker}\,\eta$,
$\eta=\ker\psi$,
$\pi=\mathrm{coker}\,\varphi$.



对阿贝尔范畴 $\mathscr{C}$，这里的 (C,η) 称为 σ 的像，记为 $\mathrm{Im}\,\sigma=(C,\eta)$，有时也称 η 为 σ 的像，记为 $\mathrm{Im}\,\sigma=\eta$. 若 $\mathscr{C}$ 为群范畴，在同构意义下，C 就是群同态 σ 的像，也就是说，(C,η) 为 σ 的像. 可对偶地定义态射的上像. 对一般的范畴 $\mathscr{C}$ 可如下定义 $\mathscr{C}$ 中态射 $f:X\to Y$ 的像：若有 Y 的子对象 Y' 与单态射 $g:Y'\to Y_1$，使有态射 $\pi:X\to Y'$ 满足 $f=g\pi$，且对 Y 任意的子对象 Y_1 与单态射 $g_1:Y_1\to Y$，使有态射 $\pi_1:X\to Y_1$ 满足 $f=g_1\pi_1$，则必有态射 $h:Y'\to Y$ 使 $g_1h=g$. 此时称 (Y',g) 为态射 $f:X\to Y$ 的像. 值得注意的是，这样定义的像未必存在. 若在一个范畴中，每一个态射都有(按此定义的)像，则称此范畴为带像范畴. 阿贝尔范畴是带像范畴，此时本条目中两种定义是一致的.

带像范畴(category with images)　见“态射的像”.

态射的上像(coimage of a morphism)　态射的像的对偶概念，可由态射的像之定义对偶地给出其定义(参见“态射的像”).

零态射(zero morphism)　有零对象的范畴中的一类特殊态射. 许多常见范畴，如群范畴、环范畴、环模畴等，将它们的零同态概念抽象出来即得零态射的概念，它在范畴论中起着相当重要的作用. 设范畴 $\mathscr{C}$ 有零对象(在等价意义下必惟一)Z，$\mathrm{Hom}(A,Z)$ 与 $\mathrm{Hom}(Z,B)$ 的惟一元素分别为 0_{AZ} 和 0_{ZB}. 其合成 $0_{ZB}0_{AZ}$ 不随 Z 的选择而改变，记此合成为 0_{AB}，称

为 Hom(A,B)中的零态射. 对取定的 A,B,这是惟一的. 有时也简记为 0.

等价态射(equivalent morphism)　亦称同构态射. 它是群论、环论、模论中同构概念的推广. 因此也简称同构. 在范畴中可用它们将其对象类分成等价类进行研究,因此起着重要的作用. 设 $\mathscr{C}$ 为范畴, $\sigma \in \mathrm{Hom}(A,B)$,若有 $\tau \in \mathrm{Hom}(B,A)$使 $\tau\sigma=\varepsilon_A$ 且 $\sigma\tau=\varepsilon_B$(ε 表恒等态射),则 σ,τ 都称为等价态射且互称为逆态射. 此时称对象 A,B 为等价的. 等价态射一定是单位态射,反之亦然. 等价态射之逆是惟一的.

同构态射(isomorphism)　即"等价态射".

逆态射(inverse morphism)　见"等价态射".

等价对象(equivalent objects)　见"等价态射".

对偶原则(范畴)(duality principle (category))　射影几何中对偶原则在范畴论中的推广与移植. 是一种严格的(有效的)对偶翻译. 在范畴论中常可用对偶的方法将一些命题中的概念翻译成其对偶概念(如单态射与满态射、核与上核、始对象与终对象、内射对象与投射对象等都是对偶概念)得出新的论述. 有时也可由已知命题的证明得出其对偶命题的证明. 将这种翻译的方法上升到理论即得对偶原则. 对偶原则在范畴论中(以及在同调代数等学科中)是十分重要的,由它常可将一个概念变成两个概念,一条命题变成两条命题. 用对偶原则作对偶翻译所得的命题总是成立的,不必再证明. 设 S 是一句对任何范畴(或至少对一类范畴)都有意义的陈述(说明一个概念、提出一个命题等). 将 S 引用于范畴 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{C}^\circ$($\mathscr{C}$ 的对偶范畴)上即得两个关于 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{C}^\circ$的陈述$S(\mathscr{C})$与 $S(\mathscr{C}^\circ)$. 最后将 $S(\mathscr{C}^\circ)$对偶翻译成一个关于 $\mathscr{C}$ 的陈述,即 $S(\mathscr{C}^\circ)$中 $\mathscr{C}^\circ$的态射都换成 $\mathscr{C}$ 的相应态射(箭头改号:如 $A^\circ \to B^\circ$换成 $B \to A$),有关概念都换成其对偶概念,则得到陈述 $S^\circ(\mathscr{C})$,它是 $S(\mathscr{C})$的对偶陈述. 若$S(\mathscr{C})$说明一个概念,则$S^\circ(\mathrm{C})$说明其对偶概念;若$S(\mathscr{C})$为一个命题,则$S^\circ(\mathscr{C})$是其对偶命题;若 S 是一条对 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{C}^\circ$都已证明的定理,则$S^\circ(\mathscr{C})$也是一条定理,不必再证明. 这就是对偶原则.

阿贝尔范畴中的正合列(exact sequence in an Abelian category)　群论、模论中正合列概念的推广. 若阿贝尔范畴 $\mathscr{C}$ 中有态射列

$$\cdots \to A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\tau} C \to \cdots,$$

若 $\mathrm{Im}\,\sigma=\ker\tau$,则称此列在 B 处正合. 若上列之每一个非端点处都正合,则称它为 $\mathscr{C}$ 中的一个正合列. 特别地,若 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 在 B,C 处正合,则称为右正合列;若在 A,B 处正合,则称为左正合列;若在 A,B,C 处都正合,则称为短正合列. 短正合列也常记为形如 $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$. 这是范畴论、同调代数、模论中常用的正合列.

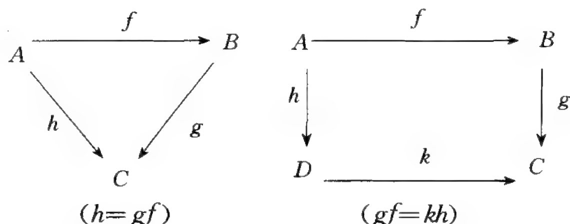
短正合列(short exact sequence)　见"阿贝尔范畴中的正合列".

范畴论中的 3 引理(3-Lemma in Category theory)　亦称短 5 引理. 是模论中 3 引理对阿贝尔范畴的推广,有着重要作用. 若阿贝尔范畴 $\mathscr{C}$ 中有下列的态射可换图,其中两行都是短正合列,则 φ 与 ψ 都是单(满)态射时,f 也是单(满)态射;而且 φ 与 ψ 都是单位态射时,f 也是单位态射. 这就是范畴论中的3 引理.

$$\begin{array}{ccccc} A & \stackrel{\sigma}{\rightarrowtail} & B & \stackrel{\tau}{\twoheadrightarrow} & C \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ A' & \stackrel{\sigma'}{\rightarrowtail} & B' & \stackrel{\tau'}{\twoheadrightarrow} & C' \end{array}$$

短 5 引理(short 5-lemme)　即"范畴论中的 3 引理".

范畴中的可换图(commutative diagram in a category)　近世代数中可换图的推广. 它是范畴论中一种方便的语言与论证工具. 设 $\mathscr{C}$ 为范畴,若一个由 $\mathscr{C}$ 中态射组成的图中(对象作结点、端点),从任一对象出发沿任何不同路线(顺着态射的箭头方向)达到任何对象的合成态射都相等,则称此图为 $\mathscr{C}$ 中的可换图. 最常见的可换图有



$(h=gf)$　　$(gf=kh)$

或由它们组合而成的更复杂的可换图.

格罗腾迪克范畴(Grothendieck category)　一类特殊的阿贝尔范畴. 它是一类在代数中常用的范畴. 若 $\mathscr{C}$ 为阿贝尔范畴,称 $\mathscr{C}$ 为一个格罗腾迪克范畴. 如果它满足如下条件:

1. $\mathscr{C}$ 有一个生成子.

2. 在 $\mathscr{C}$ 中直和(上积)总是存在的.

3. 对 $\mathscr{C}$ 中的任意对象 A,A 的子对象 B,以及 A 的正向子对象类$\{A_i\}_{i\in I}$,必有

$$\Big(\sum_{i\in I} A_i\Big) \cap B = \sum_{i\in I}(A_i \cap B),$$

其中$\sum$表示子对象之求和.

例如环 R 上的(左)模范畴就是一个格罗腾迪克范畴.

商范畴(对子范畴的)(quotient category for a subcategory)　代数系的商代数系(如环的商环)及局部化(如环的局部化)的高度推广. 若 A 为一个局部小的阿贝尔范畴,B 为 A 的一个塞尔子范畴,则可定义一个范畴 A/B,其对象类即 A 的对象类,其态

射集按下法定义：对 A 中的任意对象 A,B，记

$$I=\{\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(A',B/B')\mid A'\subseteq A,\ B'\subseteq B, A/A',B'\in\mathsf{B}\}$$

为 A 中态射集的一个子类. 若 $A'\supseteq A''$ 且 $B'\subseteq B''$，则称 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(A',B/B')\leqslant\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(A'',B/B'')$. 这就给出 I 上的一个拟序. 对任意的 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(A',B/B')$ 与 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(A'',B/B'')$，有 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(A',B/B')$，$\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(A'',B/B'')\leqslant\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(A'\cap A'',B/(B'+B''))$. 因此 I 上的拟序是有向的. 定义 A/B 中对象 A,B 的态射集为

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{A/B}}(A,B)=\varinjlim_{\substack{A/A'\in\mathsf{B}\\ B'\in\mathsf{B}}}\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(A',B/B'). \quad (*)$$

再按下法定义 A/B 中态射的合成：任取 $\bar f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{A/B}}(A,B)$，$\bar g\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{A/B}}(B,C)$，从 $(*)$ 知，$\bar f$ 由使 $A'\subseteq A,B'\subseteq B,A/A',B'\in\mathsf{B}$ 的一些 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(A',B/B')$ 确定，$\bar g$ 由使 $B''\subseteq B,C'\subseteq C,B/B'',C'\in\mathsf{B}$ 的一些 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(B'',C/C')$ 确定. 若 $A''=f^{-1}((B''+B')/B')$，则 $A/A''\in\mathsf{B}$ 且 f 诱导一个 $f'\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(A'',(B''+B')/B')$. 若 $C''/C'=g(B''\cap B')$ 则 $C''\in\mathsf{B}$，且 g 诱导一个

$$g'\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(B''/(B''\cap B'),C/C'').$$

注意阿贝尔范畴必是正合范畴，于是有

$$(B''+B')/B'\xrightarrow[\tau]{\cong}B''/(B''\cap B').$$

记 $h=g'\circ\tau\circ f'$（按 A 中态射的合成）. 再由 A/A''，$C''\in\mathsf{B}$ 知这些 h 按 $(*)$ 确定一个惟一的 $\bar h\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{A/B}}(A,C)$. 定义 $\bar g\circ\bar f=\bar h$，即给出 A/B 中态射的合成法则，于是 A/B 为一个范畴，称为范畴 A 对 B 的商范畴，它也是一个阿贝尔范畴. 在 A 与 A/B 间存在一个函子 T：A→A/B 使对任意的对象 $A\in\mathsf{A}$，$TA=A$；对任意的 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(A,B)$，记 A 中对应于 $A'\subseteq A$ 与 $B'\subseteq B$ 的态射各为 $i_{A'}^{A}:A'\to A$，$p_{B/B'}:B\to B/B'$. 若 $f_0:A'\to B$ 为 f 诱导的态射，则 $p_{B/B'}\circ f_0\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(A',B/B')$，由此按 $(*)$ 得到一个惟一的 $\bar f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{A/B}}(A,B)$. 若规定 $Tf=\bar f$，则 T 为一个正合函子，称为 A 到 A/B 的标准函子. 若 T 有右伴随函子 S：A/B→A，则在等价意义下必是惟一的，此时称 S 为截面函子，而称 B 为 A 的局部化子范畴，ST：A→A 则称为局部化函子.

标准函子(canonical functor)　见“商范畴(对子范畴的)”.

截面函子(section functor)　见“商范畴(对子范畴的)”.

局部化子范畴(localizing subcategory)　见“商范畴(对子范畴的)”.

局部化函子(localizing functor)　见“商范畴(对子范畴的)”.

子对象的交(intersection of subobjects)　代数系交与集合交的推广. 设 $\{A_i\}_{i\in I}$ 为范畴 $\mathscr{C}$ 中对象 A 的一个子对象簇，若有单态射 $A_i\to A_j$，则规定 $A_i\leqslant A_j$. 当正向极限 $\varinjlim_I A_i$ 存在时，称 $\varinjlim_I$ 为 $\{A_i\}_{i\in I}$ 之交，记为 $\bigcap_{i\in I}A_i$. 在正合范畴(如阿贝尔范畴)中，$\bigcap_{i\in I}A_i$ 总是存在的.

子对象的和(sum of subobjects)　代数系和与集合并的推广. 设 $\{A_i\}_{i\in I}$ 为范畴 $\mathscr{C}$ 中对象 A 的一个子对象簇，$u_i:A_i\to A$ 为相应的单态射. 若 A 有一个子对象 A'，$u:A'\to A$ 为相应的单态射，使得：对任意单态射 $w_i:A_i\to A'$ 必有 $u_i=u\circ w_i$；同时对 $\mathscr{C}$ 中任意态射 $f:A\to B$，存在 $\mathscr{C}$ 中对象 B' 与单态射 $\lambda:B'\to B$，以及态射 $f_i':A_i\to B'$ 使 $f\circ u_i=\lambda\circ f_i'$，同时存在态射 $f':A'\to B'$ 使 $f\circ u=\lambda\circ f'$，则称 A' 为 $\{A_i\}_{i\in I}$ 之和，记为 $\sum_{i\in I}A_i$ 或 $\bigcup_{i\in I}A_i$（此时也称之为 $\{A_i\}_{i\in I}$ 之并）. 在同构(等价)意义下它是由 $\{A_i\}_{i\in I}$ 惟一确定的. 在正合范畴中(因此在阿贝尔范畴中) $\sum_{i\in I}A_i$ 总是存在的. 此外，对阿贝尔范畴，若 A_1,A_2 都是 A 的子对象，则有同构(等价)

$$(A_1+A_2)/A_1\cong A_2/(A_1\cap A_2).$$

子对象的并(union of subobjects)　即“子对象的和”.

范畴生成子(generator of a category)　范畴的一个特殊对象. 范畴 $\mathscr{C}$ 中使 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,-)$ 为忠实函子的对象 A 称为它的一个生成子. 换句话说，对任意的 $\mathscr{C}$ 中对象 X,Y，若 $f_i\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$，$i=1,2$，且 $f_1\neq f_2$，则必有 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,X)$ 使 $f_1\circ g\neq f_2\circ g$，这时就称 A 为 $\mathscr{C}$ 的一个生成子. 对偶地可定义上生成子的概念，即 $\mathscr{C}$ 中使 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(-,A)$ 为忠实函子(即对上述的 $f_1\neq f_2$，必有 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,A)$ 使 $g\circ f_1\neq g\circ f_2$)的对象 A 称为它的一个上生成子. A 为 $\mathscr{C}$ 的上生成子等价于 A 为 $\mathscr{C}$ 的对偶范畴 $\mathscr{C}^{\circ}$ 的生成子.

范畴上生成子(cogenerator of a category)　见“范畴生成子”.

函子(functor)　范畴间的一类特殊映射. 有些问题中需研究两个范畴间的联系或通过这种联系由一个范畴的性质来推断另一范畴的性质，这就引出函子的概念. 函子可看成范畴间的变换或同态，在范畴论中起着重要作用. 若 $\mathscr{C},\mathscr{C}'$ 为两个范畴，$F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ 使：

1. $\mathscr{C}$ 的对象都变成 $\mathscr{C}'$ 的对象，即 $\forall A\in\mathscr{C}$，$F(A)\in\mathscr{C}'$；

2. $\forall\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$，$\sigma$ 都被 F 变成

$$F(\sigma)\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}'}(F(A),F(B));$$

3. $F(\sigma\tau)=F(\sigma)F(\tau)$ 对 $\mathscr{C}$ 中可合成态射 σ,τ 成立；

4. $F(\varepsilon_A)=\varepsilon_{F(A)}$，其中 ε 表恒等态射；

则称 F 为 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{C}'$ 的一个共变函子(亦称协变函子).若上述条件1,4不变而条件2,3分别改为:

2′. $\forall\ \sigma\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$,有

$F(\sigma)\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}{}'(F(B),F(A))$;

3′. $F(\sigma\tau)=F(\tau)F(\sigma)$;

则称为 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{C}'$ 的一个反变函子(亦称逆变函子).共变函子与反变函子又统称为函子.但有时也将共变函子简称函子.

共变函子(covariant functor)　见"函子".

协变函子(covariant functor)　见"函子".

反变函子(contravariant functor)　见"函子".

逆变函子(contravariant functor)　见"函子".

恒等函子(identity functor)　亦称单位函子.一个范畴到自身的恒等变换.若 $\mathscr{C}$ 为一个范畴,函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ 使 $\mathscr{C}$ 的每个对象都变成自己,也使 $\mathscr{C}$ 中的任意态射变到自己,则称 F 为 $\mathscr{C}$ 上的恒等函子,常记为 $I_{\mathscr{C}}$.

单位函子(identity functor)　即"恒等函子".

遗忘函子(forgetful functor)　亦称忘却函子或基础函子.一类重要的函子.在拓扑空间范畴的研究中有时只需考虑其中的集合性质,即,将其每个对象看做一个集合(基础集),连续映射看做一个集映射.这就给出拓扑空间范畴到集合范畴的一个函子,称为遗忘函子.一般地,对一个具体范畴 $\mathscr{C}$(其对象都是集合)也可同样处理,即遗忘掉 $\mathscr{C}$ 的其他结构只考虑集合性质,这样也得到 $\mathscr{C}$ 到集合范畴的遗忘函子.例如环范畴中的每一对象(环)只看做一个集合,环同态只看做集映射,即遗忘掉环结构,则得环范畴到集合范畴的遗忘函子.

忘却函子(forgetful functor)　即"遗忘函子".

基础函子(underlying functor)　即"遗忘函子".

全函子(full functor)　一类重要的函子.设 F 为范畴 $\mathscr{C}$ 到范畴 $\mathscr{C}'$ 的函子,若

$$F(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)) = \mathrm{Hom}_{C'}(F(A),F(B)),$$

$\forall\ A,B\in\mathscr{C}$,即 F 关于态射为满射,则称 F 为 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{C}'$ 的全函子.对偶地,若反变函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ 满足

$$F(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(B),F(A)),$$

$\forall\ \mathscr{A},\mathscr{B}\in\mathscr{C}$,则称 F 为 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{C}'$ 的反变全函子.若范畴 $\mathscr{C}$ 的子范畴 $\mathscr{D}$ 到 $\mathscr{C}$ 的包含函子 I 为全函子,则 $\mathscr{D}$ 为 $\mathscr{C}$ 的全子范畴.

反变全函子(contravariant full functor)　见"全函子".

包含函子(inclusion functor)　包含映射的推广.它一种嵌入函子.若 $\mathscr{C}'$ 为范畴 $\mathscr{C}$ 的子范畴,可用显见方式定义一个函子 $I:\mathscr{C}'\to\mathscr{C}$(使 $I(A)=A$, $I(f)=f$),则称这个函子 I 为包含函子.

忠实函子(faithful functor)　亦称信守函子.是全函子的对偶概念.设 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 为函子,若 $\tau,\sigma\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$, $\tau\neq\sigma$,必 $F(\tau)\neq F(\sigma)$,则称 F 为 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的忠实函子.类似地可定义反变忠实函子.包含函子当然是忠实函子,嵌入函子也是忠实函子.

信守函子(faithful functor)　即"忠实函子".

反变忠实函子(contravariant faithful functor)　见"忠实函子".

嵌入函子(embedding functor)　一类特殊的忠实函子.关于态射及对象都是单射的函子,即变不同对象为不同对象的忠实函子.包含函子当然是嵌入函子.

函子泛元素(universal element of a functor)　范畴论的基本概念之一.是定义可表示函子的一个中间概念.设 F 为范畴 $\mathscr{C}$ 到集合范畴 Set 的一个函子,若 $X\in\mathscr{C}$ 及 $x\in F(X)$ 满足如下泛性质:对任意 $Y\in\mathscr{C}$ 及任意 $y\in F(Y)$,恰有惟一的态射 $f:X\to Y$ 使 $F(f)(x)=y$,则称 (X,x) 为函子 F 的一个泛元素.当省略对象 X 而不会产生混淆时,也称 x 为 F 的泛元素.若 F 的泛元素存在,则在等价意义下是惟一的.类似地,可定义反变函子 $G:\mathscr{C}\to\mathscr{S}et$ 的泛元素.例如,取 $\mathscr{C}$ 为可换环 R 上的模范畴, M,N 为 R 模,若取 F 为将任一 R 模 T 变成 $M\times N$ 到 T 的双线性映射的集合之函子,则 $M\otimes N$ 即为 F 的泛元素.

可表示函子(representable functor)　两范畴间的一类特殊函子.有泛元素的函子.设 F 为范畴 $\mathscr{C}$ 到集合范畴 $\mathscr{S}et$ 的一个函子,若 F 有泛元素,则称 F 为可表示函子.对偶地,可以定义可表示反变函子.

对偶函子(dual functor)　对偶范畴间的一个显见函子.即刻画范畴 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{C}^{\circ}$ 间关系的一个标准函子.设 $\mathscr{C}$ 为一个范畴, $\mathscr{C}^{\circ}$ 为其对偶范畴.若定义 $D(X)=X^{\circ}=X$, $\forall\ X\in\mathscr{C}$,且对 $\mathscr{C}$ 中任意态射 $f:A\to B$ 定义 $D(f):D(B^{\circ})\to D(A^{\circ})$($\mathscr{C}^{\circ}$ 中),则 $D:\mathscr{C}\to\mathscr{C}^{\circ}$ 为反变函子,称为对偶函子. $\mathscr{C}^{\circ}$ 到 $\mathscr{C}$ 的对偶函子也常记为 D°.

表示函子(representative functor)　一种特殊的函子.它是对于对象具有满射性质的函子.设 F 为范畴 $\mathscr{C}$ 到范畴 $\mathscr{D}$ 的函子,若对任意的 $B\in\mathscr{D}$,都有 $A\in\mathscr{C}$,使 $F(A)$ 等价于 B,则称 F 为表示函子.例如,若 F 为拓扑空间范畴到集合范畴的遗忘函子,则 F 为一个表示函子.对一般的具体范畴,遗忘函子也是表示函子.

常函子(constant functor)　亦称对角函子.一个特殊的函子.设 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ 为函子, $B\in\mathscr{C}'$,若对任意的 $A\in\mathscr{C}$, $F(A)=B$,对任意的 $\mathscr{C}$ 中态射 $f:X\to Y$, $F(f)=\varepsilon_B$(B 上的恒等态射),则称 F 为 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{C}'$(关于 B)的常函子.

对角函子(diagonal functor) 即"常函子".

二元函子(bifunctor) 范畴论以及同调代数、代数几何等学科中常用的函子. 若 $\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2,\mathscr{C}$ 为三个范畴,则从 $\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2$ 的积范畴 $\mathscr{C}_1\prod\mathscr{C}_2$ 到 $\mathscr{C}$ 的函子称为二元函子. 同调代数中最重要的 Hom 函子、$\otimes$函子等都是二元函子.

积范畴(product category) 范畴论的基本概念之一. 指由一些范畴组成的新范畴. 设$\{\mathscr{C}_\lambda\}$,$\lambda\in\Lambda$ 为一个范畴集合,由它们可作出一个新范畴 $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{C}_\lambda$. 即,记$(\cdots,A_\lambda,\cdots)$为 $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{C}_\lambda$的对象,其中 $A_\lambda\in\mathscr{C}_\lambda$,规定其态射集为

$$\mathrm{Hom}_{\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{C}_\lambda}((\cdots,A_\lambda,\cdots),(\cdots,B_\lambda,\cdots)) = \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_\lambda}(A_\lambda,B_\lambda)$$

(右端的$\prod$表集合的直积,即"笛卡儿积"),规定其态射合成为各分量中态射的合成,即

$$(\cdots,f_\lambda,\cdots)(\cdots,g_\lambda,\cdots)=(\cdots,f_\lambda g_\lambda,\cdots).$$

这样得到的范畴 $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{C}_\lambda$ 称为$\{\mathscr{C}_\lambda\}$的积范畴. 其恒等态射为 $\varepsilon_{(\cdots,A_\lambda,\cdots)}=(\cdots,\varepsilon_{A_\lambda},\cdots)$.

全忠实函子(full faithful functor) 一种特殊的函子. 它是关于态射变元为满单射的函子. 若函子 F 是全函子也是忠实函子,则称 F 为全忠实函子.

加性函子(additive functor) 范畴论与同调代数中常用的一类函子,即保持态射加法的函子,它只对加性范畴才有意义. 设 F 为加性范畴 $\mathscr{C}$ 到加性范畴 $\mathscr{C}'$ 的函子,若对任意的 $A,B\in\mathscr{C}$ 及任意的 $f,g\in\mathrm{Hom}_C(A,B)$,恒有 $F(f+g)=F(f)+F(g)$,则称 F 为加性函子. 事实上,它是加法阿贝尔群 $\mathrm{Hom}\mathscr{C}$ 加性函子 (A,B) 到加法阿贝尔群 $\mathrm{Hom}\mathscr{C}'(F(A),F(B))$的群同态(注意加性范畴中的任两对象间的态射集都是加法阿贝尔群). 加性函子可用它的特征性质——"保持有限个对象的积(和)"来刻画. 对偶地可定义加性反变函子.

函子的自然变换(natural transformation of functors) 处理函子之间关系的一个重要概念. 由它可得出有用的可换图. 设 $F,G:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 为两个共变函子. 从 F 到 G 的一个自然变换 $h:F\to G$ 是指: $\forall\ A\in\mathscr{C}$ 有 $h(A)\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(A),G(A))$,使对 $\mathscr{C}$ 中任意的态射 $f:A\to B$,有 $G(f)h(A)=h(B)F(f)$. 即有可换图如右下.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{h(A)} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow{h(B)} & G(B) \end{array}$$

若自然变换 $h:F\to G$ 对任何 $A\in\mathscr{C}$,$h(A)$都是 $\mathscr{D}$ 中的等价态射,则 h 又称为函子 F 到 G 的自然等价,F,G 称为是自然等价的,记为 $F\approx G$ 或 $F\overset{h}{\approx}G$. 它可将 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的全体函子分成等价类. 在许多问题中,属同一个自然等价类的函子可不加区别,从而简化了函子的研究. 对自然变换也可定义其合成. 设 $h:F\to G$ 与 $k:G\to H$ 都是 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的函子间之自然变换,规定$(kh)(A)=k(A)h(A)$即得 h 与 k 的合成 kh,它是 F 到 H 的自然变换. 对偶地可定义反变函子间的自然变换与自然等价.

函子的自然等价 (natural equivalence of functors) 一种特殊的自然变换(参见"函子的自然变换").

等价范畴(equivalent categories) 范畴论的基本概念之一. 据此可将众多的范畴分成等价类,使同一个等价类的范畴具有丰富的共性. 设 $\mathscr{C},\mathscr{D}$ 为两个范畴,若有函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 与 $G:\mathscr{D}\to\mathscr{C}$ 使 $GF\approx I_{\mathscr{C}}$,$FG\approx I_{\mathscr{D}}$($\approx$表示自然等价),则称 $\mathscr{C},\mathscr{D}$ 为等价范畴,记为 $\mathscr{C}\approx\mathscr{D}$. 例如,一个对象组成的范畴等价于半群范畴,因此,半群范畴的研究常可归为一个对象之范畴的研究. 若上述的 F,G 满足更强的条件: $GF=I_{\mathscr{C}}$,$FG=I_{\mathscr{D}}$,则称 $\mathscr{C},\mathscr{D}$ 为同构范畴.

同构范畴(isomorphic categories) 一种特殊的等价范畴(参见"等价范畴").

伴随函子(对)(adjoint functor (pair)) 亦称相伴函子(对). 范畴论的基本概念之一. 它在同调代数等学科中有着重要应用. 该概念由坎(Kan,D. M.)于 1958 年提出. 设 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$,$G:\mathscr{D}\to\mathscr{C}$ 为两个函子. 若有自然等价$h(-,-):\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(G(-),-)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(-,F(-))$,其中 $h(-,-)$为集值二元映射(即,对$\forall\ A\in\mathscr{C},B\in\mathscr{D}$,$h(B,A):\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(G(B),A)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B,F(A))$为双射),则称 G 为 F 的左伴随函子,F 为 G 的右伴随函子,而(F,G)称为伴随函子(对). 例如,同调代数中的重要函子 $G=-\otimes B$ 与 $F=\mathrm{Hom}(B,-)$为伴随函子(对). 伴随函子对有着重要的性质,例如,当(F,G)为伴随函子对时,F 必是右正合的,G 必是左正合的.

相伴函子(对)(adjoint functor (pair)) 即"伴随函子(对)".

左伴随函子(left adjoint functor) 见"伴随函子(对)".

右伴随函子(right adjoint functor) 见"伴随函子(对)".

范畴论的 Hom 函子(functor Hom in Category theory) 亦称共变态射函子或第一表示函子. 范畴论中的重要函子之一,在同调代数中有着重要应用. 设 $\mathscr{C}$ 为一个范畴,$\mathscr{S}et$ 为集合范畴,对$\forall\ A\in\mathscr{C}$ 定义函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-):\mathscr{C}\to\mathscr{S}et$ 如下:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-)(X)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X)\ (\forall\ X\in\mathscr{C}),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-)(f):\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,Y),$$

使 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-)(f)(g)=fg$,$\forall\ f:X\to Y$ 在 $\mathscr{C}$ 中,$g\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X)$. 这个 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-)$称为范畴 $\mathscr{C}$

到 $\mathscr{S}et$ 的 Hom 函子. 当 $\mathscr{C}$ 为加性范畴时，这个函子又是 $\mathscr{C}$ 到阿贝尔群范畴 $\mathscr{A}G$ 的函子，在同调代数中更显出其重要性.

共变态射函子(covariant morphism functor) 即"范畴论的 Hom 函子".

第一表示函子(first representation functor) 即"范畴论的 Hom 函子".

范畴论的反变 Hom 函子(contravariant functor Hom in category theory) 亦称反变态射函子或第二表示函子. 是范畴论中的重要函子之一，也是同调代数中最基本的函子之一. 设 $\mathscr{C}$ 为一个范畴，$\mathscr{S}et$ 为集合范畴，定义反变函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,A):\mathscr{C}\to\mathscr{S}et$ 如下：

$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,A)(X)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A)$, $\forall\ X\in\mathscr{C}$,

$\mathrm{Hom}_{C}(-,A)(f)$: $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,A)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A)$ 使 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,A)(f)(g)=gf$, $\forall\ f:X\to Y$(在 $\mathscr{C}$ 中), $g\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,A)$. 这个 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,A)$ 称为 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{S}et$ 的反变 Hom 函子. 当 $\mathscr{C}$ 为加性范畴时，这个函子又是 $\mathscr{C}$ 到阿贝尔群范畴 $\mathscr{A}G$ 的反变函子，在同调代数中占重要地位.

反变态射函子(contravariant morphism functor) 即"范畴论中的反变 Hom 函子".

第二表示函子(second representation functor) 即"范畴论中的反变 Hom 函子".

正合函子(exact functor) 阿贝尔范畴间的一种重要的函子，即保持短正合列的函子. 设 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 为阿贝尔范畴间的一个共变函子. 若对 $\mathscr{C}$ 中任意的正合列

$$0\to A\xrightarrow{\alpha}B\xrightarrow{\beta}C,$$

有

$$0\to FA\xrightarrow{F\alpha}FB\xrightarrow{F\beta}FC$$

是 $\mathscr{D}$ 中的正合列，则称 F 为左正合函子. 若对 $\mathscr{C}$ 中任意的正合列

$$A\xrightarrow{\alpha}B\xrightarrow{\beta}C\to 0,$$

有

$$FA\xrightarrow{F\alpha}FB\xrightarrow{F\beta}FC\to 0$$

是 $\mathscr{D}$ 中的正合列，则称 F 为右正合函子. 同时为左正合与右正合的函子称为正合函子. 对偶地，可定义反变函子的左、右正合性与正合性. 若 F 为左(右)正合函子，则 F 变单(满)态射为单(满)态射且对任意的态射 β,

$$F(\ker\beta)\cong\ker F(\beta),$$

$$(F(\mathrm{coker}\beta)\cong\mathrm{coker}F(\beta)).$$

左、右正合函子一定是加性函子.

在同调代数的基本函子中(M 表 R 模), $\mathrm{Hom}(M,-)$为左正合函子(它正合的充分必要条件是 M 为投射 R 模); $\mathrm{Hom}(-,M)$为左正合反变函子(它正合的充分必要条件是 M 为内射 R 模); $M\otimes-$与$-\otimes N$(M 为右 R 模, N 为左 R 模)都是右正合函子(它们正合的充分必要条件是 $M(N)$为平坦 R 模)；阿贝尔范畴中正向极限函子$\varinjlim$(反向极限函子$\varprojlim$)为右(左)正合函子. 对二元函子 F，若 F 关于它的两个变元都是正合的(或左正合的、右正合的)，则称 F 为正合的(或左正合的、右正合的)二元函子.

正合反变函子(exact contravariant functor) 见"正合函子".

正合二元函子(exact bifunctor) 见"正合函子".

积(范畴论)(product (category theory)) 范畴论的基本概念之一. 在范畴论中积是上积的对偶概念，是模论中直积概念的推广，因此也称为直积. 设$\{A_\lambda\}$, $\lambda\in\Lambda$ 为范畴 $\mathscr{C}$ 的一个对象集. 若对象 A 与一态射集$\{\pi_\lambda|\pi_\lambda\in\mathrm{Hom}(A,A_\lambda)\}$具有如下泛性质：对任何 $C\in\mathscr{C}$ 与任何 $\sigma_\lambda\in\mathrm{Hom}(C,A_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$，必有惟一的 $f\in\mathrm{Hom}(C,A)$使对一切 $\lambda\in\Lambda$ 都有 $\pi_\lambda f=\sigma_\lambda$，则称$(A,\{\pi_\lambda\})$为$\{A_\lambda\}$的积，有时也称 A 为$\{A_\lambda\}$的积，记为 $\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$. 在等价意义下，若$\{A_\lambda\}$有积，则必惟一. 在 $\mathscr{C}$ 有零对象时，上述的 π_λ 一定都是满态射. 在加性范畴中，任何有限个对象一定有积. 积不但在代数学的一些范畴中有重要应用，对其他范畴也有很好的应用. 例如，若 $\mathscr{C}$ 的对象类为全体实数，$a\leqslant b$ 时定义$\mathrm{Hom}(a,b)=\varphi_{a,b}$, $a>b$ 时定义$\mathrm{Hom}(a,b)=\varnothing$(空集)，则$\{a_\lambda\}$之积即其下确界；若 $\mathscr{D}$ 为以自然数作为对象的范畴，当 a 整除 b 时定义 $\mathrm{Hom}(a,b)=\varphi_{ab}$，否则定义 $\mathrm{Hom}(a,b)=\varnothing$，则$\{a_\lambda\}$的积即$\{a_\lambda\}$的最大公约数.

直积(范畴论)(direct product (category theory)) 见"积(范畴论)".

上积(范畴论)(coproduct(category theory)) 范畴论的基本概念之一. 在范畴论中上积是积的对偶概念，是模论中直和概念的推广，因此也称直和或和. 设$\{A_\lambda\}$, $\lambda\in\Lambda$ 为范畴 $\mathscr{C}$ 的一个对象集. 若对象 $B\in\mathscr{C}$ 与一态射集$\{\eta_\lambda|\eta_\lambda\in\mathrm{Hom}(A_\lambda,B)\}$具有如下泛性质：对任何对象 $C\in\mathscr{C}$ 与任何 $\tau_\lambda\in\mathrm{Hom}(A_\lambda,C)$, $\lambda\in\Lambda$，必有惟一的 $g\in\mathrm{Hom}(B,C)$使对一切 $\lambda\in\Lambda$ 都有 $g\eta_\lambda=\tau_\lambda$，则称$(B,\{\eta_\lambda\})$为$\{A_\lambda\}$的上积. 有时也称 B 为$\{A_\lambda\}$的上积，记为 $\coprod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$. 在等价意义下，若存在$\{A_\lambda\}$的上积，则必惟一. 当 $\mathscr{C}$ 有零对象时，上述的 η_λ 一定都是单态射.

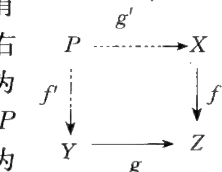
上积的应用不限于代数学中的一些范畴. 例如，若 $\mathscr{C}$ 的对象类为全体实数，$a\leqslant b$ 时规定 $\mathrm{Hom}(a,b)=\varphi_{ab}$，否则为空集，则$\{a_\lambda\}$的上积即$\{a_\lambda\}$的上确界；若 $\mathscr{D}$ 为自然数作对象的范畴，a 整除 b 时定义 $\mathrm{Hom}(a,b)=\varphi_{ab}$，否则为空集，则$\{a_\lambda\}$的上积即$\{a_\lambda\}$

的最小公倍数.

直和(范畴论)(direct sum(category theory)) 见"上积(范畴论)".

和(范畴论)(sum (category theory)) 见"上积(范畴论)".

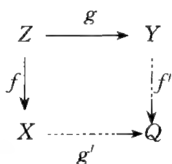
拉回(pullback) 范畴论的基本概念之一. 推出的对偶概念,是一种特殊但重要的反向极限,在范畴论、同调代数、代数 K 理论、拓扑学与几何等学科中有重要的应用. 设范畴 $\mathscr{C}$ 中有态射图(右下图的实线部分),若在等价意义下有惟一的 $P\in\mathscr{C}$ 与态射 f',g' 使右图为可换图,则称 (P,f',g') 为 (X,Y,Z,f,g) 的拉回. 也称 P 为 X,Z 在 Y 上的纤维积,记为 $X\prod_Y Z$. 若对 $\mathscr{C}$ 中任意的 (X,Y,Z,f,g),拉回总存在,则称 $\mathscr{C}$ 为带纤维积范畴. 例如环模范畴即是.



对象的纤维积(fibre product of objects) 见"拉回".

带纤维积范畴(category with fibre products) 见"拉回".

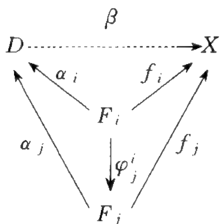
推出(pushout) 拉回的对偶概念. 它是一种特殊但重要的正向极限,在范畴论、同调代数、代数 K 理论等学科中有重要应用. 设范畴 $\mathscr{C}$ 中有态射图(右下图的实线部分),若在等价意义下有惟一的 $Q\in\mathscr{C}$ 与态射 f',g' 使右图为可换图,则称 (Q,f',g') 为 (X,Y,Z,f,g) 的推出. 又称 Q 为 X,Z 在 Y 上的纤维和,记为 $X\coprod_Y Z$. 若 $\mathscr{C}$ 中任意的 (X,Y,Z,f,g) 都存在推出,则称 $\mathscr{C}$ 为带纤维和范畴. 例如环模范畴即是.



对象的纤维和(fibre sum of objects) 见"推出".

带纤维和范畴(category with fibre sums) 见"推出".

正向极限(direct limit) 亦称极限. 上积与推出的推广. 它是反向极限的对偶概念. 在范畴论、同调代数、代数 K 理论、代数几何等学科中起着重要的作用. 若 $\mathscr{C}$ 为一个范畴,$\mathscr{I}$ 为拟序集所成的范畴,$F:\mathscr{I}\to\mathscr{C}$ 为一个共变函子,则 F 称为 $\mathscr{C}$ 中带指标集 $\mathscr{I}$ 的正向系,即 $\forall\ i\in\mathscr{I}, F(i)=F_i\in\mathscr{C}$, $i\leqslant j$ 时有态射 $\varphi_j^i:F_i\to F_j$ 使 φ_i^i 为 F_i 的恒等态射;$i\leqslant j\leqslant k$ 时,$\varphi_k^j\varphi_j^i=\varphi_k^i$. 记 $F=\{F_i,\varphi_j^i\}$. 若 $\mathscr{C}$ 中有对象 D 与态射集 $\{\alpha_i:F_i\to D\}$ 使 $\alpha_i=\alpha_j\varphi_j^i$ 对一切 $i\leqslant j$ 成立且满足如下泛性质:对任意的 $X\in\mathscr{C}$ 与任意的 $\{f_i:F_i\to X\mid f_i=f_j\varphi_j^i, i\leqslant j\}$,必有惟一的态射 $\beta:D\to X$ 使右图可换,则 $(D,\{\alpha_i\})$ 或 D 称为 $F=\{F_i,\varphi_j^i\}$ 的正向极限,记为 $\varinjlim F_i$. 若 $\varinjlim F_i$ 存在,则在等价意义下是惟一的. 阿贝尔群范畴或更一般的环模范畴中任何正向系的正向极限一定存在.



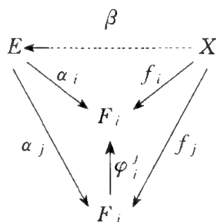
极限(limit) 即"正向极限".

正向系(direct system) 范畴论的基本概念之一. 范畴 $\mathscr{C}$ 中的正向系是一个拟序集所成范畴到 $\mathscr{C}$ 的一个共变函子(参见"正向极限").

反向极限(inverse limit) 亦称逆向极限或上极限. 它是积与拉回概念的推广,也是正向极限的对偶概念,在范畴论、同调代数、代数 K 理论、代数几何等学科中有重要应用. 设 $\mathscr{C}$ 为一个范畴,$\mathscr{I}$ 为一个拟序集所成的范畴. $\mathscr{C}$ 的一个带指标集 $\mathscr{I}$ 的反向系是指一个反变函子 $F:\mathscr{I}\to\mathscr{C}$,即,$\forall\ i\in\mathscr{I}, F(i)=F_i\in\mathscr{C}$, $i\leqslant j$ 时有态射 $\psi_i^j:F_j\to F_i$ 使 ψ_i^i 为 F_i 的恒等态射;$i\leqslant j\leqslant k$ 时 $\psi_i^j\psi_j^k=\psi_i^k$. 记 $F=\{F_i,\psi_i^j\}$. 若 $\mathscr{C}$ 中有对象 E 与态射集 $\{\alpha_i:E\to F_i\}$ 使 $\alpha_i=\psi_i^j\alpha_j$ 对一切 $i\leqslant j$ 成立且满足如下泛性质:对任意的 $X\in\mathscr{C}$ 与任意的

$$\{f_i:X\to F_i\mid\psi_i^j f_j=f_i,\forall\ i\leqslant j\},$$

必有惟一的态射 $\beta:X\to E$ 使右下图可换,则 $(E,\{\alpha_i\})$ 或 E 称为 $F=\{F_i,\psi_i^j\}$ 的反向极限,记为 $\varprojlim F_i$. 若 $\varprojlim F_i$ 存在,则在等价意义下是惟一的. 阿贝尔群范畴,一般地,环模范畴中任一反向系的反向极限必存在.



反向系(inverse system) 范畴论的基本概念之一. 范畴 $\mathscr{C}$ 中的反向系是一个拟序集所成范畴到 $\mathscr{C}$ 的一个反变函子(参见"反向极限").

逆向极限(inverse limit) 即"反向极限".

上极限(colimit) 即"反向极限".

撰　稿　佟文廷
审　阅　刘木兰　程福长

代数 K 理论

代数 K 理论(algebraic K-theory) 20 世纪 60 年代发展起来的一个代数学分支. 它的起源可追溯到 1958 年格罗腾迪克(Grothendieck, A.)关于广义黎曼-罗赫定理的研究. 这个学科的第一本专著是 1968 年由巴斯(Bass, H.)完成的.

代数 K 理论主要研究环范畴到阿贝尔群范畴的一系列函子 $K_0, K_1, K_2, \cdots$ 的性质与作用，其中最基本的是 K_0 与 K_1. 代数 K 理论与几何拓扑、拓扑 K 理论、代数几何、典型群、代数数论等学科都有着密切的联系. 在一定的意义上来说，它又是线性代数中空间的维数、行列式以及同调代数的更高层次的发展.

代数 K 理论主要介绍 K_0, K_1, K_2 函子及相关的内容. 对 $K_i, i\geqslant 3$，现在已有多种定义，其中最著名的是奎伦(Quillen, D. G.)于 1970 年定义的 K_i. 更进一步地，对 i 为任意整数，研究函子 K_i. 这些内容可查阅有关文献. 下面，凡提到模(即环模)均指左环模. 塞尔(Serre, J. P.)于 1955 年证明：一个仿射簇上的向量丛范畴与这个仿射簇之坐标环上的有限生成投射模范畴等价. 斯万(Swan, R. G.)于 1962 年又将此结果推广到紧致的豪斯多夫(Hausdorff, F.)空间，从而给出了拓扑 K 理论与代数 K 理论的一个紧密的联系，大大推动了代数 K 理论的发展.

格罗腾迪克群(Grothendieck group) 亦称 K_0 群. 代数 K 理论中最基本的阿贝尔群. 设 R 为(有单位元的)环，以 $\langle X\rangle$ 表示有限生成投射 R 模 X 的同构类，以所有同构类 $\{\langle X\rangle\}$ 作基的自由阿贝尔群记为 $\mathscr{F}$. 在 $\mathscr{F}$ 中由一切形如 $\langle P\rangle+\langle Q\rangle-\langle P\oplus Q\rangle$ 的元素生成的子群记为 $\mathscr{R}$. 商群 $\mathscr{F}/\mathscr{R}$ 就称为环 R 的格罗腾迪克群，记为 $K_0(R)$ 或 K_0R. $\langle P\rangle$ 在 $K_0(R)$ 中对应的元素(陪集) $\langle P\rangle+\mathscr{R}$ 记为 $[P]$. $K_0(R)$ 的元素都可表成 $[X]-[Y]$ 之形，$K_0(R)$ 的运算法则为

$$[P]+[Q]=[P\oplus Q].$$

对带积范畴(环 R 上的有限生成投射 R 模范畴 $\mathrm{P}(R)$ 就是一个带积范畴)也可类似地按其元素的同构类作基先得出自由阿贝尔群 $\mathscr{F}$，再模去相应的正规子群 $\mathscr{R}$ 而得到它的格罗腾迪克群. 且 $K_0(R)\cong K_0(\mathrm{P}(R))$.

群 $K_0(R)$ 在一定程度上反映出环 R 的一些性质. 例如，R 为 IBN(不变基数)环等价于 $[R]$ 在 $K_0(R)$ 中的阶是无穷的. 而对交换环 R，$K_0(R)\cong\mathsf{Z}$(整数加群)等价于 R 上的有限生成投射模即准自由模. 当 R 为局部环、PID 或 PID 上的多项式环、域上的幂级数环、贝祖环时可算出 $K_0(R)$ 都同构于 Z. 当 R 为半局部环时，必有自然数 n 使 $K_0(R)\cong\mathsf{Z}^n$. 阿廷环 R 的 $K_0(R)$ 也同构于 Z^n 形的阿贝尔群.

G_0 群(G_0-group) 代数 K 理论中研究的一类重要 K_0 群. 设 R 是右诺特环，$M(R)$ 是有限生成右 R 模范畴. 则 $G_0(R)=K_0(M(R))$.

IBN 环(invariant basis number ring) 亦称不变基数环. 交换环的一种推广. 它在同调代数与代数 K 理论中有重要作用. 设 R 为环，若 $R^m\cong R^n$，m, n 为自然数时，必有 $m=n$，即每一个有限生成自由 R 模的任两组基的元素个数必相同，则称 R 为 IBN 环. 只有在 IBN 环上，自由模之秩才有意义. R 为 IBN 环也等价于：若 $A\in R^{m\times n}$，$B\in R^{n\times m}$ 使

$$AB=I_m, BA=I_n,$$

则 $m=n$. 事实上，每个非零交换环、诺特环、局部环等都是 IBN 环. R 为 IBN 环等价于 $[R]$ 是 K_0R 中的无穷阶元素.

不变基数环(invariant basis number ring) 即“IBN 环”.

稳定同构(stable isomorphism) 环模间的一种等价关系. 它是同构概念的推广. 设 P, Q 都是 R 模，若有自然数 n 使 $P\oplus R^n\cong Q\oplus R^n$，则称 P, Q 是准同构的. 一般地，同构必准同构，但反之不真. 对 PID(主理想整环)上的模，两者是一回事. 在 $K_0(R)$ 中，$[P]=[Q]$ 等价于 P, Q 是准同构的.

格罗腾迪克环(Grothendieck ring) 亦称 K_0 环. 代数 K 理论中研究的最基本的环. 当 R 为交换环时，若规定 $[P][Q]=[P\otimes Q]$，则 $K_0(R)$ 为交换环且 $[R]$ 为其单位元. 因此，对交换环 R，称 $K_0(R)$ 为 R 的格罗腾迪克环.

准自由模(stable free module) 亦称稳定自由模. 有限生成自由模的推广. 设 P 为 R 模，若有自然数 m, n 使 $P\oplus R^m\cong R^n$，则称 P 为准自由 R 模. 准自由模的性质与格罗腾迪克群(K_0 群)有密切的关系. 对交换环 R，$K_0(R)\cong\mathsf{Z}$ 等价于有限生成投射 R 模全为准自由的. 更一般地，若 R 为 IBN 环且有限生成投射 R 模全为准自由的，则 $K_0(R)\cong\mathsf{Z}$.

稳定自由模(stable free module) 即“准自由模”.

K_0 函子(functor K_0) 代数 K 理论中的基本函子. 若 $f: R\to S$ 为(保持单位元的)环同态，则 f 诱导一个群同态 $K_0(f): K_0(R)\to K_0(S)$. 若 $g: S\to T$ 也是环同态，则环同态 $gf: R\to T$ 诱导的群同态 $K_0(gf)=K_0(g)K_0(f)$. 对恒等同态 $I: R\to R$，$K_0(I)=I(K_0(R)$ 的恒等同态). 因此，K_0 为环范畴到阿贝尔群范畴的一个(共变)函子，称为 K_0 函子. 对交换环范畴(此时 $K_0(R)$ 为交换环)，K_0 则为该范畴到自身的函子.

矩阵环 $R^{n\times n}$ 的格罗腾迪克群(Grothendieck group of the matrix ring $R^{n\times n}$) 研究矩阵环的一种工具. 若 R 为环，$R^{n\times n}$ 为 R 上的 $n\times n$ 矩阵环，则有群同构：$K_0(R^{n\times n})\cong K_0(R)$.

约化群(reduced group) 计算与研究 K_0 群的一个工具. 对任一环 R 总有惟一的环同态 $f: \mathsf{Z}\to R$，这里的 Z 为整数环. f 诱导出群同态 $K_0(f): K_0(\mathsf{Z})\to K_0(R)$，称 $\widetilde{K}_0(R)\equiv K_0(R)/\mathrm{Im}K_0(f)=$

coker $K_0(f)$ 为 R 的约化群. $\mathrm{Im}\,K_0(f)=\mathbf{Z}\cdot[R]$ 是 $[R]$ 在 $K_0(R)$ 中生成的循环群. 若 R 为交换环且一切有限生成投射 R 模都是自由的，则 $\widetilde{K}_0(R)=0$(例如，当 R 为 PID 时). 对一般的交换环 R，则有

$$K_0(R)\cong\mathbf{Z}\oplus\widetilde{K}_0(R).$$

怀特海群(Whitehead group)　亦称 K_1 群. 代数 K 理论中的一个重要的群，与典型群有密切的联系. 设 $\mathrm{GL}_n(R)$ 为 $R^{n\times n}$ 中全体可逆矩阵所成的乘法群(称为一般线性群)，$E_n(R)$ 为 $R^{n\times n}$ 中初等矩阵生成的乘法群. 若

$$\mathrm{GL}(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{GL}_n(R),\quad E(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n(R),$$

则 $E(R)=[E(R),E(R)]=[\mathrm{GL}(R),\mathrm{GL}(R)]$([,] 表换位子群). 定义 $K_1(R)=\mathrm{GL}(R)/E(R)$，即，

$$K_1(R)=\mathrm{GL}(R)/[\mathrm{GL}(R),\mathrm{GL}(R)]\equiv\mathrm{GL}(R)^{ab},$$

称 $K_1(R)$ 为环 R 的怀特海群. 它是阿贝尔群. 事实上，$K_1(R)$ 是 $\mathrm{GL}(R)$ 的第一个同调群 $H_1(\mathrm{GL}(R),\mathbf{Z})$. 一般地，计算 $K_1(R)$ 比较困难，但是，当 R 为域时，$K_1(R)\cong R^{\cdot}$(R 的可逆元之乘法群)；当 R 为域 F 上的多项式环 $F[x]$ 时，$K_1(F[x])\cong F^{\cdot}$. 对除环 R，$K_1(R)\cong R^{\cdot ab}$($R^{\cdot}$ 群关于其换位子群的商群 $R^{\cdot}/[R^{\cdot},R^{\cdot}]$)；而对整数环 $\mathbf{Z}$，$K_1(\mathbf{Z})\cong\{+1,-1\}\cong\mathbf{Z}_2$. $K_1(R)$ 同构于环 R 上有限生成投射模范畴 $\mathsf{P}(R)$ 的回路范畴的 K_0 群.

矩阵环 $R^{n\times n}$ 的怀特海群(Whitehead group of the matrix ring $R^{n\times n}$)　研究矩阵环的一种工具. 若 R 为任一环，则对矩阵环 $R^{n\times n}$ 有群同构

$$K_1(R^{n\times n})\cong K_1(R).$$

特别地，$K_1(\mathbf{Z}^{n\times n})\cong\mathbf{Z}_2$，$K_1(F^{n\times n})\cong F^{\cdot}$，其中 $\mathbf{Z}$ 为整数环，F 为任意域.

特殊怀特海群(special Whitehead group)　亦称特殊 K_1 群. 代数 K 理论中重要的群，是由交换环上特殊线性群出发定义的一个阿贝尔群. 它是研究与计算 K_1 群的重要工具. 设 R 为交换环. $\mathrm{SL}_n(R)$ 为 $R^{n\times n}$ 中行列式为 1 的矩阵所成的乘法群，称为特殊线性群. 若

$$\mathrm{SL}(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{SL}_n(R)(=\varinjlim\mathrm{SL}_n(R)),$$

则 $E(R)$ 是 $\mathrm{SL}(R)$ 的正规子群(参见“怀特海群”). 若定义环 R 的特殊怀特海群为 $\mathrm{SL}(R)/E(R)$，且记为 $\mathrm{SK}_1(R)$，则有 $K_1(R)\cong R^{\cdot}\oplus\mathrm{SK}_1(R)$，其中 $R^{\cdot}$ 为 R 中可逆元乘法群. 因此，对交换环 R，由 $\mathrm{SK}_1(R)$ 可以得到 $K_1(R)$；反之亦然.

特殊 K_1 群(special K_1-group)　即“特殊怀特海群”.

特殊线性群(special linear group)　见“特殊怀特海群”.

GE 环(GE-ring)　代数 K 理论中的一种重要的环. 它是使 $K_1(R)\cong R^{\cdot}$(R 的可逆元乘法群)的一类环，也可看成半局部环类的推广. 由特殊怀特海群性质，对交换环 R，$K_1(R)\cong R^{\cdot}\oplus\mathrm{SK}_1(R)$，因此研究 $K_1(R)\cong R^{\cdot}$ 即 $\mathrm{SL}(R)=E(R)$ 的条件是有意义的. 一般地，对任意环 R(未必为交换环)，记 $\mathrm{GE}_n(R)$ 为 $E_n(R)$ 与 n 阶可逆对角矩阵乘法生成的 $\mathrm{GL}_n(R)$ 的子群(因此，$E_n(R)<\mathrm{GE}_n(R)<\mathrm{GL}_n(R)$). 当 $\mathrm{GE}_n(R)=\mathrm{GL}_n(R)$ 时，就称 R 为 GE_n 环；当 R 对无穷多个 n 都为 GE_n 环时，称 R 为准 GE 环(SGE 环). 当 R 对一切 n 都为 GE_n 环时，称 R 为 GE 环. 域、除环、局部环、半局部环、欧几里得环等都是 GE 环. 对交换环 R，R 为 GE 环等价于对一切 n，$E_n(R)=\mathrm{SL}_n(R)$；也等价于对任意的 n 及任意的 $A\in\mathrm{GL}_n(R)$，A 都可表为 $A=SD$，其中 $S\in E_n(R)$，D 为 n 阶对角矩阵，其第一个主对角元为 $d=\det A$ 而其余对角元全为 1 (这是一个重要的分解). 于是对交换的 GE 环 R，$\mathrm{SK}_1(R)=1$，因此 $K_1(R)\cong R^{\cdot}$.

GE_n 环(GE_n-ring)　见“GE 环”.

准 GE 环(stable GE-ring)　见“GE 环”.

迪厄多内行列式(Dieudonné determinant)　交换环上矩阵的行列式概念的推广. 它是计算 K_1 群的有用工具. 设 R 为任意环，π 为 R 的可逆元乘法群 $R^{\cdot}$ 到 $R^{\cdot}/[R^{\cdot},R^{\cdot}]\equiv R^{\cdot ab}$ 的自然同态，且记 $\bar{a}=\pi(a)$，$\forall\,a\in R^{\cdot}$. 若有群同态 $\det:\mathrm{GL}_n(R)\to R^{\cdot ab}$ 称 det 为一个迪厄多内行列式. 若它满足：

1. $E_n(R)\subset\ker(\det)$.

2. $\det(\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n))=\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_n$ ($\forall\,a_j\in R^{\cdot}$).

3. 任意的 $A\in GL_n(R)$ 经 det 所得的像与 $A\oplus(1)$($n+1$ 阶矩阵，左上角为 A，右下角为 1，其余全为 0)经 det 所得的像相同.

对 R，若这种行列式存在，则必惟一. 规定 A 不可逆时 $\det A=0$，此定义还可开拓到对 $R^{n\times n}$ 适用. 于是，除环上的迪厄多内行列式存在且惟一. 因此，除环 R 的 K_1 群 $K_1(R)\cong R^{\cdot ab}$.

D_n 环(D_n-ring)　亦称迪厄多内环. 代数 K 理论中的一种重要的环. 在 K_1 群的研究中有重要地位. 设 R 为环(未必可换). 若

$$\mathrm{GL}_n(R)^{ab}\equiv\mathrm{GL}_n(R)/[\mathrm{GL}_n(R),\mathrm{GL}_n(R)]$$

与 $R^{\cdot}$ 关于换位子群的商群 $R^{\cdot ab}$ 同构($R^{\cdot}$ 为 R 的可逆元乘法群)，则称 R 为 D_n 环. 若对一切 n，R 都是 D_n 环，则称 R 为 D 环. 任何环都是 D_1 环. 元素个数多于 2 的除环必为 D 环. 若有 m 使对一切 $n\geqslant m$，R 都是 D_n 环，则 $K_1(R)\cong R^{\cdot ab}$. 对阿廷半单环 S，若 S 无同构于 $\Delta^{2\times2}$(其中 $|\Delta|=2$)的直和加项，则 S 为 D_n 环 ($\forall\,n\neq2$). 因此，对这一限制极少的阿廷半单环 S，$K_1(S)\cong S^{\cdot ab}$. 由于对这类阿廷半单环 R 必有

$$R \cong \Delta_1^{n_1 \times n_1} \oplus \cdots \oplus \Delta_m^{n_m \times n_m},$$

其中 Δ_j 都是除环，所以也可算出

$$K_1(R) \cong (\Delta_1^{\cdot} \oplus \cdots \oplus \Delta_m^{\cdot})^{ab}.$$

迪厄多内环(Dieudonné ring)　即“D_n 环”.

D 环(D-ring)　见“D_n 环”.

K_1 函子(functor K_1)　代数 K 理论中对应 K_1 群的重要函子. 若 $f:R\to S$ 为(保持单位元的)环同态，则 f 诱导出一个群同态 $K_1(f):K_1(R)\to K_1(S)$. 于是 K_1 是环范畴到阿贝尔群范畴的一个(共变)函子，称为 K_1 函子，它也是代数 K 理论中的一个重要函子，常可由 R,S 的关系去推断$K_1(R)$与 $K_1(S)$的一些关系.

施坦贝格群 ST(R)(Steinberg group ST(R))　代数 K 理论中的一个重要的群. 由初等矩阵的部分运算规律定义的一种群，由施坦贝格群可定义 K_2 群. 设 R 为环，ST(R)为由$\{X_{ij}(a)\mid i\neq j, a\in R, i,j=1,2,\cdots\}$按下述关系定义的乘法群：

$$X_{ij}(a)X_{ij}(b) = X_{ij}(a+b);$$

$$[X_{ij}(a), X_{kl}(b)] = \begin{cases} 1 = X_{ij}(0) & (i\neq l, j\neq k), \\ X_{il}(ab) & (i\neq l, j=k). \end{cases}$$

称 ST(R)为环 R 的施坦贝格群. 此群与 K_2 群有密切关系，同时本身也有一定的重要性.

施坦贝格关系(Steinberg relations)　施坦贝格群中$\{X_{ij}(a)\}$满足的三个关系式称为施坦贝格关系(参见“施坦贝格群”).

施坦贝格符号(Steinberg symbol)　刻画 K_2 群的一种符号. 设 R 为一个域，$R^{\cdot}$ 为其乘法群，G 为阿贝尔群. 若映射 $c:R^{\cdot}\times R^{\cdot}\to G$ 满足下述三个条件：

$$c(\alpha_1\alpha_2,\beta) = c(\alpha_1,\beta)c(\alpha_2,\beta);$$

$$c(\alpha,\beta_1\beta_2) = c(\alpha,\beta_1)c(\alpha,\beta_2);$$

$$c(\alpha, 1-\alpha) = 1(\text{当 } \alpha\neq 1 \text{ 时}),$$

则称 c 为 R 上对应于 G 的施坦贝格符号. 若给定了施坦贝格符号 c(对 R,G)，则有一个惟一的群同态 $f:K_2(R)\to G$ 使 $f\{\alpha,\beta\}=c(\alpha,\beta)$, $\forall\ \alpha,\beta\in R^{\cdot}$，其中 $\{,\}:R^{\cdot}\times R^{\cdot}\to K_2(R)$为 R 上对应于 $K_2(R)$的施坦贝格符号. 由施坦贝格符号的上述定义得到：$c(\alpha,\beta)=c(\beta,\alpha)^{-1}$且 $c(\alpha,-\alpha)=1, c(1,\beta)=c(\beta,1)=1$.

K_2 群(K_2-group)　代数 K 理论中的一类重要的群. 它是施坦贝格群的中心. 设 R 为环，由 $\varphi(X_{ij}(a))=e_{ij}^a$定义群的满同态 φ:ST(R)$\to E(R)$，其中 e_{ij}^a 表(i,j)位置 a 的初等矩阵(参见“施坦贝格群”、“怀特海群”)，称此同态的核 $\ker\varphi$ 为 R 的 K_2 群，记为 $K_2(R)$. 它是刻画形式上由初等矩阵的部分运算规律定义的 ST(R)与初等矩阵群的差距的一个群. 这个群是由米尔诺(Milnor, W. J.)定义的. ST(R)的中心 C(ST(R))正是 $K_2(R)$，因此，$K_2(R)$是一个阿贝尔群. 从群论的观点看，上述的同态 φ 为 $E(R)$的泛中心扩张，从而 $K_2(R)$为 $E(R)$的泛中心扩张的核，并且 $K_2(R)$是 $E(R)$关于 $\mathbf{Z}$ 的第二个同调群.

泛中心扩张(universal central extension)　群的一类特殊的中心扩张. 设 $\varphi:G\to H$ 为群的满同态，若核 $\ker\varphi$ 在 G 的中心中，φ 就称为 H 的中心扩张，也称 G 为 H 的中心扩张. 若中心扩张 φ 又满足如下的泛性质：任给 H 的中心扩张 $\theta:G_1\to H$，都有惟一的群同态 $\psi:G\to G_1$ 使 $\theta\psi=\varphi$，则称 φ 为 H 的泛中心扩张. 在同构意义下，H 只能有一个泛中心扩张. 泛中心扩张不但在群论中是一个重要概念，在代数 K 理论中特别是在 K_2 群的理论中具有重要意义.

中心扩张(central extension)　见“泛中心扩张”.

K_2 函子(function K_2)　代数 K 理论中对应 K_2 群的重要函子. 若 $f:R\to S$ 为(保持单位元的)环同态，则 f 诱导一个群同态 $K_2(f):K_2(R)\to K_2(S)$. 与 K_0 函子和 K_1 函子一样，K_2 也是环范畴到阿贝尔群范畴的一个(共变)函子，称为 K_2 函子. 在代数 K 理论中有着重要的作用.

K_i 函子与直和的交换性(commutativity between functor K_i and direct product)　对函子与直和关系的一种刻画. K_0, K_1, K_2 函子都有与直和可交换的性质. 即，若 $R_1\oplus\cdots\oplus R_n$ 为环 $R_1,\cdots,R_n$ 的直和(也称直积)，则

$$K_i(R_1\oplus\cdots\oplus R_n)\cong K_i(R_1)\oplus\cdots\oplus K_i(R_n)$$
$$(i=0,1,2),$$

称为 K_i 函子与直和的交换性. 施坦贝格群也有类似性质(ST 也是一个函子)

$$\mathrm{ST}(R_1\oplus\cdots\oplus R_n)\cong\mathrm{ST}(R_1)\oplus\cdots\oplus\mathrm{ST}(R_n).$$

这些性质常可使较复杂的 K_i 群与 ST 群的计算化简、化易. 例如对阿廷半单环 $R\cong\Delta_1^{n_1\times n_1}\oplus\cdots\oplus\Delta_m^{n_m\times n_m}$，有 $K_i(R)\cong K_i(\Delta_1^{n_1\times n_1})\oplus\cdots\oplus K_i(\Delta_m^{n_m\times n_m})\cong K_i(\Delta_1)\oplus\cdots\oplus K_i(\Delta_m)(i=0,1,2)$，这里的 Δ_j 都是除环，计算 K_i 群是较为容易的.

连通环(connected ring)　一种重要的环. 它是无非平凡幂等元的交换环. 设 R 为交换环，Spec$R$ 为 R 的素理想集，若在 Spec$R$ 上定义扎里斯基(Zariski, O.)拓扑，则 Spec$R$ 为一个拓扑空间. 当这个拓扑空间连通时，称环 R 为连通环. 这等价于 R 仅含幂等元 0,1. 整环为连通环. 交换局部环也是连通环. 连通环不能分解为非平凡环的直和，反之亦然.

局部秩(local rank)　对一个有限生成投射 R 模的一种刻画. 指该模做局部化后所得自由模的秩，是线性空间的维数和自由模之秩等概念的推广，在代数 K 理论、代数几何与交换代数中都有重要作用. 设 R 为交换环，M 为有限生成投射 R 模，P 为 R

的一个素理想. 对 R 做局部化得 R_P,对 M 做局部化得 M_P(以 $R\backslash P$ 做乘法子集). 由于 R_P 为局部环,M_P 必为自由 R_P 模,注意 R_P 仍为交换环,从而为 IBN 环,M_P 仍为有限生成的. 因此必有 n 使 $M_P\cong R_P^n$,这个 n 称为 M 在 P 中的局部秩,记为 $\mathrm{rank}_P M$. 若 R 的两个素理想 P_1,P_2 有包含关系 $P_2\subseteq P_1$,则 $\mathrm{rank}_{P_1}M=\mathrm{rank}_{P_2}M$,因此对整环 R,$\mathrm{rank}_P M=n$ 是由 M 惟一决定的常数而与 P 无关. 在这种局部秩与 P 无关的情况下,也称 M 有常数秩 n,记为 $\mathrm{rank}\,M=n$. R 为交换局部环时,M 必有常数秩. 局部秩与 K_0 函子有密切联系. 若 I 为交换环 R 的极大理想,则 $F=R/I$ 为域,于是有自然同态 $g:R\to F$,且

$$\mathrm{rank}_P M=K_0(g)([M]).$$

常数秩(constant rank) 见"局部秩".

交换环的皮卡群(Picard group of a commutative ring) 代数 K 理论中的一种重要的群. 它是 $K_0(R)$ 环中可逆元乘法群 $K_0(R)^{\cdot}$ 的一个子群,因此是阿贝尔群. 皮卡群在代数 K 理论中有重要的作用. 其他学科(如代数几何)中定义的皮卡群与这里的皮卡群有类似的构作法及作用. 对交换环 R,常数秩为 1 的有限生成投射模有特别重要的意义. 因为 $\mathrm{rank}\,M=1$ 等价于,有同构意义下惟一的 R 模 N 使

$$N\cong M^*\equiv \mathrm{Hom}(M,R) \quad 且 \quad N\bigotimes_R M\cong R.$$

所以称这种 R 模 M 为可逆 R 模. 若 $\langle M\rangle$ 为 M 的同构类,记 $\mathrm{Pic}\,R=\{\langle M\rangle\mid M$ 为可逆 R 模$\}$,规定 $\mathrm{Pic}\,R$ 的运算为

$$\langle M_1\rangle\langle M_2\rangle=\langle M_1\bigotimes_R M_2\rangle,$$

则 $\mathrm{Pic}\,R$ 成为一个阿贝尔群且单位元为 $\langle R\rangle$,$\langle M\rangle^{-1}=\langle M^*\rangle$. 称阿贝尔群 $\mathrm{Pic}\,R$ 为 R 的皮卡群. 皮卡群在代数 K 理论中有着重要意义,它与 $K_0(R)$ 有着密切联系. 若 $\langle M\rangle\to[M]$,则有群的单同态 $\mathrm{Pic}\,R\to(K_0(R))^{\cdot}$,即 $\mathrm{Pic}\,R$ 可看做 $K_0(R)$ 环的可逆元乘法群的子群. 因此,若 $K_0(R)\cong\mathbf{Z}$(整数环),则 $\mathrm{Pic}\,R\cong\{\pm1\}$ 或 $\{1\}$. 于是,对 PID 主理想整环上的多项式环、域上的幂级数环、交换局部环、比左环等,由于它们的 K_0 群均同构于 $\mathbf{Z}$,所以它们的皮卡群必同构于 $\{\pm1\}$ 或 $\{1\}$. 称 Pic 为交换环范畴到阿贝尔群范畴的(共变)函子.

可逆模(invertible module) 见"交换环的皮卡群".

Pic函子(functor Pic) 见"交换环的皮卡群".

H_0 函子(functor H_0) 一种特殊的函子. 指交换环范畴到自身的一个(共变)函子. 对交换环 R,$H_0(R)$ 是 $K_0(R)$ 的直和加项,因此在求 R 的 K_0 群时起着重要的作用. 对交换环 R,记

$$H_0(R)=\{f\mid f:\mathrm{Spec}\ R\to\mathbf{Z},f\ 连续\},$$

其中 $\mathrm{Spec}\,R$ 为 R 的素理想集,带有扎里斯基拓扑,$\mathbf{Z}$ 为整数集,带有离散拓扑(即 $\mathbf{Z}$ 的一切子集都是开集). 若定义运算

$$f+g:\ (f+g)(P)=f(P)+g(P).$$

$$fg:\ (fg)(P)=f(P)g(P),$$

$$\forall\ f,g\in H_0(R),\quad P\in\mathrm{Spec}\,R,$$

则 $H_0(R)$ 为一个交换环,且 H_0 为可换环范畴到自身的函子. 此外,由 $f_M(P)=\mathrm{rank}_P M$($\forall\ P\in\mathrm{Spec}\,R$,$M$ 为有限生成投射 R 模)给出的 $f_M\in H_0(R)$,于是 $[M]\to f_M$ 给出环同态 $\mathrm{rank}:K_0(R)\to H_0(R)$. 这个 rank 为函子 K_0,H_0 间的自然变换. 若 $\ker(\mathrm{rank})=rK_0(R)$,则有 $K_0(R)\cong H_0(R)\oplus rK_0(R)$. 因此 $H_0(R)$ 可看成 $K_0(R)$ 的子环且为 $K_0(R)$ 的直和加项,若 R 为连通环(比如整环、局部环等),则 $H_0(R)\cong\mathbf{Z}$,$\widetilde{K}_0(R)\cong rK_0(R)$,此时,上述分解与"约化群"中的分解是一致的.

行列式映射(determinant map) 交换环的 K_0 到皮卡群的一种映射. 设 R 为交换环,行列式映射为 $K_0(R)$ 到 $\mathrm{Pic}\,R$ 的一个群的满同态. 由 $K_0(R)$ 对 $H_0(R)$ 的分解式 $K_0(R)\cong H_0(R)\oplus r\,K_0(R)$ 知,有单同态 $\theta:H_0(R)\to K_0(R)$,使对任何 $f\in H_0(R)$:$\mathrm{Spec}\,R\to\mathbf{Z}$,都有相应于 f 的正交幂等元分解 $1=e_1+e_2+\cdots+e_r$. 若 $f(D(Re_i))=n_i$,其中 $D(Re_i)$ 为不包含 Re_i 的 R 之素理想集合,则

$$\theta(f)=\sum_{i=1}^{r}n_i[Re_i].$$

记 $m_i=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant r}\{n_j\}-n_i$. 对任意的有限生成投射 R 模 M,若

$$N=M\oplus(\bigoplus_i(Re_i)^{m_i})$$

且 $[M]\mapsto\langle\wedge^n N\rangle$,其中 $\wedge^n$ 表 n 次外乘幂而 $n=\max\limits_j n_j$,则有行列式映射 $\det:K_0(R)\to\mathrm{Pic}\,R$,其中 $\mathrm{Pic}\,R$ 为 R 的皮卡群. 行列式映射 det 也是函子 K_0 和 Pic 间的自然变换,即 $g:R\to S$ 为环同态时,

$$\det\circ K_0(g)=\mathrm{Pic}(g)\circ\det.$$

整环的皮卡群(Picard group of an integral domain) 刻画整环性质的一类阿贝尔群. 它在代数 K 理论中有重要应用. 它同构于由该环可逆分式理想的同构类按运算 $\langle I\rangle\langle J\rangle=\langle IJ\rangle$ 所成的乘法群;也同构于该环的理想类群. 整环的皮卡群也同构于其可逆分式理想群关于其主分式理想子群的商群. 特别地,对戴德金环,其皮卡群又同构于其分式理想群关于主分式理想子群的商群.

交换环的类群(class group of a commutative ring) 亦称理想类群. 刻画环性质的一种阿贝尔群. 在代数 K 理论与代数数论中有重要应用. 设 R 为交换环,$\mathrm{CI}(R)=\{\langle I\rangle\mid I$ 为 R 的非零理想且为有限生成投射 R 模,$\langle I\rangle$ 为 I 的作为 R 模的同构类$\}$. 按 $\langle I\rangle\langle J\rangle=\langle IJ\rangle$ 运算所成的阿贝尔群称为环 R 的

类群，其元素个数 $|\mathrm{CI}(R)|$ 称为环 R 的类数. $|\mathrm{CI}(R)|=1$ 的充分必要条件是 R 的可逆整理想均为主理想. 因此，若 R 为 PID，则 $|\mathrm{CI}(R)|=1$. 对戴德金环 R，$|\mathrm{CI}(R)|$ 是度量 R 与 UFD 惟一因子分解整区之差距的一个量. 对代数整数环，$|\mathrm{CI}(R)|<\infty$，这是代数数论中的一个重要不变量.

理想类群(ideal class group)　即“交换环的类群”.

类数(class number)　见“交换环的类群”.

戴德金环的 K_0 群(K_0-group of a Dedekind domain)　刻画戴德金环性质的一类阿贝尔群. 对戴德金环 R 有一个重要的群同构 $i:\mathrm{Pic}R\to rK_0(R)$，$i(\langle M\rangle)=[M]-[R]$，且 $K_0(R)$ 有如下的直和分解：$K_0(R)\cong \mathsf{Z}\oplus \mathrm{Pic}\,R\cong \mathsf{Z}\oplus \mathrm{CI}(R)\cong \mathsf{Z}\oplus \widetilde{K}_0(R)\cong \mathsf{Z}\oplus rK_0(R)$，其中 $\mathrm{Pic}R$ 表 R 的皮卡群，$\mathrm{CI}(R)$ 表 R 的类群，$\widetilde{K}_0(R)$ 表 R 的约化群. 对 $R=\mathsf{Z}[\sqrt{-d}]$ 型的整环可算出：$d=1,2$ 时，R 是主理想整环，从而 R 为戴德金环且 $K_0(R)\cong\mathsf{Z}$；当 $d=3,4,7$ 时，R 非戴德金环，但仍有 $K_0(R)\cong\mathsf{Z}$；$d=5,6,15$ 时，虽 R 为戴德金环，但 $K_0(R)\cong\mathsf{Z}\oplus\mathsf{Z}/2\mathsf{Z}$，这是历史上第一个使 $K_0(R)\cong\mathsf{Z}$ 的例子. 另外，当 $d=11,19,23$ 时，$K_0(R)\cong\mathsf{Z}\oplus\mathsf{Z}/3\mathsf{Z}$. 一般地，$d$ 无平方因子且 $d\not\equiv 3(\mathrm{mod}4)$ 时，$\mathsf{Z}[\sqrt{-d}]$ 必为戴德金环(反之未必)，但对较大的 d 计算 K_0 群相当困难.

带积范畴(category with product)　环上模范畴、有限生成投射模范畴等重要范畴关于直和及(交换环的情况下)张量积性质的抽象与概括. 设 $\mathscr{C}$ 为一个范畴，它有零对象 0(即 $\mathrm{Hom}(0,A)$ 与 $\mathrm{Hom}(A,0)$ 都只有一个元素，$\forall\ A\in\mathscr{C}$). 若 $\perp:\mathscr{C}\times\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ 为一个函子且满足 $A\perp 0\cong 0\perp A\cong A$；$A\perp B\cong B\perp A$；$A\perp(B\perp C)\cong(A\perp B)\perp C$(这些同构都是自然的)，$\forall\ A,B,C\in\mathscr{C}$，则称 $\perp$ 为积函子，$(\mathscr{C},\perp)$ 称为带积范畴. 例如，环 R 上模范畴对 $\oplus$ 是带积范畴，R 上的有限生成投射模范畴对 $\oplus$ 也是带积范畴. 当 R 可换时，它们关于 $\otimes$(张量积)也是带积范畴. R 上的可逆模的同构类范畴 $\mathrm{Pic}\,R$ 关于 $\otimes$ 也是带积范畴. 对带积范畴 $\mathscr{C}$ 可与环上关于有限生成投射模范畴同样地定义其 K_0 群. 即以 $\langle A\rangle$ 表 $A\in\mathscr{C}$ 的同构类，以 $\{\langle A\rangle\mid\forall\ A\in\mathscr{C}\}$ 为基得自由阿贝尔群 $\mathscr{F}$，记由一切 $\langle A\perp B\rangle-\langle A\rangle-\langle B\rangle$ 生成的子群为 $\mathscr{R}$. 定义 $K_0(\mathscr{C},\perp)=\mathscr{F}/\mathscr{R}$. 这种定义更具一般性且可用于其他学科如代数几何、纤维丛理论等.

积函子(product functor)　见“带积范畴”.

带积合成范畴(category with product and composition)　一种特殊的带积范畴. 它在研究带积范畴的 K_0 群中具有相当的重要性. 设 $(\mathscr{C},\perp)$ 为带积范畴且又有合成 $\circ:\mathscr{C}\times\mathscr{C}\to\mathscr{C}$，这个“$\circ$”不要求对一切 $A,B\in\mathscr{C}$ 都有定义，但需满足如下条件：若 $A\circ B$，$C\circ D$ 有定义，则 $(A\perp C)\circ(B\perp D)$ 有定义，且 $(A\perp C)\circ(B\perp D)=(A\circ B)\perp(C\circ D)$，$\forall\ A,B,C,D\in\mathscr{C}$，这时称 $(\mathscr{C},\perp,\circ)$ 为一个带积合成范畴. 以 $\langle A\rangle$ 表 $A\in\mathscr{C}$ 的同构类，以 $\{\langle\mathscr{A}\rangle\mid\forall\ \mathscr{A}\in\mathscr{C}\}$ 作基生成的加法自由阿贝尔群记为 $\mathscr{F}$，而 $\mathscr{R}$ 为由一切 $\langle A\perp B\rangle-\langle A\rangle-\langle B\rangle$ 及 $\langle C\circ D\rangle-\langle C\rangle-\langle D\rangle$(当 $C\circ D$ 有意义时)生成的 $\mathscr{F}$ 之子群. 定义 $K_0(\mathscr{C},\perp,\circ)=\mathscr{F}/\mathscr{R}$，它是 $K_0(\mathscr{C},\perp)$ 的一个商群.

回路范畴(loop category)　一种重要的范畴. 它由已知的带积范畴考虑每个对象与其自态射所成的一种新的带积合成范畴，它可以沟通 K_0 群与 K_1 群. 设 $(\mathscr{C},\perp)\equiv\mathscr{C}$ 为一个带积范畴，由此构作一个新范畴 $\Omega\mathscr{C}$，其对象形如 (A,α)，其中 $A\in\mathscr{C}$，α 为 $\mathscr{C}$ 中 A 的一个自态射(即 $\alpha\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A)$)，$(A,\alpha)$ 与 (B,β) 的态射集定义为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\Omega\mathscr{C}}((A,\alpha),(B,\beta))\\&=\{f\mid f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)\text{使 }f\alpha=\beta f\}.\end{aligned}$$

同时规定 $(A,\alpha)\perp(B,\beta)=(A\perp B,\alpha\perp\beta)$，$(A,\alpha)\circ(A,\beta)=(A,\alpha\beta)$，零对象为 $(0,I_0)$. 称这个带积合成范畴 $\Omega\mathscr{C}$ 为带积范畴 $\mathscr{C}$ 的回路范畴. 定义 $K_1(\mathscr{C})=K_0(\Omega\mathscr{C})$ 称为 $\mathscr{C}$ 的怀特海群(K_1 群). 若取 $\mathscr{C}=(\mathsf{P}(R),\oplus)$ 为环 R 上有限生成投射模范畴，则 $K_1(R)=K_1(\mathsf{P}(R))=K_0(\Omega\mathsf{P}(R))$. 因此，在代数 K 理论中 K_0 群比 K_1 群具有更重要的地位.

笛卡儿正方图(Cartesian square)　一个满足一定条件的环和环同态所成的正方形可换图. 它概括了一些重要情况，由此可得出代数 K 理论中有意义的结果，有助于讨论一些 K_i 群($i=0,1,2$)的性质与计算.

$$\begin{array}{ccc}R & \xrightarrow{\ i_2\ } & R_2\\ {\scriptstyle i_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_2}\\ R_1 & \xrightarrow[\ j_1\ ]{} & S\end{array}$$

设环同态可换图满足：$\forall\ (r_1,r_2)\in R_1\times R_2$，若 $j_1r_1=j_2r_2$，则有惟一的 $r\in R$ 使 $i_lr=r_l$，$l=1,2$，则称它为一个笛卡儿正方图. 常用的笛卡儿正方图是 j_1 或 j_2 为满同态的情况.

麦耶-卫托里列(Mayer-Vietoris sequence)　一种重要的正合列. 它是 K_0 群、K_1 群在一定条件下得到的正合列，在代数 K 理论中有重要应用. 若有环同态的笛卡儿正方图，其中 j_1 或 j_2 为满同态，则有群正合列

$$\begin{array}{ccc}R & \xrightarrow{\ i_2\ } & R_2\\ {\scriptstyle i_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_2}\\ R_1 & \xrightarrow[\ j_1\ ]{} & S\end{array}$$

$$\begin{aligned}&K_1(R)\to K_1(R_1)\oplus K_1(R_2)\to K_1(S)\to K_0(R)\\&\to K_0(R_1)\oplus K_0(R_2)\to K_0(S).\end{aligned}$$

此正合列称为麦耶-卫托里序列. 它最重要的应用是

有如下的行正合可换图(其中 det 为行列式映射):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
K_1(R) & \to & K_1(R_1)\oplus K_1(R_2) & \to & K_1(S) & \to & K_0(R) & \to & K_0(R_1)\oplus K_0(R_2) & \to & K_0(S) \\
\downarrow{\scriptstyle \det} & & \downarrow{\scriptstyle \det\oplus\det} & & \downarrow{\scriptstyle \det} & & \downarrow{\scriptstyle \det} & & \downarrow{\scriptstyle \det\oplus\det} & & \downarrow{\scriptstyle \det} \\
R^{\cdot} & \to & R_1^{\cdot}\oplus R_2^{\cdot} & \to & S^{\cdot} & \to & \mathrm{Pic}\ R & \to & \mathrm{Pic}\ R_1\oplus \mathrm{Pic}\ R_2 & \to & \mathrm{Pic}\ S
\end{array}$$

纤维范畴(fibre category)　一个带积合成范畴. 它是由两个带积范畴及它们之间的保积函子定义的. 利用它可得到 K_0 群、K_1 群的有意义的正合列. 设 $(\mathscr{C},\perp)$, $(\mathscr{D},\perp)$ 为两个带积范畴, $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 为保积函子. 定义一个新范畴 ΦF 如下:其对象类为 $\{(M,N,\alpha)\mid M,N\in\mathscr{C},\ \alpha: F(M)\cong F(N)\}$; (M,N,α) 与 (M',N',α') 间的态射集定义为 $\{(\beta,\gamma)\mid\beta:M\cong M',\gamma:N\cong N'$ 使 $F(\gamma)\alpha=\alpha' F(\beta)\}$; 态射合成法则为 $(\beta,\gamma)(\beta',\gamma')=(\beta\beta',\gamma\gamma')$;对象积法则为 $(M,N,\alpha)\perp(M',N',\alpha')=(M\perp M', N\perp N',\psi^{-1}(\alpha\perp\alpha')\psi)$,其中 ψ 为同构

$$F(X\perp Y)\cong F(X)\perp F(Y);$$

对象合成法则为

$$(M,N,\alpha)\circ(N,P,\beta)=(M,P,\beta\alpha),$$

称 ΦF 为 $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ 的纤维范畴. 当 F 为共尾函子时,有群正合列 $K_1\mathscr{C}\to K_1\mathscr{D}\to K_0\Phi F\to K_0\mathscr{C}\to K_0\mathscr{D}$. 当 $\mathscr{R}$ 为交换环时, $\mathrm{Pic}\,R\cong K_0(R)/K_0\Phi\det$.

共尾函子(final functor)　代数 K 理论中定义纤维范畴时用到的一类重要函子. 它是一类特殊的保积函子. 设 $(\mathscr{C},\perp)$, $(\mathscr{D},\perp)$ 为带积范畴, $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 为保积函子. 若 $F(\mathscr{C})$ 为 $\mathscr{D}$ 的共尾子范畴(即对任意 $A\in\mathscr{D}$,必有 $A'\in\mathscr{D}$ 与 $B\in\mathscr{C}$ 使得 $A\perp A'\cong F(B)$),则 F 称为共尾函子.

双环(double ring)　环中关于一个理想同余的元素对所成的环. 对一个环 R,若 A 为 R 的理想,则有商环 $S=R/A$ 与自然满同态 $\pi:R\to S$. 若

$$D=\{(r_1,r_2)\mid r_1,r_2\in R \text{ 使 } \pi(r_1)=\pi(r_2)\},$$

则 D 成为环,称为 R 的双环. 此时有群正合列

$$K_1(D)\to K_1(R)\oplus K_1(R)\to K_1(S)\to K_0(D)$$
$$\to K_0(R)\oplus K_0(R)\to K_0(S).$$

若 $p_j:D\to R$ 使 $p_j(r_1,r_2)=r_j$, $j=1,2$. 且记 $K_i(R,A)=\ker(K_i(p_2))$, $i=0,1$,则又有群正合列

$$K_1(R,A)\to K_1(R)\to K_1(S)\to K_0(R,A)$$
$$\to K_0(R)\to K_0(S),$$

这是代数 K 理论中的重要正合列之一.

同余子群问题(congruence subgroup problem)　算术群理论中的一个重要问题. 同余子群问题在代数 K 理论的发展中是一个强大的动力,与 $K_1(R,A)$(参见"双环")的计算有十分密切的联系. 设 R 为环, A 为 R 的理想,环同态 $\pi:R\to R/A\equiv S$ 诱导出两个群同态:

$$\mathrm{GL}_n(\pi):\ \mathrm{GL}_n(R)\to\mathrm{GL}_n(S)$$
$$E_n(\pi):\ E_n(R)\to E_n(S),$$

它们的核 $\mathrm{GL}_n(R,A)\equiv\ker\mathrm{GL}_n(\pi)$ 与 $E_n(R,A)\equiv\ker E_n(\pi)$ 都称为 $\mathrm{GL}_n(R)$ 的同余子群. 所谓同余子群问题,即:在一个算术群(李群中带有算术性质的一类离散子群,如有限群、有限生成阿贝尔群、无挠的有限生成幂零群、有限生成的非交换自由群等都是算术群,当 R 为一个数域中的整元素环时 $\mathrm{SL}_n(R)$ 也是算术群)中是否每一个有有限指数的子群都含一个同余子群? 于是,对充分大的 n,

$$\mathrm{GL}_n(R,A)/E_n(R,A)\cong K_1(R,A).$$

对 R 的一切理想 A,计算 $K_1(R,A)$ 相当于确定 $\mathrm{GL}(R)$ 的一切正规子群.

同余子群(congruence subgroup)　见"同余子群问题".

切除引理(excision lemma)　研究 $K_i(R,A)$ $(i=1,2)$ 的重要工具. 且由此可得出 K_2, K_1, K_0 群的正合列,对研究这些群的结构有着重要意义. 切除引理断言:若环同态 $f:R\to T$ 为满同态且 R, T 分别有理想 A, B 使在 f 之下它们的元素是一一对应的,则 $K_2(f):K_2(R,A)\to K_2(T,B)$ 为满同态, $K_1(f):K_1(R,A)\to K_1(T,B)$ 为同构.

K_2, K_1, K_0 群的正合列(exact sequence of K_2-, K_1-, K_0-groups)　一类特殊的群正合列. 若环同态 $f:R\to T$ 为满同态且 R, T 分别有理想 A, B 使在 f 之下 A, B 的元素是一一对应的(即切除引理条件成立),则有群正合列:

$$K_2(R)\to K_2(T)\oplus K_2(R/A)\to K_2(T/B)\to K_1(R)$$
$$\to K_1(T)\oplus K_1(R/A)\to K_1(T/B)\to K_0(R)$$
$$\to K_0(T)\oplus K_0(R/A)\to K_0(T/B).$$

若 A 为环 R 的理想,

$$D=\{(r_1,r_2)\in R\times R\mid r_1\equiv r_2(\mathrm{mod}A)\}$$

为 R 的双环, $S=R/A$,则有群正合列:

$$K_2(R,A)\to K_2(R)\to K_2(S)\to K_1(R,A)$$
$$\to K_1(R)\to K_1(S)\to K_0(R,A)$$
$$\to K_0(R)\to K_0(S).$$

群 $\mathrm{SK}_1(R,A)$(group $\mathrm{SK}_1(R,A)$)　特殊怀特海群 $\mathrm{SK}_1(R)$ 概念的推广. 用于研究 K_1 群的有关理论. 设 A 为环 R 的理想, $\pi:R\to R/A$ 为自然同态, $D=\{(r_1,r_2)\mid(r_1,r_2)\in R\times R$ 使 $\pi(r_1)=\pi(r_2)\}=\{(r_1,r_2)\mid(r_1,r_2)\in R\times R$ 且 $r_1\equiv r_2(\mathrm{mod}A)\}$, $p_j(r_1,r_2)=r_j$, $j=1,2$. 记 $K_i(R,A)=\ker(K_ip_2)$, $i=0,1$, $\mathrm{GL}(R,A)=\ker\mathrm{GL}(\pi)=\{X\mid X\in\mathrm{GL}(R)$ 使 $X\equiv I(\mathrm{mod}A)\}$, $E(R,A)=\langle\{e_{ij}^a\mid a\in A\}\rangle$. 当 R 可换时,记 $\mathrm{SL}(R,A)=\{X\mid X\in\mathrm{GL}(R,A),\det X=1\}$,且定义 $\mathrm{SK}_1(R,A)=\mathrm{SL}(R,A)/E(R,A)$. 若 $U(A)=(R,A)^{\cdot}=\{r\mid r\in R^{\cdot}$ 使 $r\equiv1(\mathrm{mod}A)\}$,则有 $K_1(R,A)\cong U(A)\oplus\mathrm{SK}_1(R,A)$,这是 $K_1(R)\cong R^{\cdot}\oplus\mathrm{SK}_1(R)$ 的推广,其中 $\mathrm{SK}_1(R)=\mathrm{SL}(R)/E(R)$ 为

R 的特殊怀特海群. 于是, 对任意的 $n>1$, $SK_1(\mathbf{Z}, n\mathbf{Z})=1$.

K_2 群中的记号 $\{u,v\}$(symbol $\{u,v\}$ in K_2-groups) 刻画 K_2 群的一种记号. 设 R 为交换环, $\varphi: ST(R) \to E(R)$ 为使 $\varphi(X_{ij}(a))=e^a_{ij}$ 的自然满同态. 若 $A,B\in E(R)$ 且 $AB=BA$, 则有 $a,b\in ST(R)$ 使 $\varphi(a)=A, \varphi(b)=B$. 记 $A*B=aba^{-1}b^{-1}=[a,b]$. $A*B$ 与 a,b 的选取是无关的且 $A*B\in K_2(R)$. 特别地, 取 $u,v\in R^{\cdot}$ 且 $A=D_u=\mathrm{diag}(u,u^{-1},1,1,\cdots)$, $B=D_v'=\mathrm{diag}(v,1,v^{-1},1,\cdots)$, 记 $\{u,v\}=D_u*D_v'$. 这种记号 $\{u,v\}$ 有如下的重要性质: $\{u,v\}=\{v,u\}^{-1}$; $\{u_1u_2,v\}=\{u_1,v\}\{u_2,v\}$; $\{u,v_1v_2\}=\{u,v_1\}\{u,v_2\}$, 其中 $u_1,u_2,u,v_1,v_2,v\in R^{\cdot}$. 当 R 为域 F 时, $K_2(F)=\langle\{F^{\cdot},F^{\cdot}\}\rangle$, 即 $\{\{u,v\}\mid u,v\in F^{\cdot}\}$ 为 $K_2(F)$ 的生成集. 对交换环 R 上的洛朗多项式环 $R[x,y,x^{-1},y^{-1}]$, $\{x,y\}$ 生成 $K_2(R[x,y,x^{-1},y^{-1}])$ 的一个无限循环的直和项.

群同态 $K_1(R)\otimes K_1(R)\simeq K_2(R)$(group homomorphism $K_1(R)\otimes K_1(R)\simeq K_2(R)$) 代数 K 理论中的一种重要的群同态. 设 R 为交换环. 取
$\mathsf{A}=\mathrm{diag}(A\otimes I_n, A^{-1}\otimes I_n, I_m\otimes I_n, I)\in E(R)$,
$\mathsf{B}=\mathrm{diag}(I_m\otimes B, I_m\otimes I_n, I_m\otimes B^{-1}, I)\in E(R)$,
其中 $A\in GL_m(R)$, $B\in GL_n(R)$. 在 $\mathsf{AB}=\mathsf{BA}$ 时, 记 $\{A,B\}=\mathsf{A}*\mathsf{B}$. 当 $m=n=1$ 时此记号与 $\{u,v\}(u,v\in R^{\cdot})$ 是一致的. 对任意的 $m,n\geqslant 1$. $\{A,B\}\in K_2(R)$ 且满足 $\{A,B\}=\{B,A\}^{-1}$; $\{A,B_1B_2\}=\{A,B_1\}\{A,B_2\}$; $\{A_1A_2,B\}=\{A_1,B\}\{A_2,B\}$, 其中 $A,A_1,A_2\in GL_m(R)$, $B,B_1,B_2\in GL_n(R)$. 同时 $\{A,B\}$ 给出一个有用的群同态 $K_1(R)\otimes K_1(R)\simeq K_2(R)$. 于是, 有群同态:

$$K_i(R)\otimes K_j(R)\otimes K_k(R)\simeq K_{i+j+k}(R),$$

其中 $0\leqslant i+j+k\leqslant 2$.

群同态 $K_0(R)\otimes K_1(R)\simeq K_1(R)$(group homomorphism $K_0(R)\otimes K_1(R)\simeq K_1(R)$) 代数 K 理论中的一种重要的群同态. 设 R 为交换环, P 为有限生成投射 R 模且 $P\oplus Q\cong R^n$. 由

$$\mathrm{Aut}(P)\subset \mathrm{Aut}(P\oplus Q)\cong GL_n(R)\subset GL(R)$$

可得完全确定的群同态 $\mathrm{Aut}(P)\to K_1(R)$, 以及群同态 $K_0(R)\otimes K_1(R)\simeq K_1(R)$.

n 阶施坦贝格群中的记号 $W_{ij}(u)$(symbol $W_{ij}(u)$ in Steinberg group of dimension n) 研究 K_2 群结构的一种记号. 设 R 为环, 当 $n\geqslant 3$ 时, 由 n 阶初等矩阵的部分运算规律可定义群 $ST_n(R)$. 即 $ST_n(R)$ 为由 $\{X_{ij}(a)\mid i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n\}$ 按下述关系定义的乘法群:

$$X_{ij}(a)X_{ij}(b)=X_{ij}(a+b),$$

$$[X_{ij}(a),X_{kl}(b)]=\begin{cases}1=X_{ij}(0) & (i\neq l, j\neq k),\\ X_{il}(ab) & (i\neq l, j=k),\end{cases}$$

$\forall\, a,b\in R, 1\leqslant i,j,k,l\leqslant n$. 称 $ST_n(R)$ 为环 R 的 n 阶施坦贝格群. 由于 $\varinjlim ST_n(R)=ST(R)$, 所以也可以由此等价地定义 $K_2(R)$. 任取 $u\in R^{\cdot}$, 若

$$W_{ij}(u)=X_{ij}(u)X_{ji}(-u^{-1})X_{ij}(u)\quad (1\leqslant i\neq j\leqslant n).$$

则得 $ST_n(R)$ 的子群 $W_n=\langle W_{ij}(R^{\cdot})\rangle$. 用 $W_{ij}(u)$ 还可定义一个有用的记号

$$h_{ij}(u)=W_{ij}(u)W_{ij}(-1),$$

以及 W_n 的一个正规子群 $H_n=\langle h_{ij}(R^{\cdot})\rangle$. 取自然同态 $\varphi: ST(R)\simeq E(R)$ 在 W_n 上的限制 $\varphi|_{W_n}$, 若 $C_n=\ker\varphi|_{W_n}$, 则 $C_n=W_n\cap K_2(R)$ 且 C_n 在 $ST_n(R)$ 的中心内. 若记 $W(R)=\varinjlim W_n$, $H(R)=\varinjlim H_n$, $C(R)=\varinjlim C_n$, 则有

$$C(R)=W(R)\cap K_2(R)\subset H(R).$$

事实上, $C(R)$ 的结构是容易给出的: 若 $R^{\cdot}$ 是乘法交换的, 则 $C(R)=\langle\{u,v\}\mid u,v\in R^{\cdot}\rangle$. 因此, 对交换环 R, $K_2(R)=\langle\{\{u,v\}\mid u,v\in R^{\cdot}\}\rangle$ 的充分必要条件为 $K_2(R)\subset W(R)$. $W(R)$, $H(R)$, $C(R)$ 都是施坦贝格群 $ST(R)$ 的子群.

n 阶施坦贝格群(Steinberg group of dimension n) 见"n 阶施坦贝格群中的记号 $W_{ij}(u)$".

n 阶施坦贝格群中的记号 $h_{ij}(u)$(symbol $h_{ij}(u)$ in Steinberg group of dimension n) 见"n 阶施坦贝格群中的记号 $W_{ij}(u)$".

n 阶施坦贝格群的子群 W_n (subgroup W_n of Steinberg group of dimension n) 见"n 阶施坦贝格群中的记号 $W_{ij}(u)$".

W_n 的正规子群 H_n (normal subgroup H_n of W_n) 见"n 阶施坦贝格群中的记号 $W_{ij}(u)$".

W_n 的子群 C_n (subgroup C_n of W_n) 见"n 阶施坦贝格群中的记号 $W_{ij}(u)$".

施坦贝格群的子群 $W(R)$(subgroup $W(R)$ of Steinberg group) 见"n 阶施坦贝格群中的记号 $W_{ij}(u)$".

施坦贝格群的子群 $H(R)$(subgroup $H(R)$ of Steinberg group) 见"n 阶施坦贝格群中的记号 $W_{ij}(u)$".

施坦贝格群的子群 $C(R)$(subgroup $C(R)$ of Steinberg group) 见"n 阶施坦贝格群中的记号 $W_{ij}(u)$".

施坦贝格群的子群 $T(R)$(subgroup $T(R)$ of Steinberg group) 施坦贝格群 $ST(R)$ 的一种重要子群. 它是 $ST(R)$ 中与 $K_2(R)$ 只有一个公共元(单位元)的子群, 对刻画 $ST(R)$ 与一些环类的 K_2 群有重要作用. 若 $T(R)=T=\langle\{X_{ij}(u)\mid i<j\}\rangle$, 则 T 为

ST(R)的子群且 $T\cap K_2(R)=1$. 同时,ST$(R)=\langle T,W_{ij}(R^{\cdot})(i<j)=\langle T,W_{i,i+1}(R^{\cdot})\rangle\supset TWT$. 当 R 为除环时,ST$(R)=TWT$.

除环的K_2群(K_2-group of a division ring) 刻画除环性质的一类阿贝尔群. 设 R 为除环,则

$$K_2(R)=\langle\{\{u,v\}\mid u,v\in R^{\cdot}\text{ 且 }uv=vu\}\rangle.$$

特别地,若 R 为域,则 $K_2(R)=C=\langle\{R^{\cdot},R^{\cdot}\}\rangle$;若 R 为有限域,则 $K_2(R)=C=1$(平凡群). 对于域 R,马秋莫托(Matsumoto,H.)证明:作为阿贝尔群,$K_2(R)$由生成集$\{R^{\cdot},R^{\cdot}\}$与三个关系

$$\{u_1,u_2,v\}=\{u_1,v\}\{u_2,v\},$$
$$\{u,v_1,v_2\}=\{u,v_1\}\{u,v_2\},$$
$$\{u,1-u\}=1,u\neq 0,1$$

所确定.

域的K_2群(K_2-group of a field) 见"除环的 K_2 群".

一些半局部环的K_2群(K_2-groups of some semilocal rings) 刻画一类半局部环性质的阿贝尔群. 若 R 为半局部环,且 $R^{\cdot}$ 对乘法是交换的或 R 由 $R^{\cdot}$ 加法生成,则 $K_2(R)=\langle\{R^{\cdot},R^{\cdot}\}\rangle$. 因此交换的半局部环 R 之 K_2 群 $K_2(R)=\langle\{R^{\cdot},R^{\cdot}\}\rangle$.

施坦贝格群中的单项元(monomial elements in Steinberg group) 施坦贝格群中用于计算的一种元素. 设 R 为环,φ:ST$(R)\to E(R)$为自然同态. 若 $W\in$ST(R)使 $\varphi(W)$为单项矩阵(即 $\varphi(W)=PD$,其中 P 为一个置换矩阵而 D 为对角矩阵),则 W 称为单项元素.

施坦贝格群中的对角元(diagonal elements in Steinberg groups) 施坦贝格群中用于计算的一种元素. 设 R 为环,φ:ST$(R)\to E(R)$为自然同态. 若 $W\in$ST(R)使 $\varphi(W)$为对角矩阵,则 W 称为对角元素.

施坦贝格群中的记号$H_{ij}(a,b)$(symbol $H_{ij}(a,b)$ in Steinberg group) 表示施坦贝格群中的一种特殊的对角元. 对确定 K_2 群有重要作用. 设 R 为环,$a,b\in R$ 使 $\alpha=1+ab\in R^{\cdot}$,则 $\beta=1+ba\in R^{\cdot}$. 记 $H_{ij}(a,b)=X_{ji}(-b\alpha^{-1})X_{ij}(a)X_{ji}(b)X_{ij}(-a\beta^{-1})\in$ ST(R). 则在自然同态 φ: ST$(R)\to E(R)$下,$\varphi(H_{ij}(a,b))=\mathrm{diag}(u_1,u_2,\cdots)$,其中 $u_i=\alpha=1+ab$,$u_j=\beta^{-1}=(1+ba)^{-1}$,$u_k=1,\forall k\neq i,j$. 当 $ab=ba$ 时,$\varphi(H_{ij}(a,b))=\varphi(h_{ij}(\alpha))$,因此 $H_{ij}(a,b)h_{ij}(\alpha)^{-1}$ 为$K_2(R)$中的元素. 在一般的情况下,$H_{ij}(a,b)$具有下述的性质:

$$H_{ij}(a,b)=H_{ji}(-b,-a)^{-1},$$
$$H_{ij}(a,b+c+bac)=H_{ij}(a,b)H_{ij}(a\beta^{-1},\beta c),$$

其中 $a,b,c\in R$ 使$1+ab,1+ac\in R^{\cdot}$,$\beta=1+ba$.

$$H_{ij}(a,bc)^{-1}H_{jk}(b,ca)^{-1}H_{ki}(c,ab)^{-1}=1,$$

即$H_{ki}(c,ab)H_{jk}(b,ca)H_{ij}(a,bc)=1$,其中 $a,b,c\in R$ 使 $1+abc\in R^{\cdot}$.

K_2 群中的记号$\langle a,b\rangle$(symbol $\langle a,b\rangle$ in K_2-group) 确定 K_2 群的一种记号. 对域而言起着与$\{u,v\}$同样重要的作用. 设 R 为环,$a,b\in R$ 使 $1+ab=\alpha\in R^{\cdot}$ 且 $ab=ba$,若$\langle a,b\rangle=H_{ij}(a,b)h_{ij}(\alpha)^{-1}$,则$\langle a,b\rangle\in K_2(R)$且当 $\beta\in R^{\cdot}$ 使 $\alpha\beta=\beta\alpha$ 时,

$$\{\alpha,\beta\}=\langle a,b\rangle^{-1}\langle a\beta^{-1},\beta b\rangle,$$

$$\langle a,b\rangle=\begin{cases}1 & (b=0,1,\text{或 }a=0,-1),\\ \{\alpha,b\} & (b\in R^{\cdot}),\\ \{-a,\alpha\} & (a\in R^{\cdot}).\end{cases}$$

此外,$\langle a,b\rangle=\langle -b,-a\rangle^{-1}$;$\langle a,b\rangle\langle a,c\rangle=\langle a,b+c+bac\rangle$,其中 $a,b,c\in R$ 满足 $1+ab,1+ac\in R^{\cdot}$,$ab=ba,ac=ca$;$\langle a,bc\rangle\langle b,ca\rangle\langle c,ab\rangle=1$,其中 $a,b,c\in R$ 使 $1+abc\in R^{\cdot}$ 且 $abc=bca=cab$. 当 R 为域时,以$\{\langle a,b\rangle\mid a,b\in R\text{ 且 }1+ab\in R^{\cdot}\}$作生成集,以上述最后三个关于$\langle\ ,\ \rangle$的关系式及

$$\langle a,b\rangle=\begin{cases}1 & (b=0),\\ \{\alpha,b\} & (b\in R^{\cdot})\end{cases}$$

作关系可完全确定 $K_2(R)$.

施坦贝格群的子群$H(R,I)$(subgroup $H(R,I)$ of Steinberg group) 施坦贝格群中用于研究 K_2 群的一种子群. 它对局部环之 K_2 群的研究特别有用. 设 R 为环,I 为 R 的一个理想,定义$H(R,I)=\langle\{H_{ij}(a,b)\mid a,b\in R\text{ 使 }1+ab\in R^{\cdot}\text{ 且 }a\in I\}\rangle$,当 $I=R$ 时记 $H(R)=H(R,R)$. 当 I 在 R 的中雅各布森根 $J(R)$中时,

$$H(R,I)=\langle\{H_{ij}(a,b)\mid_{a\in I,b\in R}\}\rangle,$$

且对自然同态 π:$R\to R/I$,ker $(K_2\pi)\subset H(R,I)$. 若此时有 $K_2(R/I)\subset H(R/I)$,则 $K_2(R)\subset H(R)$. 因此,对局部环 R,$K_2(R)\subset H(R)$. 于是可以确定,对交换的局部环 R,有

$$K_2(R)=\langle\{\langle a,b\rangle\mid a,b\in R\text{使 }1+ab\in R^{\cdot}\}\rangle.$$

施坦贝格群的子群$S(R,I)$(subgroup $S(R,I)$ of Steinberg group) 研究 K_2 群的工具之一,与H(R,I)有密切的关系. 若 I 为环 R 的一个理想,定义 $S(R,I)=\langle\{X_{ij}(a)\mid_{\substack{a\in I\\ i\neq j}}\}\rangle$,则H$(R,I)\subset N_{\mathrm{ST}(R)}(S(R,I))\equiv\{h\mid hS(R,I)h^{-1}=S(R,I),\forall h\in$ ST$(R)\}$,且 $S(R,I)$H$(R,I)<$ST$(R,I)\equiv$ker(ST$(R)\to$ST(R/I)),其中 ST$(R)\to$ST(R/I)是由自然同态 $R\to R/I$ 诱导的. 当 I 在 R 的雅各布森根 $J(R)$中时,ST$(R,I)=S(R,I)$H(R,I). 因此,S(R,I)$\lhd$ ST(R,I)且 H$(R,I)\cong$ST$(R,I)/S(R,I)$.

施坦贝格群的正规子群ST(R,I)(normal subgroup ST(R,I) of Steinberg group) 见"施坦贝格群的子群 $S(R,I)$".

施坦贝格群的子群$T(R,I)$(subgroup $T(R,I)$

of Steinberg group） 施坦贝格群中子群 $T(R)$ 的推广. 设 I 为环 R 的理想，定义：

$$T(R,I)=T(R)\cap S(R,I)$$
$$=\langle\{X_{ij}(a)\mid i<j,a\in I\}\rangle,$$
$$T(R)=T(R,R).$$

类似地定义

$$T'(R,I)=\langle\{X_{ij}(a)\mid i>j,a\in I\}\rangle,$$
$$T'(R)=T'(R,R).$$

注意 $T(R,R)$ 正是 $\mathrm{ST}(R)$ 的子群 $T(R)$. 当 I 在 R 的雅各布森根 $J(R)$ 中时，

$$\mathrm{ST}(R,I)=T'(R,I)T(R,I)\mathrm{H}(R,I).$$

施坦贝格群的子群$H(R,I)$（subgroup $H(R,I)$ of Steinberg group） 施坦贝格群中子群 $H(R)$ 的推广. 设 I 为环 R 的理想，定义

$$H(R,I)=\langle\{h_{ij}(u)\mid u\in R^{\cdot}\text{ 且 }u\equiv 1\bmod I,i\neq j\}\rangle,$$
$$C(R,I)=H(R,I)\cap K_2(R),$$

则 $H(R)=H(R,R)$, $C(R)=C(R,R)$，且

$$C(R,I)=H(R,I)\cap\ker(K_2\pi),$$

其中 $\pi:R\to R/I$ 为自然同态. 又，

$$H(R,I)\subset H(R)\cap\mathrm{ST}(R,I),$$
$$C(R,I)\subset C(R)\cap\mathrm{ST}(R,I).$$

当 R 为交换环时，

$$C(R,I)=\langle\{\{u,v\}\mid u,v\in R^{\cdot},u,v\equiv 1\bmod I\}\rangle.$$

施坦贝格群的子群$C(R,I)$（subgroup $C(R,I)$ of Steinberg group） 见“施坦贝格群的子群 $H(R,I)$”.

$K_2(R)$ 的子群$C(R,I)$（subgroup $C(R,I)$ of $K_2(R)$） 对确定 K_2 群有用的子群. 设 I 为环 R 的理想，定义：

$$C(R,I)=\mathrm{H}(R,I)\cap K_2(R),$$
$$C(R)=C(R,R).$$

当 I 在 R 的雅各布森根 $J(R)$ 中时，$C(R,I)=\ker(K_2\pi)$，其中 $\pi:R\to R/I$ 为自然同态. 此时，若 $K_2(R/I)=C(R/I)$，则 $K_2(R)=C(R)$. 因此，若 R 为局部环，则 $K_2(R)=C(R)$. 对交换环

R, $C(R,I)=\langle\{\langle a,b\rangle\mid a,b\in R$ 使 $1+ab\in R^{\cdot}$ 且 $a\in I\}\rangle$；

对交换局部环 R，

$$K_2(R)=\langle\{\langle a,b\rangle\mid a,b\in R\text{ 使 }1+ab\in R^{\cdot}\}\rangle.$$

环 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 的 K_2 群（K_2-group of ring $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$） 整数环商环的 K_2 群. $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 是一类重要的环（$n>1$）. 它的 K_2 群一定为平凡的或同构于二阶循环群 $\mathbf{Z}_2$. 即

$$K_2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})=\begin{cases}1 & (4\nmid n),\\ \mathbf{Z}_2 & (4\mid n).\end{cases}$$

有理数域上的二进施坦贝格符号（2-adic Steinberg symbol on rational number field） 研究 K_2 群的一种记号. 任意的 $u\in\mathbf{Q}^{\cdot}$（有理数域）必可表为

$$u=(-1)^i 2^j 5^k\frac{n}{m},$$

其中 $m,n\equiv 1(\bmod 8)$, i,j,k 由 u 在 mod 2 意义下惟一确定. 又

$$v=(-1)^I 2^J 5^K\frac{N}{M}\in\mathbf{Q}^{\cdot},$$

$M,N\equiv 1(\bmod 8)$，记 $c(u,v)=(-1)^{-iI+jK+kJ}$（关于群 $\mathbf{Z}_2=\{\pm 1\}$），则 $c(u,v)$ 为一个施坦贝格符号，称为 $\mathbf{Q}$ 上的二进施坦贝格符号. 用它可得到一些有意义的结果：$\{-1,-1\}\neq 1$（在 $K_2(\mathbf{Q})$ 中；若有非零环同态 $R\to S<\mathbf{Q}$，则在 $K_2(R)$ 中 $\{-1,-1\}\neq 1$，因此对

$$R=\left\{\frac{n}{m}\,\middle|\, m,n\in\mathbf{Z},2\nmid m\right\},$$

在 $K_2(R)$ 中 $\{-1,-1\}\neq 1$；在 $K_2(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})$ 中 $\{-1,-1\}\neq 1$. 这一类结果在确定一些环的 K_2 群时是有用的.

实数域上的施坦贝格符号（Steinberg symbol on real number field） 研究 K_2 群的一种记号. 在实数域 $\mathbf{R}$ 上定义 $C:\mathbf{R}^{\cdot}\times\mathbf{R}^{\cdot}\to\{\pm 1\}$ 为

$$c(u,v)=\begin{cases}1 & (u>0\text{ 或 }v>0),\\ -1 & (u<0\text{ 且 }v<0),\end{cases}$$

则 $c(u,v)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的施坦贝格符号. 用它可证：在 $K_2(\mathbf{R})$ 中 $\{-1,-1\}\neq 1$；若有非零环同态 $R\to S<\mathbf{R}$，则在 $K_2(R)$ 中 $\{-1,-1\}\neq 1$.

整数环的 K_2 群（K_2-group of integral number ring） 最简单的一种 K_2 群. 整数环 $\mathbf{Z}$ 的 K_2 群 $K_2(\mathbf{Z})=\langle\{-1,-1\}\rangle\cong\mathbf{Z}_2$，即 $K_2(\mathbf{Z})$ 为二阶循环群. 因此，对任意自然数 n, $K_2(\mathbf{Z}^{n\times n})\cong\mathbf{Z}_2$，也是二阶循环群.

H 理想（H-ideal） 环的一种特殊的理想. 若 I 为环 R 的理想且使

$$\mathrm{ST}(R,I)=T'(R,I)T(R,I)H(R,I),$$

则称 I 为 R 的 H 理想. 当理想 I 在 R 的雅各布森（Jacobson, N.）根中时，I 为 R 的 H 理想等价于

$$H(R,I)=\mathrm{H}(R,I).$$

H 环（H-ring） 概括半局部环与阿廷半单环的一种环类. 若环 R 满足 $K_2(R)\subset H(R)$，则称 R 为 H 环. 这类环对环的直和是封闭的，且 H 环上的全阵环也是 H 环. 对交换的 H 环 R, $K_2(R)=\langle\{R^{\cdot},R^{\cdot}\}\rangle$. 此外，若 I 为环 R 的理想且 I 在 R 的雅各布森根中，同时 R/I 为 H 环，则 $K_2(R)\subset\mathrm{H}(R)$. 特别地，当 I 又为 R 的 H 理想时，R 必为 H 环.

施坦贝格群中的记号$C_i(u,v)$（symbol $C_i(u,v)$ in Steinberg group） 计算 K_2 群的一种记号. 若 R 为环，$u,v\in R^{\cdot}$，则对任意的 $j,k\neq i$, $[h_{ij}(u),h_{ik}(v)]$ 与 j,k 无关. 定义

$$C_i(u,v)=[h_{ij}(u),h_{ik}(v)]\ (j,k\neq i).$$

$C_i(u,v)$与$C_1(u,v)$的关系为

$$C_i(u,v)=W_{1i}(-1)C_1(u,v)W_{1i}(-1)^{-1}.$$

记$a_i(u)=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,u,1,\cdots)\in GL(R)$，其中在右边的对角矩阵中 $u\in R^{\cdot}$ 为第 i 个对角元，则对自然同态 $\varphi:ST(R)\to E(R)$，$\varphi(C_i(u,v))=a_i([u,v])$。一般地，当 $\alpha\in R^{\cdot\prime}=[R^{\cdot},R^{\cdot}]$时，$a_i(\alpha)\in E(R)$，且必有$b_1(\alpha)\in ST(R)$使 $\varphi(b_1(\alpha))=a_1(\alpha)$.

K_2 群中的记号$d(\alpha,\beta)$(symbol $d(\alpha,\beta)$ in K_2-group)　计算非交换环的 K_2 群的一种记号. 设 R 为环，$R^{\cdot\prime}=[R^{\cdot},R^{\cdot}]$，由条目"施坦贝格群 ST$(R)$中的记号 $C_i(u,v)$"知 $b_1(1)=1$，$b_1(\alpha)\in H(R)$，其中 α 为 $R^{\cdot\prime}$的任意元. 定义

$$b_i(\alpha)=W_{1i}(-1)b_1(\alpha)W_{1i}(-1)^{-1},$$

其中 $i\neq1$，$\alpha\in R^{\cdot\prime}$. 在此基础上定义 $d(\alpha,\beta)=b_1(\alpha)b_1(\beta)(\alpha\beta)^{-1}$，则 $d(\alpha,\beta)\in K_2(R)$，其中 $\alpha,\beta\in R^{\cdot\prime}$. 当 $\alpha=1$，或 $\beta=1$，或 $R^{\cdot}$ 对乘法可换时 $d(\alpha,\beta)=1$.

K_2 群中的记号$e(u,v)$(symbol $e(u,v)$ in K_2-group)　记号$\{u,v\}$的推广. 当 $uv=vu$，$u,v\in R^{\cdot}$ 时，$e(u,v)$就是$\{u,v\}$. 设 R 为环，$u,v\in\in R^{\cdot}$，定义 $e(u,v)=C_1(u,v)b_1([u,v])^{-1}$($b_1$ 的定义见"施坦贝格群 ST(R)中的记号 $C_i(u,v)$"). 这是 $K_2(R)$的一种元素. 对任意的环 R，

$$C(R)=\langle\{e(u,v),d(\alpha,\beta)\mid u,v\in R^{\cdot},\alpha,\beta\in R^{\cdot\prime}\}\rangle,$$

当 R 为 H 环时，

$$K_2(R)=\langle\{e(u,v),d(\alpha,\beta)\mid u,v\in R^{\cdot},\alpha,\beta\in R^{\cdot\prime}\}\rangle,$$

因此，对半局部环也有同样结果.

施坦贝格群的子群 U_R(subgroup U_R of Steinberg group)　研究 K_2 群的有用工具. 对任意环 R，定义 $U_R=\langle C_1(R^{\cdot},R^{\cdot})\rangle$，这是ST$(R)$的一个重要子群. 当 R 为 H 环时，有群正合列

$$1\to K_2(R)\to U_R\to R^{\cdot\prime}\to1,$$

其中 $R^{\cdot\prime}=[R^{\cdot},R^{\cdot}]$. 这在很大程度上决定了 H 环 R 的 K_2 群结构. 当 R 为交换 H 环(例如，R 为交换局部环)时，$K_2(R)\cong U_R$. 在 R 为除环时，U_R 可由下述生成集与关系完全决定：生成集 $C_1(R^{\cdot},R^{\cdot})$；关系：$C_1(u,1-u)=1$，其中 $u\in R^{\cdot}$，$u\neq0,1$，

$$C_1(uv,w)=C_1(uvu^{-1},uwu^{-1})C_1(u,w);$$

$$C_1(u,vw)C_1(v,wu)C_1(w,uv)=1,$$

其中 $u,v,w\in R^{\cdot}$.

H 环K_2 群的短正合列(short exact sequence for K_2-group of an H-ring)　见"施坦贝格群的子群 U_R".

交换 H 环的 K_2 群(K_2-groups of commutative H-rings)　见"施坦贝格群的子群 U_R".

有理数域上的施坦贝格符号$(\ ,\ )_P$ (Steinberg symbol $(\ ,\ )_P$ over rational number field)　确定 $K_2(\mathsf{Q})$的一种符号. 设 p 为一个素数，则对任意的 $0\neq a\in\mathsf{Q}$，必有 $v(a)\in\mathsf{Z}$ 使 $a=p^{v(a)}m/n$，其中$(m,p)=(n,p)=1$. 规定 $v(0)\equiv\infty$，其中 $v:\mathsf{Q}\to\mathsf{Z}\cup\{\infty\}$有如下性质：

$$v(ab)=v(a)+v(b),\quad\forall\ a,b\in\mathsf{Q};$$

$$v(a+b)\geqslant\min\{v(a),v(b)\},\quad\forall\ a,b\in\mathsf{Q},a+b\neq0.$$

因此，这是 Q 上的一种指数赋值，称为 Q 上的 p 进赋值. 记 $A_p=(\mathsf{Z}/p\mathsf{Z})^{\cdot}$ ($(p-1)$阶循环群)，若

$$d_v(x,y)=(-1)^{v(x)v(y)}\frac{x^{v(y)}}{y^{v(x)}}(\mathrm{mod}\,p);$$

当 p 为奇素数时，定义$(x,y)_p=d_v(x,y)$，则

$$(\ ,\ )_p:\ \mathsf{Q}^{\cdot}\times\mathsf{Q}^{\cdot}\to A_p$$

为 Q 上的一种施坦贝格符号；当 $p=2$ 时(上述 d_v 的定义是平凡的)对任意的 $x,y\in\mathsf{Q}^{\cdot}$ 必有下列的表示形式：

$$x=(-1)^i2^j5^k\frac{m'}{n'},\quad m',n'\equiv1(\mathrm{mod}\,8),$$

$$y=(-1)^I2^J5^K\frac{m''}{n''},\quad m'',n''\equiv1\ (\mathrm{mod}\,8).$$

取 $A_2=\{\pm1\}$，定义$(x,y)_2=(-1)^{iI+jK+kJ}$也得 Q 上的一种施坦贝格符号. 对任意的素数 p，对于离散拓扑，$(\ ,\ )_p$ 是连续的施坦贝格符号. 若 A 为一个豪斯多夫拓扑群，c：$\mathsf{Q}^{\cdot}\times\mathsf{Q}^{\cdot}\to A$ 为关于 Q 的 p 进拓扑连续的施坦贝格符号，则必有惟一的群同态 $h:A_p\to A$ 使 $h((x,y)_p)=c(x,y)$，$\forall\ x,y\in\mathsf{Q}^{\cdot}$，因此，又称 $(\ ,\ )_p$ 为 Q 上的一个泛连续施坦贝格符号. 上述定义与结果可通过离散赋值推广到一般的域. 对 Q，记 $\mathsf{A}_2=\{\pm1\}$，可证

$$K_2(\mathsf{Q})\cong A_2\oplus A_3\oplus A_5\cdots=\bigoplus_{p\text{为素数}}A_p.$$

有理数域的 K_2 群(K_2-group of rational number field Q)　见"有理数域上的施坦贝格符号$(\ ,\ )_p$".

域的 K_2 群元素不可数条件(uncountable condition for K_2-group of a field)　研究域的 K_2 群的有用结果. 估计 K_2 群元素的个数是 K_2 群研究中的重要课题之一. 设 F 为域，可证：$K_2(F)$的元素个数为不可数的等价于 F 的元素个数为不可数的，即 $|K_2(F)|>\aleph_0$ 的充分必要条件为 $|F|>\aleph_0$.

有理数域上施坦贝格符号的表示(represetations for Steinberg symbols of rational number field)　对有理数域 Q 上施坦贝格符号的一种刻画. 由$(\ ,\ )_p$ 给出的同态像乘积表示. 若 c：$\mathsf{Q}^{\cdot}\times\mathsf{Q}^{\cdot}\to A$为 Q 上的一个施坦贝格符号，其中 A 为一个阿贝尔群，则对每一个素数 p，必有惟一的群同态 $\varphi_p:A_p\to A$ 使

$$c(x,y)=\prod_{p\text{为素数}}\varphi_p((x,y)_p),\quad\forall\ x,y\in\mathsf{Q}^{\cdot}.$$

希尔伯特符号 $((\ ,\ ))_p$ (Hilbert symbol $((\ ,\ ))_p$)　由施坦贝格符号定义的一种符号，在数论中有重要应用. 若 p 为一个素数，用 Q 上的施坦贝格符号 $(\ ,\ )_p$ 定义

$$((x,y))_p=\begin{cases}(x,y)_2 & (p=2),\\ (x,y)_p^{(p-1)/2}(\mathrm{mod}\,p) & (p\neq 2).\end{cases}$$

$\forall\ x,y\in \mathrm{Q}^{\cdot}$，则 $((x,y))_p$ 只能取值 ±1，称 $((\ ,\ ))_p$ 为希尔伯特符号. 再定义 Q 上的一个施坦贝格符号

$$(x,y)_\infty=\begin{cases}1 & (x>0\text{ 或 }y>0),\\ -1 & (x<0\text{ 且 }y<0).\end{cases}$$

等价地，

$$(x,y)_\infty=\begin{cases}1 & (xX^2+yY^2=1\text{ 在 R 中有解}),\\ -1 & (xX^2+yY^2=1\text{ 在 R 中无解}).\end{cases}$$

则得著名的二次互逆律

$$(x,y)_\infty=\prod_{p\text{为素数}}((x,y))_p,$$

即　$$(x,y)_\infty\prod_{p\text{为素数}}((x,y))_p=1.$$

由此可直接推出数论中的高斯二次互逆律.

二次互逆律 (quadratic reciprocity law)　见"希尔伯特符号 $((\ ,\ ))_p$".

戴德金环上的 q 互逆律 (q-reciprocity law over a Dedekind domain)　研究戴德金环的有用工具. 设 $q\neq 0$ 为戴德金环 R 的一个理想，p 为 R 的一个极大理想. 记

$U_p(q)=\{x\mid x\in (R/pq)^{\cdot}\text{ 且 }x\equiv 1(\mathrm{mod}\,q/pq)\}$,

$U_p'(q)=\{a\in R\mid a\notin p,\text{且 }a\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)\}$.

若 C 为一个阿贝尔群，集合 $\{\chi_p\mid p$ 为 R 的极大理想，χ_p 为群同态：$U_p(q)\to C\}$ 满足如下条件：

1. 对任意的 $a\in U_p'(q)$，$\chi_p(a)^{v_p(1-a)}=1$，其中 v_p 为由 p 确定的赋值；

2. 若 $a\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$ 且 $0\neq b\in R$ 使 $aR+bR=R$，又

$$\prod_{b\in P}\chi_p(a)^{v_p(b)}=\prod_{a\in p}\chi_p(b)^{v_p(a)};$$

则称上面的群同态集合为取值在 C 中的 q 互逆律.

戴德金环上的美尼克记号 $\left[\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right]$ (Mennicke symbol $\left[\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right]$ over a Dedekind domain)　计算戴德金环 R 上 $\mathrm{SL}(R)/E(R)$ 的有用记号. 若 R 为戴德金环，$aR+bR=R$，$a,b\in R$ 且 $c,d,c',d'\in R$ 使 $ad-bc=1$，$ad'-bc'=1$，则

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_2(R),$$

且

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}a & b\\ c' & d'\end{pmatrix}(\mathrm{mod}\ E(R)).$$

定义

$$\left[\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right]=\overline{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}}(\mathrm{mod}\,E(R))\in \mathrm{SL}(R)/E(R)\subset K_1(R),$$

称 $\left[\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right]$ 为 R 上的美尼克记号. 于是，R 上的 q 互逆律与 R 上美尼克记号是一一对应的.

域上有理函数域的 K_2 群正合列 (exact sequence for K_2-group of rational function field over a field)　研究 K_2 群的有用工具. 若 $F(x)$ 为域 F 上的有理函数域，则有一个关于 K_2 群的可裂正合列

$$1\to K_2(F)\to K_2(F(x))\to \bigoplus_{\substack{0\neq p\text{为}F[x]\\ \text{的素理想}}}(F[x]/P)^{\cdot}\to 1.$$

高阶 K 群 (higher K-group)　格罗滕迪克群 (K_0 群)、怀特海群 (K_1 群)、施坦贝格群的中心 (K_2 群) 的推广及一般化. 代数 K 理论的重要研究对象. $n\geqslant 3$ 时，K_n 群称为高阶 K 群. 20 世纪 70 年代初期，米尔诺 (Milnor, W. J.)、介尔斯特 (Gersten, S. M.)、斯万 (Swan, R. G.)、卡若比 (Karoubi, M.) 和奎伦 (Quillen, D. G.) 等人分别独立地采用不同途径构造了高阶函子 $K_n(n\geqslant 3)$. 奎伦给出第一个有效的计算高阶 K 群的工具，并计算出有限域 F_q 上的高阶 K 群 $K_n(\mathrm{F}_q)$. 设 R 为 (含单位元的) 结合环，$\mathrm{GL}(R)$ 为 R 上无限阶的一般线性群，$\mathrm{BGL}(R)$ 为对离散群 $\mathrm{GL}(R)$ 的分类空间. $E(R)$ 为 $\mathrm{GL}(R)=\pi_1(\mathrm{BGL}(R))$ 的换位子群. 在同伦意义下，必有惟一的一个非循环映射 $f:\mathrm{BGL}(R)\to \mathrm{BGL}(R)^+$，使 $E(R)$ 为 $\pi_1(f)$ 的核. 环 R 的 K_i 群定义为空间 $\mathrm{BGL}(R)^+$ 的同伦群：$K_i(R)=\pi_i(\mathrm{BGL}(R)^+)$，$i\geqslant 1$.

例 1 (奎伦)

$$K_{2m}(\mathrm{F}_q)\cong\begin{cases}\mathrm{Z} & (m=0),\\ 0 & (m>0);\end{cases}$$

$$K_{2m-1}(\mathrm{F}_q)\cong \mathrm{Z}/(q^m-1)\mathrm{Z}.$$

例 2 (博雷尔 (Borel, A.)) 设 R 为数域 F 的整元环，$[F:\mathrm{Q}]=r_1+2r_2$，其中 r_1 为 F 到 R 的不同嵌入的个数，r_2 为 F 到 C 的不同嵌入的共轭对个数，则

$$K_i(R)\underset{Z}{\otimes}\mathrm{R}\cong\begin{cases}\mathrm{R} & (i=0),\\ \mathrm{R}^{r_1+r_2-1} & (i=1),\\ 0 & (i\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)),\\ \mathrm{R}^{r_2} & (i\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)),\\ 0 & (i\equiv 4(\mathrm{mod}\,4)\text{ 且 }i>0),\\ \mathrm{R}^{r_1+r_2} & (i\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)\text{ 且 }i>1).\end{cases}$$

K 群和 $\mathrm{GL}(R)$ 及有关群的同调群密切相关，事实上，有下述同构：$K_1(R)\cong H_1(\mathrm{GL}(R),\mathrm{Z})$，$K_2(R)\cong H_2(E(R),\mathrm{Z})$，$K_3(R)\cong H_3(\mathrm{ST}(R),\mathrm{Z})$. 这些同构表明：高阶 K 群的定义与巴斯的 K_1 群与米尔诺的 K_2 群的定义是一致的.

撰稿　刘木兰　佟文廷
审阅　刘木兰

域论与伽罗瓦理论

域与伽罗瓦理论(field and Galois theory)　抽象代数中较早出现的代数理论.它来源于代数方程的求根问题.早在伽罗瓦(Galois,E.)研究五次以上方程无根式解中就出现了域,但"域"(Körper)这个名称是戴德金(Dedekind,J. W. R.)首先使用的.系统研究域的理论始于韦伯(Weber,H.),他证明了克罗内克定理:"有理数域的有限阿贝尔扩域必为分圆域的子域",而域的公理系统是迪克森(Dickson,L. E.)与亨廷顿(Huntington,E. V.)分别于1903及1905年独立创立的.在韦伯以及亨泽尔(Hensel,K.)的影响下,施泰尼茨(Steinitz,E.)对抽象域进行系统的研究,他的工作于1910年以论文"域的代数理论"公布于世.这篇重要论文对域论及有关学科的发展产生了极大的影响.

域的扩张理论源于数域的扩张,复数域上任意n次方程在复数内有n个根,即代数基本定理,而对一般域F,若F上任意n次方程都有n个根,则称F为代数闭域.对于特征为$p>0$的域,不可约多项式也可能有重根,这就引出可分多项式,不可分多项式与可分、不可分扩域的概念.另一方面由于超越数的存在,在一般数域上也出现了代数元与超越元,从而产生超越扩张的概念和理论.施泰尼茨的一个基本结果是,每一个域都可以从它的素域出发,经添加超越元得到一个超越扩张,然后再添加代数元而得到(参见"纯超越扩张").

域的扩张理论与伽罗瓦理论紧密相关.它的基本思想是:用域的自同构群来研究域的构造,建立了可分正规扩域的子域和它的自同构群的子群间的一一对应关系,由方程的伽罗瓦群的可解性去判别该方程是否有根式解,从而得出大于四次的一般代数方程不能用根式解.

域的扩张

域(field)　代数学的基本概念之一.即具有两个运算的代数系.设F是至少含两个元的集合,在F中定义了两个二元运算:一个称加法,使F成为加群,它的单位元称为F的零元;一个称乘法,使F的非零元构成一个交换群,加法与乘法满足分配律,此时称F为域.例如,全体有理数、全体实数和全体复数在通常的加法与乘法下都构成域,分别称为有理数域、实数域和复数域.域是许多数学分支研究的基础,尤其对代数、代数数论、代数几何等更为重要.

子域(subfield)　域的特殊子集.若域F的一个子集合为S,对于F的加法与乘法也构成域,则称S为F的子域,而称F为S的扩域.F中至少含一个非零元的子集S是子域的充分必要条件为:对任意$a,b\in S$恒有$a-b$和$ab^{-1}(b\neq 0)$属于S.例如,有理数域是实数域及复数域的子域,集合

$$\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\text{ 是有理数}\}$$

是实数域的子域.

素域(prime field)　一种重要的域.指不含任何真子域的域.任何一个域F都有单位元e,考虑加群$\{0,\pm e,\pm 2e,\cdots,\pm me,\cdots\}$,它有两种可能:

1. 对任意非零整数m,$me\neq 0$,若$S=\{ne/me\mid m,n\text{ 为整数},m\neq 0\}$,则$S$是$F$的子域且同构于有理数域,此时称$F$的特征(数)为零.

2. 存在正整数m,$me=0$,若p是使$pe=0$的最小正整数,则p必为素数,称为F的特征(数).若$S=\{0,e,\cdots,(p-1)e\}$,则S是F的子域且与整数环模p的域$\mathbf{Z}_p$同构.当$F=S$时,称F是素域,因此任意域都含有一个素子域,它或者与有理数域$\mathbf{Q}$同构,或者与$\mathbf{Z}_p$同构.

域的特征(数)(characteristic of a field)　见"素域".

弗罗贝尼乌斯映射(Frobenius mapping)　在伽罗瓦理论中起着重要作用的映射.对特征为p的域F,映射$\pi:F\to F,x\to x^p$称为弗罗贝尼乌斯映射.实际上,π是F到它的子域$F^p=\{x^p\mid x\in F\}$的一个域同态.对于特征$p>0$的域,它是一个单一同态.若这个同态又是满同态,也就是$F=F^p$,则F是完备域.若π是单一同态,且是满同态,则π是F的一个自同构,称为弗罗贝尼乌斯自同构.对于有限域F而言,F在它的素子域F_p上的扩张的自同构群$\mathrm{Aut}(F\mid F_p)$是由弗罗贝尼乌斯自同构所生成.

弗罗贝尼乌斯自同构(Frobenius automorphism)　见"弗罗贝尼乌斯映射".

域的扩张(extension of a field)　域论的基本概念之一.若域K包含域F作为它的子域,则称K是F的一个扩张(或扩域),F称为基域,常记为K/F.此时,K可以看成F上的向量空间.研究扩域K(相对于基域F)的代数性质,是域论研究的一个基本内容.

若域E是F的扩域,K是E的扩域,则称E是域扩张K/F的中间域.若K/F是域扩张,S是K的子集,且$F(S)$是K的含F与S的最小子域,称

$F(S)$为 F 添加 S 的扩域. 当 $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$是有限集合时,$F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$称为添加 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 于 F 的有限生成扩域(或者 F 上的有限生成扩张). 它由一切形如

$$f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)/g(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

的元组成,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in S$,$f,g$ 是 F 上的 n 元多项式且

$$g(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\neq 0.$$

由于这个原因,当$F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$关于 F 的超越次数$\geqslant 1$ 时,$F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$也称为 F 上的代数函数域. 当 $S=\{\alpha\}$时,称 $F(\alpha)$为 F 的单扩张域,也称本原扩域. F 的有限代数扩域 K 是单扩域的充分必要条件是,扩域 K 与基域间存在有限个中间域. 这是施泰尼茨(Steinitz,E.)证明的.

基域(base field) 见"域的扩张".

扩域(extension field) 见"域的扩张".

中间域(intermediate field) 见"域的扩张".

有限生成扩张(finitely generated extension) 见"域的扩张".

代数函数域(algebraic function field) 见"域的扩张".

单扩张域(simple extension field) 见"域的扩张".

本原扩域(primitive extension field) 见"域的扩张".

域扩张的合成(composite of field extensions) 在域扩张性质研究中有着重要作用的概念. 设 K 与 K'是域 F 的两个扩张域,L 是 F 的另一个扩张. 若 σ,τ 分别是从 K,K'到 L 内的 F 嵌入,且由 K^σ,K'^τ 在 L 内生成的子域恰好为 L,则称 L 是 K 与 K'在 F 上的一个合成. 当 K,K'同是某个域 L 的子域时,K 与 K'的合成是 L 中包含它们的最小子域. 例如,对有限扩张 K/F,F 与 $K^p=\{x^p\mid x\in K\}$的合成为 K,当且仅当 K/F 是可分扩张.

代数元(algebraic element) 域论的基本概念之一. 设 K 是域 F 的扩域,K 中元 α 称为 F 上代数元,是指 α 为 F 上某非常量多项式 $f(x)$的根,即存在 F 中元 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 使

$$a_0+a_1\alpha+\cdots+a_n\alpha^n=0,$$

其中 $n>0,a_n\neq 0$. 若这样的多项式不存在,则 α 称为 F 上的超越元. 若 α 是 F 上的代数元,$F[x]$中以 α 为根的次数最低的首 1 多项式称为 α 的最小多项式,则其次数 n 称为 α 在 F 上的次数,α 称为 n 次代数元. 最小多项式在 F 上是不可约的.

超越元(transcendental element) 见"代数元".

最小多项式(minimal polynomial) 见"代数元".

n 次代数元(algebraic element of degree n) 见"代数元".

代数扩张(algebraic extension) 一类重要的域扩张. 设 E 是 F 的扩域,若 E 中元皆为 F 上的代数元,则称此域扩张为代数扩张,E 称为 F 的代数扩域,否则称为超越扩张,而 E 称为 F 的超越扩域. 代数扩张具有传递性. 当 α 是 F 上代数元时,其单代数扩域 $F(\alpha)$同构于$F[x]/(p(x))$,$p(x)$是 α 的最小多项式,$(p(x))$表 $F[x]$中由 $p(x)$生成的主理想.

超越扩张(transcendental extension) 见"代数扩张".

超越扩域(transcendental extension field) 见"代数扩张".

扩张次数(degree of extension) 决定扩域结构的一个数. 设 E 是 F 的扩域,E 作为 F 上向量空间的维数称为此域扩张的次数,记为$[E:F]$. 当$[E:F]<\infty$时,称此域扩张为有限扩张,当$[E:F]=\infty$时,称此域扩张为无限扩张,而扩域 E 分别称为有限扩域与无限扩域. F 的任何有限扩域必为代数扩域. 扩域的次数有如下重要关系:若 K 是 F 上扩域 E 的中间域,则

$$[E:F]=[E:K][K:F],$$

且$[E:F]<\infty$,当且仅当$[E:K]$与$[K:F]$都$<\infty$.

有限扩张(域)(finite extension (field)) 见"扩张次数".

无限扩张(域)(infinite extension (field)) 见"扩张次数".

二次扩张(quadratic extension) 一类重要的有限扩张. 二次扩张是指扩张次数为 2 的域扩张. 域 F 上的二次不可约多项式的分裂域是 F 的二次扩张. 设 K/F 是域扩张,K'是 K 的子域,F 上的每个二次多项式在 K'中可分解为一次因子的乘积,只要该多项式在 K 中有根,这样的 K'中的最小者,称为 F 在 K 中的二次闭包. 当 F 与它在代数闭包中的二次闭包一致时,称 F 为二次闭域.

二次闭包(quadratic closure) 见"二次扩张".

二次闭域(quadratic closed field) 见"二次扩张".

代数闭包(algebraic closure) 一个域的最大代数扩域. 若域 F 的代数扩域 Ω 为代数闭域,则称 Ω 为域 F 的一个代数闭包. 一个域 F 的代数闭包总是存在的,并且在 F 同构意义下惟一. 这个基本定理来自施泰尼茨(Steinitz,E.). 设 K 是域 F 的扩域,在 K 中 F 上代数元的全体组成的子域 A 称为 F 在 K 内的代数闭包,它是 F 在 K 内的最大代数扩

域. 特别地，若 $F=A$，则称 F 在 K 内是代数闭的.

域的代数闭包(algebraic closure of a field) 见“代数闭包”.

代数闭域(algebraically closed field) 一类重要的域. 指次数大于1的多项式均可分解的域. 若域 K 上多项式环$K[x]$中的每一个次数大于零的多项式在 K 中都有一个根，则称 K 为代数闭域. 从而在$K[x]$中每个次数大于零的多项式能分解为一次因式之积. 1910年，施泰尼茨(Steinitz, E.)在他发表的基本论文中首先证明：每个域都可以经代数扩张得到一个代数闭域.

线性相关的同态映射(linearly dependent homomorphic mappings) 伽罗瓦理论的重要概念. 设 K, K'是 F 的两个扩域，$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ 是当 K, K'作为 F 代数时，从 K 到 K'的代数同态(这样的同态称为扩域间的 F 同态)，若对 K'中某个元素组$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\neq(0, \cdots, 0)$，有

$$\sum_{j=1}^{n}\tau_j(x)\alpha_j = 0$$

对每个 $x\in K$ 成立，则称 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ 在 K'上是线性相关的；否则，称为线性无关的. 关于同态映射的相关性，戴德金(Dedekind, J. W. R.)给出一个基本定理是：从 K 到 K'的 n 个不同的同态，它们在 K'上是线性无关的. 该定理称为戴德金无关性定理.

扩域间的同态(homomorphism between extension fields) 见“线性相关的同态映射”.

线性无关的同态映射(linearly independent homomorphic mappings) 见“线性相关的同态映射”.

戴德金无关性定理(Dedekind's independence theorem) 见“线性相关的同态映射”.

扩域的自同构(automorphism of an extension field) 伽罗瓦理论的重要概念，它是建立扩域塔与子群塔之间对应关系的主要工具. 设 K, L 是 F 的两个扩域，K 到 L 上保持 F 中元不变的同构映射，称为扩域间的 F 同构. 若 $K=L$，则此 F 同构称为 K 的 F 自同构. 若 $G=G(K/F)$是 K 的一切 F 自同构的集合，则 G 对映射的乘法构成一个群，称为 K 的 F 自同构群.

扩域间的同构(isomorphism between extension fields) 见“扩域的自同构”.

扩域的自同构群(automorphism group of an extension field) 见“扩域的自同构”.

共轭映射(conjugate mapping) 刻画共轭域、共轭元的工具. 若域 F 的扩域 K 的代数闭包为 Ω，则 K 到 Ω 内的保持 F 中元不变的同态单射称为 K 到 Ω 内的 F 共轭映射. 若记 K 到 Ω 内的一切 F 共轭映射的个数为 $l(K/F)$，则可以证明它与代数闭包 Ω 的选取无关. 若 K 是 F 的代数扩域，E 为其中间域，则 $l(K/F)=l(K/E)\cdot l(E/F)$.

共轭域(conjugate fields) 一种同构扩域. 设 L 是域 F 的扩域，E, E'为其两个中间域，若存在一个 F 共轭映射 σ 使 $\sigma(E)=E'$，则称 E 与 E'是 F 上在 L 内的共轭域. 此定义等价于：E 与 E'是 F 同构的. 若 α, β 是 F 上同一既约多项式的根，则 $F(\alpha)$与 $F(\beta)$是 F 上的共轭域，亦即存在 F 共轭映射 σ 使 $\sigma(\alpha)=\beta$，这时称 β 与 α 是共轭元.

共轭元(conjugate elements) 见“共轭域”.

多项式分裂域(splitting field of a polynomial) 与多项式相关的一种域. 指域上一个多项式分解为一次因式之积的最小扩域. 设 K 是 F 的扩域，$f(x)$为 F 上次数非零的多项式，若适合：

1. 在 K 上，$f(x) = a\prod_{1}^{n}(x-\alpha_i), a\in F, \alpha_i\in K$ $(i=1,2,\cdots,n)$；.

2. $K=F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$；

则称 K 为多项式 $f(x)$的分裂域. 由此可知，分裂域 K 含 $f(x)$的全部根，所以也称为$f(x)$的根域. 域上多项式的分裂域是存在的，并且在同构意义下惟一.

根域(root field) 见“多项式分裂域”.

正规扩张(normal extension) 一种重要的代数扩张. 它与多项式的分裂域密切相关. 代数扩张 K/F 称为正规扩张，是指 $F[X]$中每个在 K 中有根的既约多项式，在 $K[X]$中可以分解为一次因子的乘积. 它等价于 K 的任意元 α 在 F 上的最小多项式在$K[x]$中可以分解为一次因子的乘积. 一个代数扩张 K/F 的正规闭包是指 F 的一个正规扩张，它包含 K 且它包含的 K 的任意真子域在 F 上都不是正规的. 值得注意的是，即使 $E/F, K/E$ 是正规扩张，也不能推出 K/F 是正规的. 例如，对域链

$$\mathrm{Q}\subseteq\mathrm{Q}(\sqrt{2})\subseteq\mathrm{Q}(\sqrt[4]{2}),$$

$$\mathrm{Q}(\sqrt{2})/\mathrm{Q}, \quad \mathrm{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathrm{Q}(\sqrt{2})$$

都是正规的，但 $\mathrm{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathrm{Q}$ 不是正规的.

正规闭包(normal closure) 见“正规扩张”.

可分多项式(separable polynomial) 一类重要的多项式. 指既约因式在任意扩域内无重根的多项式. 设 $f(x)$是域 F 上次数大于零的多项式，若 $f(x)$的每个既约因式在 F 的代数闭包内没有重根，则称 $f(x)$为可分多项式；否则，称为不可分多项式. 既约多项式 $f(x)$是不可分多项式的充分必要条件为 $f'(x)=0$. 特征为零的域上任何既约多项式均为可分多项式. 特征为 $p>0$ 的域上既约多项式 $f(x)$是不可分多项式的充分必要条件为存在某个 $h(x)$使得 $f(x)=h(x^p)$.

不可分多项式(inseparable polynomial) 见

"可分多项式".

多项式的不可分次数(degree of inseparability of a polynomial) 刻画不可分多项式与相应可分多项式次数差异的一个数.若 $f(x)$是特征为 $p>0$ 的域 F 上首 1 不可分的既约多项式,则必存在一个可分的不可约多项式 $g(x)\in F[x]$和非负整数 e,使

$$f(x)=g(x^{p^e}),$$

此时称 p^e 为 $f(x)$的不可分次数,e 称为 $f(x)$的不可分指数,$g(x)$的次数称为$f(x)$的约化次数.若约化次数为 m,则 $f(x)$在某个代数闭包内恰有 m 个不同的根,且每个根的重数为 p^e,有等式:$\deg f(x)$ =约化次数×p^e.当 $f(x)$的次数与其不可分次数相等,即约化次数为 1 时,称 $f(x)$为纯不可分多项式,这时 $f(x)$具有形式

$$x^{p^e}-a\ (a\in F),$$

它在代数闭包内的根完全相同.

多项式的不可分指数(exponent of inseparability of a polynomial) 见"多项式的不可分次数".

多项式的约化次数(reduced degree of a polynomial) 见"多项式的不可分次数".

纯不可分多项式(purely inseparable polynomial) 见"多项式的不可分次数".

纯不可分元(purely inseparable element) 代数扩域中的一种特殊元.设域 F 的特征 $p>0$,K/F 是代数扩张,$\alpha\in K$ 称为 F 上的纯不可分元是指 α 在 F 上的最小多项式为纯不可分多项式;它等价于存在整数 $e\geqslant 0$,使得 $\alpha^{p^e}\in F$.具有这种性质的最小整数 e,称为 α 的纯不可分指数.对于代数扩张 K/F,K 中所有在 F 上为纯不可分元的元素全体是 K 的一个包含 F 的子域,这个子域称为 F 在 K 中的纯不可分闭包.

纯不可分指数(exponent of a purely inseparable element) 见"纯不可分元".

纯不可分闭包(purely inseparable closure) 见"纯不可分元".

域上的代数相关集(algebraically dependent set over a field) 与超越基密切相关的一个概念.设 K 是 F 的域扩张,S 是 K 的子集.若 $y\in K$ 是 $F(S)$上的代数元,则称 y 在 F 上与 S 是代数相关的;否则,称为代数无关的.任何子集 $S\subseteq K$,若有某个 $x\in S$,它与 $S\setminus\{x\}$在 F 上代数相关,则称 S 是 F 上(或者关于 F)的一个代数相关集;否则,为 F 上的一个代数无关集(通常又称为超越集).当 $S=\{x\}$时,$\{x\}$成为 F 上的代数相关集等价于 x 是 F 上的代数元;$\{x\}$是 F 上的超越集等价于 x 是 F 上的超越元.

域上的代数无关集(algebraically independent set over a field) 见"域上的代数相关集".

超越集(transcendence set) 见"域上的代数相关集".

域的代数无关性(algebraic independence of fields over a given field) 元素的代数无关性概念到域的开拓.设 M 是域 F 的扩域,K,L 为其两个中间域,若 K 的任意一个在 F 上代数无关的子集也在 L 上代数无关(或等价地说,L 的任意一个在 F 上代数无关的子集也在 K 上代数无关),则称 K 与 L 在 F 上代数无关.

超越基(transcendence basis) 亦称极大超越集.域论的基本概念之一.它是线性代数中基概念的推广,是扩域的极大代数无关集.设 K 是域 F 的扩域,K 的一个子集 S 称为 K 在 F 上的超越基,是指:S 在 F 上代数无关,K 是 $F(S)$的代数扩域.域 F 的任一扩域 K 都存在超越基.超越基不是惟一的,但它的基数相等,称此基数为 K 在 F 上的超越次数,记为 $\mathrm{tr.deg}_F K$ 或 $\mathrm{tr.deg}(K/F)$.若 L 是 F 的扩域,K 为中间域,则

$$\mathrm{tr.deg}(L/F)=\mathrm{tr.deg}_F K+\mathrm{tr.deg}_K L.$$

代数扩域的超越基为空集,它的超越次数规定为零.

极大超越集(maximally transcendence set) 即"超越基".

超越次数(transcendence degree) 见"超越基".

纯超越扩张(purely transcendental extension) 一类重要的超越扩张.设扩域 K 在 F 上的超越基为 S,若 $K=F(S)$,则称此域扩张为纯超越扩张,K 为 F 的纯超越扩域.此时,K 与 F 上一组未定元 X 的多项式环 $F[X]$的分式域(商域)$F(X)$同构,其中 X 与 S 的基数相等.一般地,设 K 是 F 的任一扩域,若其超越基为 S,则 $F(S)$是 F 的纯超越扩域,K 为 $F(S)$的代数扩域.这样,一个域扩张可分成两种特殊的域扩张来研究,即 $F\subset F(S)\subset K$.超越次数为 1 的纯超越扩张称为单超越扩张.

纯超越扩域(purely transcendental extension of a field) 见"纯超越扩张".

单超越扩张(simple transcendental extension) 见"纯超越扩张".

有理函数域(rational function field) 一种重要的纯超越扩张.若 K 为域,则关于不定元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的多项式环 $K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$是整环,且它的商域 $K(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是由形如

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)/g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$(\forall f,g\in K[x_1,x_2,\cdots,x_n],g\neq 0)$$

的元素组成.因此,$K(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为域 K 关于不定元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的有理函数域,其中每个 f/g 称为域 K 上的有理函数.域扩张

$$K(x_1,x_2,\cdots,x_n)/K$$

是纯超越扩张.

域上的有理函数(rational function over a field) 见"有理函数域".

吕洛特定理(Lüroth theorem) 关于单纯超越扩张中间域的一条重要定理. 若 $K=F(x)$ 是域 F 的一个单超越扩域, E 是其中间域且 $E\neq F$, 则必存在 F 上超越元 t, 使 $E=F(t)$, 此为吕洛特(Lüroth, P.)所证明的一个定理, 其元素 t 称为中间域的吕洛特元素. 但是, 对多元纯超越扩张 E/F, 此定理是无效的.

吕洛特元素(Lüroth's element) 见"吕洛特定理".

域的线性分离性(linear disjointness of fields) 比域的代数无关更强的概念. 设 K,L 是域 F 的两个扩域, 它们都含于同一个扩域 Ω 之内. 若 K 中任何一个在 F 上是线性无关的元素组, 在 L 上仍然保持线性无关, 则称 K 与 L 在 F 上(或关于 F)是线性分离的. 若 K 与 L 在 F 上是线性分离的, 则它们在 F 上是代数无关的. 对于含在同一个扩域内的两个域 K,L, 若它们在 $K\cap L$ 上是线性分离的, 则可称 K 与 L 是线性分离的. 线性分离性的判断, 可以如下分阶段进行. 若 K_1 是 K 的子域, $F\not\subseteq K_1$, 则 K 与 L 在 F 上成为线性分离的充分必要条件是:

1. K_1 与 L 在 F 上是线性分离的.
2. K 与 K_1L 在 K_1 是线性分离的.

可分扩张(separable extension) 一种重要的域扩张. 其特征为 p 的域 F 的任意扩张 K/F, Ω 是 K 的代数闭包, 若 K 与

$$F^{p^{-1}}=\{\alpha\in\Omega\mid\alpha^p\in F\}$$

在 F 上是线性分离的, 则称 K/F 是可分扩张. 当 F 是完备域时, F 上任何扩张都是可分扩张. 当 K/F 是代数扩张时, 若 $\alpha\in K$ 在 F 上的最小多项式是可分多项式, 则称 α 是(F 上的)可分代数元(简称 F 上可分元). 若 K 中每个元均为 F 上可分元, 则称 K 是 F 上可分扩张. 若 K/F 有一个超越基 S, 使得 $K/F(S)$ 是可分的, 则称 S 是可分超越基. 若 K/F 有这样一个可分超越基, 则称此扩张 K/F 是可分生成的. 完备域上的有限生成扩张均为可分生成扩张. 可分扩张具有传递性. 当 K/F 是有限生成, 而且是可分扩张时, K/F 是可分生成的. 反之, 可分生成的扩张必然是可分扩张.

代数扩域的可分元(separable element of an algebraic extension field) 见"可分扩张".

可分超越基(separating transcendence basis) 见"可分扩张".

可分生成扩张(separably generated extension) 见"可分扩张".

可分闭包(separable closure) 一种特殊的代数扩域. 即域上最大的可分代数扩域. 设 K 是 F 的代数扩域, K 内所有 F 上的可分元组成的子域 S 称为 F 在 K 内的可分闭包, 它是 F 在 K 内可分扩域的最大者. 若 K 是 F 的代数闭包, 则称 F 在 K 内的可分闭包为 F 的可分闭包, 记为 F_{sep}, 它除 F 同构外是惟一的. 利用可分闭包, 可将一个代数扩张分为一个可分扩张和一个纯不可分扩张来研究.

正则扩张(regular extension) 一类特殊的可分扩张. 设 $\hat{F}$ 是域 F 的代数闭包, K 是 F 的扩域. 若 K 与 $\hat{F}$ 在 F 上是线性分离的, 则称 K/F 为正则扩张. K/F 成为正则扩张, 当且仅当 F 在 K 中是代数封闭的, 同时 K/F 是可分扩张. F 上的纯超越扩张都是正则扩张. 特别地, 当 K 与 F 的可分闭包 $\hat{F}_S$ 在 F 上为线性分离时, 称 K/F 为准素扩张. K/F 成为正则扩张, 等价于 K/F 是准素扩张, 同时又是可分扩张.

准素扩张(primary extension) 见"正则扩张".

施泰尼茨域塔(Steinitz field tower) 一类重要的域塔. 设 K 是域 E 的完备子域, B 是 E 的 p 基, F 是 $K(B)$ 在 E 中的代数闭包, T 是 E/F 的超越基. 对任何整数 $n\geqslant 0$, 若

$$S_n=\{\lambda\in E\mid\lambda^{p^n}\text{ 在 }F(T)\text{ 上是可分的}\},$$

则 S_n 是一个域, 且 $S_n^p\subseteq S_{n-1}$ 以及

$$E=\bigcup_{n=0}^{\infty}S_n.$$

这个域塔 $S_0\subseteq S_1\subseteq\cdots\subseteq S_n\subseteq\cdots$ 称为施泰尼茨域塔. 它广泛地应用于研究可分扩张.

完备域(perfect field) 亦称完全域. 用可分性来刻画的一类域. 一个域 F, 若它的每个代数扩张都是可分的, 则称 F 是完备域; 否则, 称为不完备域. 代数闭域、特征为 0 的域都是完备域. 特征为 $p>0$ 的域是完备的, 当且仅当 $F^p=F$. 完备域上任何代数扩张仍然是完备域. 给定特征为 p 的域 F,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}F^{p^n}$$

是 F 的完备子域, 且是 F 的极大完备子域. 当 $p>0$ 时, F 的代数闭包 $\overline{F}$ 中包含 F 的最小完备子域, 称为 F 的完备闭包. 域 F 的完备闭包为

$$F^{p^{-\infty}}=\bigcup_{n=1}^{\infty}F^{p^{-n}}.$$

完全域(perfect field) 即"完备域".

完备子域(perfect subfield) 见"完备域".

完备闭包(perfect closure) 见"完备域".

导子(derivation) 从数学分析中移植于代数系统, 用于讨论一般可分扩张的一种运算. 设 L 是 K 的扩域, 映射 $D:K\to L$, 若满足:

$$D(x+y)=D(x)+D(y),$$
$$D(xy)=xD(y)+yD(x),$$

则称 D 是 K 的一个 L 值导子. 在 $L=K$ 时,或不需要特别强调某个 L 时,可以径称导子. 若 K/F 是域扩张,K 的求导 D 在 F 上的限制 $D'=D|_F$ 是 F 的求导,则称 D 是 D' 在 K 上的拓展. 对特征 $p\neq 0$ 的域 F,K/F 成为可分扩张,当且仅当 F 的每个导子都能拓展为 K 的导子.

导子的拓展(extension of derivation) 见"导子".

纯不可分扩张(purely inseparable extension) 一种重要的代数扩张. 设 K/F 是代数扩张,若 K 中每个元均为 F 上的不可分元,则称这个扩张为纯不可分扩张. 域的代数扩张 K/F 是纯不可分的充分必要条件为 F 在 K 中的可分闭包就是 F. 特别地,当 F 的特征为 0 时,K/F 是纯不可分的,当且仅当 $K=F$;当 F 的特征 $\neq 0$ 时,K/F 为纯不可分的,当且仅当 F 共轭映射的个数 $l(K/F)=1$. 对于代数扩张 K/F,若 F 在 K 中的可分闭包为 S,则K/S为纯不可分扩张,而S/F为可分扩张. 扩张次数$[K:S]$,$[S:F]$分别称为 K 在 F 上的不可分次数与可分次数,记为$[K:F]_i$,$[K:F]_s$. 纯不可分扩张具有传递性. 当 K/F 是有限扩张时,

$$[K:F]=[K:F]_i\cdot[K:F]_s.$$

域扩张的可分次数(degree of separability of field extension) 见"纯不可分扩张".

域扩张的不可分次数(degree of inseparability of field extension) 参见"纯不可分扩张". 这个概念还可推广到有限生成的域扩张. 设 K/F 是有限生成的,且 S 是 K/F 的一个超越基. 此时有不可分次数$[K:F(S)]_i$. 当 S 遍历 K/F 所有的超越基时,称

$$\min_S([K:F]_i)$$

为 K/F 的怀尔不可分次数,记为$[K:F]_i$. 一个基本的事实是:在 K/F 的任何一个有限生成元素组中,必有 K/F 的一个超越基 S,使得

$$[K:F(S)]_i=[K:F]_i.$$

扩域的怀尔不可分次数(Weil's order of inseparability of an extension) 见"域扩张的不可分次数".

纯不可分扩张的指数(exponent of a purely inseparable extension) 亦称纯不可分扩张的高度. 刻画域扩张纯不可分程度的一个数. 设 K/F 是纯不可分扩张,K 的特征 $p\neq 0$,若 K 中元的纯不可分次数有最大值 h,则称 K 在 F 上的纯不可分扩张的指数为 h,也记为 $h(K/F)$;否则,称K/F的指数是无限的. $h(K/F)\leqslant 1$ 的充分必要条件为 $F^p\subseteq F$. 若 F 的特征为 p,K 是 F 的任一扩张,则 K 在 $F(K^p)$上是指数$\leqslant 1$ 的纯不可分扩张. 若 $x\in K$ 的纯不可分指数 $e(x)=h(K/F)$,则称 x 在 K/F 中是正规的. K 中的元素列 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 称为 K/F 中的正规序列,若对所有的 $i=1,2,\cdots,r$,x_i 在 K/F_{i-1}中是正规的,且 $x_i\notin F_{i-1}$,其中 $F_0=F$,$F_i=F(x_1,x_2,\cdots,x_i)$. 若 K/F 中存在某个正规序列 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 使得

$$K=F(x_1,x_2,\cdots,x_r),$$

则称 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 是扩张 K/F 的正规生成列. 每个有限纯不可分扩张都存在正规生成列.

纯不可分扩张的高度(height of a purely inseparable extension) 即"纯不可分扩张的指数".

(纯不可分扩张的)正规元(normal element (in a purely inseparable extension)) 见"纯不可分扩张的指数".

(纯不可分扩张的)正规序列(normal sequence (in a purely inseparable extension)) 见"纯不可分扩张的指数".

(纯不可分扩张的)正规生成列(normal generating sequence (in a purely inseparable extension)) 见"纯不可分扩张的指数".

相对 p 基(relative p-basis) 用于研究特征为 $p\neq 0$ 的域扩张. 设 K/F 是特征为 $p\neq 0$ 的扩域,$E=K^p(F)$. 当以 K 中有限子集$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$添入 E 后,得到的子域 $E(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$必然满足

$$[E(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n):E]\leqslant p^n.$$

若有

$$[E(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n):E]=p^n$$

成立,则称$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$在 K/F 中是相对 p 无关的;否则,称为相对 p 相关的. 对于 K 的子集 S,若它的每个有限子集都是相对 p 无关的,则称 S 在 K/F 中是相对 p 无关的;否则,称为相对 p 相关的. 称元素 α 相对 p 相关于 S,是指

$$\alpha\in K^p(F,S)=E(S).$$

若 B 是 K/F 的一个相对 p 无关子集,且有 $K=E(B)$,则称 B 是 K/F 的一个相对 p 基. K/F 的任何一个相对 p 无关子集都可以补充成一个相对 p 基. 任何两个相对 p 基都有相同的基数,这个相同的基数称为扩张 K/F 的不完备次数. 当不完备次数为 0 时,即 $K=K^p(E)$时,称 K/F 为相对完备的. 可分代数扩张就是相对完备扩张的一个特例. 特别地,在 $F=K^p$ 时,以上诸概念在称谓上分别简化成在 K 中是 p 无关的,p 相关的,p 基,以及 K 的不完备次数. 又,若$[K:K^p]=\infty$,则称 K 是 ω 不完备的.

相对 p 相关(relatively p-dependent) 见"相对 p 基".

相对 p 无关(relatively p-independnet) 见"相对 p 基".

域扩张的不完备次数(imperfection degree of a field extension)　见"相对 p 基".

相对完备(relatively perfect)　见"相对 p 基".

***p* 无关**(p-independent)　见"相对 p 基".

***p* 基**(p-basis)　见"相对 p 基".

域的不完备次数(imperfection degree of a field)　见"相对 p 基".

ω 不完备的(ω-imperfect)　见"相对 p 基".

分离相对 *p* 基(separating relative p-basis)　一种特殊的相对 p 基. 设 B 是 K/F 的一个相对 p 基. 当 $K/F(B)$ 是一个可分代数扩张时,称 B 是 K/F 的一个分离相对 p 基;又,若 K/F 的每个相对 p 基都是分离相对 p 基,则称 K/F 是相对分离的,例如,具有有限分离超越基的域扩张就是相对分离的. 一种更为特殊的情形是:若对于 K/F 的每个相对 p 基 B,都有 $K=F(B)$,则称 K/F 是一个可靠扩张. K/F 成为可靠扩张,当且仅当对任何一个相对 p 基 B,皆有 $K^p\subseteq F(B)$.

相对分离扩张(relatively separated extension)　见"分离相对 p 基".

可靠扩张(reliable extension)　见"分离相对 p 基".

模扩张(modular extension)　比可分扩张更广泛的一类域扩张. 特征为 $p\neq 0$ 的域扩张 K/F,若对于每个整数 $n\geqslant 1$,K^{p^n} 与 F 都是线性分离的,则称为模扩张. 可分扩张就是模扩张的一个例子. 当 F 上每个域扩张都是模扩张时,F 就称为模完备域. F 成为模完备域,当且仅当 $[F:F^p]\leqslant p$. 模完备域有一个类似于完备域的性质:模完备域的代数扩域仍然是模完备域. 就纯不可分扩张 K/F 而言,K 上存在一个惟一的极小扩域 L,使得 L/F 成为模扩张. 这个 L 称为 K/F 的模闭包. 满足

$$K\cap F^{p^{-1}}=F$$

的不可分扩张 K/F 称为例外扩张. F 成为模完备域的另一个充分必要条件,是 F 上不存在例外扩张.

模完备域(modularly perfect field)　见"模扩张".

模闭包(modular closure)　见"模扩张".

例外扩张(exceptional extension)　见"模扩张".

本原元素定理(the theorem of the primitive element)　判定单扩张的重要命题. 是对代数扩张在什么条件下为单扩张问题的一个广泛回答. 若

$$K=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$$

是域 F 的代数扩域,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为 F 上可分元,则存在一个元素 $\theta\in K$,使得 $K=F(\theta)$,其中 θ 称为本原元素. 特别地,有限次可分扩域必为单扩域,此为本原元素定理. 施泰尼茨(Steinitz,E.)给出更一般的定理:有限次扩张是单扩张的充分必要条件为其中间域的个数有限.

本原元素(primitive element)　见"本原元素定理".

域多项式(field polynomial)　一种特殊多项式. 指在域扩张下,由一个元素所决定的多项式. 一个有限域扩张 K/F,K 可以看成 F 上的有限维向量空间. 设 $\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$ 是它的一个基,对于 $x\in K$,

$$w_ix=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

确定 K/F 的一个线性变换. 系数矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征多项式

$$f(x)=\det(Ex-A)$$

称为 x 的域多项式. x 的域多项式与 x 所在的域有关,而与基的选取无关. 若 $f(x)$ 是 $x\in K$ 的域多项式,$m(x)$ 是 x 在 F 上的极小多项式,则有 $f(x)=(m(x))^n$,其中 $n=[K:F(x)]$. $u\in K$ 的域多项式在 F 上是不可约的,当且仅当 $u\in K$ 成为 K/F 的本原元.

域判别式(field discriminant)　判别域扩张可分性的一种工具. 设 $\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$ 是有限域扩张 K/F 的一个基,$T_F^K(a)$ 表示元素 $a\in K$ 在 F 上的迹(参见"范(域论)"),行列式 $\det(T_F^K(w_iw_j))$ 称为基 $\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$ 的判别式. 因为 K/F 的任意两个基的判别式之间,只差 F 中一个非零元的平方,所以称域 K/F 的判别式,它为 0 或不为 0. 对于有限扩张 K/F,K/F 是可分的充分必要条件是 K/F 的判别式不为 0.

拓扑域(topological field)　具有拓扑结构的域. 若 F 是一个域,同时为一个拓扑空间,而且 F 中的代数运算在拓扑空间 F 中是连续的,即:对任意的 $a,b\in F$,及 $a-b,ab$ 的任意邻域 W,W',存在 a,b 的邻域 U,V 使得

$$U-V\subseteq W,\quad UV\subseteq W';$$

当 $a\neq 0$ 时,对 a^{-1} 的任一邻域 W,存在 a 的邻域 U,使得 $U^{-1}\subseteq W$,则称 F 是拓扑域. 亨泽尔(Hensel,K.)于 1904 年发表的有关 p 进数域的论文被认为是有关拓扑域的最早的研究.

形式幂级数域(field of formal power series)　一类重要的域. 给定域 F,所有形如

$$a(X)=\sum_{i=r}^{\infty}a_iX^i\quad(a_i\in F,a_r\neq 0)$$

的元素(称为 F 上的形式幂级数)的全体 $F((X))$,对其中元素

$$a(X)=\sum_{i=r}^{\infty}a_iX^i,\quad b(X)=\sum_{i=r'}^{\infty}b_iX^i,$$

规定它们的和与积分别为:

$$a(X)+b(X)=\sum_{i=t}^{\infty}(a_i+b_i)X^i,$$

$$a(X)b(X)=\sum_{i=(r+r')}^{\infty}\Big(\sum_{j+j'=i}(a_jb_{j'})\Big)X^i,$$

其中 t 是所有使 $a_i+b_i\neq 0$ 的 i 中的最小者，则 $F((X))$ 成为一个域，称为 F 上的形式幂级数域. F 上的形式幂级数域是 $F(X)$ 关于 X 进赋值的完全域. 这个事实最初是哥克哈尔(Gokhale，V. D.)于1922年发现的.

域上的形式幂级数(formal power series over a field)　见“形式幂级数域”.

有限域(finite field)　亦称伽罗瓦域. 是仅含有限个元素的域，它是伽罗瓦(Galois，E.)于18世纪30年代研究代数方程根式求解问题时引出的. 有限域的特征数必为某一素数 p，因此它含的素域同构于 $\mathbf{Z}_p$. 若 F 是特征为 p 的有限域，则 F 中元素的个数为 p^n，n 为某一正整数. 元素个数相同的有限域是同构的. 因此，通常用 $\mathrm{GF}(p^n)$ 表示 p^n 元的有限域. $\mathrm{GF}(p^n)$ 的乘法群是 (p^n-1) 阶的循环群. 有限域在近代编码、计算机理论、组合数学等各方面有着广泛的应用.

伽罗瓦域(Galois field)　即“有限域”.

希尔伯特不可约性定理(Hilbert irreducibility theorem)　在伽罗瓦理论中占有重要地位的一个定理. 对有理数域 $\mathbf{Q}$ 上两组不定元 $t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_s$ 的多项式环 $\mathbf{Q}[t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_s]$，希尔伯特(Hilbert，D.)证明：若

$$f\in\mathbf{Q}[t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_s]$$

是不可约多项式，则存在无限多组 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in\mathbf{Q}^n$，使得 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n;x_1,x_2,\cdots,x_s)$ 为 $\mathbf{Q}[x_1,x_2,\cdots,x_s]$ 中的不可约多项式. 这个定理称为希尔伯特不可约性定理. 除有理数域外，这个定理对另外一些域也成立.

对任意域 F 及 F 上两组不定元 $t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_s$，设 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 是 $F(t_1,t_2,\cdots,t_n)[x_1,x_2,\cdots,x_s]$ 中的不可约多项式，$g\in F[t_1,t_2,\cdots,t_n]$ 是非零多项式，所有使得 $g(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq 0$，$f_i(a_1,a_2,\cdots,a_n;x_1,x_2,\cdots,x_s)(i=1,2,\cdots,m)$ 有定义且在 $F[x_1,x_2,\cdots,x_s]$ 中不可约的 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的集合，是 F^n 的子集，称为 F^n 的希尔伯特子集，有时也称为 F 的希尔伯特集，记为 $H_F(f_1,f_2,\cdots,f_m;g)$. 若 F 的希尔伯特集非空，则称 F 是希尔伯特域. 希尔伯特域必是无限域，而且它的任意有限可分扩张仍然是希尔伯特域. 特别地，整体域和一个无限域上几个变元的函数域是希尔伯特域，它们称为经典希尔伯特域. 若不可约多项式

$$f_1,f_2,\cdots,f_m\in F[t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_s]$$

关于变元 x_i 是可分的且首1的，集合

$$H_F(f_1,f_2,\cdots,f_m;g)$$

称为 F 的可分希尔伯特集. 若域 F 的形式为 $H_F(f)$ 的可分希伯特集非空，则称 F 为可分的希尔伯特域.

希尔伯特集(Hilbert set)　见“希尔伯特不可约性定理”.

希尔伯特域(Hilbertian field)　见“希尔伯特不可约性定理”.

经典希尔伯特域(classical Hilbertian field)　见“希尔伯特不可约性定理”.

可分希尔伯特集(separable Hilbert set)　见“希尔伯特不可约性定理”.

可分希尔伯特域(separably Hilbertian field)　见“希尔伯特不可约性定理”.

C_i 域(C_i-field)　一个概括代数闭域的重要概念. 设 F 是一个域，若 F 上任意一个 n 元 d 次齐次方程，只要 $n>d^i$，在 F 中就有非零解，则称 F 是个 C_i 域，i 为0或正整数. 代数闭域是 C_0 域. 代数闭域上超越次数为 j 的扩张域是 C_j 域(曾-兰定理). C_i 域这个概念最初出自曾炯之于1936年发表的论文；1951年，兰(Lang，S.)重新发现. 当前使用的名称和记法是兰所引进的.

C_0 域(C_0-field)　见“C_i 域”.

曾-兰定理(Tsen-Lang's theorem)　见“C_i 域”.

拟代数闭域(quasi-algebraically closed field)　一类特殊的域. C_1 域的旧称，始用于20世纪30年代. 这个名称的涵义可由下述事实认知：拟代数闭域的任何代数扩张仍为拟代数闭域. 有限域是拟代数闭域(谢瓦莱定理). 代数闭域上的单元代数函数域是拟代数闭域(曾炯之定理，简称曾定理).

曾定理(Tsen's theorem)　见“拟代数闭域”.

谢瓦莱定理(Chevalley's theorem)　刻画域扩张的一个重要定理. 这是阿廷(Artin，E.)提出的猜测，经谢瓦莱(Chevalley，C.)于1935年证明. 该定理断言：有限域是拟代数闭域.

撰　稿　朱元森　张人智　周永新
审　阅　许永华　杨劲根　戴执中

伽罗瓦理论

伽罗瓦理论(Galois theory)　以伽罗瓦(Galois，E.)的名字命名的，用群论观点研究代数方程求解的理论. 它源于代数方程的根式解问题. 早在公元前几世纪，巴比伦人用配方法解二次方程之后，经历两千多年的漫长岁月，直到16世纪意大利数学家

才给出三次方程的求根公式，即卡尔达诺(Cardano, G.)公式. 其后，卡尔达诺的学生费拉里(Ferrari, L.)又得出四次方程的求解方法. 于是，人们推断五次方程也存在根式解. 许多数学家都曾尽力寻求，如欧拉(Euler, L.)、拉格朗日(Lagrange, J.-L.)、鲁菲尼(Ruffini, P.)等，但都告失败. 拉格朗日首先怀疑五次方程存在根式解. 直到 1826 年，当时年仅 24 岁的挪威数学家阿贝尔(Abel, N. H.)才首先证明高于 4 次的一般代数方程不能用根式解，同时给出一类能用根式解的方程. 这类方程现称拉格朗日方程. 但是，阿贝尔没有给出一个法则来判别一个高于四次的具体代数方程能否有根式解. 其后不久，伽罗瓦天才地建立了代数方程的伽罗瓦域的子域与它的伽罗瓦群的子群间的一一对应关系，证明了代数方程能用根式解的充分必要条件是其伽罗瓦群为可解群. 从而彻底解决这一问题.

1828 年，年仅 17 岁的伽罗瓦写了“关于五次代数方程的解法问题”等两篇论文，送法国科学院但不受重视，被柯西(Cauchy, A.-L.)遗失了. 1831 年，伽罗瓦又完成了“关于用根式解方程的可解性条件”，院士泊松(Poisson, S.-D.)的审查意见是“完全不能理解，予以退回”. 不满 21 岁的伽罗瓦在决斗前夕将草稿寄给他的朋友，14 年后，1846 年，刘维尔(Liouville, J.)在他创办的《纯粹数学和应用数学》杂志上首次发表了伽罗瓦的部分文章. 第一个全面介绍伽罗瓦理论的是若尔当(Jordan, M. E. C.)，他是在 1870 年出版的《论置换群与代数方程》一书给出的. 伽罗瓦应用置换群这一工具，不仅证明一般高于四次的代数方程不能用根式求解，而且还建立了具体数字代数方程可用根式解的判别准则. 应用伽罗瓦理论很容易地否定回答所谓几何三大难题.

伽罗瓦理论在 1928 年已由克鲁尔(Krull, W.)推广到无限可分正规扩域上. 伽罗瓦理论不仅对近代代数学产生了深远影响，也渗透到数学的其他许多分支.

伽罗瓦扩张(Galois extension)　伽罗瓦理论的一个基本的代数扩张. 伽罗瓦扩张是指域的可分正规扩张. 若 K 为域 F 的代数扩张，则此域扩张为伽罗瓦扩张的充分必要条件为 K 的 F 自同构群 $G(K/F)$ 的固定域 $K^{G(K/F)}$ 恰为 F；有限次伽罗瓦扩域等同于一个可分多项式的分裂域.

群的固定域(fixed field of a group)　伽罗瓦理论的重要概念. 设 G 为域 K 的自同构群 $\mathrm{Aut}(K)$ 的一个子群，K 中所有在 G 的元素作用下不动的元组成 K 的子域

$$K^G=\{\alpha\in K\,|\,\sigma(\alpha)=\alpha,\forall\sigma\in G\},$$

称为群 G 在 K 中的固定域. 它与扩域的 F 自同构群一起构成伽罗瓦理论中域论问题转化为群论问题的桥梁. 下面的事实显示两者间的紧密联系：K 是 K^G 上的有限扩张，当且仅当 G 是有限群，此时 $[K:K^G]=|G|$，并且 G 是 K/K^G 的伽罗瓦群. 这个事实被称为戴德金-阿廷定理. 该定理最初是戴德金(Dedekind, J. W. R.)于 1871 年就代数数域给出的，后经阿廷(Artin, E.)对一般域给以证明.

戴德金-阿廷定理(Dedekind-Artin theorem)　见“群的固定域”.

伽罗瓦群(Galois group)　伽罗瓦理论的一个重要概念. 设 K 是域 F 的伽罗瓦扩域，K 的 F 自同构群 $G(K/F)$ 称为 K/F 的伽罗瓦群. 当 K 为 F 可分闭包时，$G(K/F)$ 称为 F 的绝对伽罗瓦群. 若 K 是 F 的一个有限次伽罗瓦扩域，则 $G(K/F)$ 是一个 $[K:F]$ 阶群. 由于有限次伽罗瓦扩域等同于某一可分多项式的分裂域，因此，若域 K 是域 F 上一个可分多项式 $f(x)$ 的分裂域，则其伽罗瓦群 $G(K/F)$ 就称为 $f(x)$ 的伽罗瓦群，从而有限次伽罗瓦扩域的伽罗瓦群必为某一多项式的伽罗瓦群. 在历史上，是伽罗瓦(Galois, E.)首先对多项式引入伽罗瓦群的概念.

绝对伽罗瓦群(absolute Golois group)　见“伽罗瓦群”.

多项式的伽罗瓦群(Galois group of a polynomial)　见“伽罗瓦群”.

伽罗瓦预解式(Galois resolvent)　决定方程的伽罗瓦群的一个函数式. 设域 F 上的 n 次多项式 $f(x)$ 没有重根，且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为其根. 可选择 $m_1, m_2,\cdots,m_n$ 使得函数

$$V_1=m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n$$

在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 $n!$ 个置换作用于 V_1 能够得到 $n!$ 个不同的函数 $V_1,V_2,\cdots,V_{n!}$. 再构造一个函数.

$$P(y)=(y-V_1)(y-V_2)\cdots(y-V_{n!}),$$

它作为 y 的多项式，其系数为 $V_1,V_2,\cdots,V_{n!}$ 的初级对称多项式，当然也为根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的对称函数，若 $P(y)$ 在 F 上不可约，则取 $G(y)=P(y)$；若 $P(y)$ 在 F 上可约，规定 $G(y)$ 是 $P(y)$ 的以 V_1 为根的不可约因式. 这个不可约多项式 $G(y)$ 就称为 $f(x)=0$ 的伽罗瓦预解式. 由于 $G(y)$ 的根是 $V_1,V_2,\cdots,V_{n!}$ 的一部分，所以，若 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 为 s 次多项式 $G(y)$ 的根，则由 V_1 变为 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 所对应的 s 个置换 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s$ 构成 n 次对称群 S_n 的一个子群，这个子群同构于 $f(x)=0$ 的伽罗瓦群.

伽罗瓦闭包(Galois closure)　一种特殊的伽罗瓦扩域. 即包含有限次可分扩域的最小伽罗瓦扩域. 若 K 是域 F 的有限次可分扩域，Ω 是 F 的一个含 K 的代数闭包，则必存在惟一的 Ω 的子域 L 适合条件：1. L 包含 K，且为 F 的有限次伽罗瓦扩域. 2. 对

Ω内任一包含K的F的伽罗瓦扩域N,必有$L\subseteq N$.此时,称L为F的有限次可分扩域K的伽罗瓦闭包.

正规基定理(normal basis theorem) 伽罗瓦理论的一个重要定理.该定理断言:若K是域F的n次伽罗瓦扩域,

$$G=G(K/F)=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\}$$

为其伽罗瓦群,则必存在K中元ξ使得$\{\sigma_1(\xi),\sigma_2(\xi),\cdots,\sigma_n(\xi)\}$成为$F$上向量空间$K$的一个基.$\xi$称为正规基元.此定理是丢润(Deuring,M.)于1932年用表示理论证明的,盖赛斯(Gasseis,W.)于1950年又给出了不用表示论的初等证明.

正规基元(normal basis element) 见"正规基定理".

循环扩张(cyclic extension) 一类特殊的、结构较清楚的域扩张.设K是域F的有限次伽罗瓦扩域,若其伽罗瓦群$G(K/F)$为循环群,则称此域扩张为循环扩张,K/F为循环扩域.设域F的特征数为$p>0$,K是F上n次循环扩域,若$n=mp^r$,则存在一个子域链:

$$K\supset K_1\supset K_2\supset\cdots\supset K_{r+1}=F,$$

使得K是K_1的m次循环扩域,而K_i是$K_{i+1}(i=1,2,\cdots,r)$的p次循环扩域.F的一个p次循环扩域等同于F上一个形如x^p-x-a的不可约多项式的分裂域;当F含n次本原单位根,F的特征数为零或p,而$p\nmid n$时,F上n次循环扩域等同于F上形如x^n-a的不可约多项式的分裂域.

循环扩域(cyclic extension field) 见"循环扩张".

可解扩域(solvable extension field) 一类特殊扩域.指由可解群定义的扩域.设K是域F的一个伽罗瓦扩张,若它的伽罗瓦群$G(K/F)$是可解群,则K称为F的可解扩域.

伽罗瓦对应(Galois correspondence) 一种特殊对应.指域E的子域与E的自同构群的子群间的对应.设$\mathrm{Aut}(E)$是域E的自同构群,对E的任一子域F可确定$\mathrm{Aut}(E)$的子群

$$G(E/F)=\{\sigma\in\mathrm{Aut}(E)\mid\sigma(a)=a,\forall a\in F\},$$

它是E/F的伽罗瓦群.反之,对$\mathrm{Aut}(E)$的任一子群G,若

$$E^G=\{a\in E\mid\sigma(a)=a,\forall\sigma\in G\},$$

则E^G是E的子域,且是G不变的.于是在E的子域簇与$\mathrm{Aut}(E)$的子群簇间提供了两个对应:

$$G\to G(E/F),\quad G\to E^G,$$

这两个对应就称为伽罗瓦对应,且有下列基本性质:

1.若$G_1\supset G_2$则$E^{G_1}\subset E^{G_2}$.

2.若$F_1\supset F_2$则$G(E/F_1)\subset G(E/F_2)$.

3.$E^{G(E/F)}\supset F$,$G(E/E^G)\supset G$.

有限伽罗瓦理论基本定理(fundamental theorem of finite Galois theory) 有限伽罗瓦理论的核心定理.设K是域F的有限伽罗瓦扩域,$G=G(K/F)$为其伽罗瓦群,对G的每个子群H,它在K中的固定域K^H满足

$$F=K^G\subseteq K^H=\{a\in K\mid\sigma(a)=a,\forall\sigma\in G\}\subseteq K.$$

反之,K/F的任一中间域E,恒有K/E为伽罗瓦扩张且$G(K/E)$为G的子群.于是,可建立G的子群簇$\{H\}$与K/F的中间域簇$\{E\}$间的伽罗瓦对应:

$$\Phi:H\to K^H,\quad\Gamma:E\to G(K/E).$$

基本定理断言$\Phi:H\to K^H$是G的子群簇与K/F的中间域簇间的双射.并且在此对应下:

1.$G\leftrightarrow F$,单位子群$\{1\}\leftrightarrow K$.

2.子群H的阶等于$[K:K^H]$且H在G中指数为$[K^H:F]$.

3.G的两个子群H_1,H_2共轭的充分必要条件是它们对应的中间域K^{H_1},K^{H_2}在F上共轭.

4.H是G的正规子群当且仅当对应的中间域K^H是F伽罗瓦扩域.此时伽罗瓦群$G(K^H/F)\cong G/H$.

根式扩域(radical extension) 一种有限扩域.是与代数方程的根式解相关的扩域.域F的一个扩域K,若存在一个子域链:

$$F=F_0\subset F_1\subset\cdots\subset F_S=K,$$

使得其中$F_i=F_{i-1}(\alpha_i)$,且$\alpha_i^{n_i}\in F_{i-1}$,$n_i$不能被$F$的特征数整除,则称$K$是$F$的根式扩域.其子域链称为$K/F$的根塔;自然数系$(n_1,n_2,\cdots,n_s)$称为根塔的根次数.特别地,若$\alpha_i^2\in F_{i-1}$,此子域链称为$K/F$的平方根塔,或简称$K$为$F$的平方根塔.此时,$F_i/F_{i-1}$对应的伽罗瓦群$G(F_i/F_{i-1})$为二阶群,所以平方根塔也称为二元群扩张塔.根式扩域必为有限扩域,它的共轭域也为根式扩域.

若$f(x)\in F[x]$,$f(x)=0$有根式解,则存在F的一个根式扩域K包含$f(x)$的所有根.反之,若存在F的根式扩域K包含$f(x)$的一切根,则$f(x)=0$有根式解.

根塔(root tower) 见"根式扩域".

根塔的根次数(root degree of the root tower) 见"根式扩域".

平方根塔(square root tower) 见"根式扩域".

二元群扩张塔(extension tower with group of two elements) 见"根式扩域".

方程的根式解(solvability of equation by radicals) 一个著名的古典数学问题.域F上次数$\geqslant1$的多项式$f(x)$,若方程$f(x)=0$的每个根都可由

$f(x)$的系数经过加、减、乘、除及开方运算得出，则称 $f(x)=0$ 有根式解. 换言之，$f(x)$的分裂域含于 F 上一个根式扩域. 次数大于或等于 5 的代数方程是否有根式解，这是一个古典的数学问题，直到 19 世纪 30 年代才得到解决.

伽罗瓦准则（Galois Criterion） 方程是否有根式解的判别准则. 设 $f(x)$是域上一个可分多项式，若方程 $f(x)=0$ 有根式解，则 $f(x)$的伽罗瓦群是可解群. 反之，若方程 $f(x)=0$ 的伽罗瓦群 G 是可解群且 F 的特征数不能整除群 G 的阶，则 $f(x)=0$ 有根式解. 特别地，在特征数为零的域上，任一多项式方程 $f(x)=0$ 有根式解的充分必要条件是 $f(x)$的伽罗瓦群是可解群. 这就是伽罗瓦准则.

单群扩张塔（extension tower with simple groups） 一种与根式扩域相关的域扩张. 它与方程有无根式解有密切关系. 设 K 是域 F 的扩域，若存在一个子域链：

$$F=K_0\subset K_1\subset\cdots\subset K_{m-1}\subset K_m=K,$$

使得 $G(K_i/K_{i-1})$是单群$(i=1,2,\cdots,m)$，则 K 称为 F 的单群扩张塔. 特别地，若 $G(K_i/K_{i-1})$是素数阶循环群，则称 K 是 F 的素阶群扩张塔. 由于 K_i 是 K_{i-1}的 n_i 次循环扩域，所以 $K_i=K_{i-1}(\beta)$，其中 β 为不可约多项式 $x^{n_i}-b$ 的根. 因此，素阶群扩张塔必为根式域；反之，根式扩域的中间域可加密成为素阶群扩张塔.

素阶群扩张塔（extension tower with groups of prime order） 见“单群扩张塔”.

鲁菲尼-阿贝尔定理（theorem of Ruffini-Abel） 最早出现的代数方程能否用根式解的判别定理. 设 F 是特征为零的域，$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是 F 上不相关未定元，

$$\begin{aligned}f(x)&=x^n-t_1x^{n-1}+t_2x^{n-2}-\cdots\\&\quad+(-1)^{n-1}t_{n-1}x+(-1)^nt_n\\&=0\end{aligned}$$

称为 F 上的 n 次一般方程. 若 $f(x)$是 F 上可分不可约多项式，则 $f(x)$在 F 上的伽罗瓦群与 n 次对称群 S_n 同构. 鲁菲尼(Ruffini，P.)和阿贝尔(Abel，N. H.)证明：当 $n>4$ 时，$f(x)$不能用根式解. 这个结论通常称为鲁菲尼-阿贝尔定理. 事实上，当 $n=2,3,4$ 时，S_n 是可解群；当 $n>4$ 时，S_n 不是可解群.

库默尔扩张（Kummer extension） 阿贝尔扩张的一种类型. 设 E 是域 F 的一个阿贝尔扩域，若 E/F的伽罗瓦群 $G=G(E/F)$中元素的最大阶数为 m(m 称为 G 的指数)，并且 F 含 m 个不同的 m 次单位根，则 E 称为 F 的库默尔 m 扩张；E 称为库默尔域. 例如，设 F 含本原 n 次单位根，且 E 为多项式

$$f(x)=(x^n-a_1)(x^n-a_2)\cdots(x^n-a_t)\ (a_i\in F)$$

在 F 上的分裂域，则 E 是 F 的库默尔 n 扩张. 此时，E 是 F 的阿贝尔扩域且 F 的特征数不能整除 n，于是，x^n-a_i 在 E 内无重根，所以，E/F 是可分的，从而是正规的.

伽罗瓦群的指数（exponent of Galois group） 见“库默尔扩张”.

库默尔域（Kummer field） 见“库默尔扩张”.

阿贝尔扩张（Abelian extension） 一类重要的域扩张. 设 K 是域 F 的伽罗瓦扩域，若其伽罗瓦群 $G(K/F)$为一阿贝尔群，则称此扩张为阿贝尔扩张，此时，K 称为 F 上阿贝尔扩域. 这是一类较广泛的域扩张. 循环扩张、分圆扩张及库默尔扩张等均为阿贝尔扩张的特例.

阿贝尔扩域（Abelian extension field） 见“阿贝尔扩张”.

多重阿贝尔扩张（multiple Abelian extension） 由一串阿贝尔扩域构成的域扩张. 设 K 是域 F 的扩域，若存在 K 的一串子域链

$$F=K_0\subset K_1\subset\cdots\subset K_{m-1}\subset K_m=K,$$

使得 K_i 是 $K_{i-1}(i=1,2,\cdots,m)$的阿贝尔扩域，则称 K 为 F 的多重阿贝尔扩张，或多重阿贝尔扩域. 根式扩域、素阶群扩张塔皆为多重阿贝尔扩域.

范（域论）（norm (in field theory)） 域论的基本概念之一. 它是复数域中元素的范和迹的推广. 设 K 是域 F 的有限次扩域，Ω 是 F 的含 K 的代数闭包，而 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ 为 K 到 Ω 内的一切互异的 F 共轭映射，对任意 $\alpha\in K$，定义

$$N_F^K(\alpha)=\Big(\prod_{j=1}^m\sigma_j(\alpha)\Big)^{[K:F]_i}$$

为 α 的范，

$$T_F^K(\alpha)=[K:F]_i\cdot\sum_{j=1}^m\sigma_j(\alpha)$$

为 α 的迹，其中$[K:F]_i$ 是 K 在 F 上不可分指数. 范和迹都是 F 中元素且与代数闭包的选择无关. 若

$$T_F^K:\alpha\to T_F^K(\alpha),\quad N_F^K:\alpha\to N_F^K(\alpha),$$

则 T_F^K 是 F 上的向量空间 K 到 F 的线性映射，且

$$N_F^K(\alpha\beta)=N_F^K(\alpha)\cdot N_F^K(\beta).$$

对有限伽罗瓦扩域 K/F，若 $G(K/F)=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\}$，则对任意 $\alpha\in K$，

$$N_F^K(\alpha)=\prod_{j=1}^n\sigma_j(\alpha),\quad T_F^K(\alpha)=\sum_{j=1}^n\sigma_j(\alpha).$$

例如，复数域 K 在实数域 F 上的 F 自同构仅两个，此时 $N(a+bi)=a^2+b^2$，$T(a+bi)=2a$. 特别地，若 K 是 F 的循环扩域，且伽罗瓦群$G(K/F)=(\sigma)$，则 $N_F^K(\alpha)=1$，$\alpha\in K$，当且仅当存在 $\beta\in K$，使得 $\alpha=\beta(\sigma(\beta))^{-1}$. 这就是著名的希尔伯特定理 90. 它是希尔伯特(Hilbert，D.)于 1897 年著《Theorie der Al-

begraischen Zahlkörper》中第 90 个定理.

迹(域论)(trace (in field theory)) 见“范(域论)”.

希尔伯特定理 90(Hilbert's ninetieth theorem 90) 见“范(域论)”.

克鲁尔拓扑(Krull topology) 一种拓扑. 用以推广有限伽罗瓦理论的基本定理. 它是克鲁尔(Krull, W.)于 1928 年对无限伽罗瓦群引入的. 设 K/F 是无限伽罗瓦扩张, $G=G(K/F)$ 为其伽罗瓦群. 若以集 $\Sigma=\{G(E/F)\,|\,E$ 为 K/F 的中间域, 且 E/F 为有限伽罗瓦扩张$\}$作为 G 的单位元的邻域基, 则在 G 上定义了一个拓扑, 称为 G 的克鲁尔拓扑. 就这个拓扑而言, G 成为一个全不连通的、紧致的 T_2 拓扑群. 又在这个拓扑下, 对于 K/F 的每个中间域 E, $G(K/E)$ 都是 G 中的闭子群(参见“代数群”).

无限伽罗瓦理论基本定理(fundamental theorem of infinite Galois theory) 有限伽罗瓦理论基本定理的推广. 设 K 是域 F 的一个无限次伽罗瓦扩域, 其伽罗瓦群为 $G=G(K/F)$. 对于 K/F 的任意中间域 E, 自同群群 $G(K/E)$ 是 G 的一个闭子群; 反之, G 的每个闭子群 H 在 K 中的固定域 K^H 是 K/F 的中间域. 基本定理断言: $H\to K^H$ 是 G 的闭子群簇到 K/F 的中间域簇之间的一一对应. 由于 $G(K/F)$ 存在非闭的子群, 所以对比有限伽罗瓦扩张情形, 此对应不是子群簇到中间域簇的一一对应.

分圆多项式(cyclotomic polynomial) 一种特殊多项式. 即由本原单位根构造的多项式. 若代数闭域 Ω 的特征不能整除自然数 n, 则 Ω 有 $\varphi(n)$ 个 n 次本原单位根 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{\varphi(n)}$, 其中 $\varphi(n)$ 为欧拉函数. 多项式

$$\Phi_n(x)=\prod_{i=1}^{\varphi(n)}(x-\xi_i)$$

称为一个分圆多项式. 当 Ω 的特征数为零时, $\Phi_n(x)$ 是首 1 的 $\varphi(n)$ 次整系数多项式, 且在有理数域上不可约; 当 Ω 特征数为 $p>0$ 时, $\Phi_n(x)$ 是素域 $\mathrm{GF}(p)$ 上首 1 的 $\varphi(n)$ 次多项式. 另外, 关于分圆多项式有一重要等式

$$x^n-1=\prod_{\substack{d|n\\1\leqslant d\leqslant n}}\Phi_d(x).$$

分圆域扩张(cyclotomic field extension) 一类重要的阿贝尔扩张. 设 Ω 是域 F 的代数闭包, 其中间域 K 称为 F 的一个分圆扩域, 若 K 是通过对 F 添加某些单位根而生成的. 此域扩张称为分圆域扩张. K 是域 F 的有限次分圆扩域的充分必要条件为, 存在一个本原单位根 $\xi\in K$, 使 $K=F(\xi)$. 对有理数域 $\mathbb{Q}$ 添加一个本原 n 次单位根 ξ 所得的分圆扩张 $\mathbb{Q}(\xi)$ 称为圆的 n 分域, 它是有理数域 $\mathbb{Q}$ 的 $\varphi(n)$ 次阿贝尔扩域, 其中 $\varphi(n)$ 为欧拉函数. n 分域来源于

$$\xi=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n},$$

其中 $2\cos(2\pi/n)=\xi+\xi^{-1}$, 从而可将单位圆 n 等分.

分圆扩域(cyclotomic extension field) 见“分圆域扩张”.

圆的 *n* 分域(n-th cyclotomic field) 见“分圆域扩张”.

三次方程的不可约情况(irreducible circumstance of equation of the 3-rd degree) 实系数一元三次方程的实根不能用实数范围中的根式求解的一种特殊情况. 实系数三次一般方程

$$y^3+ay^2+by+c=0$$

的根, 经变量代换 $y=x-a/3$ 可转化为求实系数不完全三次方程

$$x^3+px+q=0 \tag{1}$$

的根. 而(1)的任一个根 x_0 可由卡尔达诺公式给出:

$$x_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \tag{2}$$

(2)中立方根在复数域内有三个值, 若 α_0,β_0 分别为

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \tag{3}$$

$$\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \tag{4}$$

的一个值, 满足

$$\alpha_0\beta_0=-p/3, \tag{5}$$

则(1)的三个根可表为:

$$\begin{cases}x_1=\alpha_0+\beta_0,\\ x_2=\alpha_0\omega+\beta_0\omega^2,\\ x_3=\alpha_0\omega^2+\beta_0\omega,\end{cases} \tag{6}$$

其中 $\omega=(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})/2$, 而

$$D=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-4p^3-27q^2=-108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right),$$

称为方程(1)的判别式. 于是卡尔达诺公式变为

$$x_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{1}{18}\sqrt{-3D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\frac{1}{18}\sqrt{-3D}}. \tag{7}$$

若(1)有三个实根, 则 $D\geqslant0$; 若 $D=0$, 则(1)有两实根相等; 若 $D>0$, 则(1)有三个不同实根, 但 $\sqrt{-3D}$ 为纯虚数. 由伽罗瓦判别法则: 若实数域的子域 F

上方程(1)的判别式 $D>0$,而$f(x)$在 F 上不可约,则方程(1)的根域不能被包含在 F 的一个实根式扩域中,从而方程(1)不能用实根式求解. 此种情况称为不可约情况.

卡尔达诺(Cardano,G.)求解三次方程不可约情况,出现负数开平方的情况,这是复数的萌芽,直到 1747 年,达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)才将复数进一步推广,他指出如果按多项式的四则运算,对虚数进行运算,总是 $a+b\sqrt{-1}$形式(其中 a,b 为实数). 这实质上给出复数概念. 但复数这个名词是高斯(Gauss,C. F.)给出的.

希腊几何三大问题(three problems in Greek geometry) 历史上能否用尺规作图的三个问题. 在古希腊时代强调只能用直尺、圆规,能否完成下面三个问题的几何作图:

1. 化圆为方,即求作一正方形,使其面积等于一已知圆的面积.

2. 三等分角,即将任意角三等分.

3. 立方倍积,求作一立方体,使其体积等于已知立方体的两倍.

以毕达哥拉斯学派为代表的希腊人认为圆是最美的几何图形,有了尺规,圆和直线就能作出,因此规定只能使用尺规为工具作图. 然而,仅用尺规能否解决上述三个问题呢? 它成为当时许多学派的研究中心,经过两千多年的探索,直到 17 世纪解析几何建立后,才给出尺规作图的可能性的准则. 1837 年,旺策尔(Wantzel,P.-L.)给出三等分任意角和立方倍积不能用尺规作图的证明;1882 年,林德曼(Lindemann,(C. L.)F. von)证明了 π 的超越性,化圆为方的不可能性得以确立. 从代数的观点,利用伽罗瓦理论很容易证明,上述三大问题不可能用尺规作出.

林德曼-外尔斯特拉斯定理(Lindemann-Weierstrass theorem) 伽罗瓦理论的一条重要定理. 由林德曼(Lindemann,(C. L.)F. von)提出,经外尔斯特拉斯(Weierstrass,(K. T.)W.)于 1885 年证明的一条重要定理. 若 $u_1,u_2,\cdots,u_n$是有理数域 Q 上线性无关的代数数(即复数且是 Q 上代数元),则复指数 $e^{u_1},e^{u_2},\cdots,e^{u_n}$在代数数域(由代数数构成的复数域的子域)上是代数无关的. 由这个定理可以导出:π,e 是超越数,而且可证明:

1. 指数曲线 $y=e^x$ 不通过平面上除(0,1)以外的代数点(代数点即坐标 x 与 y 都是代数数的点).

2. 正弦曲线 $y=\sin x$ 不通过平面上除(0,0)之外的代数点.

尺规作圆的判别准则(criterion of construction with ruler and compass) 几何作图问题是否可解的判定方法. 用尺规作图就是给定平面 ω 上一些点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 去做符合某种条件的点;或者说,已知线段的长 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 去做符合某种条件线段长 β;也就是由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 经加、减、乘、除、开平方来表示出 β. 一方面由于在运算中可能出现虚数,另一方面(x,y)点对应线段的长恰好可看做复数 $x+yi$ 与共轭数之积的平方根,因此,用复数代替点得如下判别准则:

判别准则Ⅰ:给定复数域 C 中元 $z_1,z_2,\cdots,z_n$,若 $F=Q(z_1,z_2,\cdots,z_1,\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n)$,Q 是有理数域,$n\geqslant 2$,则 z 可由 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 利用尺规表示的充分必要条件是,z 属于 C 的一个子域 $K=F(u_1,u_2,\cdots,u_r)$中,其中 K 是 F 的平方根塔. 由判别准则Ⅰ,所谓古希腊几何三大问题不能用尺规作出.

判别准则Ⅱ:复数 z 可由复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 用尺规作出的充分必要条件是,z 为 $F=Q(z_1,z_2,\cdots,z_n,\bar{z}_1,\bar{z}_2,\cdots,\bar{z}_n)$上代数元,且 $F(z)/F$ 的正规闭包在 F 上的维数是 2 的若干次幂. 改进后的准则Ⅱ还可以解决正 n 边形能否由尺规作出的充分必要条件(参见“用尺规作正多边形问题”).

用尺规作正多边形问题(the construction of regular polygon with ruler and compass) 著名的几何作图问题. 等价于将整个圆周 n 等分. 早在古希腊的欧几里得时代,人们就知道边数为 3,5,15,$2^n3,2^n5,2^n15$(n 为自然数)的正多边形可用尺规作出. 其后两千多年毫无进展,直到 1796 年,年仅 19 岁的高斯(Gauss,C. F.)才用尺规作出了正 17 边形. 高斯还进一步断言:一个正 n 边形可用尺规作出当且仅当 $n=2^e p_1 p_2\cdots p_s$,e 是自然数或零,$p_1,p_2,\cdots,p_s$ 是不同的费马素数(即形如 $2^{2^t}+1$ 的素数). 然而高斯仅证明这一论断的充分性,其必要性是由旺策尔(Wantzel,P.-L.)于 1837 年证明的. 例如,当 $t=0,1,2,3,4$ 时,对应的费马素数 $n=3,5,17,257,65537$ 以及 2^n 与它们之积可用尺规作出;但是,正七边形、正九边形不能用尺规作出,并且,目前尚不知是否还有其他的费马素数.

撰　稿　王春生　朱元森　宋耀宗　周永新
审　阅　许永华　杨劲根　戴执中

序　域

序域(ordered field) 一种特殊的域. 它是有序结构的域. 一个域 F,若在它的元素之间存在一个二元关系$>$,满足下述条件:

1. 对于任意 $a\in F$,必有 $a=0$ 或 $a>0$ 或 $-a>0$ 三者之一成立(0 指 F 的零元);

2. 从 $a>0,b>0$ 可导出 $a+b>0$ 及 $ab>0$;

则称$>$是 F 的一个序,带有序$>$的域 F 称为序域,

记以$(F,>)$. 凡是能在其中规定序的域，就称为可序的，或称可序域. 在实数域 R 和有理数域 Q 中，通常的大小关系就给出它们的一个序. 因此 R 和 Q 都是可序域，而且，它们只能有这样给出的序. 不过，并非所有的可序域都只有惟一的序.

序(ordering)　见"序域".

可序域(orderable field)　见"序域".

正锥(positive cone)　域论的重要概念. 它是与序可转换的域中的特殊子集. 域 F 的子集 P，若满足下列条件：

1. $P\cup -P=F$；
2. $P\cap -P=\{0\}$；
3. $P+P\subseteq P$；
4. $P\cdot P\subseteq P$；

则称 P 为 F 的正锥. 域的正锥和序是两个可以互相转换的概念. 给定 F 的一个序$<$，子集 $P=\{a\in F\mid a>0$ 或 $a=0\}$就是 F 的一个正锥；反之，从一个正锥 P，设 $a<b$ 当且仅当 $b-a\in P$，且 $b-a\neq 0$，就定出 F 的一个序$<$.

全正元(totally positive element)　序域中的特殊元素. 属于域中所有正锥之交的元. 域 F 的非零元，它关于 F 的每个序都是正的，或者说属于 F 的每个正锥. 全正元有如下的刻画：$0\neq a\in F$ 是个全正元，当且仅当 a 可表成 F 中一些元素的平方和.

实域(real field)　亦称形式实域. 是与序域密切相关的一种域. 一个域 F，若在其中不存在形式如

$$-1=\sum_{1}^{m}a_i^2$$

的等式，此处 $a_i\in F$，则称 F 是实域(或者形式实域). 序域都是实域. 反之，实域一定是可序域. 因此，序域理论就是实域理论. 实域理论是阿廷(Artin, E.)和施赖埃尔(Schreier, O.)于 1926 年首先建立的. 阿廷在这一理论的基础上，成功地正面解答了希尔伯特第 17 问题. 实域理论又是近 20 年来蓬勃兴起的实代数几何的基础.

形式实域(formally real field)　即"实域".

亚正锥(pre-positive cone)　含于正锥内的特殊子集. 域 F 的子集 T，若满足下列条件：

1. $T+T\subseteq T$；
2. $T\cdot T\subseteq T$；
3. 对每个 $a\in F$，都有 $a^2\in T$；
4. $-1\notin T$；

则称 T 为 F 的亚正锥. 每个亚正锥都可以扩大成包含它的正锥；二者间的关系是

$$T=\bigcap_{P\supset T}P,$$

即亚正锥 T 等于所有包含它的正锥 P 之交. 在实域 F 中，由全部有限平方和组成的子集 S_F 是 F 的一个最小的亚正锥，称为 F 的弱亚正锥. 从上面列举的事实得知，F 的弱亚正锥是 F 中所有正锥的交.

弱亚正锥(weak pre-positive cone)　见"亚正锥".

亚序(preordering)　由亚正锥所确定的一种二元关系. 设 T 是域 F 的一个亚正锥. 规定 F 的一个二元关系 $\underset{T}{\geq}$ 为 $b\underset{T}{\geq}a$ 当且仅当 $b-a\in T$，并且称 $\underset{T}{\geq}$ 是 F 的一个亚序. 亚序与序的差别，仅在于序是定义在 F 的全体元素之间，亚序则否. 因此，序也是一种亚序. 由弱亚正锥所定出的亚序称为弱亚序.

弱亚序(weak preordering)　见"亚序".

亚序域(preordered field)　带有亚序的域. 若 $\underset{T}{\geq}$ 是域 F 上一个给定的亚序，则称 F 为亚序域，记为$(F,\underset{T}{\geq})$. 若 $\underset{T}{\geq}$ 是由亚正锥 T 所确定的，则这个亚序域又可写成(F,T). 实域可以作为带有弱亚序的亚序域；序域自然也是亚序域.

序同构(order-isomorphism)　一种特殊的域同构. 即保序的域同构. 设$(F_1,\underset{1}{>})$与$(F_2,\underset{2}{>})$是两个序域；π 是 F_1 到 F_2 上的一个域同构. 若 π 满足条件：由 $a\underset{1}{>}b$ 可导致 $\pi(a)\underset{2}{>}\pi(b)$，则称 π 是$(F_1,\underset{1}{>})$与$(F_2,\underset{2}{>})$间的一个序同构；或称$(F_1,\underset{1}{>})$与$(F_2,\underset{2}{>})$是序同构的. 上述的条件也可以表为较简化的形式：由 $a\underset{1}{>}0_1$ 可导致 $\pi(a)\underset{2}{>}0_2$，其中 $a\in F_1$，0_1，0_2 分别表示 F_1 和 F_2 中的零元.

序扩张(ordered extension)　一种特殊的域扩张. 指一种保持序关系不变的域扩张. 设$(F,\underset{F}{>})$和$(K,\underset{K}{>})$是两个序域，其中 K 是 F 的扩域. 若$\underset{K}{>}$ 在 F 上的限制就是$\underset{F}{>}$，则称 F 的序$\underset{F}{>}$ 可以扩张于 K；同时又称$(K,\underset{K}{>})$是$(F,\underset{F}{>})$的一个序扩张. 特别地，当 K 又是 F 上的代数扩张时，称$(K,\underset{K}{>})$为$(F,\underset{F}{>})$的代数序扩张. 例如，有理数域 Q 只有惟一的序$>$，无论把 $\sqrt{2}$ 作为正或负，Q($\sqrt{2}$)都是 Q 的一个代数序扩张. 设 K 是 F 的一个扩域. 问 F 的序$\underset{F}{>}$ 在什么情形下能扩张于 K？一个简单判别法则是：$\underset{F}{>}$ 能扩张于 K 的充分必要条件是，在 K 中不存在形式如

$$-1=\sum_{1}^{m}a_i\alpha_i^2$$

的等式，其中 $a_i\in F$，$a_i\underset{F}{>}0$，$\alpha_i\in K$.

代数序扩张(algebraic ordered extension)　见"序扩张".

实闭域(real closed field)　一类重要的实域. 设 F 是一个实域，若 F 的任何真代数扩张都不再是实域，则称 F 是实闭的，或者 F 是一个实闭域. 实闭域的例子很多，最常见的是：实数域 R；由所有实代

数数所成的域 $\mathsf{R}_{\mathrm{Alg}}$. 实闭域只有惟一的序$>$,它由 $a>0$ 当且仅当 $a=b^2$ 所确定,换言之,它的惟一的正锥是由所有平方元所组成. 在实闭域上,任何一元多项式都能表为一次与二次不可约因式之积. 实闭域与代数闭域间的紧密关系,可以从下面的事实认知:设 Ω 是一个代数闭域,F 是它的真子域. 若 Ω/F 是有限扩张,则 F 是实闭域,并且有 $\Omega=F(\sqrt{-1})$. 实闭域还有一个重要性质:任何一条初等的代数命题,若在某一个实闭域上成立,则必然在所有的实闭域上成立. 这个结论被称为塔尔斯基(Tarski,A.)原则(或定理). 根据这个原则,凡在实数域 R 上成立的初等代数命题,在任何实闭域上也成立.

塔尔斯基原则(Tarski principle) 见"实闭域".

序域的实(代数)闭包(real (algebraic) closure of an ordered field) 一个类似于代数闭包的重要概念. 设$(F,>)$是一个序域. 所谓$(F,>)$的实闭包,是指一个满足下列条件的扩张 R:1. R 是实闭的. 2. 关于 R 的惟一的序 $\underset{R}{>}$,$(R,\underset{R}{>})$ 是$(F,>)$的代数序扩张. 对于任何一个序域$(F,>)$,它的实闭包是存在的. 设 $\hat{F}$ 是 F 的代数闭包. 在 $\hat{F}$ 中,$(F,>)$的全体序扩张成一归纳集,因此有极大元存在. 这种极大元就是$(F,>)$的实闭包. 在序域的实闭包之间,存在某种意义下的惟一性,它可由阿廷-施赖埃尔定理给出.

阿廷-施赖埃尔定理(Artin-Schreier theorem) 序域实闭包的序同构性定理. 对于任何一个序域$(F,>)$,它所有的实闭包都是互为序同构的,换言之,除序同构不计外,序域的实闭包是惟一确定的.

极大序域(maximally ordered field) 一种特殊的序域. 指在一定意义下与实闭域等价的域. 除自身外,无其他代数序扩张的序域,称为极大序域. 实闭域关于它惟一的序是个极大序域;反之,极大序域又是实闭域.

阿廷定理(Artin theorem) 实闭域上的多元多项式的重要定理. 希尔伯特第 17 问题的正面解答和推广. 设 F 是一个实闭域,n 为任一自然数,$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in F[x_1,x_2,\cdots,x_n]$. 若对于 F 中任何一组元$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,总有 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geqslant 0$,则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在 F 上是半正定的,或称 F 上的半正定多项式. 阿廷定理断言:实闭域 F 上的 n 元半正定多项式必可表为 F 上 n 元有理函数的平方和. 希尔伯特(Hilbert,D.)于 1893 年曾就 $F=\mathsf{R}$,$n=2$ 的情形证明了上述定理;其后在 1900 年巴黎国际数学家会议上,提出 n 为任何自然数时是否成立的问题. 这就是所谓希尔伯特第 17 问题. 阿廷定理是以实域理论为基础于 1926 年证明的. 自此以后,这个定理又有许多不同的证法和推广.

半正定多项式(semi-positive definite polynomial) 见"阿廷定理".

希尔伯特第 17 问题(Hilbert 17th problem) 见"阿廷定理".

(弱)希尔伯特性质((weak) Hilbert property) 一类序域具有的重要性质. 设$(F,>)$是一个序域. 若每个在$(F,>)$上半正定的 n 元多项式都可表为 F 上 n 元有理函数的平方和,则称序域$(F,>)$具有希尔伯特性质;若定义中的条件减弱为:每个在$(F,>)$上半正定的 n 元多项式可表为

$$\sum_{i=1}^{s} a_i g_i^2(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

这里 $g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$a_i\in F$ 且 $a_i>0$ $(i=1,2,\cdots,s)$,则称$(F,>)$具有弱希尔伯特性质. 希尔伯特性质与其弱形式是接近相通的,因为两者的差异仅在于,所讨论的域的弱亚序是否成为一个序. 从而,有关问题归结到序域的弱希尔伯特性质上来. 这个称谓是麦克纳(McKenna,K.)于 1975 年提出的,他用以区分一类使得希尔伯特第 17 问题有肯定解答的序域. 对于具有弱希尔伯特性质的序域的刻画,麦克纳给出了如下的重要结果:一个序域$(F,>)$具有弱希尔伯特性质,当且仅当 F 在它关于序$>$的实闭包中稠密. 20 世纪 80 年代以后,有关的概念推广到亚序域上,并获得许多相应的新结果.

斐斯特定理(Pfister theorem) 希尔伯特第 17 问题的定量解答. 这个定理断言:实闭域 F 上的 n 元半正定多项式,都能表为 F 上至多 2^n 个有理函数的平方和. 希尔伯特(Hilbert,D.)于 1893 年证明:任何二元实系数半正定多项式,都可表成四个实系数有理函数的平方和. 斐斯特(Pfister,A.)于 1967 年证得上面的定理.

实赋值(real valuation) 一种特殊的赋值. 即剩余域为实域的赋值. 设 F 是一个域,φ 是它的赋值. 若 φ 的剩余域(参见"赋值 φ 的剩余域")是实域,则称 φ 是 F 的一个实赋值. 凡具有实赋值(可以是浅显的)的域必为实域. 另一方面,从实域的任何两个序,总可作出实赋值(也可能是浅显的). 实赋值在实域理论中起着重要的作用.

实位(real place) 一种特殊的位. 指取值于实域的位. 设 $\pi:F\to R\cup\{\infty\}$是域 F 的一个 R 值位. 当 R 是实域时,就称 π 是 F 的一个实位. 域的实位与实赋值是两个可以互相转化的概念.

与序相容的赋值(valuation compatible with an ordering) 序(亚序)域中一类重要的赋值. 设 $\underset{P}{\leqslant}$ 是域 F 的一个序(亚序);φ 是 F 的一个赋值. 若由

$$0\underset{P}{<}a\underset{P}{\leqslant}b$$

可以导致$\varphi(a)\leqslant\varphi(b)$，就称$\varphi$是个与序(亚序)相容的赋值. 不等式$\varphi(a)\leqslant\varphi(b)$中出现的$\leqslant$，是指$\varphi$的值群(参见“值群”)中的序关系. 与序(亚序)相容的赋值必然是实赋值；反之，实赋值必定与域的某个(可能不只一个)序(亚序)相容.

与亚序相容的赋值(valuation compatible with a preordering)　见“与序相容的赋值”.

与序相容的位(place compatible with orderings)　与序关系有密切联系的一类位. 设$(F,\underset{P}{\leqslant})$和$(L,\underset{Q}{\leqslant})$是两个序(亚序)域；$\pi:F\to L\cup\{\infty\}$是$F$的一个$L$值位. 若由$a\underset{P}{\leqslant}b$可以导致

$$\pi(a)\underset{Q}{\leqslant}\pi(b),$$

则称π是个与$\underset{P}{\leqslant}$和$\underset{Q}{\leqslant}$相容的位. 若用F,L的正(亚正)锥P,Q来讲，则可以表述成：当有$\pi(P)\subseteq Q\cup\{\infty\}$成立时，就称$\pi$是与$P,Q$相容的位.

与亚序相容的位(place compatible with preorderings)　见“与序相容的位”.

序域的哈恩赋值(Hahn valuation of an ordered field)　一种由序所定的赋值. 设a,b是序域$(F,\underset{P}{\leqslant})$中的两个元素. 若存在有理数$m,n$，使得

$$|a|_P\underset{P}{\leqslant}m|b|_P,\quad |b|_P\underset{P}{\leqslant}n|a|_P$$

成立，此处$|a|_P$是a关于序$\leqslant_P$的绝对值，则称a,b属于同一个关于$\underset{P}{\leqslant}$的阿基米德类. 记a所在的阿基米德类为$[a]_P$. 以所有的阿基米德类为元素，规定一个适当的乘法运算和序关系，可使这个元素集成为一个有序乘法交换群；而且，映射$a\to[a]_P$成为F的一个赋值，称为序域$(F,\underset{P}{\leqslant})$的哈恩赋值. 该赋值的赋值环是

$$B(\mathbb{Q},P)=\{x\in F\mid\exists\, m\in\mathbb{Q}^+,-m\underset{P}{\leqslant}x\underset{P}{\leqslant}m\},$$

称为$\mathbb{Q}$关于$\underset{P}{\leqslant}$的凸闭包. 序域$(F,\underset{P}{\leqslant})$的哈恩赋值是实赋值，并且与序$\underset{P}{\leqslant}$是相容的.

阿基米德类(Archimedean class)　见“序域的哈恩赋值”.

阿基米德序(Archimedean ordering)　一种重要的序. 设$>$是域F的一个序，$a>0$是F中任一元. 若对于F中每个$b>0$，总有某自然数n(与a,b有关)，使得有$na>b$成立，则称$>$是F的一个阿基米德序；同时又称$(F,>)$为阿基米德序域. 若不能使上述条件满足，则称$>$是非阿基米德序；$(F,>)$为非阿基米德序域. $\mathbb{R}$和$\mathbb{Q}$关于它们惟一的序都是阿基米德序域；反之，任何一个阿基米德序域都序同构于$\mathbb{R}$的某一子域.

阿基米德序域(Archimedean ordered field)　见“阿基米德序”.

非阿基米德序(non-Archimedean ordering)　一种特殊的序. 它不满足阿基米德序条件(参见“阿基米德序”). 举例如下：设t是$\mathbb{Q}$上超越元. 规定$\mathbb{Q}(t)$的一个序$>$如下：对于$\mathbb{Q}$中的元，它就是通常有理数的序；又，$a>t>0$对于所有的正有理数a都成立，然后再根据加与乘的运算把它扩大到$\mathbb{Q}(t)$中所有的元素之间. 这样规定的$>$是域$\mathbb{Q}(t)$的一个非阿基米德序.

非阿基米德序域(non-Archimedean ordered field)　见“阿基米德序”.

子域上的阿基米德序域(Archimedean ordered field over a subfield)　一类相对于子域具有特殊性质的序域. 设$(F,>)$是一个序域，E是F的一个子域. 对于元素$a\in F$，若对于E中每个正元素b，恒有$\pm a<b$，则称a在E上是无限小的. F中零元素在任一子域上都是无限小的. 这个概念的重要性在于：序域上任何一个与序相容的赋值理想恰好由在某个子域上是无限小的全部元素组成. 序域$(F,>)$，若F没有在E上是无限小的非零元素，则称F为在子域E上是阿基米德的. 这一称谓可看做阿基米德序域在概念上的一个推广. 事实上，序域$(F,>)$是阿基米德序域，当且仅当$(F,>)$在素子域$\mathbb{Q}$上是阿基米德的.

实位拓展定理(theorem on extensions of real places)　关于实位拓展的命题. 即给出了一个域上的实位在某个实闭包上可以拓展的充分必要条件，同时肯定了拓展的惟一性. 定理的存在部分首先由兰(Lang,S.)获得，其后，克鲁布什(Knebusch,M.)等人简化了兰的原来证明，同时增添了定理的惟一性部分. 该定理叙述如下：若λ是域F的一个实位，R是F的一个实闭包，则λ可以拓展为R上的一个实位，当且仅当λ与R的惟一序在F上的限制是相容的；并且在条件满足的情况下，λ在R上的拓展是惟一的.

有理位存在的兰定理(Lang theorem on existence of rational places)　实函数域上有关实位存在性的重要结论. 若F是实闭域R上的一个实函数域，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是F中有限个元素，则存在一个有理R位$\lambda:F\to R\cup\{\infty\}$，使得$\lambda(x_i)\neq\infty,i=1,2,\cdots,n$. 该定理是兰(Lang,S.)于1953年获得的.

阿廷-兰同态定理(Artin-Lang homomorphism theorem)　有理位存在的兰定理的推广. 它在实域理论与实代数几何中有广泛的应用. 设A是一个在实闭域R上有限生成的整环. 若A的分式域是实域，则存在一个从A到R的R代数同态. 此定理可由关于有理位存在的兰定理直接推出，并且其内容具有多种适用的形式.

兰嵌入定理(Lang imbedding theorem)　关于域中嵌入的命题. 它是兰(Lang,S.)所获得的一个

有关实函数域的重要结果. 若 K 是域 F 上一个超越次数为 n 的函数域, E 是任意一个包含 F 的实闭域, 并且 E 关于 F 的超越次数不小于 n, 则存在一个从 K 到 E 的 F 嵌入, 当且仅当 E 的惟一序在 F 上的限制可在 K 上拓展. 当域 F 为实闭域时, 由上面定理可得到下面一个仍称为兰嵌入定理的重要结论: 若 K 是实闭域 R 上一个超越次数为 n 的函数域, E 是任意一个包含 R 的实闭域, 且 E 关于 R 的超越次数不小于 n, 则存在一个从 K 到 E 的 R 嵌入, 当且仅当 K 是实域.

序空间(space of orderings)　由实域的正锥构成的特殊拓扑空间. 设 F 是一个实域, 并且符号 X_F 表示由 F 的全部正锥所组成的非空集合. 对于 $a\in F$, 可得到 X_F 的一个子集

$$H(a)=\{P\in X_F \mid a\in P\},$$

于是, 所有形如 $H(a)(a\in F)$ 的子集构成 X_F 的一个拓扑子基. 由此产生的拓扑称为哈里逊拓扑, 具有哈里逊拓扑的拓扑空间 X_F 称为实域 F 的序空间. 序空间 X_F 是一个紧的、全不连通的豪斯托夫空间; 换言之, X_F 是一个布尔空间. 一个类似但更一般的概念是亚序域的序空间. 若 T 是域 F 的一个亚正锥, 并用 $X_F(T)$ 表示 F 上所有包含 T 的正锥所组成的集合, 则 $X_F(T)$ 是拓扑空间 X_F 的一个非空的闭子集. 此时, 称具有诱导拓扑的集合 $X_F(T)$ 为亚序域 (F,T) 的序空间. 序空间 $X_F(T)$ 的一个拓扑子基由形如

$$H_T(a)=H(a)\cap X_F(T)=\{P\in X_F(T)\mid a\in P\}\quad(a\in F)$$

的子集组成. 当 T 是域 F 的弱亚正锥时,

$$X_F(T)=X_F.$$

哈里逊拓扑(Harrison topology)　见"序空间".

亚序域的序空间(space of ordering of a preordered field)　见"序空间".

稳定指数(stability index)　反映序空间的特性的一个基本量. 设 (F,T) 是一个亚序域, $X_F(T)$ 是它的序空间. 对于 F 的一个有限(可以为空)子集 A, 按如下方式可以得到亚序域 (F,T) 的序空间 $X_F(T)$ 的一个子集

$$H_T(A)=\bigcap_{a\in A}H_T(a)=\{P\in X_F(T)\mid A\subseteq P\}.$$

由 $X_F(T)$ 的拓扑结构知, 如上所列的非空子集组成拓扑空间 $X_F(T)$ 的一个基. 若存在某个最小的非负整数 s, 使得上面所给的每个非空子集 $H_T(A)$ 可由至多含有 s 个元素的集 A 给出, 则称 s 为亚序域 (F,T) 的稳定指数, 记为 $s(T)=s$. 若这样的非负整数 s 不存在, 则说 (F,T) 的稳定指数为 ∞, 且记为 $s(T)=\infty$. $s(T)=0$, 当且仅当 T 是 F 的一个正锥. 当 T 是 F 的弱亚正锥时, 把 $s(T)$ 称为域 F 的稳定指数, 且改记为 $s(F)$.

亚序域稳定指数(stability index of a preordered field)　见"稳定指数".

亚序的链长(chain length of a preordering)　反映亚序(亚正锥)的特性的一个基本量. 若 T 是域 F 的一个亚正锥, 则有下列数集: $L=\{k\in\mathbf{N}\mid$存在一个由 $X_F(T)$ 的基本开集组成的降链$\}$(参见"序空间"):

$$H_T(a_0)\not\supseteq H_T(a_1)\not\supseteq\cdots\not\supseteq H_T(a_k),$$

其中 $a_i\in F, i=0,1,\cdots,k\}$. 由于

$$X_F(T)=H_T(1)\not\supseteq H_T(-1)=\varnothing,$$

所以 $1\in L$. 用 $\mathrm{cl}(T)$ 表示非空数集 L 的上确界, 且称之为亚正锥 T 的链长. 由定义, $\mathrm{cl}(T)$ 为一个自然数或符号 ∞.

扇锥(fan)　一类重要的亚正锥. 设 T 是域 F 的一个亚正锥. 若对于乘法群 $\dot F(=F\setminus\{0\})$ 的每个指标为 2 的子群 U, 只要 $U\supseteq\dot T(=T\setminus\{0\})$, 且 $-1\notin U$, $U\cup\{0\}$ 必是域 F 的一个正锥, 则称 T 是一个扇锥. 对于域 F 的一个亚正锥 T, 当子群 $\dot T$ 在 $\dot F$ 内的指标 $[\dot F:\dot T]\leqslant 4$ 时, T 必是一个扇锥, 这样的扇锥称为浅显扇锥. 有许多性质可刻画扇锥. 例如, T 是一个扇锥, 当且仅当 $\mathrm{cl}(T)\leqslant 2$; 当且仅当每个不属于 $-T$ 的元素是 T 刚性元素(参见"刚性元素").

浅显扇锥(trivial fan)　见"扇锥".

刚性元素(rigid element)　域中具有特殊性质的元素. 设 V 是域 F 的一个乘法封闭的子集. 对于 $a\in F$, 若有 $V\cup Va=V+Va$, 则称 a 是一个 V 刚性元素. 当 V 是域 F 的一个亚正锥 T 时, T 刚性元素在关于扇锥的讨论中有重要的应用. 当 V 是域 F 的子集 $F^2=\{x^2\mid x\in F\}$ 时, F^2 刚性元素通常称为刚性元素. 若域 F 中每个不属于 $F^2\cup -F^2$ 的元素都是刚性元素, 则称域 F 是刚性域.

刚性域(rigid field)　见"刚性元素".

序闭包(order closure)　序域中实闭包概念在实域上的推广. 若 F 是一个实域, K 是 F 的一个实扩张, 则有一个从序空间 X_K 到 X_F 的限制映射 $r_{K/F}$, 使得

$$r_{K/F}(Q)=Q\cap F\quad(\forall Q\in X_K).$$

实域 F 的序闭包是 F 的这样一个实代数扩张 L, 使得映射 $r_{L/F}$ 是双射, 并且 L 关于这个性质是极大的; 换言之, 对于 L 的任何一个实代数真扩张 L', 映射 $r_{L'|F}$ 不再是双射. 实域的序闭包总是存在的. 此外, 一个实域的任何一个序闭包都是毕达哥拉斯域.

全实扩张(totally real extension)　一类特殊的实扩张域. 设 K 是实域 F 的一个扩张, 若 F 上的每个序都可拓展为 K 上的一个序, 则称 K 是 F 的一

个全实扩张. 换言之,若 K 是一个实域,并且从 X_K 到 X_F 的限制映射 $r_{K|F}$ 是一个满射,则 K 是 F 的全实扩张.

实全纯环(real holomorphy ring)　实域的一个重要子环,其构造与此实域上的实赋值有密切的关系. 一个实域 F 的所有实赋值环的交是 F 的一个子环,称此子环为域 F 的实全纯环,且记为 $H(F)$. 实全纯环 $H(F)$ 中的元素有如下刻画:记域 F 的弱亚正锥为 S_F,则有:

1. $H(F)=\{x\in F\mid$ 对某自然数 $n, n\pm x\in S_F\}$.

2. $H(F)$ 是由诸如 $(1+s)^{-1}(s\in S_F)$ 的元素生成的子环.

3. $H(F)=\{nx\cdot(1+x^2+s)^{-1}\mid n\in\mathbf{N}, x\in F, s\in S_F\}$.

实全纯环在亚序域上有类似的推广,并且有相应的结果.

高层序(ordering of higher level)　域的序(正锥)概念的推广. 它引起人们对域中元素的偶次幂方和的讨论,从而导致出广义的阿廷-施赖埃尔理论. 高层序由贝克尔(Becker, E.)首先引进并加以研究,从而获得一系列结果. 对于自然数 n,域 F 的一个 n 层序是一个满足下列条件的子集 P: $P+P\subseteq P$; $\dot{P}=P\backslash\{0\}$ 是乘法群 $\dot{F}$ 的一个子群,使得 $-1\notin P$ 且商群 $\dot{F}/\dot{P}$ 是循环群,其阶能整除 $2n$. 1 层序即为普通的序,凡层序 $n>1$ 者,统称高层序. 在上面的情况中,若商群 $\dot{F}/\dot{P}$ 的阶为 $2m$,其中 $1\leqslant m\leqslant n$,则称 P 是域 F 的一个恰好 m 层序. 当域 F 有一个(恰好) n 层序 P 时,常称 (F,P) 是一个(恰好) n 层序域. 对于一个域是否有高层序这一问题,贝克尔证明了下面的结果:

1. 域 F 具有 n 层序,当且仅当 F 是形式 n 实的(formally n-real),即不存在形如 $-1=\sum a_i^{2n}(a_i\in F)$ 的等式,当且仅当 F 在通常意义下是形式实的.

2. 域 F 具有恰好 $m(>1)$ 层序,当且仅当 F 是实的,并且 $\sum F^2\neq\sum F^{2k}$,此处 k 是某个大于 1 的自然数.

平行于高层序这一概念,可相应地引入高层亚序等概念,并有相应的结果.

恰好层序(ordering of exact level)　见"高层序".

高层亚序(preordering of higher level)　见"高层序".

高层序的忠实扩张(faithful extension of an ordering of higher level)　高层序域保持恰好层的扩张. 设 (F,P) 是一个高层序域, K 是 F 的一个域扩张. 若 K 有一个高层序 P^*,使得 $P^*\cap F=P$,则称 P^* 是 P 在 K 上的一个扩张,或称 (K,P^*) 是 (F,P) 的一个(高层)序扩张. 此时,由于 $\dot{F}/\dot{P}(\cong\dot{F}\dot{P}^*/\dot{P}^*)$ 可嵌入群 $\dot{K}/\dot{P}^*$ 中,所以 P 的恰好层不超过 P^* 的恰好层. 一般地,两个恰好层未必相等. 例如,设 $F=\mathbf{Q}$, $K=\mathbf{Q}(x)$,其中 x 是有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的未定元,由于 $x^2\notin\sum K^4$,所以 $\sum K^2\neq\sum K^{2\times2}$. 由贝克尔(Becker, E.)的结论,对于大于 1 的任意自然数 m, K 总有恰好 m 层序 P^*,然而 $P=P^*\cap F$ 只能是通常的序. 对于上面的情况,若 P 的恰好层等于 P^* 的恰好层,则称 P^* 是 P 在 K 上的一个忠实扩张,或称 (K,P^*) 是 (F,P) 的一个忠实扩张.

高层序扩张(extension of an ordering of higher level)　见"高层序的忠实扩张".

高层序域的实闭包(real closure of an ordered field of higher level)　序域的实闭包在高层序域上的推广. 这类实闭包保留普通实闭包的一些特性,但在某些方面有别于普通实闭包. 设 (F,P) 是一个高层序域, (F,P) 的一个实闭包是指域 F 的一个极大代数扩张 R,使得 P 在 R 上有忠实扩张. 高层序域的实闭包总是存在的. 此外,若 R 是 (F,P) 的一个实闭包,则 P 在 R 上只有惟一的忠实扩张. 然而不同于普通实闭包,恰好层大于 1 的序域 (F,P) 的任意两个实闭包未必 F 同构. 至于如何判别两个实闭包是否 F 同构,有下面的结论:高层序域 (F,P) 的两个实闭包 R_1 与 R_2 是 F 同构,当且仅当对于任何自然数 m,

$$R_1^{2m}\cap F=R_2^{2m}\cap F.$$

上面的结论实际上蕴含着普通实闭包的惟一性.

半序(semiordering)　一种条件较通常序弱的序关系. 域 F 的一个半序是 F 的一个子集 S,且满足下列条件:

1. $S+S\subseteq S$.

2. $S\cap -S=\{0\}$,且 $S\cup -S=F$.

因此,域 F 的一个半序实际上是加群 F 的一个序所决定的正元素集合. 对于域,有实际意义的一种半序是所谓的 T 半序,这里 T 是域 F 的一个亚正锥. 域 F 的一个半序 S,若 $T\cdot S\subseteq S$,则称 S 为 T 半序;一个 T 半序 S,若 $1\in S$,则称 S 为规范的. 亚序域 (F,T) 的每个序都是规范的 T 半序,但反之未必. 若域 F 的每个规范的 T 半序都是 F 的序,则称 T 是一个帕施正锥或帕施序. 当 T 是域 F 的弱亚正锥 S_F 时,规范的 S_F 半序称为二次半序或 q 半序;且当 S_F 是帕施正锥时,称 F 是一个帕施域. 二次半序(q 半序)源于所谓的无帕施公理几何,并在二次型理论中有应用意义.

规范半序(normal semiordering)　见"半序".

帕施正锥(Pasch pre-positive cone)　见"半序".

帕施亚序(Pasch preordering)　见"半序".

二次半序(quadratic semiordering)　见"半序".

帕施域(Pasch field)　见"半序".

SAP 域(SAP field)　具有某种特殊性质的(亚序)域.全称为"具有强逼近性质的(亚序)域".设(F,T)是一个亚序域,若序空间$X_F(T)$的任意两个不相交的闭子集A和B是可以分离的,即有$a\in \dot{F}$,使得$A\subseteq H_T(a)$,而$B\subseteq H_T(-a)$,则称(F,T)是一个SAP亚序域,或称T是一个SAP亚序.SAP亚序域有许多重要的刻画,略举如下:对于亚序域(F,T),下列叙述是等价的:

1. T是SAP亚序.
2. T是帕施序.
3. T满足所谓的"弱逼近性质":$X_F(T)$中任意序P与任一不包含P的闭子集可分离.
4. 对于相异$P_1,P_2,P_3,P_4\in X_F(T)$,$P_1$与$\{P_2,P_3,P_4\}$可分离.

由此可见,帕施序与SAP亚序是名异义同的两个概念.特别地,当域F的弱亚序是SAP亚序时,称F是一个SAP域.

有强逼近性质的(亚序)域((preordered) field with the strong approximation property)　见"SAP域".

SAP 亚序域(SAP preordered field)　见"SAP域".

SAP 亚序(SAP preordering)　见"SAP域".

ED 域(ED field)　一类在二次型理论中有应用价值的域,全称为"有效对角化域".若域F上的每个二次型可有效对角化,即F上每个二次型有这样的一个对角化:$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$,其中

$$H(a_1)\subseteq\cdots\subseteq H(a_n),$$

则称F是ED域.当F不是实域时,由于序空间X_F为空集,所以认定F是一个ED域.实ED域与SAP域之间有密切关系:一个实ED域必是SAP域;一个实域是ED域,当且仅当它的毕达哥拉斯闭包(参见"毕达哥拉斯闭包")是SAP域.

有效对角化域(effectively diagonalizable field)　见"ED域".

欧几里得域(Euclidean field)　简称欧氏域.一类特殊的实域.设F是一个实域.若对于每个$0\neq a\in F$,a或$-a$二者必有且仅有一个是F中的完全平方,则称F是欧氏域.欧氏域F只有惟一的序$>$,即$a>0$当且仅当$a=b^2,b\in F$且$b\neq 0$.但仅有一个序的域并不一定是欧氏域,如有理数域Q.

遗传欧氏域(hereditarily Euclidean field)　欧氏域的子类.一个欧氏域F,若它的每个为实域的代数扩张都是欧氏域,则称F是遗传欧氏域.F成为遗传欧氏域,当且仅当F和它的每个成为实域的代数扩张都只有一个序.实闭域自然是遗传欧氏域.

欧几里得闭包(Euclidean closure (hull))　简称欧氏闭包.实域的实二次闭包.它与二次闭包的关系类似于实闭包与代数闭包的关系.实域F的一个代数扩张E称为F的一个欧氏闭包,是指E是极小的欧氏域,即E的任何一个包含F的真子域不再是欧氏域.一个实域的欧氏闭包总是存在的.事实上,若取定实域F的一个实闭包R,则R中包括R本身在内的所有F的欧氏扩域的交集即为F的一个欧氏闭包.对于欧氏闭包,尚有如下刻画:若$F(2)$表示实域F的二次闭包,E是F的一个代数扩张,且$F(2)$与E在同一个代数闭域内,则下列叙述是等价的:

1. E是F的一个欧氏闭包.
2. E是欧氏域,且$E\subseteq F(2)$.
3. $E\subseteq F(2)$,且$[F(2):E]=2$.
4. $E\subseteq F(2)$,且$1<[F(2):E]<\infty$.

正如实域的实闭包在同构意义下不是惟一的,一个实域的欧氏闭包也未必惟一.鉴于序域的实闭包的惟一性,从而引进了"序域的欧氏闭包"这一概念.一个序域(F,P)的欧氏闭包是F的这样一个欧氏闭包,其惟一序是序P的一个扩张.序域(F,P)的欧氏闭包是存在的,同时在F同构的意义下是惟一的.

毕达哥拉斯域(Pythagorean field)　一类重要的实域.一个实域F称为是毕达哥拉斯域,是指:$F^2+F^2\subseteq F^2$,这里$F^2=\{x^2\mid x\in F\}$.即一个实域F是毕达哥拉斯域,当且仅当F^2是它的弱亚正锥.欧氏域、实闭域都是毕达哥拉斯域.毕达哥拉斯域的一个重要刻画是:域F为毕达哥拉斯域,当且仅当$-1\notin F^2$,且F没有4次循环扩张.毕达哥拉斯域具有所谓的"下降"性质:毕达哥拉斯域F的任何一个满足$[F:E]<\infty$的子域E也是毕达哥拉斯域.

毕达哥拉斯闭包(Pythagorean closure (hull))　实域的最小的毕达哥拉斯扩张.若F是一个实域,Ω是它的代数闭包,则F在Ω中的任何一个实闭包都是F的毕达哥拉斯扩张.若F_{py}是Ω中所有F的毕达哥拉斯扩张的交集,则称F_{py}是F的一个毕达哥拉斯闭包.此外,实域F的毕达哥拉斯闭包在F同构的意义下是惟一的.实际上,F_{py}是Ω中所有F的欧氏闭包的交集.这一事实说明了毕达哥拉斯闭包与欧氏闭包之间的密切关系.

***n*毕达哥拉斯域**(n-Pythagorean field)　高层毕达哥拉斯域.它是出自于对域元素的$2n$次幂所组成的集合的加法封闭性的考虑.设n为一自然数.一个实域F称为n毕达哥拉斯域,是指

$$F^{2n}+F^{2n}\subseteq F^{2n},$$

其中

$$F^{2n}=\{x^{2n}|x\in F\}.$$

按此定义，毕达哥拉斯域即为通常的毕达哥拉斯域. 对于自然数 n，实闭域以及 n 层序域的实闭包都是 n 毕达哥拉斯域. 一个与 n 毕达哥拉斯域有关的颇为惊奇的结果是：对于自然数 $n\leqslant m$，一个 n 毕达哥拉斯域必是 m 毕达哥拉斯域.

遗传毕达哥拉斯域(hereditarily Pythagorean field)　具有所谓"上升"性质的毕达哥拉斯域. 若一个实域的每个实代数扩张都是毕达哥拉斯域，则这个实域称为遗传毕达哥拉斯域. 由毕达哥拉斯域的"下降"性质知，一个遗传毕达哥拉斯域自然为毕达哥拉斯域. 借助于绝对伽罗瓦群，遗传毕达哥拉斯域有如下刻画：一个实域 F 是遗传毕达哥拉斯域，当且仅当域 $F(\sqrt{-1})$ 的绝对伽罗瓦群是阿贝尔群.

超毕达哥拉斯域(super Pythagorean field)　一类特殊的毕达哥拉斯域. 若一个毕达哥拉斯域的弱亚正锥是一个扇锥，则称此域为超毕达哥拉斯域. 毕达哥拉斯域与超毕达哥拉斯域定义不同而后来发现彼此等价的一个概念是所谓的"超(严格)毕达哥拉斯域". 一个实域称为超(严格)毕达哥拉斯域，是指它的每个实二次扩张是毕达哥拉斯域. 超(严格)毕达哥拉斯域具有如下刻画性质：一个实域 F 是超(严格)毕达哥拉斯域，当且仅当 F 在它的二次闭包中的每个实扩张都是毕达哥拉斯域.

超(严格)毕达哥拉斯域(super (strictly) Pythagorean field)　即"超毕达哥拉斯域".

相对遗传毕达哥拉斯域(relative hereditarily Pythagorean field)　具有相对遗传性的毕达哥拉斯域. 这类域在概念上统一了几类特殊的毕达哥拉斯域. 设 Λ 是实域 F 的一个二次闭的伽罗瓦扩张. 若 F 在 Λ 中的每个实扩张都是毕达哥拉斯域，则称 F 是相对 Λ 的遗传毕达哥拉斯域. 在上面的定义中，若 Λ 是 F 的代数闭包，则得到遗传毕达哥拉斯域；若 Λ 是 F 的二次闭包时，则得到超(严格)毕达哥拉斯域. 相对遗传毕达哥拉斯域可刻画如下：一个实域 F 是相对 Λ 的遗传毕达哥拉斯域，当且仅当伽罗瓦群 $\mathrm{Aut}(\Lambda/F(\sqrt{-1}))$ 是阿贝尔群.

撰　稿　曾广兴　戴执中
审　阅　杨劲根

赋　值　论

赋值论(valuation theory)　域论的一个重要分支. 它是研究交换代数的一个工具. 特别是在代数数论、分歧理论、类域论和代数几何中有极为重要的应用. 通常的赋值可分为加法与乘法赋值两类，有时简称赋值. 从赋值出发，可以给原来的域一个拓扑结构，使之成为拓扑域. 赋值理论肇始于屈尔沙克(Kürschák, J.)于1913年发表的论文. 赋值、赋值域这些名称都是他首先引入的. 其后，经过奥斯特洛夫斯基(Ostrowski, A. M.)等人的工作，解决了屈尔沙克在论文中提出的问题，并发展了这一理论. 1932年，克鲁尔(Krull, W.)发表了题为《一般赋值理论》的基本论文，从而奠定了赋值论这一分支的基础. 时至今日，赋值理论已逐渐越出了"域"的界限，在许多代数结构上，例如群、环、向量空间等，也用多种方式引进赋值，并由此对这些结构作算术理论的研究. 此外，赋值论还渗入泛函分析的领域，发展了所谓非阿基米德泛函分析.

绝对值(absolute value)　一个域到实数域内的一种映射. 它是通常绝对值的推广. 若 φ 是由域 F 到实数域 $\mathbb{R}$ 的映射，称 φ 为 F 上的一个绝对值，若 φ 满足条件：

1. $\varphi(a)\geqslant 0$, $\varphi(a)=0$，当且仅当 $a=0$(F 的零元).

2. $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$.

3. $\varphi(a+b)\leqslant C\max\{\varphi(a),\varphi(b)\}$，其中 $a,b\in F$，C 为一常数，满足 $0<C\leqslant 2$.

注意由条件1,2,3可推出三角不等式，即

4. $\varphi(a+b)\leqslant\varphi(a)+\varphi(b)$.

并且条件1,2,3与条件1,2,4是等价的. 最常见的绝对值有：通常实数域的绝对值 $|\cdot|$，复数域上的模.

非阿基米德绝对值(non-Archimedean absolute value)　亦称一阶赋值. 一类特殊的绝对值. 它是一种非常重要的类型. 若 φ 为 F 上的绝对值，且 $C=1$，即在绝对值定义之中(参见"绝对值")条件3变为

$$\varphi(a+b)\leqslant\max\{\varphi(a),\varphi(b)\},$$

则称 φ 为非阿基米德绝对值. 非浅显的绝对值为非阿基米德绝对值的充分必要条件是：$\varphi(me)\leqslant 1$ 对每个 $m\in\mathbb{Z}$(整数加群)，e 为 F 的单位元. 特征为 p 的域上只能有非阿基米德绝对值.

一阶赋值(valuation of rank 1)　即"非阿基米德绝对值".

阿基米德绝对值(Archimedean absolute value)　与非阿基米德绝对值相排斥的另一种绝对值. 设 φ 为 F 上的绝对值，若 φ 满足三角不等式

$$\varphi(a+b)\leqslant\varphi(a)+\varphi(b),$$

但不满足

$$\varphi(a+b)\leqslant\max(\varphi(a),\varphi(b)),$$

则称 φ 为阿基米德绝对值. φ 为阿基米德绝对值的充分必要条件是：存在 $m\in\mathbb{Z}$(整数加群)，使 $\varphi(me)>1$，其中 e 为 F 的单位元. 把绝对值区分为阿基米德绝对值和非阿基米德绝对值，来自奥斯特

洛夫斯基(Ostrowski, A. M.)于 1915 年的工作.

等价绝对值(equivalent absolute values)　亦称绝对值的等价. 绝对值间的某种特定关系. 若同一域上的两个绝对值 φ_1, φ_2, 满足 $\varphi_1 = \varphi_2^r$, 其中 r 为正实数, 则称 φ_1, φ_2 为等价的绝对值. 通常记为 $\varphi_1 \sim \varphi_2$. 浅显绝对值与任何非浅显绝对值是不等价的.

浅显绝对值(trivial absolute value)　一种特殊的绝对值. 它取值为 0 或 1. 若 φ 为域 F 上的绝对值, $\varphi(0)=0$, 而对于任意的 $a \in F-\{0\}$, $\varphi(a)=1$, 则称 φ 为 F 上的浅显绝对值.

φ 收敛序列(φ-convergent sequence)　关于绝对值 φ 的收敛序列. 设 φ 是域 F 的绝对值, $\{a_i\}=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 是 F 的无限序列. 若有 F 中的某个元素 a, 使对任意的实数 $\varepsilon>0$, 总有一个 n_0, 当 $n>n_0$ 时, $\varphi(a_n-a)<\varepsilon$, 则称 $\{a_i\}$ 关于 φ 收敛于 a, 或称 $\{a_i\}$ 是 φ 收敛于 a. 记为 $\varphi\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

φ 基本序列(φ-fundamental sequence))　亦称 φ 柯西序列. 它是关于绝对值 φ 的基本序列. 它是数学分析中柯西(基本)序列的一个自然推广. 设 φ 是域 F 的绝对值, $\{a_i\}=\{a_1, a_2, \cdots\}$ 是 F 的一个无限序列. 若对每一个实数 $\varepsilon>0$, 总可找到一个自然数 N, 使得当标号 $s, t \geqslant N$ 时, 恒有 $\varphi(a_s-a_t)<\varepsilon$, 则称 $\{a_i\}$ 是关于 φ 的基本序列. 若域 F 在某个一阶赋值下, 每个基本列都有极限, 则称 F 为关于赋值的完全域.

φ 柯西序列(Cauchy φ-sequence)　即"φ 基本序列".

赋值的完全域(complete field of valuation)　见"φ 基本序列".

有序群(ordered multiplicative group)　带有全序的一个交换乘(加)群. 关于有序乘(加)群, 下面两个定义是等价的:

1. Γ 是一个阶大于 1 的交换乘(加)群, 即 $\Gamma \neq \{1\}(\{0\})$, 若 Γ 中有非空子集 Δ 满足:

1) $1 \overline{\in} \Delta (0 \overline{\in} \Delta)$.

2) 对 Γ 中的每一个元素 $\lambda \neq 1 (\lambda \neq 0)$, 必有 $\lambda \in \Delta$ 或者 $\lambda^{-1} \in \Delta (-\lambda \in \Delta)$.

3) Δ 对乘法(加法)封闭,

则称 Γ 为一个有序乘(加)群, 或者称为由 Δ 所定义的有序乘(加)群.

2. Γ 是一个交换群, 若 Γ 上定义了一个二元关系 $\leqslant$, 满足下面条件:

1) 对于每个 $\lambda \in F$ 有 $\lambda \leqslant \lambda$ 成立.

2) 对于任意两个 $\lambda, u \in \Gamma$, 有 $\lambda \leqslant u$ 或者 $u \leqslant \lambda$ 成立.

3) 若 $\lambda \leqslant u$ 以及 $u \leqslant \lambda$, 则 $\lambda = u$.

4) $\lambda \leqslant u, u \leqslant v$ 且有 $\lambda \leqslant v$.

5) 若 $\lambda \leqslant u$, 且对任何 $v \in \Gamma$ 皆有

$$\lambda v \leqslant uv (\lambda + v \leqslant u + v).$$

有序交换群在赋值论中有很重要的作用.

带有零元素(∞)的有序乘(加)群(ordered multiplicative (additive) group with $0(\infty)$)　在有序乘(加)群上添加一个零元(∞)的集合, 并在此集合上加上适当的运算与序. 若 Γ 为一个有序乘(加)群, 对 Γ 添加一个零元(∞), 它与 Γ 中的元素满足运算规律: $0 \cdot 0 = 0, 0\lambda = \lambda 0 = 0 (\infty + \infty = \infty, \lambda + \infty = \infty + \lambda = \infty)$; 又对每一个 $\lambda \in F$, $0 < \lambda (\lambda < \infty)$, 则称 $\Gamma \cup \{0\} (\Gamma \cup \infty)$ 为带零元(∞)有序乘(加)群.

孤立子群(isolated subgroup)　亦称凸子群. 序群中的一类重要子群. 设$(\Gamma, \leqslant)$是序群, Δ 是 Γ 的子集, 若对每个 $\lambda \in \Delta$, Γ 中所有处于 λ 与 λ^{-1} 之间的元素 μ, 即满足 $\lambda^{-1} \leqslant \mu \leqslant \lambda$ 或 $\lambda \leqslant \mu \leqslant \lambda^{-1}$ 的 μ 都属于 Δ, 则称 Δ 是 Γ 的一个分段. 若 $\Delta \neq \Gamma$, 且 Δ 同时又是一个子群, 则称 Δ 是 Γ 的一个孤立子群. 对序群 Γ 的孤立子群的全体, 定义序关系"$<$"为: $\Delta_1 < \Delta_2$ 当且仅当 $\Delta_2 \subset \Delta_1$. 按照序关系"$<$", Γ 的孤立子群全体构成一个链, 它的序型就称为序群 Γ 的阶.

凸子群(convex subgroup)　即"孤立子群".

序群的分段(segment of an ordered group)　见"孤立子群".

序群的阶(rank of an ordered group)　见"孤立子群".

阿基米德序群(Archimedean ordered group)　一类重要的序群. 一个序群$(\Gamma, \leqslant)$, 若对 Γ 的任何元素 λ, 以及 $\mu>1$, 恒有某个自然数 n, 使得 $\mu^n > \lambda$ 成立, 则称 Γ 为阿基米德序群. 序群 Γ 是阿基米德的, 当且仅当它的阶为 1. 每个阿基米德序群都与实数加群的一个子群成序同构对应.

域的赋值(valuation of a field)　从域到序群的一种具有特定性质的映射. 设 F 为一个域, Γ 是一个序群. 若映射 $\varphi: F \to \Gamma \cup \{0\}$ 满足:

1. φ 是满射;
2. $\varphi(a)=0$ 当且仅当 $a=0$(F 的零元素);
3. $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$;
4. $\varphi(a+b) \leqslant \max\{\varphi(a), \varphi(b)\}$;

则称 φ 是 F 的一个赋值, Γ 是 φ 的值群. 若 $\varphi(a)=1, \forall 0 \neq a \in F, \varphi(0)=0$, 则称 φ 为 F 的浅显赋值. 当 Γ 为一个加法序群时, 若 $v: F \to \Gamma \cup \{\infty\}$ 满足下面条件:

1. v 为满射;
2. $v(a)=\infty$ 当且仅当 $a=0$;
3. $v(ab)=v(a)+v(b)$;
4. $v(a+b) \geqslant \min\{v(a), v(b)\}$;

则称 v 是 F 的一个加法赋值, 或称克鲁尔赋值, 以 Γ 为其值群.

值群(value group) 见"域的赋值".

浅显赋值(trivial valuation) 见"域的赋值".

加法赋值(additive valuation) 见"域的赋值".

克鲁尔赋值(Krull valuation) 见"域的赋值".

赋值环(valuation ring) 满足一定条件的域的子环.若 F 为一个域,B 为 F 的一个子环,对于 F 中的每一个非零元 a,必有 a 或者 $a^{-1}\in B$,则称 B 为 F 的一个赋值环.F 的每个赋值都能确定一个赋值环(参见"赋值 φ 的赋值环");反之,从 F 的任一赋值环,也可以定出(除等价不计外)惟一的赋值.而域 F 本身称为浅显赋值环.带有赋值 φ 或赋值环 B 的域 F,称为赋值域.用 (F,φ) 或 (F,B) 表示.

浅显赋值环(trivial valuation ring) 见"赋值环".

赋值域(valued field) 见"赋值环".

等价赋值(equivalent valuations) 两个赋值间的一种等价关系.设 φ_1,φ_2 是域 F 的两个赋值,其值群分别是 Γ_1,Γ_2.若 Γ_1 与 Γ_2 间有序同构映射 θ,使得对每个 $0\neq a\in F$,有

$$\varphi_2(a)=\theta(\varphi_1(a)),$$

则称 φ_1,φ_2 是等价的赋值.域 F 的等价的赋值所成的类与域 F 的赋值环之间存在一一对应.

互为独立的赋值环(independent valuation rings) 赋值环间的一种关系.设 B_1,B_2 都是域 F 的赋值环,若同时包含 B_1,B_2 的赋值环只有浅显赋值环,则称 B_1,B_2 为互为独立的赋值环.

赋值的独立性(independency of valuations) 赋值论的一个重要概念.它是由赋值环的独立性而导出的概念.域 F 的两个赋值 φ_1 和 φ_2,若它们的赋值环 B_1,B_2 是互为独立的,则称 φ_1,φ_2 为互为独立的.

不可比较的赋值环(incomparable valuation rings) 比赋值的独立性较弱的一个概念.设域 F 的赋值 φ_1,φ_2,其赋值环分别为 B_1,B_2,若有关系 $B_1\not\subseteq B_2$ 以及 $B_2\not\subseteq B_1$ 同时成立,则称 φ_1,φ_2 是不可比较的赋值,且 B_1,B_2 是不可比较的赋值环.反之,若有 $B_1\subseteq B_2$ 或者 $B_2\subseteq B_1$ 成立,则称 φ_1,φ_2 是可比较的,且 B_1,B_2 是可比较的赋值环.

不可比较的赋值(incomparable valuations) 见"不可比较的赋值环".

可比较的赋值(comparable valuations) 见"不可比较的赋值环".

可比较的赋值环(comparable valuation rings) 见"不可比较的赋值环".

赋值 φ 的赋值环(valuation ring of a valuation φ) 由赋值 φ 所确定的赋值环.若 F 为域,φ 为 F 上的赋值,F 的子集 $B_\varphi=\{a\mid\varphi(a)\leqslant 1\}$ 为 F 的子环,且它是一个赋值环,则称 B_φ 为赋值 φ 的赋值环.B_φ 的极大理想称为赋值 φ 的理想.事实上,这个理想为 $M_\varphi=\{a\mid\varphi(a)<1\}$.由 B_φ 与 M_φ 做的商环 B_φ/M_φ 称为赋值 φ 的剩余域.

赋值 φ 的理想(ideal of a valuation φ) 见"赋值 φ 的赋值环"..

赋值 φ 的剩余域(residue class field of a valuation) 见"赋值 φ 的赋值环".

赋值环的剩余域(residue class field of a valuation ring) 剩余类环的特殊情况.即赋值环与其极大理想所构成的剩余类环.由于所用的是极大理想,所以是个域,称此域为剩余域.

赋值环在子环上的中心(center of a valuation ring on a subring) 子环的特殊素理想.B 是域 F 的一个赋值环,M_B 是 B 的极大理想,R 是 F 的一个子环,并且 $R\subseteq B$.此时 $M_B\cap R=P$ 为 R 的一个素理想,称它为 B 在 R 上的中心.R 的任一个真素理想都是某个赋值环在 R 上的中心.

赋值的分解(decomposition of a valuation) 赋值论的重要概念.它给出阶 >1 的赋值分解成较小阶赋值的合成.给定域 F 的一个阶 >1 的赋值 φ,其值群为 Γ,赋值环为 B.对 Γ 的每个孤立子群 $\Delta\neq\{1\}$,若 P 是 B 中与 Δ 对应的素理想,则 φ 可以确定 F 的另一赋值 ϕ,它以 Γ/Δ 为其值群,商环 B_P 为其赋值环.在 ϕ 的剩余域上有一个值群为 Δ,赋值环为 B/P 的赋值 $\bar{\varphi}$.这一事实称为赋值 φ 到 ϕ 及 ϕ 的剩余域上一个赋值 $\bar{\varphi}$ 的分解,并记为 $\varphi=\phi\circ\bar{\varphi}$.反之,对域 F 的一个赋值 ϕ 及 ϕ 的剩余域的一个赋值 $\bar{\varphi}$,有域 F 的一个赋值 φ,使得 $\varphi=\phi\circ\bar{\varphi}$,称 φ 是由 ϕ 与 $\bar{\varphi}$ 所定的合成赋值.

合成赋值(composite valuation) 见"赋值的分解".

赋值环的阶(rank of a valuation ring) 刻画素理想链长的一个量.在赋值环 B 中,所有的非零素理想能按集合包含关系组成一个链,这个链的序型就称为 B 的阶.

有限阶赋值环(valuation ring of finite rank) 赋值环的特殊类.具有有限个非零真素理想的赋值环,称为有限阶赋值环.只有一个非零真素理想的赋值环称为一阶赋值环.若 φ 为域 F 的赋值,则 φ 的阶就是它的赋值环的阶.

一阶赋值环(valuation ring of rank one) 见"有限阶赋值环".

赋值的阶(rank of a valuation) 见"有限阶赋值环".

一阶离散赋值(discrete valuation of rank one) 一种值群为整数加群的赋值.设 F 为一个域,φ 为 F 上的赋值.若 φ 的值群为整数加群,则称 φ 为 F 的一

阶离散赋值.

亨泽尔赋值(Henselian valuation)　一种特殊的赋值.指域 F 上的赋值,它在 F 的任何代数扩张上都只有惟一的拓展.此时,对应的赋值环满足亨泽尔条件.亨泽尔赋值在研究多项式分解中有重要作用.

亨泽尔赋值环(Henselian valuation ring)　具有亨泽尔赋值的赋值环.F 上的赋值环 B,若由 B 确定的正规赋值 φ_B 为亨泽尔赋值,则称 B 为亨泽尔赋值环.

亨泽尔条件(Henselian condition)　一种与亨泽尔赋值环等价的条件.设 B 是局部环,M_B 是它的极大理想,$\overline{F}=B/M_B$ 是它的剩余域,π 是从 B 到 $\overline{F}$ 的正规同态映射(即对于每个 $b\in B,\pi(b)=b+M_B$).B 满足以下条件:设

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_0\in B[x]$$

且

$$f^{\pi}(x)=x^n+\pi(a_1)x^{n-1}+\cdots+\pi(a_n)\in\overline{F}[x].$$

若 $f^{\pi}(x)=\overline{g}(x)\overline{h}(x)$ 是 $f^{\pi}(x)$ 在 $\overline{F}[x]$ 上的一个分解,其中,$\overline{g}(x),\overline{h}(x)$ 的次数都 $\geqslant 1$,则存在 $B[x]$ 的首 1 多项式 $g(x),h(x)$ 满足:$f(x)=g(x)\cdot h(x)$ 且

$$g^{\pi}(x)=\overline{g}(x),\quad h^{\pi}(x)=\overline{h}(x).$$

此时,称 B 满足亨泽尔条件.

亨泽尔域(Henselian field)　亦称亨泽尔赋值域.一种重要的赋值域.若 φ 是域 F 的一个亨泽尔赋值,则称赋值域 (F,φ) 为亨泽尔域,或称亨泽尔赋值域.对于亨泽尔域 (F,φ) 的任何代数扩张 K,φ 在 K 上只有惟一的拓展 ψ,此时 (K,ψ) 也是亨泽尔域.在亨泽尔域 (F,φ) 中,除与 φ 等价的赋值外,其他的赋值都是反亨泽尔赋值.若 (F,φ) 的赋值域扩张 (K,ψ) 是个亨泽尔域,则称 (K,ψ) 是赋值域 (F,φ) 的亨泽尔扩张.在早期的文献中,亨泽尔域被称为相对完全域,这个概念最初来自奥斯特洛夫斯基(Ostrowski,A.M.)于 1932 年对一阶赋值域的研究.

亨泽尔赋值域(Henselian valued field)　即"亨泽尔域".

亨泽尔扩张(Henselian extension)　见"亨泽尔域".

赋值域扩张(extension of a valued field)　见"亨泽尔域".

相对完全域(relatively complete field)　即"亨泽尔域".

亨泽尔化(Henselization)　赋值域的最小亨泽尔扩张.设 (K,ψ) 是赋值域 (F,φ) 的一个赋值扩张,若满足下列条件,则称 (K,ψ) 是 (F,φ) 的一个亨泽尔化:

1. (K,ψ) 是个亨泽尔域.

2. K 是 F 的一个代数扩张.

3. 若 (K',ψ') 是 (F,φ) 的一个亨泽尔扩张,则存在一个惟一的 F 单一同态 $\lambda:K\to K'$,使得有

$$\psi'(\lambda(x))=\psi(x)\quad(x\in K).$$

任何赋值域 (F,φ) 都存在亨泽尔化,而且除满足上述条件 3 的 F 同构外是惟一的.亨泽尔化可以通过分解域而获得,它是域 F 上的可分代数扩张.亨泽尔化是原赋值域的紧接扩张.

***n* 亨泽尔赋值**(n-Henselian valuation)　一种特殊的赋值.赋值环满足 n 亨泽尔条件的赋值.这种赋值又可作如下的刻画:φ 成为域 F 的一个 n 亨泽尔赋值,当且仅当对于 F 上任何 n 次扩域 K,φ 在 K 上只有惟一的拓展.与它相反的情形是:若对于 F 的任何 n 次可分扩域 K,φ 在 K 上恰有 n 个不等价的拓展,则称 φ 为 n 反亨泽尔赋值.若对于每个正整数 n,都有上述情形出现,则称 φ 为 F 的一个反亨泽尔赋值.φ 成为反亨泽尔赋值的一个充分必要条件是:φ 是饱和的和无亏损的.

反亨泽尔赋值(anti-Henselian valuaiton)　见"n 亨泽尔赋值".

***n* 反亨泽尔赋值**(n-antihenselian valuation)　见"n 亨泽尔赋值".

牛顿多边形(Newton's polygon)　一阶亨泽尔域上多项式可约性的一种判别法.设 (F,v) 是一阶亨泽尔域,v 取加法赋值,对于 F 上任一多项式

$$f(X)=a_0X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n\quad(a_0a_n\neq 0),$$

可以在实平面上定出至多 $n+1$ 个有限点 $(i,v(a_i))$;当 $a_j=0$ 时,(j,∞) 将不计入(见图 1).由所设 $a_0a_n\neq 0$,$(0,v(a_0))$ 和 $(n,v(a_n))$ 分别是图中最左和最右

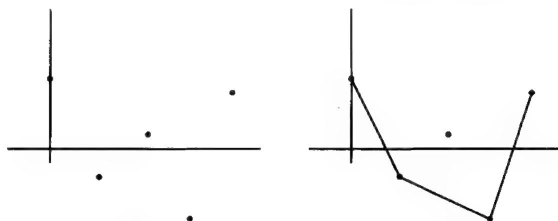


图1　　图2

的点.自 $(0,v(a_0))$ 出发,自左至右,连结图中的点可以作出一个凹向上的多边形,使得图中其余的点都位于多边形的上方(见图 2),称这样得出的多边形为 $f(X)$ 的牛顿多边形.与 $f(X)$ 的牛顿多边形的每条边相对应的,有 $f(X)$ 在 F 上的一个因式.因此,当 $f(X)$ 的牛顿多边形有 $s(>1)$ 条边时,$f(X)$ 在 F 上必定是可约的.但当边数为 1 时,却不能据此断言 $f(X)$ 在 F 上是不可约的.

非分歧扩张(unramified extension)　赋值域的一类重要扩张.设 K 是域 F 的一个扩张且赋值域 $(F,\varphi)\subseteq(K,\psi)$,若 φ,ψ 的值群和剩余域分别为 Γ,Λ 和 $\overline{F},\overline{K}$,则称群指数 $(\Lambda:\Gamma)$ 为 ψ 关于 F 的分歧指

数，通常记为 $e(\psi|F)$. 又，若 $\overline{K}/\overline{F}$ 是代数扩张，则称扩张次数 $[\overline{K}:\overline{F}]$ 为 ψ 关于 F 的剩余次数，常记为 $f(\psi|F)$. 当 $e(\psi|F)=1$ 时，称 (K,ψ) 是 (F,φ) 的一个非分歧扩张；当

$$e(\psi|F)=f(\psi|F)=1$$

时，称 (K,ψ) 是 (F,φ) 的一个紧接扩张. 一阶赋值域 (F,φ) 的完全化域 $(\widetilde{F},\widetilde{\varphi})$ 是 (F,φ) 的一个紧接扩张. 这是紧接扩张的一个重要的例子. 若 ψ 的赋值环为 C，则 $e(\psi|F)$ 和 $f(\psi|F)$ 亦分别记为 $e(C|F)$ 和 $f(C|F)$.

分歧指数(ramification index)　见"非分歧扩张".

剩余次数(residue degree)　见"非分歧扩张".

紧接扩张(immediate extension)　见"非分歧扩张".

基本不等式(fundamental inequality)　一种特殊不等式. 指给出赋值拓展时，分歧指数、剩余次数与域扩张次数之间的重要联系. 若 (F,B) 是赋值域，K/F 是有限代数扩张，$\mathscr{B}(K:B)$ 是 B 在 K 上全部拓展所成的集，则

$$[K:F]\geqslant\sum_{C\in\mathscr{B}(K;B)}e(C|F)f(C|F).$$

该不等式称为赋值拓展的基本不等式.

无亏损赋值环(defectless valuation ring)　对于某个代数扩张，使得在赋值拓展的基本不等式中等号成立的一类赋值环. 设 B 是域 F 的一个赋值环，K 是 F 的一个有限扩张，若

$$\sum_{C}e(C|F)\cdot f(C|F)=[K:F],$$

其中 C 取遍 B 在 K 上的全部拓展，则称赋值环 B(或对应的赋值)对于 K 是无亏损的. 无亏损性具有如下的传递性质：若 E 为 F 和 K 的中间域，则 B 对于 K 是无亏损的，当且仅当 B 对于 E 是无亏损的，且 B 在 E 上的每个拓展对于 K 是无亏损的. 一般地，对于 F 的任意一个代数扩张 L，若 B 对于 F 在 L 中的任何有限扩张都是无亏损的，则称 B 对 L 是无亏损的. 在此定义中，若 L 是 F 的可分闭包时，则称 B 是无亏损的；若 L 是 F 的代数闭包时，则称 B 是全无亏损的. 赋值环为无亏损(全无亏损)的赋值称为无亏损(全无亏损)的赋值.

全无亏损赋值环(totally defectless valuation ring)　见"无亏损赋值环".

无亏损赋值(defectless valuation)　见"无亏损赋值环".

全无亏损赋值(totally defectless valuation)　见"无亏损赋值环".

驯分歧扩张(tamely ramified extension)　一类包括非分歧扩张在内的代数扩张. 设 (K,C) 是赋值域 (F,B) 的一个代数扩张，$\overline{F}$ 和 Γ，$\overline{K}$ 和 Δ 分别是赋值环 B,C 的剩余域和值群，且 p 是域 $\overline{F}$ 的特征. 若 $\overline{K}$ 是 $\overline{F}$ 的可分扩张，且商群 Δ/Γ 是一个无 p 群(即不含 p 阶元素的群)，则称 (K,C) 是赋值域 (F,B) 的一个驯分歧扩张. 驯分歧扩张具有如下的传递性质：若 E 是 F 和 K 的中间域，则 (K,C) 是 (F,B) 的一个驯分歧扩张，当且仅当 (K,C) 是 $(E,C\cap E)$ 的驯分歧扩张，且 $(E,C\cap E)$ 是 (F,B) 的驯分歧扩张.

全分歧扩张(totally ramified extension)　一类有限赋值域扩张. 它是与非分歧扩张相反的概念. 赋值域 (F,B) 的一个有限扩张 (K,C)，若分歧指数 $e(C|F)=[K:F]$，则称此扩张为全分歧扩张. 此时，B 对于 K 是无亏损的，且 C 是 B 在 K 上的惟一拓展.

可许亨泽尔扩张(allowable Henselian extension)　一类重要的亨泽尔扩张. 借助这类扩张，欲求赋值环在某个有限扩张上的拓展个数，只须考察此有限扩张到代数闭扩张中嵌入的相应等价类的个数. 设 K 是域 F 的一个代数扩张，Ω 是包含 F 的一个代数闭域，用 $\mathrm{Mon}(K,\Omega|F)$ 表示所有从 K 到 Ω 内的 F 嵌入组成的非空集合. 对于 F 在 Ω 中的一个扩域 $\widetilde{F}$，可规定 $\mathrm{Mon}(K,\Omega|F)$ 上一个等价关系 $\sim^{\widetilde{F}}$：对于 $\theta_1,\theta_2\in\mathrm{Mon}(K,\Omega|F)$，若有 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\Omega/\widetilde{F})$，使得 $\theta_1=\sigma\theta_2$，则 $\theta_1\sim^{\widetilde{F}}\theta_2$,. 由等价关系 $\sim^{\widetilde{F}}$ 所决定的等价类组成的集合记为 $\mathrm{Mon}_{\widetilde{F}}(K,\Omega|F)$. 设 $(\widetilde{F},\widetilde{B})$ 是赋值域 (F,B) 的一个在 Ω 内的亨泽尔扩张，并且 $\mathscr{B}(K;B)$ 表示 B 在 K 上全部拓展所成的集合. 规定一个从 $\mathrm{Mon}_{\widetilde{F}}(K,\Omega|F)$ 到 $\mathscr{B}(K;B)$ 的映射：任意

$$\theta\in\mathrm{Mon}_{\widetilde{F}}(K,\Omega|F),\ \theta\to\theta^{-1}(\theta(K)\cap I_\Omega(\widetilde{B})),$$

其中 $I_\Omega(\widetilde{B})$ 表示 $\widetilde{B}$ 在 Ω 内的整闭包. 这个映射是满射，但不一定是单射. 若该映射是一个单射，则称 $(\widetilde{F},\widetilde{B})$ 是 K 可许的；若对于每个代数扩张 K，$(\widetilde{F},\widetilde{B})$ 都是 K 可许的，则称 $(\widetilde{F},\widetilde{B})$ 是 (F,B) 的一个可许亨泽尔扩张. 任一赋值域都具有可许亨泽尔扩张，例如，它的亨泽尔化(Henselization). 对于一阶赋值域，它的完全化也是一个可许亨泽尔扩张.

***K* 可许扩张**(*K*-allowable extension)　见"可许亨泽尔扩张".

初始指数(initial index)　刻画赋值域扩张中值群的正元素的个数. 设 (K,C) 是赋值域 (F,B) 的一个有限扩张，且 Γ,Δ 分别是赋值环 B,C 对应的(加法)值群. 集合 $\{\delta\in\Delta\,|\,0\leqslant\delta<\gamma$，对于 Γ 中每个正元素 $\gamma\}$ 的元素个数称为 C 关于 F 的初始指数，且记为 $\epsilon(C|F)$. 初始指数适合不等式

$$1\leqslant\epsilon(C|F)\leqslant e(C|F).$$

分解群(decomposition group)　伽罗瓦群的一个子群. 它使得这个正规扩张的某个赋值环稳定不变. 若 N 是域 F 的一个正规扩张，C 是 N 的一个赋

值环. 在伽罗瓦群 $\mathrm{Aut}(N/F)$ 中，子集

$$G^Z(C,F)=\{\sigma\in \mathrm{Aut}(N/F)\mid\sigma(C)=C\}$$

组成一个子群. 该子群称为 C 关于 F 的分解群. 分解群 $G^Z(C,F)$ 在 N 中的固定子域称为 C 关于 F 的分解域.

分解域(decomposition field)　见"分解群".

惯性群(inertia group)　分解群的一个正规子群. 它所决定的商群同构于相应的剩余域的伽罗瓦群. 若 N 是域 F 的一个正规扩张，C 与 π 分别为 N 的一个赋值环与对应的位，并且 $\overline{N},\overline{F}$ 分别是赋值环 $C,C\cap F$ 的剩余域，则 $\overline{N}$ 是 $\overline{F}$ 的正规扩张，且有一个从分解群 $G^z(C,F)$ 到伽罗瓦群 $\mathrm{Aut}(\overline{N}/\overline{F})$ 的满同态 φ，使得对

$$\sigma\in G^z(C,F),\quad \varphi(\sigma)=\bar{\sigma}\in \mathrm{Aut}(\overline{N}/\overline{F})$$

当且仅当

$$\bar{\sigma}(\pi(x))=\pi(\sigma(x)),\quad \forall x\in C.$$

同态 φ 的核称为 C 关于 F 的惯性群，记为 $G^T(C,F)$. 惯性群可如下给出：

$$G^T(C,F)=\{\sigma\in \mathrm{Aut}(N/F)\mid\sigma(x)-x\in M_C,\forall x\in C\},$$

其中 M_C 是 C 的赋值理想. 惯性群 $G^T(C,F)$ 在 N 中的固定子域称为 C 关于 F 的惯性域.

惯性域(inertia field)　见"惯性群".

分歧群(ramification group)　惯性群的一个正规子群. 它所决定的商群同构于某个有关的特征标群. 设 N 是域 F 的一个正规扩张，C 与 $\pi,\overline{N}$ 分别是 N 的一个赋值环与对应的位、剩余域，Δ,Γ 分别是赋值环 $C,C\cap F$ 的(加法)值群. 若 φ 是与 C 对应的赋值，则 φ 诱导一个从 $\dot{N}$ 到 Δ/Γ 的群同态映射 w，使得

$$w(x)=\varphi(x)+\Gamma\in\Delta/\Gamma\quad(\forall x\in\dot{N}).$$

若 Ω 是 $\overline{N}$ 的代数闭包，且 $H_\Omega(\Delta/\Gamma)$ 是商群 Δ/Γ 到 Ω 内的特征标群，则存在一个从 $G^T(C,F)$ 到 $H_\Omega(\Delta/\Gamma)$ 的满同态 ψ，使得对任意 $\sigma\in G^T(C,F)$，有

$$\psi(\sigma)=\tilde{\sigma}\in H_\Omega(\Delta/\Gamma)$$

当且仅当 $\tilde{\sigma}(w(x))=\pi(x^{-1}\sigma(x)),\forall x\in\dot{N}$. 同态映射 ψ 的核称为 C 关于 F 的分歧群，记为 $G^V(C,F)$. 分歧群 $G^V(C,F)$ 的构造可按如下方式给出：

$$G^V(C,F)=\{\sigma\in \mathrm{Aut}(N/F)\mid x^{-1}\sigma(x)-1\in M_C,\forall x\in\dot{N}\},$$

其中 M_C 为 C 的赋值理想. 分歧群 $G^V(C,F)$ 在 N 中的固定子域称为 C 关于 F 的分歧域.

分歧域(ramification field)　见"分歧群".

饱和赋值(saturated valuation)　在代数扩张下，值群与剩余域都保持不变的一类赋值. 设 φ 是域 F 的一个加法赋值，Γ 和 $\overline{F}$ 是对应的值群和剩余域. 对于自然数 n，若对于任意包含 Γ 的序群 Δ 以及 $\overline{F}$ 的任一有限扩张 $\overline{K}$，恒有

$$(\Delta:\Gamma)\cdot[\overline{K}:\overline{F}]\neq n,$$

则称 φ 是 n 饱和赋值. 又，若对于每个大于 1 的自然数 n，赋值 φ 都是 n 饱和赋值，则称 φ 是饱和赋值. 一个赋值是饱和的，当且仅当它的值群是可除群，同时其剩余域是代数闭域.

***n* 饱和赋值**(n-saturated valuation)　见"饱和赋值".

多重完全域(multiply complete field)　一种特殊的代数闭域. 若一个域 F 具有两个不等价的一阶完全赋值，则称域 F 是多重完全域. 多重完全域必然是代数闭域.

正规赋值(canonical valuation)　由赋值建立赋值环的逆问题所决定的赋值. 给定域 F 上的赋值环 B，可建立 F 上的赋值 φ_B，使得 φ_B 的赋值环为 B，这样的 φ_B 称为 B 确定的正规赋值. 正规赋值可如下建立：若 B 为 F 的赋值环，V_B 是 B 中的单位群，$F^*=F-\{0\}$，则可使 $\Gamma=F^*/V_B$ 成为有序群. 规定 φ_B：$F\to\Gamma\cup\{0\}$ 如下：

$$\varphi_B(a)=aV_B,\quad \varphi(0)=0,$$

φ_B 称为由 B 所确定的正规赋值. 若从 F 的一个赋值开始，先得出它的赋值环 B，再由 B 作出它的正规赋值 φ_B，则 φ 与 φ_B 等价.

逼近定理(approximation theorem)　赋值的基本定理. 该定理断言：设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_g$ 是域 F 的 g 个两两独立的赋值，其值群分别为 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_g$，对于 F 中任意给定的 g 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_g$，以及分别属于 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_g$ 的任意元素 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_g$，必有 $a\in F$，使得 $\varphi_i(a-a_i)=\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,g)$ 成立.

绝对值的完全化域(completion of field of absolute value)　含某个域的最小完全拓展. 设 φ 为 F 上的绝对值，$\tilde{\varphi}$ 为域 $\tilde{F}$ 的绝对值，若满足下面条件：

1. $F\subset\tilde{F},\tilde{\varphi}|_F=\varphi$;
2. $\tilde{F}$ 关于 $\tilde{\varphi}$ 是完全的；
3. F 在 $\tilde{F}$ 内是稠密的；

则称 $\tilde{F}$ 为 F 关于 φ 的完全化域. 完全化域在拓扑同构下是惟一确定的.

奥斯特洛夫斯基完全域定理(Ostrowski theorem on complete fields)　刻画阿基米德绝对值的完全域的个数定理. 该定理断言：阿基米德绝对值的完全域，除拓扑同构不计外，只能是实数域 $\mathbb{R}$ 与复数域 $\mathbb{C}$. 这个定理也可以表为以下的形式：若 φ 是域 F 的一个阿基米德绝对值，则存在实数 $r,0<r\leqslant1$，以及由 F 到复数 $\mathbb{C}$ 的某个子域的同构 σ，使得有

$$\varphi(x)=|\sigma(x)|^r,\quad x\in F,$$

这里 $|\cdot|$ 是复数在通常意义下的绝对值. 这个定理是奥斯特洛夫斯基(Ostrowski, A. M.)于 1915 年

获得的.

伪收敛序列(pseudo-convergent sequence) 亦称伪柯西序列. φ 收敛序列的一种推广. 设 $\{a_\beta\}_{\beta\in B}$ 是赋值域 (F,φ) 中的一个序列, 它的标号集 B 是无最大元(最终元)的良序集. 若对于所有满足 $\lambda<\mu<v$ 的标号 λ,μ,v, 皆有

$$\varphi(a_\mu-a_\lambda)>\varphi(a_v-a_\mu),$$

则称 $\{a_\beta\}_{\beta\in B}$ 是 (F,φ) 中的一个伪收敛序列. 由此, 当 λ 取定后, 对所有的 $\mu>\lambda$, $\varphi(a_\mu-a_\lambda)$ 都取同一个值, 记为 α_λ. 若有某个 $c\in F$, 使得对所有的 $\beta\in B$, 均有 $\varphi(c-a_\beta)=\alpha_\beta$, 则称 c 是 $\{a_\beta\}_{\beta\in B}$ 的一个伪极限. 伪收敛序列来自奥斯特洛夫斯基(Ostrowski, A. M.) 1932 年的工作, 用以构作一阶赋值在纯超越扩域上的拓展. 20 世纪 40 年代, 卡普兰斯基(Kaplansky, I.)把它推广于任意赋值域, 并用以刻画极大完全域. 以上的定义是依照卡普兰斯基的, 与奥氏的原始定义稍异. 在近年的文献中, 伪收敛序列也称为奥斯特洛夫斯基网列.

伪柯西序列(pseudo Cauchy sequence) 即"伪收敛序列".

伪极限(pseudo limit) 见"伪收敛序列".

奥斯特洛夫斯基网列(Ostrowski net sequence) 即"伪收敛序列".

有理数域上的 p 进赋值(p-adic valuations of the rational number field) 由素数 p 确定在 Q 上的一种非阿基米德绝对值(赋值). 若 $0<\rho<1$, 对于每一个有理数 a, a 一定可以被写为 $a=mp^{v(a)}/n$, 其中 $(m,p)=1$, $(n,p)=1$, 则定义 $\varphi(a)=\rho^{v(a)}$. 这样定义的 φ 是 Q 上的一个赋值, 称为 Q 上的 p 进赋值. 对于不同的 ρ, 用上法定义出的赋值是等价的. 对于有理数域 Q 上的赋值有奥斯特洛夫斯基定理: 有理数域 Q 上的赋值只能是浅显赋值、p 进赋值、通常绝对值及与它们等价的赋值. Q 关于 p 进赋值的完全化域称为 p 进(数)域, 其中的元素称为 p 进数.

p 进数(p-adic number) 参见"有理数域上的 p 进赋值". 每个 p 进数 α 都可表为如下的形式

$$\alpha=\sum_{n}^{\infty}a_ip^i,$$

其中 n,a_i 是整数, 并且 $0\leqslant a_i\leqslant p-1$. p 进数最初是亨泽尔(Hensel, K.)于 1904 年引进的, 它当时被用来研究代数数论.

p 进(数)域(p-adic (numbers) field) 见"有理数域上的 p 进赋值".

有理数域上的奥斯特洛夫斯基定理(Ostrowski's theorem on rational number field) 见"有理数域上的 p 进赋值".

域上有理函数域的 β 进赋值(β-adic valuations of a rational function field over a field) 由不可约多项式 $p(x)$ 确定的一种赋值. 若 F 为一个域, $F(x)$ 为 F 上的有理函数域, $p(x)\in F[x]$ 为不可约多项式, 则对任意的 $f(x)\in F(x)$ 有

$$f(x)=(p(x))^r\cdot h(x)/g(x),$$

其中 $r\in\mathbf{Z}$, $h(x),g(x)\in F[x]$, $(p(x),h(x))=(p(x),g(x))=(h(x),g(x))=1$. 若 $\varphi(f)=\rho^r$, 这里 $0<\rho<1$, 则称 φ 为 $p(x)$ 进赋值. 注意, 对于不同的 ρ, 所定义的 φ 是等价的.

位(place) 一种特殊的映射. 指满足一定条件, 由一个域到另一个添加 ∞ 的域的映射. 设 F,G 都是域, 若 $\pi:F\to G\cup\infty$ 满足下面条件:

1. 集 $B=\{a\in F\mid\pi(a)\in G\}$ 是 F 的一个分子环;
2. π 在 B 上的限制 $\pi|_B:B\to G$ 是一个同态;
3. 若 $\pi(a)=\infty$, 则 $\pi(a^{-1})=0$;

则称 π 是一个位. 确切地, π 为 G 的一值位. 通常 B 中的非单位元所成的集合 $M=\{a\in B\mid\pi(a)=0\}$ 称为位 π 的理想. 而当 $\pi|_B$ 为单一映射时, 称 π 为 F 的浅显位. 将商环 B/M 称为位 π 的剩余域. 由位可确定赋值, 因此, 位与赋值都可以用来定义赋值环. 位的概念在代数几何、函数论和代数数论中有着广泛的应用.

浅显位(trivial place) 见"位".

位的理想(ideal of place) 见"位".

位的剩余域(residue class field of place) 见"位".

位的赋值环(valuation ring of place) 一种特殊的环. 指由位决定的 F 的子环.

$$B=\{a\in F\mid\pi(a)\in G\}$$

称为位 π 的赋值环, 记为 B_π.

正规位(canonical place) 一种特殊的位. 与赋值环可互相转化的另一个概念. 由 (F,B)(参见"赋值域")做一个由 B 确定的位 π_B, 使 π_B 的赋值环 B_{π_B} 为 B. 这样的 π_B 称为正规位. π_B 的作法如下: 做正规同态 $\pi_B:B\to B/M_B=\overline{F}$, 对于元素 $a\in F-B$ 规定 $\pi_B(a)=\infty$, 称 π_B 为由 B 确定的正规位(其中, M_B 是 B 中一切非单位构成的极大理想). 若从域的一个位出发, 首先得出它的赋值环, 然后由赋值环定出正规位, 则这两个位等价.

位拓展定理(The extension theorem for places) 用映射刻画赋值环的重要定理. 设 R 是域 F 的子环, Ω 是一个代数闭域, $\sigma:R\to\Omega$ 是一个同态, 于是 σ 能拓展成 F 的一个 Ω 值位. 此定理是赋值论中的重要定理, 它刻画了 σ 在 F 中不能有真拓展的充分必要条件是 R 为 F 的一个赋值环.

撰 稿 汪精周 张人智 曾广兴
审 阅 戴执中

数　　论

数论(number theory)　研究数的性质和规律的一门学科.是数学的一个重要分支.对于数学的许多分支学科(例如函数论、几何、代数、概率论、计算数学、组合数学等)以及应用学科(例如通信技术、密码学等)的发展有着深刻的影响.其他学科的研究成果和思想方法,也对数论的发展有着重要的作用.数论按其内容和方法大致可分为初等的、解析的、代数的与几何的四类.

初等数论主要是用算术方法研究有理整数性质,包括整数的整除性、同余式、素数、原根、不定方程等,它不需要较为深入的分析和代数工具,是数学中古老的分支之一.远在公元前3世纪,古希腊数学家欧几里得(Euclid)就证明了素数的个数是无穷的.中国古代的《孙子算经》中给出了解一次同余式组的算法,即著名的"孙子定理"或称"中国剩余定理".从17世纪到19世纪,法国数学家费马(Fermat,P. de)、瑞士数学家欧拉(Euler,L.)、法国数学家勒让德(Legendre,A. M.)、德国数学家高斯(Gauss,C. F.)等人的工作大大发展和丰富了初等数论的内容.另外,对初等数论中某些问题的研究,进一步发展了数学中的新分支.如对不定方程和高次互反律的研究,促进了代数数论和类域论的发展.近几十年来,初等数论在计算机科学、组合数学、密码学、信号的数字处理等领域得到广泛的应用,取得了许多深刻的结果.

解析数论在本质上是利用数学中的解析工具来研究数论问题,主要的方法有复积分法、圆法以及三角和方法.在素数分布问题的研究中,俄罗斯数学家切比雪夫(Чебышев,П. Л.)首先引进了与

$$\pi(x) = \sum_{p\leqslant x} 1$$

密切相关的函数

$$\theta(x) = \sum_{p\leqslant x}\log p,\quad \psi(x) = \sum_{p^m\leqslant x}\log p,$$

并证明了 $\theta(x)\sim x$,$\psi(x)\sim x$ 都等价于素数定理,从而为素数定理的研究做出了重要贡献.德国数学家黎曼(Riemann,G. F. B.)首先对复变数 s 的函数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

做了系统和深刻的研究,对素数论与函数论的发展产生了深远的影响.由于英国数学家哈代(Hardy,G. H.)和李特尔伍德(Littlewood,J. E.)的强有力的方法——圆法,以及维诺格拉多夫(Виноградов,И. М.)所创造的"三角和方法",使得关于奇数的哥德巴赫猜想获得了基本解决,并使华林问题关于 $G(k)$ 的估计得到了极为深刻的结果.中国数学家华罗庚在三角和以及一系列著名数论问题中做出了举世公认的贡献.特别是陈景润关于偶数的哥德巴赫猜想的(1+2)的杰出成果,在国际数学界引起了强烈的反响.另外,塞尔贝格(Selberg,A.)、林尼克(Линник,Ю. В.)、邦别里(Bombieri,E.)以及中国数学家王元、潘承洞等在筛法、零点密度、均值定理等许多方面也做出了重要贡献.

代数数论最初的形成和发展,主要是由于对互反律和费马大定理等不定方程的研究所推动.目前,代数数论已成为数论中一个内容异常丰富的分支.代数数论研究的主要对象是代数数域,特别是研究一个给定的代数数域中代数整数的算术性质.代数数就是方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的根,其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n$ 都是有理整数.非代数数就称为"超越数",近年来关于超越数的深入研究已发展成为数论的一个独立的分支——超越数论.德国数学家库默尔(Kummer,E. E.)为了解决费马大定理,首先创立了理想数理论,为代数数论奠定了基础.德国数学家戴德金(Dedekind,J. W. R.)系统地发展了库默尔理论,建立了代数数论的基本理论,主要是代数数域的整数环的结构、素理想分解、单位群、理想类群性质等.亨泽尔(Hensel,K.)开创的 p-adic 数理论,将赋值论和局部域的研究方法引入代数数论,并最终导致伊代尔和阿代尔概念的引入.19世纪末,由德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)开始,至1927年,由日本数学家高木贞治(Takagi,T.)和阿廷(Artin,E.)完成的类域论,是代数数论的最主要理论之一,它将扩域的伽罗瓦群与基域的理想类群(或伊代尔群)联系起来.目前,代数数论的研究手段和范围已大为扩展,包括代数、函数论、算术、代数几何等各种方法.希尔伯特、克罗内克(Kronecker,L.)在二次域理论,图埃(Thue,A.)、西格尔(Siegel,C. L.)、罗特(Roth,K. F.)在丢番图逼近论中以及外尔(Weyl,(C. H.)H.)在指数和与一致分布中的杰出贡献都发展和丰富了代数数论.中国数学家华罗庚等在代数数论的许多问题中也做出了重要贡献.在超越数论中,刘维尔(Liouville,J.)、贝克(Baker,A.)、罗特、盖尔丰德(Гельфонд,А. О.)、施奈德(Schneider,T.)等人的卓越工作早为国际数学界所瞩目.还值得一提的是罗特于1955年所著的《对于代数数的有理逼近》确立了有名的图

埃-西格尔-罗特定理，以及贝克在超越数论方面的卓越贡献分别荣获了1958年及1970年的国际菲尔兹数学大奖. 后来贝克将其研究成果整理成薄薄的128页的专著《超越数论》，被认为可与高斯的《算术研究》相媲美.

几何数论是研究一个平面或空间区域中坐标都为整数的点即整点的个数. 例如，著名的圆或椭圆内的整点问题，球或椭球内的整点问题，以及除数问题等. 高斯和狄利克雷(Dirichlet，P. G. L.)分别在“圆内整点问题”和“除数问题”的研究中做出了开创性的工作. 以后华罗庚、维诺格拉多夫、兰道(Landau，E. G. H.)、哈代(Hardy，G. H.)等也分别得到了许多重要结果. 几何数论与其他重要数论问题，如二次型理论有密切关系.

近几年，计算数论也在逐渐发展之中.

数论中的一系列重要问题，如素数分布、哥德巴赫猜想、华林问题、除数问题、圆或球内的整点问题等，都是目前正在研究的问题. 特别需要指出的是，目前正在蓬勃发展的丢番图分析、超越数论越来越引起世界上许多著名数学家的密切关注，它们已成为一个崭新的数学分支.

撰　稿　张贤科

审　阅　冯克勤　李德琅　陆洪文　裴定一

代 数 数 论

代数数论(algebraic number theory)　数论的主要现代分支. 代数数论本来的意义是“代数数的理论”，是作为“有理数的理论”的古典数论的自然的发展，后来研究范围大为扩展，成为现代数学最主要的学科之一. 如

$$\sqrt{2},\quad \sqrt{2+\sqrt{-3}}$$

都是代数数. 一般地说，代数数就是满足代数方程(即有理系数多项式方程)的复数(不一定能用根式表示出来). 若一个代数数 α 满足的多项式方程是首一的(即最高次项系数为1)，系数是整数，则称 α 为代数整数，简称整数，而普通整数(即正负自然数和零)有时称为有理整数，以作区别. 非代数数称为超越数. 代数数域就是有理数域的有限次扩张. 代数数论中的基本事实是：一个代数数域 K 中的代数整数全体(称为 K 的整数环)O_K 是一个戴德金整环，即 O_K 的每个理想可以惟一表示为素理想的乘积(由此可知 O_K 的理想全体是素理想生成的乘法半群，其分式理想全体$I(K)$是一个乘法群，称为 K 的理想群). 正是这种“理想的惟一素分解”可部分弥补“复数一般不能惟一素因子分解”的不足[例如 $6=2\cdot 3=(1+\sqrt{5})\cdot(1-\sqrt{-5})$]，在历史上使代数数论发展起来.

一般认为代数数论起始于德国数学家高斯(Gauss，C. F.)，他研究了二次型(相当于二次域)和分圆域. 代数数论的系统理论创始于德国数学家库默尔(Kummer，E. E.)，和费马大定理有很深的关系. 法国数学家费马(Fermat，P. de)约于1637年在古希腊丢番图(Diophantus)所著《算术》页边写下猜想，意思是：$a^n+b^n=c^n$ 是不可能的(这里 $n\geqslant 3$，a，b，c 均为正的有理整数)，此猜想被称为费马大定理. 直到1839年，200年间基本只证明了 $n=3,4,5,7$ 四种特别情形：$n=4$ 的情形由费马本人给出(1640左右，易知这之后只需对 n 为素数情形证明)；$n=3$ 的情形由瑞士数学家欧拉(Euler，L.)于1753年基本证出；$n=5$ 的情形由热尔曼(Germain，S.)、狄利克雷(Dirichlet，P. G. L.)和勒让德(Legendre，A.-M.)于1825年证明；$n=7$ 的情形由拉梅(Lamé，G.)于1839年证明. 1847年春，拉梅在巴黎科学院会议上宣布完全证明了费马大定理，方法是将 $a^n+b^n=c^n$(记 $n=p$ 为奇素数)分解为

$$\begin{aligned} c^p &= a^p+b^p \\ &= (a+b)(a+\zeta b)(a+\zeta^2 b)\cdots(a+\zeta^{p-1}b), \end{aligned}$$

其中 $\zeta=\zeta_p=\exp(2\pi i/p)$ 为 p 次本原单位根，然后由因子分解惟一性导出右方各因子互素，再导出矛盾. 刘维尔(Liouville，J.)当即指出其中涉及的“复数惟一因子分解”性质可能是不对的，从而引起了激烈持续的争论；直到5月24日，刘维尔宣读库默尔来信，信中说：他三年前已证明了复数惟一分解律是不成立的；不过这可用他发明的“理想数”来挽救，分圆域的理想数满足惟一分解律，用理想数方法可以证明费马大定理对100以内的 n 成立(除 $n=37,59,67$ 之外). 库默尔的理想数后来称为理想，是代数数论的最基本概念. 库默尔对分圆域进行了非常深入的研究. 他还对高次互反律非常有兴趣并得出一组补律公式.

后来德国数学家戴德金(Dedekind，J. W. R.)将库默尔的理想数和分圆域等理论系统发展到一般数域，建立了代数数论的基本理论(也开辟了现代代数的发展道路). 这包括理想的分解理论，特别是一个数域 K(的整数环)的素理想 $\mathfrak{I}$ 在 K 的扩域 L(的整数环 O_L 中生成的理想)分解为素理想之积的研究：

$$\mathfrak{I}O_L=\mathscr{P}_1^{e_1}\mathscr{P}_2^{e_2}\cdots\mathscr{P}_g^{e_g},\quad e_i=e(\mathscr{P}_i|\mathfrak{I})$$

称为分歧指数. 若某分歧指数大于1，则称 $\mathfrak{I}$ 在 L 分歧. 数域 K 的理想类群 $H(K)$ 和理想类数 $h(K)$ 也是代数数论的重要研究对象. (理想)类群 $H(K)=I(K)/P(K)$ 定义为 K 的(分式)理想群 $I(K)$ 对主

理想群 $P(K)$ 的商群，$P(K)$ 为 K 的全部主理想（主理想即是由一个元素生成的理想），（理想）类数 $h(K)$ 是 $H(K)$ 的元素个数，是有限正整数. 当 $h(K)=1$ 时，K 的理想都是主理想，从而理想的分解导致数的分解，此时 K 中的数满足惟一析因律. 当 $h(K)>1$ 时，K 不满足惟一析因律. 因此类数 $h(K)$ 的研究很重要. 若 p 次分圆域 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 的类数为 1 或不是 p 的倍数，则费马大定理对 $n=p$ 成立. 类数 $h(K)$ 与 K 的单位关系密切. 若 u 是 K 中的整数，$1/u$ 也是 K 中的整数，则称 u 是 K 的单位（这相当于 u 满足一个有理整数系数的多项式方程，其最高项和常数项系数均为 1）. K 的单位全体 $U(K)$ 是一个乘法群，称为 K 的单位群，是一个有限生成的阿贝尔群，扭部分是 K 中单位根全体所成群，自由部分的秩为 $r=r_1+r_2-1$，其中 r_1 和 $2r_2$ 是 K 到复数域的实和虚嵌入个数. 戴德金的理论作为德国狄利克雷所著《数论讲义》的九个附录一起于 1894 年发表，从而使这本书成为现代数论的第一本书，包含了现在数论标准基础教程的大部分内容. 狄利克雷在此书中给出著名的算术级数中素数和类数的定理，基于欧拉等人开创了数论的解析方法，后来在代数数论中解析方法起到重要作用. 古典的有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的黎曼 ζ 函数和狄利克雷 L 函数被用多种方法推广到一般代数数域，古典的黎曼猜想也有多种推广. 这些构成了代数数论的一部分重要内容. 解析方法在研究数域的类数等问题中也有重要应用（例如给出类数的解析公式）. 与下述 p-adic 数理论相结合，还发展出强有力的 p-adic 解析理论.

德国数学家亨泽尔（Hensel，K）约于 1899 年发现了 p-adic 数，并用于二次型理论. 由此导致赋值论和局部域理论的发展. 任意固定一个素数 p，人们可以“赋予每个有理数 a 一个值”：$|a|_p=(1/p)^{\nu}$（其中 p^{ν} 为 a 所含准确的 p 幂部分），这称为有理数的 p-adic 赋值. 可以按此赋值将有理数域 $\mathbb{Q}$ 完备化为 $\mathbb{Q}_p$[即 $\mathbb{Q}_p$ 由所有按 p-adic 赋值的柯西序列 $\{a_n\}$（即 $|a_n-a_m|_p\to 0$）组成，正如实数域 $\mathbb{R}$ 由所有按经典绝对值的柯西序列（相当于无限小数）组成一样]. $\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{R}$ 称为局部域，$\mathbb{Q}$ 称为整体域. 亨泽尔的学生哈塞（Hasse，H.）发展了 p-adic 数理论，二人确立了关于二次型的著名“局部-整体”原理：二次型 Q 在整体域 $\mathbb{Q}$ 中有零点当且仅当在每个局部域 $\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{R}$ 均有零点. 虽然对于二次型以外的数学对象，哈塞原理不一定成立，但是在局部域上的研究通常都会提供有用的信息用于整体域上的研究. 上述有理数域 $\mathbb{Q}$ 的 p-adic 赋值和完备化理论，可以推广到一般数域上. 由此，赋值论和局部域后来成为代数数论的基本语言和方法，并导致伊代尔（Idele）和阿代尔（Adele）这两个重要概念的引入.

亨泽尔与兰茨贝格（Landsberg，G.）所著《代数函数论》（1902 年）开创了代数函数理论的算术方向. 单变量代数函数域的研究相当于（光滑）代数曲线的研究. 以赋值论和完备化为语言，（有限域上）单变量代数函数域与代数数域有相似或平行的理论发展，二者的理论相互对照、推动. 函数域上的黎曼猜想和韦伊猜想已由韦伊（Weil，A.）于 1948 年和德利涅（Deligne，P.）于 1973 年解决.

19 世纪末，德国数学家希尔伯特（Hilbert，D.）于 1898 年在编写《数论报告》后，洞察到数域的类群与其阿贝尔扩张间的关系，猜想到著名的“希尔伯特类域论”，这是二次和高次互反律的自然推广. 希尔伯特猜想，对任一数域 K，存在 K 的阿贝尔扩张 L（称为 K 的希尔伯特类域）使得：1. 伽罗瓦群 $G(L/K)$ 与 K 的理想类群 $H(K)$ 同构；2. L/K 不分歧（对任意素理想）；3. 使 $\mathfrak{I}^f$ 为主理想的最小 f 为 $\mathfrak{I}$ 的剩余类次数（$\mathfrak{I}$ 为 K 的素理想）；4. K 的理想到 L 后均为主理想. 希尔伯特对类数 $h(K)=2$ 的情形给出了证明. 他的学生富特文格勒（Furtwängler，P. H.）于 1907 年证明了前三条，于 1930 年证明了第四条. 韦伯（Weber，H.）于 1908 年引入了广义理想类群，作了类似于希尔伯特的猜想，称为（一般）类域论. 高木贞治（Takagi，T.）于 1920 年证明了一般类域的存在，但广义理想类群与伽罗瓦群的同构是由计算群的阶得到，此二群的同构对应还不清楚. 阿廷（Artin，E.）于 1927 年证明了此二群的同构对应由弗罗贝尼乌斯（Frobenius，F. G.）映射给出，从而完成了类域论. 关于类域的具体构作，现时仅对 K 为虚二次域（及其推广 CM 域）有系统的办法，主要用到椭圆曲线的理论.

目前，代数数论发展迅速，研究范围和手段已大为扩展，与代数、函数论、代数几何等有很多交融. 例如，费马大定理于 1994 年的最终被证明，就用到了椭圆曲线、模形式等理论.

代数数域（algebraic number field）　亦称数域. 代数数论的基本研究对象. 它是某种数的集合，即有理数域 $\mathbb{Q}$ 的有限次扩域，数域中的元素都是代数数. 每个代数数域 K 都是 $\mathbb{Q}$ 的单扩张，即由添加 K 中某元素 α 到 $\mathbb{Q}$ 中生成，记为 $K=\mathbb{Q}(\alpha)$. 事实上，设 $L\supset K$ 为两个数域，则必存在 $\beta\in L$ 使 $L=K(\beta)$. 此时 K 到复数域 $\mathbb{C}$ 的每个嵌入（即域的单同态）都可延拓为扩张次数 $n=[L:K]$ 个 L 到 $\mathbb{C}$ 的嵌入. 特别地，恰有 n 个保持 K 元素不变的 L 到 C 的嵌入（称为 K 嵌入）. $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$ 分别由将 β 映为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 而决定，这里 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 β 在 K 上的极小多项式的根. 当 $\beta_i\in L(1\leqslant i\leqslant n)$ 时，L/K 为伽罗瓦扩张. 当 $K=\mathbb{Q}$ 时，若 β_i 是实数，则称 τ_i 为实嵌入，否则为复嵌入. 数域 K 中的代数整数全体 O_K 称为 K

的整数环，这是有理整数环 Z 的自然拓广. 与 Z 不同，O_K 不一定是惟一析因环，这在历史上导致理想概念的引入. O_K 是惟一析因环(或者主理想环)当且仅当 K 的理想类数 $h(K)$ 为 1. 理想类数是代数数论的中心问题之一. 整数环 O_K 总是戴德金环，即其任一理想总可惟一(不计次序)分解为素理想的乘积. 特别地，任一有理素数在 O_K 中生成的理想有惟一素理想分解.

古典数论的主要研究对象是 Q 及其整数环 Z，对 Q 以外的代数数域 K 及其整数环 O_K 的较系统的研究始于高斯(Gauss，C. F.)和库默尔(Kummer，E. E.). 高斯由研究二次互反律和二元二次型导致对二次数域 $Q(\sqrt{d})$ 的类数和素理想分解得到许多结果，并给出许多深刻的猜想. 库默尔研究费马猜想(一说是研究高次互反律)引入理想数的概念，并对分圆域 $Q(\zeta_p)$(ζ_p 为 p 次本原单位根)得到一系列很深入的结果. 戴德金(Dedekind，J. W. R.)把库默尔理想数等工作系统地推广到一般代数数域，奠定了代数数论的基础. 代数数域理论的另一大进展在阿贝尔数域，即类域论的建立. 它由希尔伯特(Hilbert，D.)开始，并由高木贞治(Takagi，T.)和阿廷(Artin，E.)最终完成. 在代数数域的研究中，代数(例如，群的同调论、表示论)、解析(例如，Zeta 函数、自守函数)和几何(例如，算术、代数几何)诸理论均起到很大作用. 一个不定元的代数函数域与代数数域常有某种平行的代数结构，二者的研究方法和结果常可互相比较.

数域(number field)　即“代数数域”.

实嵌入(real embedding)　见“代数数域”.

复嵌入(complex embedding)　见“代数数域”.

代数数域的整数环(ring of integers of an algebraic number field)　见“代数数域”.

单位(unit)　一种特殊的代数整数. 即其逆也为代数整数的代数整数. 因为它是代数整数环的单位(即可逆元)，从而有此名. 代数数域 K 中单位的全体 U_K 是一个乘法群，它是一个有限循环群与一个秩为 r_1+r_2-1 的自由阿贝尔群的直积，这里 r_1 与 $2r_2$ 是 K 到复数域的实与复嵌入个数(参见“代数数域”). 域 K 的单位与 K 的理想类数有密切的关系.

代数数(algebraic number)　一类复数. 即满足代数方程的复数. 是代数数论的基本研究对象之一. 设 α 为复数，若存在系数为有理数的多项式 $f(x)$ 使 $f(\alpha)=0$，则称 α 为代数数. 当 $f(x)$ 在有理数域 Q 上不可约时，$f(x)$ 的次数称为 α 的次数. 添加代数数 α 到 Q 中得到域 $Q(\alpha)$，称为代数数域或数域. 在有理数之外，历史上第一个被发现的代数数是 $\sqrt{2}$，它的发现曾引起毕达哥拉斯(Pythagoras)学派的惊恐. 形如

$$\sqrt[n]{3+4\sqrt{2}}$$

等的根式均为代数数；但五次以上的代数数不一定再能用根式表出. 不是代数数的复数称为超越数，例如圆周率 π. 代数数的基本性质有：

1. 全体代数数所成之集是一可数集.

2. 两个代数数之和、差、积、商(除数不为 0)仍为代数数.

3. 一个代数数的次数是惟一确定的.

4. 系数为代数数的代数方程的根仍然是代数数.

代数数的次数(degree of an algebraic number)　见“代数数”.

超越数(transcendental number)　见“代数数”.

最小多项式(minimal polynomial)　代数数论的基本概念之一. 设整系数多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 中 $a_0\neq 0$，α 是使 $f(x)=0$ 的代数数. 若 $f(x)$ 是不可约多项式(即不存在非常数的整系数多项式 $g(x)$ 与 $h(x)$，使 $f(x)=g(x)h(x)$)，而且 a_0，a_1，…，a_n 互素，则称 $f(x)$ 是 α 的最小多项式，并称 α 是 n 次代数数，

$$h(\alpha)=\max_{0\leqslant i\leqslant n}\{|a_i|\}$$

称为 α 的高. 例如，i 是二次代数数，x^2+1 是它的最小多项式，$h(\mathrm{i})=1$.

代数数的长度(length of an algebraic number)　代数数论与超越数论的概念. 设任意的多项式 $P(x)=b_0x^r+b_1x^{r-1}+\cdots+b_r$，称 $L(P)=|b_0|+|b_1|+\cdots+|b_r|$ 与

$$h(P)=\max_{0\leqslant i\leqslant r}|b_i|$$

分别为 $P(x)$ 的长度与高. 对此，有

$$L(PQ)\leqslant L(P)\,L(Q),\quad h(PQ)\leqslant h(P)\,h(Q).$$

若代数数 α 的最小多项式是

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,$$

则定义 $L(P)$ 与 $h(P)$ 分别为 α 的长度与高，并记为 $L(\alpha)$ 与 $h(\alpha)$，即 $L(\alpha)=L(P)$，$h(\alpha)=h(P)$.

多项式的长度(length of a polynomial)　见“代数数的长度”.

多项式的高(height of a polynomial)　见“代数数的长度”.

代数数的高(height of an algebraic number)　见“代数数的长度”.

代数数的模(modulus of an algebraic number)　代数数论的基本概念之一. 若 N 为自然数集，α 为代数数，则称 $m(\alpha)=\min\{m\mid m\in \mathrm{N}, m\alpha$ 是代数整数$\}$

为 α 的分母；若 $\alpha=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_d$ 是 α 的最小多项式的全部零点，则记

$$|\overline{\alpha}| = \max_{1\leqslant i\leqslant d}|\alpha_i|,$$

并称 $|\overline{\alpha}|$ 为 α 的模.

代数数的分母(denominator of an algebraic number)　见“代数数的模”.

代数整数(algebraic integer)　亦称整数. 代数数的一种. 它是有理整数(即自然数、零及其相反数)的推广. 设 α 为复数，若存在系数为有理整数的首一(即最高次项系数为 1)多项式 $f(x)$ 使 $f(\alpha)=0$，则称 α 为代数整数. 若上述 $f(x)$ 的常数项为 ±1，则 α 称为单位. 所有整数全体构成一个交换环 I，其商域(或称分式域)即为代数数全体构成的域 A. 单位即是环 I 中的可逆元素. 代数整数的一个显著特点是，它们不一定能进行惟一不可约因子分解. 例如，

$$2\cdot3=(1+\sqrt{-5})\cdot(1-\sqrt{-5}).$$

由此导致理想概念的引入. 整数的概念也被推广到普通算术域 F. 若 S 是 F 的一个赋值集，S 中赋值的赋值环之交集中元素称为 S 整数.

整数(integer)　即“代数整数”.

整元素(integral element)　整数的推广. 设 R 是一整环，L 是包含 R 的一个域，$\alpha\in L$. 若存在系数属于 R 的首一多项式 $f(x)$ 使 $f(\alpha)=0$，则称 α 是 R 上的整元素. 这等价于存在着有限生成的非零 R 模 $M\subset L$，使 $\alpha M\subset M$.

代数整数环(ring of algebraic integers)　亦称整数环. 一种特殊的交换整环. 代数数域 K 中的代数整数全体 O_K 称为 K 的整数环. K 是 O_K 的商域. 设 $L\supset K$ 是两个数域，则 O_L 是 O_K 在 L 的整闭包，O_L 也是有限生成的 O_K 模. O_K 是戴德金环，其理想可惟一(不计次序)分解为其素理想的乘积. O_K 是惟一析因环当且仅当 O_K 是主理想环，这也等价于 K 的理想类数为 1. 由戴德金环上模结构定理(施泰尼茨(Steinitz,E.)(1912 年)-卡普兰斯基(Kaplansky,I.)(1952 年))知，$O_L\cong O_K^{n-1}\oplus J$，式中 $n=[L:K]$，J 是 K 中理想，J 的理想类由 L 和 K 惟一决定. 特别地，当 J 为主理想时(例如，当 K 的理想类数为 1 时总是这样)，有 $O_l\cong O_K^n$，即存在 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\in O_L$ 使 $O_L=O_K\omega_1\oplus\cdots\oplus O_K\omega_n$.

整基(integral basis)　整数环作为其子环上的模可能具有的基(也可能不存在). 设 E/F 为整体域或局部域的扩张，O_E 与 O_F 为其整数环. 若存在 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 使 $O_E=O_F\omega_1\oplus\cdots\oplus O_F\omega_n$，则 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 称为 E/F 的整基. 当 $F=\mathbf{Q}$ 或 $F_q(x)$ 时(其中 F_q 为 q 元有限域)，有限扩张 E/F 总存在整基. 当 F 是一般整体域时(即 $\mathbf{Q}$ 和 $F_q(x)$ 的有限扩张)，E/F 不一定有整基；若有整基也称为相对整基.

相对整基(relative integral basis)　见“整基”.

基(base)　代数数域作为有理数域上的线性空间的基. 设 $K=\mathbf{Q}(\theta)$ 为 n 次代数数域，记 $\theta=\theta^{(1)}$，并以 $\theta^{(2)},\cdots,\theta^{(n)}$ 表示 θ 所适合的不可约多项式的其他 $n-1$ 个根. 于是，K 中任一数 α 必可表为 $\alpha=\alpha(\theta)=a_1+a_1\theta+\cdots+a_{n-1}\theta^{n-1}$，其中 a_j 为有理数. 设 $\alpha^{(1)}=\alpha$，则称 $\alpha^{(k)}=\alpha(\theta^{(k)})(k=2,3,\cdots,n)$ 为 α 的共轭数，称 $S(\alpha)=\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}+\cdots+\alpha^{(n)}=\alpha(\theta^{(1)})+\alpha(\theta^{(2)})+\cdots+\alpha(\theta^{(n)})$ 与 $N(\alpha)=\alpha^{(1)},\alpha^{(2)},\cdots,\alpha^{(n)}=\alpha(\theta^{(1)}),\alpha(\theta^{(2)}),\cdots,\alpha(\theta^{(n)})$ 为 α 的迹与范. 有 $S(\alpha+\beta)=S(\alpha)+S(\beta)$，$N(\alpha\beta)=N(\alpha)N(\beta)$. $S(\alpha)$，$N(\alpha)$ 均为有理数. 特别地，若 α 为有理数时，则 $S(\alpha)=n\alpha$，$N(\alpha)=\alpha^n$. 若 α 为代数整数，则 $S(\alpha)$，$N(\alpha)$ 均为代数整数，从而为有理整数. 若在 K 中能找到一组数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使 K 中任何一数都可以惟一地表为 $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_m\alpha_m$ 的形式，其中 $a_j(1\leqslant j\leqslant m)$ 为有理数，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 K 之基. K 中任何基所含元素个数相同，且均等于 n. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 及 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 $R(\theta)$ 之两组基，则有有理数 $a_{jk}(1\leqslant j,k\leqslant n)$ 使

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\beta_k \quad (1\leqslant j\leqslant n)$$

且其系数行列式 $|a_{jk}|\neq0$.

绝对整基(absolute integral base)　一种整基. 指代数整数环作为有理整数环上的自由模的基. 设 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 为 n 次数域 $K=\mathbf{Q}(\theta)$ 中的 n 个整数. 若 K 中任一整数都能惟一地表为 $a_1\omega_1+a_2\omega_2+\cdots+a_n\omega_n$ 的形式，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是有理整数，则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 K 之一组(绝对)整基. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 K 中任意 n 个数，称行列式 $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=|\alpha_i^{(j)}|^2$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的判别式，其中 $\alpha^{(j)}$ 表示 α 的共轭. 判别式有以下性质：

1. $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为有理数，特别地，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为代数整数，则 $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为有理整数.

2. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 及 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 K 的两组基，则有有理数 $a_{jk}(1\leqslant j,k\leqslant n)$ 使

$$\alpha_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\beta_k \quad (1\leqslant j\leqslant n),$$

从而 $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=|a_{jk}|^2\Delta(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$.

3. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 K 之一组基，则 $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\neq0$，且反之亦然.

有了判别式及其性质，就得出绝对整基的性质如下：

1. 设 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 为 K 中之基底，若各 $\omega_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 均为整数，且使 $|\Delta(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)|$ 之值为最小，则此基为整基.

2. 凡整基的判别式都彼此相等，并称 K 的整基

的判别式为此域的判别式，以 Δ 或 $\Delta(K)$ 表示.

3. 凡判别式必满足 $\Delta \equiv 0$ 或 $1 \pmod 4$.

整基的判别式(discriminant of integral basis) 见“绝对整基”.

赋值(valuation) 亦称绝对值. 复数绝对值的推广. 域 F 的一个赋值是 F 到非负实数的一个函数 φ，且对 $a,b\in F$，满足：

1. $\varphi(a)=0$，当且仅当 $a=0$.
2. $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$.
3. 存在正实常数 C 使 $\varphi(a)\leqslant 1$ 蕴含

$$\varphi(1+a)\leqslant C.$$

上述条件 3 等价于 $\varphi(a+b)\leqslant C\max\{\varphi(a),\varphi(b)\}$. 每个赋值 φ 决定 F 上的一个拓扑. 两个赋值称为等价的是指其决定的拓扑等价. 每个赋值等价类称为一个素除子. 在等价意义下，上述 C 可取为 $C\leqslant 2$，条件 3 化为三角不等式 $\varphi(a+b)\leqslant\varphi(a)+\varphi(b)$. 当上述 C 的最小可能取值为 1 时，φ 称为非阿基米德赋值(否则称为阿基米德赋值). 这等价于 $\varphi(n)$ 有界($n\in\mathbf{Z}$). 代数数域 K 的非阿基米德赋值类(素除子)与其素理想一一对应. K 的阿基米德赋值类由 K 到复数域 $\mathbf{C}$ 的嵌入决定.

等价赋值(equivalent valuation) 见“赋值”.

非阿基米德赋值(non-Archimedean valuation) 见“赋值”.

离散赋值(discrete valuation) 一种特殊的赋值. 即值域为实数集的离散子集的非阿基米德赋值. 设 φ 是域 F 的非阿基米德赋值，v 是其相应的指数赋值. 若 $v(F^*)$ 是实数加法群的离散子群，则称 φ 或 v 是离散赋值. 在等价意义下，可设 V 是规范化的，即 $v(F^*)=\mathbf{Z}$. 于是存在 $\pi\in F$ 使 $v(\pi)=1$. π 称为素元素或局部一致化参数. 若 O 为 φ 的赋值环，则其赋值理想为 $p=\pi O$. 环 O 的整理想全体即 p^r(r 取遍正整数)，且 $p^r=\pi^r O$. 因此，O 是主理想环. 特别地，是惟一析因环. 只有一个素元(或不可约元)π(相差单位意义下)，只有一个素理想 p(也是极大理想). $\{p^r\mid r\in\mathbf{Z}\}$ 组成 F 的加法群中 0 的基本邻域系，因而 F 是完全不连通的. 另一方面，$U_r=1+p^r$ 构成 F 的乘法群 F^* 中 1 的基本邻域系($r>0$). 当 F 对于 φ 是完备的时候，F 中每个元素 x 可惟一表为

$$x=\sum_{n=r}^{\infty}a_n\pi^n,$$

式中 a_n 取自 $\overline{F}=O/p$ 的一个固定的完全代表系(p 的代表取为 0)，$a_r\neq 0$. 例如，当 $F=\mathbf{Q}$ 时，若 p 为素数，v 为 p-adic 赋值(即 $p^{v(a)}$ 为 a 所含准确的 p 幂部分)，则 v 是离散赋值. $\mathbf{Q}$ 对 v 的完备化 $\mathbf{Q}_p$ 中任一元素可惟一地表示为

$$x=\sum_{n=r}^{\infty}a_n p^n\quad(0\leqslant a_n\leqslant p-1).$$

素元素(prime element) 见“离散赋值”.

局部一致化参数(local uniformizer) 见“离散赋值”.

***p*-adic 数**(p-adic number) 亦称 p 进数. 代数数论的基本概念. 若 $x=x_0=a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_{l-2}p^{l-2}$，$0\leqslant a_i<p$ 是同余式 $f(x)\equiv 0\pmod{p^{l-1}}$ 之一解，且 $f'(x_0)\not\equiv 0\pmod p$，则可记 $x=x_0+p^{l-1}y$，并研究同余式 $f(x_0+p^{l-1}y)\equiv 0\pmod{p^l}$，$0\leqslant y<p$，即 $f(x_0)/p^{l-1}+f'(x_0)y\equiv 0\pmod p$，$0\leqslant y<p$. 由此惟一定出之 y，若记为 a_{l-1}，则 $x=a_0+a_1p+\cdots+a_{l1}p^{l-1}$，$0\leqslant a_i<p$ 为 $f(x)\equiv 0\pmod{p^l}$ 之一解. 此种作法一直可以进行下去，因而在形式上可得 p 之一幂级数 $a_0+a_1p+\cdots+a_lp^l+\cdots$，$0\leqslant a_i<p$，此幂级数称为方程 $f(x)=0$ 的一个 p-adic 数解. 注意，这样所得到的并非 p-adic 数的全体，一般 p-adic 数可以有有限多个 p 的负幂，亦即 p-adic 数的一般形式为 $a_{-n}p^{-n}+\cdots+a_0+a_1p+\cdots+a_lp^l+\cdots$，$0\leqslant a_i<p$，这与每一实数可以表为 10 进位的无穷小数 $a_{-n}10^n+\cdots+a_0+a_110^{-1}+\cdots+a_l10^{-l}+\cdots$，$0\leqslant a_i<10$ 极为相似. 例如，方程 $3x=2$ 之 5-adic 数解是 $4+1\cdot 5+3\cdot 5^2+1\cdot 5^3+3\cdot 5^4+\cdots$，式中除去第一项外，其余各项之系数轮流为 1，3 两数；方程 $x^2=7$ 之一 3-adic数解是 $1+1\cdot 3+1\cdot 3^2+0.3^2+2\cdot 3^4+\cdots$.

指数赋值(exponential valuation) 非阿基米德赋值的又一记法. 设 φ 是域 F 的非阿基米德赋值，对 $a\in F$，若 $v(a)=-\log\varphi(a)$，则映射 $v:F\to\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ 称为域 F 的一个指数赋值. 于是由 φ 的性质知，对任意 $a,b\in F$，有：

1. $v(a)=\infty$ 当且仅当 $a=0$.
2. $v(ab)=v(a)+v(b)$.
3. $v(a+b)\geqslant\min\{v(a),v(b)\}$.

若 $v(F^*)$ 是 $\mathbf{R}$ 的离散加法子群，则称 v，φ 及其代表的素除子 P 为离散的，否则称非离散的. 最常见的指数赋值是 p-adic 赋值. 设 R 是戴德金环，K 为其商域，p 为其一素理想. 若对 $a\in K$，定义 $v(a)$ 为理想 aR 素理想分解中 p 的指数，则 v 是 K 的指数赋值.

赋值环(valuation ring) 整数环的推广. 设 P 是域 F 的非阿基米德素除子，$\varphi\in P$，v 是相应的指数赋值. 满足 $v(a)\geqslant 0$ 或 $\varphi(a)\leqslant 1$ 的 $a\in F$ 的全体 O 称为在 P 的赋值环，O 中元素称为在 P 的整数. 满足 $v(a)>0$ 或 $\varphi(a)<1$ 的 $a\in F$ 的全体 p 称为在 P 的赋值素理想. 满足 $v(a)=0$ 或 $\varphi(a)=1$ 的 $a\in F$ 的全体 U 称为在 P 的单位群. $\overline{F}=O/p$ 称为在 P 的剩余类域. 自然映射 $\psi:O\to\overline{F}=O/p$ 称为在 P 的位或剩余类映射.

素理想(prime ideal) 见“赋值环”.

单位群(unit group)　见“赋值环”.

剩余类域(residue class field)　见“赋值环”.

剩余类映射(residue class map)　见“赋值环”.

素除子(prime divisor)　一个赋值等价类. 两个赋值等价当且仅当其决定的拓扑相同,也当且仅当其中一个赋值是另一赋值的幂. 由此得到的赋值等价类称为素除子.

主除子(principal divisor)　域中一个元素决定的除子,主理想概念的推广. 若 S 是域 F 的一些素除子组成的集合,元素 $a\in F^*$,则由 a 决定的除子

$$\delta(a)=\prod_{P\in S}P^{v_P(a)}$$

称为 S 主除子,式中 v_P 是 P 对应的指数赋值. 主除子的次数均为 0. 主除子全体构成群,与主理想群同构.

整体域(global field)　通常指代数数域和有限常数域上单变量代数函数域. 这是相对于局部域而言. 当研究域的类数和单位时,常需考虑到域的全部赋值,包括阿基米德赋值(与局部域中只考虑一个赋值不同),因此称整体域.

希尔伯特符号(Hilbert symbol)　二次型或二次扩域的一种重要符号. 设 k 表示实数域 $\mathbf{R}$ 或 p-adic 数域 $\mathbf{Q}_p$(其中 p 表素数),若 $a,b\in k^*$,并且定义,当 $z^2-ax^2-by^2=0$ 在 k^3 中有非零解时,$(a,b)=1$,否则 $(a,b)=-1$. 数 $(a,b)=\pm1$ 称为 a 和 b 对于 k 的希尔伯特符号. 当 a 和 b 乘以平方元素时,(a,b) 不变. 希尔伯特符号有以下性质:

1. 若 $a,b\in k^*$,$k_b=k(\sqrt{b})$,则 $(a,b)=1$ 的充分必要条件是 $a\in k_b^*$ 的元素的范群 Nk_b^*.
2. $(a,b)=(b,a)$,$(a,c^2)=1$.
3. $(a,-a)=1$,$(a,1-a)=1$.
4. 若 $(a,b)=1$,则 $(aa',b)=(a',b)$.
5. $(a,b)=(a,-ab)=(a,(1-a)b)$.
6. $(aa',b)=(a,b)(a',b)$.
7. 若 $k=\mathbf{R}$,则当 a 或 b 大于 0 时 $(a,b)=1$,当 a 和 b 均小于 0 时 $(a,b)=-1$.

克罗内克符号(Kronecker symbol)　判断二次域中素分解的一种符号. 设 $d\equiv0$ 或 $1\pmod 4$ 且非平方数,并有 $m>0$. 克罗内克符号 $\left(\frac{d}{m}\right)$ 定义如下:若 $p\mid d$,则 $\left(\frac{d}{p}\right)=0$;若 $d\equiv1\pmod 8$,则 $\left(\frac{d}{2}\right)=1$;若 $d\equiv5\pmod 8$,则 $\left(\frac{d}{2}\right)=-1$;若 p 为奇素数,且 $p\nmid d$,$\left(\frac{d}{p}\right)=$ 勒让德符号. 若 $m=\prod_{r=1}^{s}p_r$,p_r 为素数,则

$$\left(\frac{d}{m}\right)=\prod_{r=1}^{s}\left(\frac{d}{p_r}\right).$$

由此可得:若 $(d,m)>1$,则 $\left(\frac{d}{m}\right)=0$;若 $(d,m)=1$,则 $\left(\frac{d}{m}\right)=\pm1$. 又若 $m_1>0$,$m_2>0$,则

$$\left(\frac{d}{m_1m_2}\right)=\left(\frac{d}{m_1}\right)\left(\frac{d}{m_2}\right).$$

克罗内克符号与雅可比符号有密切关系. 若 $m>0$,$(m,d)=1$,则克罗内克符号 $\left(\frac{d}{m}\right)$ 是:当 d 为奇数时,

$$\left(\frac{d}{m}\right)=\left(\frac{m}{|d|}\right);$$

当 $d=2^bu$ 且 $2\nmid u$ 时,

$$\left(\frac{d}{m}\right)=\left(\frac{2}{m}\right)^b(-1)^{\frac{u-1}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{|u|}\right),$$

其中

$$\left(\frac{m}{|d|}\right),\ \left(\frac{2}{m}\right),\ \left(\frac{m}{|u|}\right)$$

都是雅可比符号. 因此,可用雅可比符号计算克罗内克符号,并且克罗内克符号 $\left(\frac{d}{m}\right)$ 是模 $|d|$ 的一个实特征(只要对它进行 mod $|d|$ 扩充). 克罗内克符号 $\left(\frac{d}{p}\right)=0,1,-1$ 分别相当于 p 在 $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ 中分歧、分裂、惯性.

二次数域(quadratic field of number)　有理数域的二次扩张. 若 ξ 是一个二次代数数,则 $\mathbf{Q}(\xi)$ 称为二次数域. 例如,所有形如 $a+b\mathrm{i}$(a,b 为有理数)的复数成为一个二次数域,记为 $\mathbf{Q}(\mathrm{i})$. 若 ξ 是一个二次代数数,则 $\mathbf{Q}(\xi)$ 是一个代数数域;并且有一个不含平方因子的非零整数 m 使得 $\mathbf{Q}(\xi)=\mathbf{Q}(\sqrt{m})$,而 $\mathbf{Q}(\xi)$ 是由一切形如 $a+b\sqrt{m}$ 的数构成,其中 a,b 是任何有理数. 因此要研究二次数域,只须研究二次数域 $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$. 另外,对此还有重要定理:若 m 是不含平方因子的整数,则 $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ 中一切代数整数可表成 $a+b\omega$ 的形式,其中 a 与 b 可为任何整数,而当 $m\not\equiv1\pmod 4$ 时,$\omega=\sqrt{m}$;当 $m=1\pmod 4$ 时,

$$\omega=\frac{\sqrt{m}-1}{2}.$$

范数(norm)　代数数的一个性质. 设 $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ 为二次数域. 若 $\xi\in\mathbf{Q}(\sqrt{m})$,则 $\xi=a+b\sqrt{m}$,并将 $|a^2-b^2m|$ 称为 ξ 的范数,并记为 $N(\xi)$. 由直接计算可得 $N(\xi\eta)=N(\xi)N(\eta)$,并且,当 ξ 是代数整数时,$N(\xi)$ 是非负整数,当且仅当 $\xi=0$ 时,才有 $N(\xi)=0$. 一般地,一个代数数的范数定义为它的各共轭的积(绝对值),它是一个有理数. 范数可推广到相对扩张和理想.

欧几里得域(Euclidean field)　一类性质良好的二次域. 若二次域 $\mathbf{Q}(\theta)$ 的理想类数 $h_0=1$,则该域

称为单域．凡单域上的理想都是主理想，因此单域中整数之惟一分解定理是成立的．若对单域Q(θ)中任意两个整数$\xi,\eta(\eta\neq0)$，恒有二整数k,l存在，使得$\xi=k\eta+l$，$|N(l)|<|N(\eta)|$成立，则称该单域为狭义欧几里得域．实的狭义欧几里得域有 16 个，虚的有 5 个，它们是 Q($\sqrt{D}$)：$D=2,3,5,6,7,11,13,17,19,21,29,33,37,47,57,73$ 和 $D=-1,-2,-3,-7,-11$．若存在域Q(θ)到自然数集的映射φ，使对域中任二整数$\xi,\eta(\neq0)$恒有二整数k,l使得$\xi=k\eta+l$，$\varphi(l)<\varphi(\eta)$，则称该域为（一般）欧几里得域．虚的狭义和一般的欧几里得域已证明是一样的．实域时，二者是否一致的问题尚未解决．

二元二次型(binary quadratic form)　二元二次齐次多项式的一种习惯名称．对固定之整数a,b,c，二次齐次多项式$F=F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$称为二元二次型或简称为型，并以$\{a,b,c\}$表示．整数$d=b^2-4ac$称为此型之判别式．因此，必有$d\equiv0$或$1 \pmod 4$．一个二次型可分解为两整系数一次式之积的充分必要条件是其判别式为一平方数．若有整系数变换$x=rX+sY$，$y=tX+uY$，$ru-st=1$将二次型$F(x,y)$变为$G(X,Y)$，则称F与G相似（以$F\sim G$表示），或称F经变换

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

而变为G．与正定型相似的二次型亦必为正定型．另外，二次型之相似性具有：

1. 反身性，即$F\sim F$．
2. 对称性，即若$F\sim G$，则$G\sim F$．
3. 传递性，若$F\sim G$，$G\sim H$，则$F\sim H$．

于是依相似性，可以将判别式为d之二次型分为若干类，同一类之二次型都相似，不同类之二次型决不相似．

二元二次型与二次数域理想的对应(corresponding between the binary quadratic forms and the ideals of quadratic number fields)　二次数域的一个重要性质．设二次数域Q($\sqrt{D}$)的基数为Δ，理想U有基α_1,α_2，可做二元二次型

$$F(x,y)=\frac{N(\alpha_1x+\alpha_2y)}{N(U)}.$$

这就是判别式为Δ的二元二次型F与U的对应，也称F属于理想U．于是，在二次域Q($\sqrt{D}$)上理想类与以Δ为判别式的原型类之间具有一一对应关系．

族(genus)　亦称种．二次域的理想的一种分类．在二次数域Q($\sqrt{D}$)中，对理想U与V，若有Q($\sqrt{D}$)上的整数α与β，使得$[\alpha]U=[\beta]V$且$N(\alpha\beta)>0$，则称理想U与V是狭义相似的，以$U\approx V$表示．并且，相似型属于狭义相似之理想，且反之亦然．设固定一个二次域为Q($\sqrt{D}$)，其基数为Δ，且理想类都是指在狭义相似意义之下的．若二次型$F(x,y)$属于理想U，则称$F(x,y)$的特征系为理想U的特征系．即，若$p_1,p_2,\cdots,p_s$为Δ的奇素因子，取U中整数α为使$(N(\alpha)/N(U),2\Delta)=1$成立之数，则：

$$\left(\frac{N(\alpha)/N(U)}{p_i}\right)\ (i=1,2,\cdots s);$$

$$\delta(\alpha)=(-1)^{\frac{1}{2}\left[\frac{N(\alpha)}{N(U)}-1\right]}(D=\Delta/4\equiv3 \pmod 8);$$

$$\varepsilon(\alpha)=(-1)^{\frac{1}{8}\left[\frac{N(\alpha)}{N(U)}-1\right]}(\Delta/4\equiv2 \pmod 8);$$

$$\delta(\alpha)\varepsilon(\alpha)(\Delta/4\equiv6 \pmod 8)$$

为理想U的特征系．凡两个具有相同特征系的类称为属于同一族，理想UV的特征系中各值为U,V对应特征值的乘积．从而得到：两类乘积的特征系即为两类特征系之乘积；若类$\{U\}$与类$\{V\}$在同一族中，类$\{U_1\}$与类$\{V_1\}$在同一族中，则类$\{UV\}$与$\{U_1V_1\}$也在同一族中．称单位理想I所属之类为主类，主类所属之族为主族．又，若$UV=[a]$，a为一自然数，则称类$\{U\}$为类$\{V\}$的逆类．任何理想类的逆类必定存在，且主族中任何两类的乘积还在主族中，主族中任何一类的逆类还在主族中，而每一族中的类数必定相等．

种(genus)　见“族”．

主类(principal class)　见“族”．

主族(principal genus)　见“族”．

逆类(inverse class)　见“族”．

分圆域(cyclotomic field)　一种重要的数域．对于自然数m，自乘m次才等于 1 的复数称为m次本原单位根．它们是$\exp 2\pi ir/m$，$(r,m)=1$，总共有$\varphi(m)$个（φ为欧拉函数），这$\varphi(m)$个m次本原单位根是有理数域 Q 上$\varphi(m)$次不可约多项式

$$F_m(x)=\prod_{d|m}(x^{m/d}-1)^{\mu(x)}$$

（μ为默比乌斯函数）的零点，$F_m(x)$的最高次项的系数为 1，其他的系数都是有理整数．$F_m(x)$称为分圆多项式．例如，

$$F_{12}(x)=\frac{(x^{12}-1)(x^2-1)}{(x^6-1)(x^4-1)}=x^4-x^2+1.$$

在有理数域 Q 中添加m次本原单位根$\xi=\exp 2\pi i/m$后得到数域$K_m=\mathrm{Q}(\xi_m)$是 Q 的$\varphi(m)$次伽罗瓦扩域，其伽罗瓦群G是与$\mathrm{Z}/m\mathrm{Z}$的不可约剩余类构成的乘法群同构的阿贝尔群：$G=\{\sigma_r|\sigma_r(\xi_m)=\xi_m^r,(r,m)=1\}$．$K_m$称为$m$级分圆域．分圆域是有理数域 Q 的阿贝尔扩张；反之，有理数域上的任意阿贝尔扩张都是分圆域的子域．

本原单位根(primitive root of unity)　见“分圆域”.

分圆多项式(cyclotomic polynomial)　分圆域数论的重要概念. 设 $n>0$,全体 n 次单位根为

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\ (k=0,1,2,\cdots,n-1),$$

若其中 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{\varphi(n)}$ 是 $\varphi(n)$ 个 n 次本原单位根,则称多项式

$$F_n(x)=\prod_{i=1}^{\varphi(n)}(x-\eta_i)$$

为分圆多项式. 分圆多项式有以下重要性质:

1. $\prod\limits_{d\mid n}F_d(x)=x^n-1$ 或

$$F_n(x)=\prod_{d\mid n}(x^d-1)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}.$$

2. $F_n(x)$ 是首项系数为 1,且在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约的整系数多项式.

3. 若 p 是素数,$p\nmid m$,则 $F_{mp^k}(x)=F_{mp}(x^{p^{k-1}})$ 及

$$F_{mp}(x)=\frac{F_m(x^p)}{F_m(x)}.$$

4. $n\geqslant 3,2\nmid n,F_{2n}(x)=F_n(-x)$.

5. $n\geqslant 2$ 时,$x^{\varphi(n)}F_n\left(\dfrac{1}{x}\right)=F_n(x)$.

6. 设 p,q 为不同素数,$F_{pq}(x)=\sum\limits_{n=0}^{\varphi(pq)}c_nx^n$,则

$$c_n=\begin{cases}(-1)^\delta & (\text{当 } n=\alpha q+\beta p+\delta \text{ 表法惟一}),\\ 0 & (\text{当 } n=\alpha q+\beta p+\delta \text{ 表法不惟一}),\end{cases}$$

其中 α,β 为非负整数,且 $\delta=0,1$.

本原因式(primitive factor)　分圆多项式的推广. 设 $V(n)=x^n-y^n,n\geqslant 1,W(x,y)$ 是次数大于零的齐次整系数多项式,其中含 x 的最高次项的系数是 1. 若对给定的 $n,W(x,y)$ 是 $V(n)$ 的因子,但对每一个 $0<j<n,(W(x,y),V(j))=1$,则称 $W(x,y)$ 为 $V(n)$ 的本原因式,记为 $W(n)$. 本原因式的主要性质有:

1. 若 $V(m)=x^m-y^m,V(n)=x^n-y^n,(m,n)=d$,则 $V(m)\mid V(n)$ 的充分必要条件是 $m\mid n$,且

$$(V(m),V(n))=V(d).$$

2. 若 $\eta=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$ 是一个 n 次本原单位根,则 $V(n)$ 有本原因式

$$W(n)=\prod_{\substack{1\leqslant t\leqslant n\\(t,n)=1}}(x-\eta^t y),$$

$W(n)$ 为不可约的次数为 $\varphi(n)$ 的整系数多项式,且 $W(n)$ 是 $V(n)$ 的惟一本原因式以及

$$V(n)=\prod_{t\mid n}W(t).$$

3. 若 $n\geqslant 3$,则有

$$W(n)=\prod_{t<\frac{n}{2},(t,n)=1}\left((x-y)^2+4xy\sin\frac{2\pi t}{n}\right).$$

本原因子(primitive divisor)　分圆域数论的重要概念. 它与本原因式有紧密联系. 设整数 $a,b,0<b<a,(a,b)=1,v(n)=a^n-b^n,n\geqslant 1$,对于给定的 n,若存在 $k>0,k\mid v(n)$,而对每一个 $j,0<j<n$,有 $(k,v(j))=1$,则称 k 为 $v(n)$ 的本原因子,记 $g(n)$ 为 $v(n)$ 的最大本原因子. 若 $n=1$,则定义 $v(n)$ 的任一个因子 k 都是它们的本原因子. 本原因子有以下基本性质(以下恒设 $n>1$,2 非 $v(n)$ 的本原因子,且 p 为奇素数):

1. 若 k 为 $v(n)$ 的本原因子,则

$$(a,k)=(b,k)=1.$$

2. k 是 $v(n)$ 的本原因子的充要条件是 $k\mid g(n)$.

3. 若 $t\mid v(m_1),t\mid v(m_2)$,则 $t\mid v(m_1,m_2)$.

4. 若 p 是 $v(m)$ 的本原因子,则 $p\mid v(n)$ 的充分必要条件是 $m\mid n$.

5. 若 $k\mid v(n)$,且对每一 $t\mid n,t<n,(k,v(t))=1$,则 k 是 $v(n)$ 的本原因子.

6. 若 p 为 $v(n)$ 的本原因子,则 $p\equiv 1(\operatorname{mod} n)$.

7. 若 $p\mid n$,则 $p\mid v(n)$ 的充分必要条件是

$$p\mid v\left(\frac{n}{p}\right).$$

8. 若 $n>6$,则 $v(n)$ 必有一个素本原因子.

本原因子的理论在丢番图方程等数论问题中有重要应用. 例如,应用上述性质可以证明:

1. 对于 $n>1$,有无穷多个形如 $kn+1$ 的素数.

2. 若 $n>6,s\geqslant 1$,正整数 a 不含 $nk+1$ 形的素因子,则不定方程 $x^n-y^n=a^s$ 无正整数解 x,y,n,s.

3. 若 $n>3,s\geqslant 1$,正整数 a 不含形如 $2kn+1$ 的素因子,则不定方程 $x^n+y^n=a^s$ 无正整数解 x,y,n,s.

局部域(local field)　一种有限域. 指对于一个离散赋值完备的、且剩余类域有限的域. 在同构意义下即是整体域(有理数域与有限域上单变量有理函数域的有限扩张)对于其一离散赋值的完备化. 例如,p-adic 域 $\mathbf{Q}_p$ 和幂级数域 $F_q[[x]]$. 局部域只有惟一的素理想,结构简单,常通过它研究整体域.

亨泽尔引理(Hensel's Lemma)　代数数论中的一个重要定理. 由多项式在剩余类域上的分解得出其在完备域上分解的定理. 设域 F 对非阿基米德赋值 φ 完备,O 为赋值环,P 为赋值理想,$\overline{F}=O/P$. 自然同态 $O\to\overline{F}$ 诱导出环同态 $O[x]\to\overline{F}[x]$,以 $\overline{f}(x)$ 记 $f(x)\in O[x]$ 的像. 若在 $\overline{F}[x]$ 中有分解式 $\overline{f}(x)=G(x)H(x)\neq 0$,式中 $G(x)$ 与 $H(x)$ 为 $\overline{F}[x]$ 中互素多项式,则亨泽尔引理断言:存在 $g(x),h(x)\in O[x]$,使得 $f(x)=g(x)h(x)$,且

$$\deg g(x)=\deg G(x),\overline{g}(x)=G(x),\overline{h}(x)=H(x).$$

特别地,若 $\beta\in\overline{F}$ 是 $\overline{f}(x)$ 的单根,则存在 $f(x)$ 的根 $b\in O$ 使 $\overline{b}=\beta$. 由此引理知,若 $f(x)\in O[x]$ 首一,且

在完备域 F 上不可约，则 $\bar{f}(x)=G(x)^n$ 是 $\bar{F}[x]$ 中不可约多项式 $G(x)$ 的幂.

奥斯特洛夫斯基定理(theorem of Ostrowski) 代数数论中的一个重要定理. 阿基米德赋值本质上即通常的绝对值定理：若域 F 对于阿基米德素除子 P 是完备的，则 F 必同构于实数域 R 或复数域 C，且在此同构下 P 对应于通常的绝对值(所决定的素除子).

逼近定理(approximation theorem) 不同的赋值之间相互独立的定理，是中国剩余定理(孙子定理)的推广. 该定理断言：若 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 是域 F 的互不等价的非平凡赋值，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 F 中任意元素，则对于任意 $\varepsilon>0$，总存在 F 中元素 x 使 $\varphi_i(x-a_i)<\varepsilon$ 对 $i=1,2,\cdots,n$ 均成立.

赋值的延拓(extension of valuation) 由子域的赋值获得的扩域的赋值. 设 φ 与 ψ 分别为域 F 与 E 的赋值，$F\subset E$，若 ψ 在 F 的限制为 φ，则称 ψ 为 φ 在 E 的延拓. 当 F 对非阿基米德赋值 φ 完备而 $n=[E:F]$ 时，φ 到 E 的延拓 ψ 存在且惟一，它由

$$\psi(\alpha)=(N_{E/F}\varphi(\alpha))^{1/n}$$

定义，且赋值环 O_ψ 是 O_φ 在 E 的整闭包. 当 φ 离散时 ψ 也离散，且 $e(Q/P)f(Q/P)=n$(P,Q 为 φ,ψ 代表的素除子). 当 F 不完备时，记 $\tilde{F}$ 为 F 对 φ 的完备化，φ 到 $\tilde{F}$ 的延拓 $\tilde{\varphi}$(由连续性)存在且惟一，且相应的分歧指数与剩余类次数均为 1. 固定 $\tilde{F}$ 的代数闭包 Ω，对每个固定 F 元素的嵌入 $\mu_i:E\to\Omega$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$\tilde{\varphi}$ 有到复合域 $\tilde{E}_i=(\mu_iE)\tilde{F}$ 的惟一延拓 $\tilde{\varphi}_i$，$\tilde{\varphi}_i$ 在 E 的限制 φ_i 是 φ 到 E 的一个延拓，且 $\tilde{E}_i$ 是 E 对 φ_i 的完备化. 而 $\varphi_i=\varphi_j$ 当且仅当 μ_i 与 μ_j 相差一个 $\tilde{F}$ 上共轭，即 $\tilde{E}_i$ 与 $\tilde{E}_j$ 相差一个 $\tilde{F}$ 上共轭. 不妨设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_g$ 为这种共轭类的代表，于是 φ 到 E 有互异延拓 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_g$. 若 $E=F(\alpha)$ 为单扩张，$f(x)$ 为 α 在 F 上的极小多项式，则上述相当于 $f(x)$ 在 $\tilde{F}[x]$ 中分解为不可约多项式幂 $f_i(x)$ 之积

$$f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_g(x),$$

$\mu_i(\alpha)=\alpha_i$ 为 $f_i(x)$ 的一个根，$\tilde{E}_i=\tilde{F}(\alpha_i)$ $(i=1,2,\cdots,g)$. 若记 $n_i=[\tilde{E}_i:\tilde{F}]$，$[E:F]_{in}/[\tilde{E}_i:\tilde{F}]_{in}=t_i$($[E:F]_{in}$ 表示 E/F 的不可分次数)，则

$$n=\sum_{i=1}^{g}t_in_i\geqslant\sum_{i=1}^{g}t_ie(P_i/P)f(P_i/P)$$

(φ 离散时等号成立，P_i 是含 φ_i 的素除子). 若记 N_i 和 Tr_i 为 $\tilde{E}_i$ 到 $\tilde{F}$ 的范和迹，对任意 $\beta\in E$，记 $\beta_i=\mu_i\beta$，$f(\beta,F)$ 为 β 在 F 上的极小多项式，则

$$N_{E/F}(\beta)=\prod_{i=1}^{g}N_i(\beta_i)^{t_i},$$

$$Tr_{E/F}(\beta)=\sum_{i=1}^{g}t_iT_{r_i}(\beta_i),$$

$$f(\beta,F)=\prod_{i=1}^{g}f(\beta_i,\tilde{F})^{t_i}.$$

特别地，设 φ 是非阿基米德赋值. 若 E/F 是伽罗瓦扩张，则每个 E/F 的自同构均可迁地置换 $\{P_1,P_2,\cdots,P_g\}$，从而 $e(P_i/P)$，$f(P_i/P)$，n_i 均不随 i 改变. 若 F 为代数数域，则：

$$n=\sum_{i=1}^{g}e(P_i/P)f(P_i/P),$$

$$v_i(a)=v(a)e(P_i/P)$$

(式中 $a\in F$，v_i 和 v 是 φ_i 和 φ 对应的指数赋值)，

$$v(N_{E/F}(\alpha))=\sum_{i=1}^{g}v_i(\alpha)f(P_i/P)\quad(\alpha\in E);$$

且若 φ 为 p-adic 赋值，则 $pO_E=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_g^{e_g}$，$\varphi_i$ 是 p_i-adic 赋值，p_i 为 E 的素理想，$e_i=e(P_i/P)$.

分歧(ramified) 赋值延拓或素理想分解的一种性质. 设 P 为域 F 的素除子(一个赋值等价类)，Q 为 P 到扩域 E 的延拓. 若分歧指数 $e(Q/P)>1$，则称 Q 在 F 上分歧. 若 P 在 E 的延拓之一分歧，则称 P 在 E 中分歧. 同样的术语用于 P 和 Q 对应的素理想. 若 F 的素理想 p 在 E 的素分解 $pO_E=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_g^{e_g}$，则当 $e_i>1$ 时称 p_i 在 F 上分歧；当 $e_1,e_2,\cdots,e_g$ 之一大于 1 时称 p 在 E 中分歧. 素理想 p 在 E 中分歧当且仅当 p 是 E/F 的判别式的因子. p_i 在 F 上分歧当且仅当 p_i 是 E/F 的差积的因子.

分歧指数(ramification index) 在域扩张时，素除子延拓或素理想分解的指数. 若 P 为域 F 的非阿基米德素除子，Q 为 P 在扩域 E 中的延拓，w 和 v 是 Q 及 P 相应的指数赋值，则

$$e(Q/P)=(w(E^*):v(F^*))$$

称为 Q 对 P 的分歧指数. 若 F 对离散的 P 是完备的，$n=[E:F]$ 有限，则 $e(Q/P)f(Q/P)=n$，式中 $f(Q/P)$ 为剩余类次数.

剩余类次数(residue class degree) 素除子或素理想的剩余类域的扩张次数. 若域 $E\supset F$，Q 是 E 的非阿基米德素除子，P 是 Q 在 F 的限制(或称 Q 是 P 的延拓)，$\bar{E}$ 和 $\bar{F}$ 是 E 在 Q 和 F 在 P 的剩余类域，则域扩张次数 $f(Q/P)=[\bar{E}:\bar{F}]$ 称为 Q 在 P 上的次数，或 E/F 在 Q 的剩余类次数. 也称为相应赋值素理想的次数或剩余类次数.

非分歧扩张(unramified extension) 一类重要的域扩张. 设 E/F 是局部域扩张，$\bar{E}$ 与 $\bar{F}$ 为其剩余类域，若 $\bar{E}/\bar{F}$ 可分且剩余类次数 $f(E/F)=[\bar{E}:\bar{F}]=[E:F]$，则 E/F 称为非分歧扩张. 设 F 为整体

域，E 为其有限扩张，Q 为 F 的素除子 P 在 E 的延拓. 若 $e(Q/P)=1$，则称 Q 在 F 上非分歧；若 P 在 E 的所有延拓均非分歧，则称 P 在 E 中非分歧（或 E/F 在 P 非分歧）；若 F 的所有素除子（有时限于所有有限素除子）均在 E 非分歧，则称 E/F 为非分歧扩张. 非分歧扩张在类域论中起重要作用. 局部域的有限扩张 E/F 是非分歧扩张的充要条件为 $E=F(\alpha)$，其中 α 是某首一多项式 $f(x)\in O_F[x]$ 的根，且在剩余类域中 $\overline{\alpha}$ 是 $\overline{f}(x)\in\overline{F}[x]$ 的单根. 此时 $\overline{E}=\overline{F}(\overline{\alpha})$ 且 $\{1,\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^{n-1}\}$ 是 n 次扩张 E/F 的整基.

戴德金环(Dedekind ring)　理想可以惟一素分解的环. 最重要的例子是：数域的整数环、光滑曲线的坐标环. 按定义，满足下述三条件的整环 R 称为戴德金环：

1. R 是诺特环.

2. R 的真素理想均为极大理想.

3. R 在其商域 $F(\neq R)$ 中是整闭的.

事实上，对每个戴德金环 R 及其商域 F，总存在 F 的离散素除子集 S 使 $\{F,S\}$ 为普通算术域而 R 为 S 整数环. 整环 R($\neq$其商域 F)为戴德金环当且仅当其每个真理想均为极大理想的积；也等价于其每个分式理想均可逆，即分式理想全体构成群. 戴德金环 R 在其商域 F 的有限可分扩张 E 中的整闭包 R_E 也为戴德金环，且 E 是 R_E 的商域.

剩余类环(residue class ring)　有理整数环的剩余类环 $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ 的推广. 设 $\{F,S\}$ 为普通算术域，且 F 对 S 中每一赋值的剩余类域均为有限域. 设 O 为 F 的 S 整数环，A,B 为 O 的理想. 记 $N(A)=\#(O/A)$，称为 A 的范数，它是积性的. O/A 有许多类似于 $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ 的性质：

1. $bx\equiv c(\mathrm{mod}\,A)$ 有解当且仅当 (b,A) 除尽 c，且模 $A/(b,A)$ 解惟一（式中 $b,c,x\in O$）.

2. 以 $\Phi(A)$ 记环 O/A 中单位元个数，若 $(A,B)=1$，则 $\Phi(AB)=\Phi(A)\Phi(B)$，且

$$\Phi(A)=N(A)\prod(1-1/N(p)),$$

式中 $p|A$ 过素理想 $\sum\Phi(B)=N(A)$，式中 $B|A$ 过理想.

3. 若 $b\in O$，$(b,A)=1$，则 $b^{\Phi(A)}\equiv1(\mathrm{mod}\,A)$.

普通算术域(ordinary arithmetic field)　数域的推广，指普通"算术"（对于理想）可进行的域，实即戴德金环的商域. 按定义，若域 F 有非空离散素除子集 S 满足以下二公理，则称 $\{F,S\}$ 为普通算术域（简记为 OAF）：

1. $\forall\, a\in F$，几乎 $\forall\ P\in S$ 使 $v_P(a)\geqslant0$（这等价于 $\forall\, a\in F^*$，几乎 $\forall\ P\in S$ 使 $v(a)=0$）.

2. 对任意 $P_1,P_2,\cdots,P_r\in S$，$a_1,\cdots,a_r\in F$，$m_1,m_2,\cdots,m_r\in\mathbf{Z}$，总存在 $a\in F$ 使 $v_{P_i}(a-a_i)\geqslant m_i$($i=1,2,\cdots,r$)，$v_p(a)\geqslant0$($P\in S$，$P\neq P_1,P_2,\cdots,P_r$)（此公理可减弱为 $r=2$，$a_1=1$，$a_2=0$，$m_i=1$）.

条件 2 实质上就是中国剩余定理，所以 OAF 实为满足中国剩余定理的域. F 的整数环 $O(S)$ 定义为使 $v_P(a)\geqslant0$($\forall\ P\in S$)的 a 中元 F 的 a 全体，在 F 中整闭，是各 P 整数环 O_P 的交($P\in S$)；且 $O_P=O(S)+p^r$，$O/\beta^r\cong O_p/p^r$ 对任意 $r\geqslant1$ 成立，式中 p 是 P 的赋值理想，$\beta=p\cap O(S)$ 是 $O(S)$ 的素理想. OAF 的例子有 $\mathbf{Q}$，$k(x)$（任意域 k 上的有理函数域）及其有限扩张和完备化（S 限于离散素除子集的任意子集）. 注意，若 $\{F,S\}$ 为 OAF，$S'\subset S$，则 $\{F,S'\}$ 亦为 OAF. 又 S 有限时 $\{F,S\}$ 总为 OAF. 而 OAF 的有限扩张仍为 OAF（S 中素除子随之延拓）. OAF 域的整数环 $O(S)$ 为戴德金环（即理想可惟一素分解）；反之，设 R 为戴德金环，则其商域总对某素除子集 S 为 OAF，且整数环 $O(S)=R$.

设 $\{F,S\}$ 为 OAF，S 中的素除子及其对应素理想（即赋值理想与 $O(S)$ 之交）分别生成（乘法）自由阿贝尔群 D 和 I，称为除子群和理想群. 若以 D^* 和 I^* 记主除子群和主理想群（即 F 中元素生成的除子和理想），则除子类群 D/D^* 与理想类群 I/I^* 同构，其元素个数 $h(S)$ 称为 F 的 S 除子类数或理想类数. 当 F 为代数数域而 S 包含 F 的几乎所有非阿基米德素除子时，$h(S)$ 有限. 当 F 为代数函数域而 S 为其全部素除子时，$h(S)$ 无限. 因此转而考虑零次除子类数 $h_0(S)=D_0/D^*$，式中 D_0 为 D 的零次除子子群. 当 S 不含无穷素除子时，$h(S)$ 有限，常称为 F 的理想类数而记为 $h(O_F)$. 当且仅当 $h(S)=1$ 时，$O(S)$ 为主理想环. 当 S 为有限集时，总有 $h(S)=1$.

除子类数(divisor class number)　见"普通算术域".

覆盖环(over-ring)　一种扩环. 包含环 R 而含于 R 的商域 F 中的环 R' 称为 R 的覆盖环（常设 $R'\neq R,F$）. 若 $\{F,S\}$ 为普通算术域，则 F 的整数环 $O=O(S)$ 的诸覆盖环 O' 与 S 的诸真子集 S' 之间反（包含）序一一对应，使 $S'=\{P\in S\,|\,O_P\supset O'\}$，$O'=O(S')=\{a\in F\,|\,v_p(a)\geqslant0,P\in S'\}$. 特别地，戴德金环的覆盖环也是戴德金环. O 与 O' 的理想半群间有互逆的同态：

$$A=\prod_{P\in S}p^{v_P(A)}\mapsto AO'=\prod_{P\in S'}p'^{v_P(A)},$$

$$B=\prod_{P\in S'}p'^{v_P(B)}\mapsto B\cap O=\prod_{P\in S'}p^{v_P(B)},$$

式中 p（及 p'）为 O（及 O'）中相应于 P 的素理想.

理想的范(norm of an ideal)　数的范映射到理想的推广. 设 Q 是普通算术域 E 的素理想，域 F 是 E 的子域，$p=Q\cap F$. 定义 Q 的由 E 到 F 的范为

$$N_{E/F}(Q)=p^{t(Q/p)f(Q/p)},$$

式中$f(Q/p)$为剩余类次数，$t(Q/p)$是不可分次数$[E:F]_{in}$与$[E_Q:F_p]_{in}$的商，F_p是F对p-adic 赋值的完备化. 范的定义按积性扩展到E的任意理想A，且有

$$N_{E/F}(A)=\prod_{\sigma}(\sigma A)^{[E:F]_{in}},$$

式中σ过E到F的固定代数闭包的固定F元的嵌入.

分式理想(fractional ideal)　亦称理想. 理想概念的推广. 设R为一整环，K为其商域(分式域)，$M\subset K$是R模. 若存在非 0 的$c\in R$使$cM=\{cm\mid m\in M\}\subset R$，则称$M$为分式理想. 通常的理想(又称整理想)也是分式理想. 戴德金环的分式理想全体构成一个乘法阿贝尔群，由其素理想生成.

理想(ideal)　即“分式理想”.

除子(divisor)　理想概念的推广. 域F的素除子为基生成的自由阿贝尔群称为除子群，其中的每个元素称为除子. 除子群中的运算常记为乘法，有时也记为加法. 类似地，域F的部分素除子构成的集合S中素除子生成的自由阿贝尔群称为S除子群. 当F为整体域而S为有限素除子全体时，S除子群与F的(分式)理想群同构

$$\prod_P P^{m_p}\text{ 对应于 }\prod_p p^{m_P},$$

式中p是素除子P的赋值理想(同时P是p-adic 赋值类).

除子群(divisor group)　见“除子”.

差积(difference-product)　刻画扩张(分歧)性质的扩域中的一个数或理想. 设E/F是n次可分扩张，且其对任意素除子的剩余类域$\overline{E}/\overline{F}$也可分. 若存在$\alpha\in O_E$使$1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}$为$E/F$的整基(即整数环$O_E$的$O_F$基)，则$f'(\alpha)=(\alpha-\alpha_2)\cdots(\alpha-\alpha_n)$(或其生成的$E$的理想)称为$E/F$的差积$\mathscr{D}(E/F)$，式中$f(x)$是$\alpha$在$F$上首一极小多项式，$\alpha_i$为其根. 例如，若$P,Q$为$F,E$的离散素除子，$Q\supset P$(即$Q$是$P$的延拓)，则完备化域$E_Q/F_P$的差积可如上计算，称为$E/F$在$Q$的差积$\mathscr{D}_Q$且$m_Q=v_Q(\mathscr{D}_Q)=e(Q/P)-1$(当$Q/P$顺分歧)或者$e(Q/P)\leqslant m_Q\leqslant e(Q/P)+v_Q(e(Q/P))-1$(当$Q/P$野分歧). 对普通算术域扩张$E/F$，其差积为

$$\mathscr{D}(E/F)=\prod_Q \beta^{m_Q}=\{\alpha\in E\mid \alpha O_E^*\subset O_E\}$$

$$=\text{g. c. d. }\{f'(\gamma)\},$$

式中Q过E的(有限)素除子；β为其相应的E的素理想；$O_E^*=\{\beta\in E\mid T_{r_{E/F}}(\beta O_E)\subset O_F\}$称为$O_E$的补集；$\gamma$过整数环$O_E$. 形式上也记为

$$\mathscr{D}(E/F)=\prod_P\mathscr{D}_p(E/F)=\prod_P\prod_{Q\supset P}\mathscr{D}_Q.$$

E的素理想β在E/F分歧的充分必要条件为$\beta\mid\mathscr{D}(E/F)$. 判别式为差积由$E$到$F$的范，即$D(E/F)=N_{E/F}\mathscr{D}(E/F)$. 若$F\subset E\subset K$，则

$$\mathscr{D}(K/F)=\mathscr{D}(K/E)\mathscr{D}(E/F).$$

判别式(discriminant)　刻画扩域性质的子域中的一个元素或理想. 若E为域F的n次可分扩张，Tr 为E到F的迹，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in E$，则$n$阶行列式值$\det(\mathrm{Tr}(\alpha_i\alpha_j))\in F$称为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$(或其在$F$整数环$O_F$上生成的模或理想)的关于$E/F$的判别式，记为$D(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. 若$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$为$F$上的共轭元，则$D(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\det(\sigma_i\alpha_j)^2$. 若$E=F(\alpha)$，则

$$D(1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1})=\prod_{i<j}(\sigma_i\alpha-\sigma_j\alpha)^2$$

$$=N_{E/F}f'(\alpha)\cdot(-1)^{n(n-1)/2}$$

也称为α或α在F上的首一极小多项式$f(x)$的判别式.

若E/F存在整基$w_1,w_2,\cdots,w_n\in O_E$(即$w_1,w_2,\cdots,w_n$是$O_E$作为$O_F$模的基，当$O_F$是主理想环时总存在)，则$D(w_1,w_2,\cdots,w_n)$称为$E/F$的判别式$D(E/F)$. 它在相差$F$的单位平方意义下惟一(特别地，当$F=\mathrm{Q}$时惟一，称为$E$的绝对判别式)，所以常视为$F$中的理想. 例如，若$P,Q$为$F,E$的离散素除子，$Q\supset P$(即$Q$是$P$的延拓)，则完备化扩域$E_Q/R_P$的判别式$D_Q$可如上计算，称为$E/F$在$Q$的局部判别式(剩余类域$\overline{E}_Q/\overline{F}_P$可分时，整基甚至可取为$1,\alpha,\cdots,\alpha^{ef-1}$). 此外，因为$F$中的$P$整数环$O_P$为主理想环，所以理想$O_EO_P$作为$O_P$模有基，此基的判别式称为$E/F$在$P$的半局部判别式，记为$D_P$. 对普通算术域扩张$E/F$，其判别式为$F$的整理想

$$D(E/F)=\prod_Q=\mathscr{Q}^{V_Q(D_Q)}=\prod_P p^{V_P(D_P)}$$

$$=\text{g. c. d. }\{D(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\},$$

其中Q(及P)过E(及F)的(有限)素除子，$\mathscr{Q}$(及p)为相应的E(及F)的素理想；$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in E$过$E/F$的基，且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in E$构成$E/F$的整基的充分必要条件为$D(E/F)=D(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. 也形式地记为

$$D(E/F)=\prod_P D_P=\prod_P\prod_{Q\supset P}D_Q.$$

F的素理想p在E中分歧当且仅当$p\mid D(E/F)$. 当E/Q为数域时，$D(E/\mathrm{Q})\equiv 0$或$1(\mathrm{mod}\,4)$为绝对值大于 1 的有理整数. 若$F\subset E\subset K$，则

$$D(K/F)=N_{E/F}(D(K/E))\cdot D(E/F)^{[K:E]}.$$

局部判别式(local discriminant)　见“判别式”.

绝对判别式(absolute discriminant)　代数数论的一个重要概念. 数域E的绝对判别式定义为数域E相对于有理数域 Q 的判别式$D(E/\mathrm{Q})$，它是符号为$(-1)^{r_2}$的有理整数，$2r_2$为E到 C 的复嵌入个

数，且$D(E/\mathbb{Q})\equiv 0$ 或 $1(\mathrm{mod}\,4)$. $D(E/\mathbb{Q})\neq\pm 1$，从而 Q 无非分歧的扩张.

顺分歧(tamely ramified)　一种较简单的分歧情形，包括非分歧情形. 设 Q 为域 E 的离散素除子，P 为其在子域 F 上的限制. 若剩余类域扩张 $\overline{E}/\overline{F}$ 可分，且 $\overline{F}$ 的特征 p 为零或 $p\nmid e(Q/P)$，则称 Q 在 P 上顺分歧. 而当关于 p 的条件不满足时，则称 Q 在 P 上野分歧.

野分歧(wildly ramified)　见"顺分歧".

分解群(decomposition group)　素理想分解因子的固定伽罗瓦子群. 若 E/F 为整体域的伽罗瓦扩张，伽罗瓦群为 G，β 为 E 的素理想，$p=\beta\cap F$，则 $G_\beta=\{\sigma\in G\mid\sigma\beta=\beta\}$ 称为 β 的分解群. G_β 的元素自然地是 $\overline{E}=O_E/\beta$ 在 $\overline{F}=O_F/p$ 上自同构. 若

$$G=\bigcup_{i=1}^{g}\sigma_i G_\beta$$

为陪集分解，则$\{\sigma_1\beta,\sigma_2\beta,\cdots,\sigma_g\beta\}$恰为 p 在 E 中的素因子集. G_β 的固定子域 E^d 为 β 的分解域.

分解域(decomposition field)　分解群作用下不动的元素构成的子域(参见"分解群").

素理想分解(prime ideal decomposition)　亦称素分解. 一个域的素理想在扩域中的分解. 若$\{F,S\}$为普通算术域(等价于整数环 $O_F=O(S)$为戴德金环)，E 为 F 的 n 次扩张，则 F 的每个素理想 p(在 O_E 生成的理想)可分解为

$$pO_E=\beta_1^{e_1}\beta_2^{e_2}\cdots\beta_g^{e_g},$$

式中 β_i 为 E 的素理想，$e_i=e_i(\beta_i/p)$称为分歧指数，

$$f_i=f(\beta_i/p)=[\overline{E}_{\beta_i}:\overline{F}_p]$$

称剩余类次数，g 称为分裂次数. 若 E/F 可分，则

$$n=\sum_{i=1}^{g}e_i f_i.$$

素分解(prime ideal decomposition)　即"素理想分解".

库默尔定理(Kummer's theorem)　由多项式在剩余类域中的分解决定素理想分解的定理. 设 E/F为普通算术域的 n 次可分扩张，E 的整数环 O_E 中元 α 使$\{1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}\}$是 O_E 在 F 的素理想 p 处的 O_F 基(等价于 p 不是判别式之商 $D(\alpha)/D(E/F)$的因子)，又设 $\overline{F}=O_F/p$，$f(x)$为 α 在 F 上的首一极小多项式，其在 $\overline{F}[x]$中像为 $\overline{f}(x)$，$\overline{f}(x)$在 $\overline{F}[x]$中的不可约分解为 $\overline{f}(x)=G_1(x)^{e_1}G_2(x)^{e_2}\cdots G_g(x)^{e_g}$. 则 p 在 E 的素分解为 $pO_E=\beta_1^{e_1},\beta_2^{e_2},\cdots,\beta_g^{e_g}$，式中 E 的素理想 $\beta(p,g_i(\alpha))$，$g_i(x)\in O_F[x]$使 $\overline{g}_i(x)=G_i(x)$，且剩余类次数 $f(\beta_i/p)=\deg G_i(x)$.

希尔伯特分歧理论(Hilbert ramification theorem)　扩域素分解的精细理论. 设 E 是普通算术域 F 的 n 次伽罗瓦扩张，伽罗瓦群为 G，且设可能的剩余类域扩张 $\overline{E}/\overline{F}$ 总可分. 设 p 与 β 为 F 与 E 的素理想，$\beta|p$，以 e,f,g 记 β 在 p 的分歧指数、剩余类次数、分裂次数. 于是 $efg=n$. 对 E/F 的中间域 M，记 $\beta_m=\beta\cap M$，$\overline{M}$ 为模 β_M 剩余类域；对 G 的子群 H，记 E^H 为 H 的固定子域，$\beta_H=\beta_{E^H}$. 记

$$D=D(\beta/p)=\{\sigma\in G\mid\sigma\beta=\beta\},$$

$$V_r=V_r(\beta/p)=\{\sigma\in G\mid(\sigma-1)O_E\subset\beta^{r+1}\},$$

式中 O_E 为 E 的整数环，$r\geqslant 0$. 子群 D 称为分解群，E^D 称为分解域或分裂域；$T=V_0$ 称为惯性群，E^T 称为惯性域；V_r 称为 r 次分歧群，$E_r=E^{V_r}$称为 r 次分歧域. 设 D 的陪集分解为

$$G=\bigcup_{i=1}^{g}\sigma_i D,$$

若 $\beta_i=\sigma_i\beta$，则 $pO_E=(\beta_1\beta_2\cdots\beta_g)^e$，即是 p 在 E 的素分解. 因为 D 中元素不变 β，所以可视为完备化域 E_β/F_β 的自同构群 $\tilde{G}$ 中元素，因此有同构 $D\cong\tilde{G}$，$D/T\cong\overline{G}$. 同构 $D\cong\tilde{G}$ 把 E_β/F_p 与 E/E^D 的分歧理论同一化，可记 $E_\beta=F_pE$，$E^D=E\cap F_p$ 等. 从而，有 $pO_{E^D}=\beta_D\mathscr{U}$($\mathscr{U}$ 为 E^D 的与 β_D 互素的整理想；因为 p 分裂出一次素因子 β_D，所以称 E^D 为分裂域)，$\beta_DO_{E^T}=\beta_T$(称 E^T 为惯性域)，$\beta_TO_E=\beta^e$，$g=[E^D:F]$，$f=f(\beta_T/\beta_D)=[E^T:E^D]=[\overline{E}:\overline{F}]$，$e=e(\beta/\beta_T)=[E:E^T]$，$e(\beta_D/p)=f(\beta_D/p)=1$，$\overline{E}=\overline{E}^T=\overline{E}_\beta$，$\overline{E}^D=\overline{F}=\overline{F}_p$. 对 E/F 的中间域 M，$e(\beta_M/p)=f(\beta_M/p)=1$ 当且仅当 $M\subset E^D$；β_M 在 p 上不分歧当且仅当 $M\subset E^T$；β_M 是 β 的幂当且仅当 $M\supset E^D$. 对 G 的子群 H，$D(\beta/\beta_M)=D\cap H$，$V_r(\beta/\beta_H)=V_r\cap H$. T/V_1 同构于 $\overline{E}$ 乘法群 $\overline{E}^*$ 的一个子群，即 e_0 阶循环群(这里 $e=e_0p^c$，p 为 $\overline{F}$ 的特征，$(e_0,p)=1$；$p=0$ 时记 $e_0=e$). $r\geqslant 1$ 时，V_r/V_{r+1}同构于 $\overline{E}$ 的加法群的一个子群，当 $p\neq 0$ 时是$(p,p,\cdots,p)$型群. $V_r(r\geqslant 1)$构成 D 的正规子群递降序列，当 r 适当大时 $V_r=\{1\}$. 满足 $V_r\neq V_{r+1}$的诸 r 模 p 同余. 若 G 为阿贝尔群且 $e_0\nmid r$，则 $V_r=V_{r+1}$. 当 G 为阿贝尔群时，有哈塞-阿尔夫定理：若 $V_r\neq V_{r+1}$则

$$\int_0^r \mathrm{d}t/(V_0:V_t)$$

为整数，式中 $V_t=V_i$，i 是最小整数使 $i\geqslant t$. 关于E/F的差积 $\mathscr{D}$ 有希尔伯特公式

$$v_\beta(\mathscr{D})=\sum_{r=0}^{\infty}(\#V_r-1).$$

分解群(decomposition group)　见"希尔伯特分歧理论".

分解域(decomposition field)　见"希尔伯特分歧理论".

惯性群(inertia group)　见"希尔伯特分歧理论".

惯性域(inertia field)　见“希尔伯特分歧理论”.

分歧群(ramificaion group)　见“希尔伯特分歧理论”.

分歧域(ramification field)　见“希尔伯特分歧理论”.

理想类群(ideal class group)　数域的分式理想群按主理想子群分类所形成的群. 数域 K 的两个分式理想 A 和 B 称为等价的,指存在 $\alpha\in K$ 使 $A=\alpha B$. K 的分式理想等价类全体构成的乘法群 $H(K)$ 即称为 K 的理想类群. 换句话说,$H(K)=I/I^*$,式中 I 为 K 的分式理想群,I^* 为主理想子群. $H(K)$ 的阶 $h(K)$ 是有限数,称为 K 的理想类数或类数. K 为主理想域(即 K 的整数环为主理想环)当且仅当 $h(K)=1$. 类群和类数是数域的重要数论特征和研究对象. 关于普通算术域(包括函数域)的类群和类数参见“普通算术域”.

单位定理(unit theorem)　域的单位群的结构定理. 若 F 为整体域(即有理数域 Q 或有限域上有理函数域 $F_q(t)$ 的有限扩张),S 为包含其所有无限素除子的有限集合,则 F 的 S 单位群 U_S 是 $s-1$ 个无限循环群与有限循环群 W 的直积,即 $U_S\cong Z^{s-1}\times W$,式中 s 为 S 的元素个数,W 为 F 中的单位根形成的群. 特别地,若 F 为数域,S 为其无限素除子全体,U_S 即为 F 的单位群,$s=r_1+r_2$,式中 r_1 及 $2r_2$ 为 F 到 C 的实和虚嵌入个数. 此定理也称为狄利克雷-哈塞-谢瓦莱单位定理.

基本单位(fundamental unit)　单位群的(自由部分)生成元. 由单位定理,整体域 F 的 S 单位群 $U_S\cong Z^{s-1}\times W$,W 为有限群. 因此,存在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{s-1}\in U_S$ 使 $U_S=W\times(\varepsilon_1)\times(\varepsilon_2)\times\cdots\times(\varepsilon_{s-1})$. 于是,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{s-1}$ 称为 F 的基本单位,其中 $s=\#S$.

闵科夫斯基上限(Minkowski bound)　界定理想数个数的上限. 若 F 为 n 次数域(即 Q 的 n 次扩张),d 为其判别式,则 F 的闵科夫斯基上限为

$$B=\left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2}n!n^{-n}\sqrt{|d|},$$

式中 $2r_2$ 为 F 到 C 的虚嵌入个数. 域 F 的每个理想类中总含有范不超过 B 的整理想.

闵科夫斯基定理(Minkowski theorem)　对一类判别式的刻画. 有理数域 Q 的任一个有限扩张 $F(\neq Q)$ 在 Q 上的判别式均非 ±1. 特别地,Q 上没有非分歧扩张.

数域的特征群(character group of a number field)　刻画数域的一种群. 设 $L=L_m=Q(\zeta_m)$ 为 n 级分圆域,其伽罗瓦群可等同于 $G=G_m=(Z/mZ)^*$,即 σ_i 等同于 i,这里 $\sigma_i(\zeta_m)=\zeta_m^i$. 因此,模 m 的狄利克雷特征群也就是 L_m 的伽罗瓦群 G 的特征群 $\hat{G}$. L 的子域全体 $\{K\}$ 是一个格,与 G 的子群格 $\{H\}$ 间反序一一对应(伽罗瓦理论). 而 G 与其特征群 $\hat{G}$ 的子群格之间也是反序一一对应:$X\mapsto H=X^{\perp}$(群的特征理论). 因此,L 的子域格 $\{K\}$ 与 $\hat{G}$ 的子群格 $\{X\}$ 之间保序一一对应:$K\leftrightarrow H\leftrightarrow X$,即子域 K 对应于特征子群 $X=H^{\perp}=\{\chi\in\hat{G}\mid\chi(h)=1$,对 $h\in H=\mathrm{Gal}(L/K)\}$,记 $X=\hat{K}$,称为域 K 的特征群. 因为每个阿贝尔数域 K 都是某分圆域的子域,所以任一个阿贝尔数域 K 均有特征群 $\hat{K}$.

数域的 ζ 函数(Zeta function of a number field)　一种复变函数. 设 K 为 n 次数域,记 K 到 Q 的(绝对)范映射为 $N(I)=N_{K/Q}(I)$. 于是,K 的(戴德金)ζ 函数定义为

$$\zeta_K(s)=\sum_I\frac{1}{NI^s},$$

其中 I 遍历 K 的整理想. 当 $\sigma=\mathrm{Re}(s)>1$ 时,

$$\zeta_k(s)=\sum_I NI^{-s}$$

绝对收敛且在紧子集上一致收敛,而且

$$\zeta_K=\prod(1-NP^{-s})^{-1}.$$

特别地,此时 $\zeta_k(s)\neq0$(其中 P 过 K 的素理想). 事实上,$\zeta_k(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)>1-1/n$ 且 $s\neq1$ 时解析,且在 $s=1$ 为单极点,留数为

$$\delta_K=h_K2^{r_1}(2\pi)^{r_2}R_K/w\sqrt{d_K},$$

其中 h_K 为 K 的理想类数,r_1 和 $2r_2$ 是 K 到 C 的实和虚嵌入个数,R_K 为正规子(由单位定义),w 是 K 中单位根群的阶,d_K 为 K 的判别式的绝对值. 与此相关的是 L 函数. 设 $\chi\neq1$ 为狄利克雷本原特征,其 L 函数定义为

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\quad(\mathrm{Re}(s)>0).$$

当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时,

$$L(s,\chi)=\prod_p(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}\quad(p\text{ 过素数}).$$

若 K 为阿贝尔数域,则

$$\zeta_K(s)=\prod_{\chi\in\hat{K}}L(s,\chi).$$

上述函数均可解析开拓. 记

$$\Lambda(s,\chi)=(f/\pi)^{s/2}\Gamma((s+\delta)/2)L(s,\chi),$$

其中 $\delta=\delta(\chi)=0$ 或 1(依 $\chi(-1)=1$ 或 -1),高斯和

$$\tau(\chi)=\sum_{i=1}^{f}\chi(a)\exp(2\pi\mathrm{i}a/f),$$

f 为 χ 的导子. 从而 $\Lambda(s,\chi)$ 可被解析开拓为全复平面的半纯函数,且满足函数方程

$$\Lambda(s,\chi)=\left(\frac{\tau(\chi)}{\sqrt{f}\,\mathrm{i}^{\delta}}\right)\Lambda(1-s,\bar{\chi}).$$

特别地,当 $\chi\neq1$ 时,$L(s,\chi)$ 是全复平面的全纯函

数，而 $L(s,1)=\zeta(s)$. 这里 $\bar{\chi}(a)=\overline{\chi(a)}$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 对任意 n 次函数域 K，$\zeta_K(s)$ 也可开拓为全复平面的半纯函数，惟一极点为 $s=1$. 当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时无极点. 当 $\mathrm{Re}(s)\leqslant 0$ 时，在负奇数点有 r_2 阶零点，在负偶数点有 r_1+r_2 阶零点. 其余零点都在带状区 $0<\mathrm{Re}(s)<1$ 内有无限多，猜想都在直线 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 上. 若

$$Z_K(s)=\left(\frac{\sqrt{d_K}}{2^{r_2}\pi^{n/2}}\right)^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}\zeta_K(s),$$

其中 $\Gamma(s)$ 为 Γ 函数，则有函数方程

$$Z_K(s)=Z_K(1-s).$$

类数公式(Formula for class number)　阿贝尔数域理想类数的公式. 若 $\zeta_K(s)$ 为阿贝尔数域 K 的 ζ 函数，则

$$\zeta_K(s)=\zeta(s)\prod_{\chi\neq 1}L(s,\chi),$$

其中 $\zeta(s)$ 是黎曼 ζ 函数，$L(s,\chi)$ 为特征 χ 的狄利克雷 L 函数. 两边同乘以 $(s-1)$，若 $s\to 1$，则得到

$$\iota_K h_K=\prod_{\chi\neq 1}L(1,\chi)$$

(参见“数域的 ζ 函数”). 由此可得 K 的理想类数 h_K 的公式：若 K 为实域，则

$$R_K h_K=d_K^{1/2}2^{1-n}\prod_{\chi\neq 1}L(1,\chi);$$

若 K 为虚域，则

$$R_K h_K=wd_K^{1/2}(2\pi)^{-n/2}\prod_{\chi\neq 1}L(1,\chi),$$

其中 χ 过 K 的特征. $L(1,\chi)$ 定义如下：当 χ 为奇特征时，

$$L(1,\chi)=\frac{\pi\mathrm{i}\tau(x)}{f^2}\sum_{a=1}^{f}\bar{x}(a)a;$$

当 χ 为偶特征时，

$$\begin{aligned}L(1,\chi)&=-\frac{\tau(x)}{f}\sum_{a=1}^{f}\bar{\chi}(a)\log|1-\zeta^a|\\&=-\frac{\tau(x)}{f}\sum_{a=1}^{f}\bar{\chi}(a)\log\sin|1-\zeta^a|.\end{aligned}$$

当 K 为二次数域时，设 $\langle\chi\rangle=\hat{K}$，$d=|d_K|$. 当 K 为实域时，若 ε 为其基本单位，则其类数

$$h=\frac{-1}{\log\varepsilon}\sum_{0<a<d/2}\chi(a)\log\sin\pi a/d.$$

当 K 为虚域时，若 $d>4$，则 K 的类数

$$\begin{aligned}h&=\frac{-1}{d}\sum_{0<a<d}\chi(a)a\\&=(2-\chi(2))^{-1}\sum_{0<a<d/2}\chi(a).\end{aligned}$$

当 K 为实二次域时，还可得到

$$\varepsilon^h=\left(\prod_{\chi(b)=-1}\sin\pi b/d\right)\Big/\left(\prod_{\chi(a)=1}\sin\pi a/d\right).$$

当 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$，素数 $p\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ 时，类数 h 为奇数，且

$$h=\begin{cases}R-N & (p\equiv 7(\mathrm{mod}\,8)),\\(R-N)/3 & (p\equiv 3(\mathrm{mod}\,8)),\end{cases}$$

其中 R,N 是区间 $(0,p/2)$ 中模 p 平方剩余和非剩余整数个数.

还有其他许多类型的类数公式. 例如，著名的安肯尼-阿廷-俅拉公式：若 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ 的基本单位 $\varepsilon=(t+u\sqrt{p})/2>1$，素数 $p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$，则其类数 h 满足

$$\frac{hu}{t}\equiv B_{\frac{p-1}{2}}(\mathrm{mod}\,p).$$

因为 $h<\sqrt{p}$，所以此式惟一决定 h(若 $u\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$). 上述伯努利数 B_n 由下式定义：

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}.$$

阿代尔环(Adele ring)　一种特殊的环. 即各分量为诸局部域元素的某些向量(其分量几乎均为整数)形成的环. 设 F 为整体域，M 为其素除子集. 以 F_P 表示 F 对 $P\in M$ 的完备化(局部域). 设 $a=(a_P)$ 为积空间 $\Pi F_P(P\in M)$ 中元素，若对几乎所有 $P\in M$ (即除有限个之外对所有有限的 $P\in M$)均有 a_P 为 F_P 的整数，则 $a=(a_P)$ 称为 F 的一个阿代尔. F 的阿代尔全体 A 形成环(按分量进行加法和乘法)，称为 F 的阿代尔环.

伊代尔群(Idele group)　一种特殊的群. 即各分量为诸局部域元素的某些向量(其分量几乎均为单位)形成的群，是理想群和除子群的推广. 设 F 为整体域，M 为其素除子集，F_P 为 F 对 $P\in M$ 的完备化. 设 $a=(a_P)$ 为积空间 $\Pi F_P^*(P\in M)$ 中元素，若对几乎所有 $P\in M$(即除有限个之外对所有的有限素除子 $P\in M$)均有 a_P 为 F_P 的单位，则 $a=(a_P)$ 为 F 的伊代尔. F 的伊代尔全体 J 形成群(按分量进行乘法)，称为伊代尔群. F^* 按对角线嵌入 J，称为主伊代尔群. 自 1936 年由谢瓦莱(Chevalley,C.)引入以来，伊代尔群在数论中应用很广泛. 伊代尔群与理想群关系密切. 事实上，J/F^*J_∞ 与 F 的理想类群 H 同构，式中 J_∞ 表示对有限素除子 $P\in M$ 均有 a_P 为单位的伊代尔 (a_P) 全体. 伊代尔群是一个局部紧的拓扑群.

主伊代尔群(principal Idele group)　见“伊代尔群”.

导子(conductor)　数域的一个参数. 阿贝尔数域 K 的导子是一个最小的正整数 m，使得 K 含于 m 次分圆域 $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ 中. 更一般地，阿贝尔扩张 K/k 的导子是 k 的一个最小的模 m(即 k 的一种除子)，使得 K 含于 k 的 m 射线类域中. 狄利克雷(Dirichlet, P. G. L.)称特征 χ(即对于某个正整数 m 定义的乘法同态 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\to\mathbb{C}^*$)的导子是一个最小的使 χ 可

定义的正整数 m.

克罗内克-韦伯定理(Kronecker-Weber theorem) 阿贝尔域的基本定理之一. 该定理断言:每个阿贝尔数域(即有理数域 Q 的有限阿贝尔扩张)K 总含于某个分圆域中. 即对每个阿贝尔数域 K,总存在正整数 m,使 m 次分圆域 $\mathrm{Q}(\zeta_m)$ 包含 K.

阿廷映射(Artin mapping) 理想群(或伊代尔群)到伽罗瓦群的映射. 它是类域论的基石之一. 设 K/k 为数域的伽罗瓦扩张,p 是 k 的素理想,β 是 p 在 K 的素理想因子. 伽罗瓦群 $G(K/k)$ 中保持 β 不变的元素记为 G_β. 剩余类域 $\overline{K}=K(\mathrm{mod}\,\beta)$ 是 $\overline{k}$ 的 f 次循环扩张,伽罗瓦群记为 $\overline{G}$,生成元为 $\overline{\sigma}$. G_β 到 $\overline{G}$ 有自然满同态,核为 T_β. 当 K/k 为阿贝尔扩张且 p 在 K 非分歧时,$T_\beta=1$,$G_\beta\cong\overline{G}$. $\overline{\sigma}$ 在 G_β 中的原像是 $G(K/k)$ 中一个元素且仅与 p 有关,记为 $(p,K/k)$. 由 $p\to(p,K/k)$ 按乘法拓展可得到由 k 的与 K/k 判别式互素的理想群 $I(d)$ 到 $G(K/k)$ 的映射 $\mathscr{A}$. 此映射称为阿廷映射,$(p,K/k)$ 称为阿廷符号. 阿廷映射是满射,因此,在确定其核 $\ker\mathscr{A}$ 之后,就有同构

$$I(d)/\ker\mathscr{A}\cong G(K/k).$$

这是类域论基本定理的原型. 进而,可以定义广义理想群及伊代尔群上的阿廷映射. 上述阿廷映射及阿廷符号 $(p,K/k)$ 由下式惟一确定

$$(p,K/k)(\alpha)\equiv\alpha^{Np}(\mathrm{mod}\,\beta)$$

(对 K 的任一整数 α 成立),式中 Np 为 $\overline{k}$ 的元素个数.

阿廷符号(Artin symbol) 见"阿廷映射".

类域论(class field theory) 代数数论的重要理论之一. 它深刻地刻画了(相对)阿贝尔扩张. 基本定理如下:若 K/k 为数域的有限阿贝尔扩张,伽罗瓦群为 $G=G(K/k)$,则存在 k 的模 f(称为 K/k 的导子,是 k 的一个除子),使得对 k 的任意的模 m,由 $f\mid m$ 得出 G 同构于 m 射线类群 $I(m)/P_m\mathscr{N}(m)$,式中 $I(m)$ 为与 m 互素的 k 的理想集,$\mathscr{N}(m)$ 为与 m 互素的 K 的理想到 k 的范全体,P_m 为模 m 余 1 的 $\alpha\in k$ 生成的主理想集. 且 k 的素除子 v 在 K 分歧当且仅当 $v\mid f$;k 的与 m 互素的素理想 p 在 K 完全分裂当且仅当 $p\in P_m\mathscr{N}(m)$. 反之,对 k 的任一模 m 及 $I(m)$ 的任一含 P_m 子群 H,总存在惟一阿贝尔扩张 K/k,使得 $H=kP_m\mathscr{N}(m)$ 且上述事实均成立. 特别地,$G(K/k)\cong I(m)/H$. 更经常的是用伊代尔语言叙述类域论的定理. 基本定理:若 K/k 为数域的有限阿贝尔扩张,则伽罗瓦群 $G(K/k)$ 同构于 J_k/k^*NJ_k,式中 J_k 为 k 的伊代尔群,NJ_K 为 K 的伊代尔群到 k 的范. 上述群的同构由阿廷映射给出. 由此可得出,数域 k 的诸有限阿贝尔扩张 K/k 与 J_k 的含 k^* 诸开子群 H 之间一一对应,即 K 对应于 $H=k^*NJ_K$,称为 H 的类域,$G(K/k)\cong J_k/H$;这一对应是这两个格(对于复合(或积及交))的反向(包含关系)格同构. 类域论有系统的定理和应用,有多种不同的表述方式. 对于局部域的阿贝尔扩张有类似的定理(局部类域论),对于有限域上的单变量函数域也有类似的定理.

局部类域论(local class field theory) 刻画局部域的阿贝尔扩张的系统的理论. 可由(整体)类域论导出;也可先用较特别的方法证明局部类域论,再由此推演出整体类域论. 基本定理:若 K/k 为局部域的有限阿贝尔扩张,则伽罗瓦群 $G(K/k)$ 同构于 k^*/NK^*,而惯性群 $T(K/k)$ 同构于 U_k/NU_K,式中 N 表示从 K 到 k 的范映射,U_k 为 k 的单位群,同构均由阿廷映射给出. 由此,k 的诸有限阿贝尔扩张 K/k 与 k^* 的诸开子群 H 之间一一对应,包含关系相反,即 K 对应于 $H=NK^*$,$G(K/k)\cong k^*/H$.

希尔伯特类域(Hilbert class field) 亦称最大非分歧阿贝尔扩张. 一种重要的类域. 最早由希尔伯特(Hilbert, D.)于 1898 年至 1899 年猜出,后来发展为系统而一般的类域论. 数域 k 的希尔伯特类域 K 有下列性质:

1. 伽罗瓦群 $G(K/k)$ 与 k 的理想类群同构.

2. k 的素理想 p 在 K 完全分裂当且仅当 p 为主理想.

3. K 是 k 的最大非分歧(对有限和无限素除子)阿贝尔扩张.

4. k 的任一理想到 K 均为主理想.

最大非分歧阿贝尔扩张(maximal unramified Abelian extension) 即"希尔伯特类域".

类域的构作(construction of class fields) 试图构作出类域,特别是希尔伯特类域的研究. 目前只对虚二次域上希尔伯特类域的构作有完整的理论. 按照类域论,域 k 的类域即是 k 的阿贝尔扩张,所以类域构作问题亦即是要构作出 k 的所有阿贝尔扩张问题. 有理数域 Q 的阿贝尔扩张即是分圆域及其子域(克罗内克-韦伯定理). 因此,历史上曾想要类似地构作出一个域 k 的所有阿贝尔扩张,称为克罗内克青春之梦. 设 k 是虚二次域,k 的希尔伯特类域可由复乘法理论构作出来. k 的任一分式理想 a 是复数域 C 中的格,从而决定一个复椭圆曲线(环面)C/a,其 j 不变量记为 $j(a)$. 同类的理想决定的椭圆曲线互相同构,从而确定同一个 j 不变量. 由此得到 h 个值 $j(a_i)=j_i(1\leqslant i\leqslant h)$,称为 k 的类不变量(其中 h 是 k 的理想类数). 类不变量均为代数整数且 $f(x)=(x-j_1)\cdots(x-j_h)$ 是 Z 上不可约多项式,而 $k(j_1)=k(j_2)=\cdots=k(j_h)$ 是 k 的希尔伯特类域 K. 且 k 的理想 a 对应的 K/k 的自同构把 $j(b)$ 映为 $j(a^{-1}b)$,式中 b 是与 a 不同类的 k 的任一理想. 进

而可以知道，k 的最大阿贝尔扩张即为 $k(j_1,X)$，式中 X 过椭圆曲线

$$y^2 = 4x^3 - 27j_1(x+1)/(j_1 - 12^3)$$

的挠点横坐标（这里设 $j_1\neq 0,1728$）. 由椭圆曲线与复平面上格基本区的同构知道，X 实为双周期的外尔斯特拉斯函数的取值.

克罗内克青春之梦（Kronecker's Jugendfraum）见“类域的构作”.

种域（genus field）　类域的一种重要的子域. 数域 K 的种域 K^* 定义为 K 的最大的如下阿贝尔扩张，它是 K 与一个绝对阿贝尔域 K_1 的复合，且在 K 的素除子上均不分歧. 二次域的种域源于高斯、阿贝尔域，而一般域的种域于 20 世纪 50 年代分别引入. 种域理论在类域构作、数域类数、整数环结构等方面有重要应用.

复乘法（complex multiplication）　关于（复）椭圆曲线（环面）自同态环的理论. 当该自同态环比整数环 Z 大时，称椭圆曲线具有复乘. 此时有一个自同态由复数乘法给出. 虚二次域 k 的任一理想 a 是复数域 C 的格，椭圆曲线 C/a 的自同态环是 O_k，即 k 的整数环的子环. 由此可由 C/a 的 j 不变量 $j(a)$ 构作出 k 的希尔伯特类域 $K=k(j(a))$.

代数函数域（algebraic function field）　有限域上单变量有理函数域 $F_q(t)$ 的有限扩张. 是整体域的一种，可以与数域那样平行地发展赋值、分解、类数、单位等数论理论. 代数函数域的研究有密切的几何背景，相当于光滑射影曲线的代数研究.

分圆函数域（cyclotomic function field）　一类重要的代数函数域. 是分圆数域的某种推广. 设 $k=F_q(t)$ 为有限域 F_q 上单变元 t 的有理函数域. 其代数闭包 k^{ac} 按如下作用形成 $F_q[t]=O_k$ 上的模：对 $u\in k^{ac}$，$M\in O_k$，定义

$$u^M=M(\varphi+\mu)(u),$$

式中 $\varphi(u)=u^q$ 是 k^{ac} 的弗罗贝尼乌斯自同构，$\mu(u)=tu$. 特别地，$u^t=u^q+tu$. 于是

$$u^M = \sum_{i=0}^{d}\begin{bmatrix} M \\ i \end{bmatrix}u^{q^i}$$

是 q^d 次 u 的可分多项式，式中 d 为 M 的次数，

$$\begin{bmatrix} M \\ i \end{bmatrix}\in O_k,$$

次数为 $(d-i)q^i$. 若 Λ_M 为 $u^M=0$ 的根集，则 $k(\Lambda_M)$ 称为 M 分圆函数域. 其在 k 上的伽罗瓦群同构于 $\Lambda_M\cong O_k/(M)$ 的单位群. 当 $M=P^n$ 为 d 次首一不可约多项式幂时，$k(\Lambda_M)$ 仅在 (P) 和 ∞ 分歧. 类似于克罗内克-韦伯定理，k 的每个在 ∞ 为顺分歧的有限阿贝尔扩张均含于某个分圆函数域 $k(\Lambda_M)$ 的常数域扩张中（顺分歧是指分歧指数与 q 互素）.

弗罗贝尼乌斯自同构（Frobenius automorphism）　（数）域的一种特殊自同构. q 元有限域 F_q 的扩域中，由 $x\mapsto x^q$ 确定的自同构称为弗罗贝尼乌斯自同构. 其他的由升 q 次幂确定的自同构（如 F_q 上曲线）也这样称呼. 设 K/k 为数域伽罗瓦扩张，p 为 k 的素理想，β 为其在 K 的素理想因子. K 模 β 的剩余类域 $\overline{K}$ 是 $\overline{k}$ 的 $f=f(\beta/p)$ 次扩张，$\overline{k}$ 是 Np（即 p 的绝对范数）个元素的有限域. 伽罗瓦群 $\overline{G}=\mathrm{Gal}(K/k)$ 是循环群，生成元 $\overline{\sigma}: x\mapsto x^{Np}$ 称为 $\overline{K}/\overline{k}$ 的弗罗贝尼乌斯自同构. K/k 的保持 β 不变的自同构群 G_β 到 $\overline{G}$ 有自然同态. $\overline{\sigma}$ 在此同态下的任一原像称为 β 的弗罗贝尼乌斯自同构 σ，由 $\sigma x\equiv x^{Np}(\bmod \beta)$ 刻画.

射线理想类群（ray ideal class group）　一种广义理想类群. 类域论（最初）的基本表述语言. 数域 k 的一个模（或称闭链）是指其素除子的一个形式积

$$m=\prod_v v^{m(v)},$$

式中 v 过 k 的素除子，整数 $m(v)\geqslant 0$ 只对有限个 v 非 0，且当 v 是实除子时 $m(v)=0$ 或 1；当 v 是复除子时 $m(v)=0$. 对 $\alpha\in k^*$，定义 $\alpha\equiv 1(\bmod^* m)$ 意义为 $\alpha\in 1+p_v^{m(v)}$（当 v 是 p_v-adic 素除子）及 α 到 Cv 嵌入映为正实数（当 $v\mid m$ 为实除子）. 满足 $\alpha\equiv 1(\bmod^* m)$ 的 $\alpha\in k^*$ 生成的主理想全体记为 P_m. 与 m 互素的 k 的理想全体记为 $I(m)$. 于是，$I(m)/P_m$ 称为 k 的以 m 为模的射线理想类群，其元素个数 h_m 称为射线理想类数.

射线理想类数（ray ideal class number）　见“射线理想类群”.

万有范指数不等式（universal norm index inequation）　亦称（或相当于）第二不等式. 类域论的重要不等式. 若 K/k 为 n 次伽罗瓦扩张，m 是数域 k 的一个模，含所有分歧素除子因子，则

$$|I(m)/P_m\mathcal{N}(m)|\leqslant n,$$

即范指数不超过扩张次数，式中 $\mathcal{N}(m)$ 表示与 m 互素的 K 的所有理想到 k 的范.

素理想密度（density of prime ideals）　对素理想的一种刻画. 度量某种素理想多少的量. 设 X 为数域 k 的某些理想构成的集合，当 $s\to 1^+$ 时，若

$$\sum_{p\in X}N(p)^{-s}/\log(s-1)^{-1}$$

的极限存在，则称其为 X 的（狄利克雷）密度，记为 $\delta(X)$，其中 p 表示 k 的素理想，N 表示绝对范. 利用类域论的结论可以得到：

1. 射线理想类群 $I(m)/P_m$ 中各个类的密度相等，均为 $1/hm$.

2. 对任意 n 次阿贝尔数域扩张 K/k，在 K 完全分裂的 k 的素理想集 $S_{K/k}$ 的密度为 $1/n$.

3. 若 K/k 和 E/k 为两个扩张，前者为伽罗瓦扩

张，则 K 包含 E 当且仅当 $S_{E/k}$ 包含 $S_{K/k}$（在相差密度为 0 集合意义下）.

4. 若 K/k 为 n 次伽罗瓦扩张，群为 G，固定 $\sigma\in G$，则 k 的素理想集 $\{p|p$ 在 K 有素因子 β,β 的弗罗贝尼乌斯自同构为 $\sigma\}$ 的密度为 c/n，式中 c 是 σ 在 G 中的共轭元素个数.

分裂定理(splitting theorem) 类域论中判定素理想分裂的定理. 若 K/k 是 H 的类域，这里 H 是 k 的伊代尔群 J_k 的含 k^* 的子群，则 k 的任一素除子 v 在 K 完全分裂当且仅当 $k_v^*\subset H$，式中 k_v 是 k 对 v 的完备化. 进而，还有如下结果：若 K/k 是任一阿贝尔扩张，v 是 k 的任一素除子，则 k_v^* 中元素在阿廷映射下的像恰为分解群 G_v（即 K_w/k_v 的伽罗瓦群，w 为 v 在 k 任一延拓）. 事实上，更有

$$k_v^*/N_wK^*\cong(k_v^*,K/k)=G_v,$$

式中 N_w 为 K_w 到 k_v 的范映射. 这一定理不仅完全决定了素理想的分裂与否，而且是由整体类域论导出局部类域论的关键，因为它给出了 k_v^* 的子群 $N_wK_w^*$ 与局部伽罗瓦群 G_v 的关系.

分歧定理(ramification theorem) 类域论中判定素理想分歧的定理. 若 K/k 是 H 的类域，这里 H 是 k 的伊代尔群 J_k 的含 k^* 的子群. 则 k 的任一素除子在 K 非分歧当且仅当 $U_v\subset H$，式中 U_v 是 k 对 v 的完备化 k_v 的单位群. 进而，还有如下结果：若 K/k 是任一阿贝尔扩张，v 是 k 的任一素除子，则 U_v 中元素在阿廷映射下的像恰为惯性群 T_v（即 v 在 K 的任一延拓 w 的惯性群）. 事实上，更有

$$U_v/N_wU_w\cong(U_v,K/k)=T_v,$$

式中 N_w 是 K_w 到 k_v 的范映射.

同构定理(isomorphism theorem) 类域论的重要定理. 该定理断言：数域 k 的希尔伯特类域 k^H 的伽罗瓦群 $G(k^H/k)$ 与 k 的理想类群同构. 这一定理到一般类域上有推广.

主理想定理(principal ideal theorem) 希尔伯特类域的主要定理. 该定理断言：数域 k 的任一理想 a 到 k 的希尔伯特类域 K 上总为主理想，即 aO_K 总为 K 的主理想，式中 O_K 为 K 的整数环. 这一定理最先由希尔伯特于 1898 年猜出，到 1930 年才由富特文格勒(Furtwängler, P. H.)证明（即一般类域论完全建立之后），是同组四个猜想中最迟被证明的一个.

类域塔问题(problem of class field tower) 关于是否可以有无限长的希尔伯特类域链的问题. 设有域扩张序列 $K_0\subset K_1\subset K_2\cdots$，其中 K_i 是 K_{i-1} 的希尔伯特类域，这样的序列称为类域塔. 问题是类域塔是否可能无限扩展下去？这一问题有很长的历史，事实上在证明主理想定理时，要用到两层的类域塔. 直到 1964 年，由戈罗德(Golod)与沙发列维奇(Shafarevich)给出肯定的回答，他们证明：当

$$K_0=\mathbf{Q}(\sqrt{-2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13})$$

时，类域塔可无限扩张下去.

p 类域(p-class field) 一种阿贝尔扩张. 数域 k 的 p 类域 $K^{(p)}$ 即为 k 的最大非分歧阿贝尔 p 扩张（p 扩张即伽罗瓦群元素的阶均为 p 的幂的扩张. 这里 p 均指有理素数）. 其伽罗瓦群 $G(K^{(p)}/k)$ 同构于 k 的理想类群 C 的 p-sylow 子群. 若 $K^{(p)}$ 是 H 的类域（H 为 k 的理想群 I 含主理想子群 P 的子群），则 H/P 恰为 C 的非 p 部分.

费马最后定理(Fermat's last theorem) 亦称费马大定理或费马最后定理，是数论中最著名的影响最大的古典猜想之一. 历经三个多世纪后，最终被普林斯顿大学的怀尔斯(Wiles, A.)于 1994 年完全证明. 此猜想始于约 1637 年，法国数学家费马(Fermat, P. de.)在古希腊数学家丢番图(Diophantus)的名著《算术》的关于勾股数问题的页边上写下注记："分一个立方为两个立方之和，或分一个四次方为两个四次方之和，或一般地分任一高于二次的方幂为两个同次方幂之和，均是不可能的. 对此我已发现了真正奇妙的证明. 但此页边太窄容不下." 费马的这个猜想（费马最后定理）可被确切表述为：对任意正整数 $n\geqslant3$，费马方程 $a^n+b^n=c^n$ 不可能有正整数解 a,b,c.

费马现在被认为是历史上著名的数学家，但他当时却是位律师，数学只是业余爱好，一生从未发表过数学论文（除了一篇是作为同事著书的附录发表外，而且还是匿名的）. 后来，他的儿子撒缪尔(Samuel)于 1670 年将《算术》一书连同费马的许多注记一起重印发表. 上述注记是长期未被解决的费马最后一个猜想，因此称为费马最后定理. 虽然在注记中费马称他对此已有奇妙证明，但一般公认他不可能有正确的证明. 他实际上只对 $n=4$ 的情形给出了证明（费马无穷递降法，1640 年左右）. 注意，$n=4$ 的情形证明之后，费马大定理只需对 n 为奇素数证明即可. 费马大定理提出后，200 年间只解决了 $n=3,4,5,7$ 四种情形：$n=3$ 的情形于 1753 年由欧拉(Euler, L.)基本证明，使用了当时很先进的数学思想：虚数的分解；$n=5$ 的情形于 1825 年由女数学家热尔曼(Germain, S.)、狄利克雷(Dirichlet, P. G. L.)、勒让德(Legendre, A.-M.)证明；$n=7$ 的情形于 1839 年由拉梅(Lamé, G.)证明.

第一次大突破约在 1847 年，库默尔(Kummer, E. E.)发明了理想数的概念，用来克服分圆域中的数不满足惟一析因律的困难，创立了代数数论这一现代数学分支. 由此可以证明 $n<100$ 时费马大定理

成立(37,59,67除外). 库默尔的理论后来被戴德金(Dedekind, J. W. R.)系统发展为代数数论的基本理论. 随后的深入研究得出许多结果. 下列每条都是费马大定理对奇素数 $n=p$ 成立的充分条件:

1. $h(p)\not\equiv 0(\bmod p)$,其中 $h(p)$ 是 p 级分圆域 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 的理想类数.

2. 伯努利数 $B_2,\cdots,B_{p-3}$ 均非 p 的倍数.

3. 伯努利数 $B_{2p},\cdots,B_{(p-3)p}$ 均非 p^3 的倍数,且 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 的最大实子域的类数也非 p 的倍数.

历史上,费马大定理曾吸引无数专业数学家和业余爱好者. 热尔曼的突破性工作之后,法国科学院为费马大定理设立了专门的金质奖章和3000法郎的奖金. 德国的沃尔夫斯克尔(Wolfskehl, F. Paul)年轻时曾偶因热爱费马大定理而没有自杀. 后来格廷根皇家科学协会为费尔马大定理设悬赏10万马克,期限为1908—2007年. 仅在1908—1912年,有1000多篇"证明"都是错误的. 代数数论的推理和计算机相结合,到1993年已对400万以内的奇素数验证了费马大定理. 1983年,德国法尔廷斯(Faltings, G.)证明了莫德尔猜想:有理数域上的亏格大于1(约相当于次数大于3)的曲线只有有限个有理点. 从而证明了费马方程最多只有有限个本原整数解. 最终的转机在1985—1986年,福雷(Frey, G.)于1985年断言,谷山丰-志村五郎猜想(即椭圆曲线都是模的)包含费马大定理. 1986年夏,瑞拜特(Ribet, K.)用塞尔(Serre, J. P.)的设想证明了福雷的断言. 因此,从1986年起,要想证明费马大定理就只要证明谷山丰-志村五郎猜想即可. 上述数学关系可简述成(即反证法):先假设费马大定理不正确,即 $a^n+b^n=c^n$ 对某三个非零整数 a,b,c 成立,那么福雷建议考虑方程

$$y^2=x(x+a^n)(x-b^n)$$

所表示的曲线 E(这是一条半稳椭圆曲线). 瑞拜特于1986年证明了 E 不是模的. 因此只要能再证明 E 是模的,就导致矛盾,即可得费马大定理正确. 怀尔斯得知瑞拜特的结果后,立刻潜心研究7年,终于在1993年6月23日上午,在英国剑桥大学牛顿研究所,在连续三天的讲演的最后,概述证明了谷山丰-志村五郎猜想的一大部分,从而证明了费马大定理,震动了世界. 但数月后,此证明逐渐被发现有漏洞. 怀尔斯继续艰苦研究,终于在1994年9月19日得出了正确证明. 怀尔斯的历史性长文"模椭圆曲线和费马大定理"于1995年5月发表在美国《数学年刊》第142卷,实际占满了全卷,共五章,130页. 1997年6月27日,怀尔斯获得沃尔夫斯克尔10万马克悬赏大奖,离截止期10年. 他还获得沃尔夫奖(1996年3月)、美国国家科学院奖(1996年6月)、菲尔兹特别奖(1998年8月). 怀尔斯1953年4月11日生于英国剑桥,1974年牛津大学毕业,1980年获剑桥大学博士. 随后去美国普林斯顿大学任教授.

怀尔斯的证明理论属于代数数论与算术代数几何,主要用到椭圆曲线等. 一条椭圆曲线 E 就是亏格为1的一条光滑曲线,至少有一个有理点,其方程可以化成系数为有理数的三次方程(要求非奇异即处处有切线,总可化为无 y^3,xy^2 和 x^2y 项),即

$$E: y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6.$$

无穷远点 O(即 x 和 y 都无穷大)也被认为在曲线上. E 上的复数点全体 $E(\mathbb{C})$ 形成一个环面,即轮胎形. 通常感兴趣的是 E 上有理点全体 $E(\mathbb{Q})$. 椭圆曲线是最具内涵的曲线,它的点之间可以定义加法,点全体构成一个加法群. 无穷远点 O 是加法的零元. $E(\mathbb{C})$ 和 $E(\mathbb{Q})$ 都是群. $E(\mathbb{Q})$ 是有限生成的阿贝尔群(莫德尔定理): $E(\mathbb{Q})\cong T\oplus\mathbb{Z}^r$. E 的模 p 约化后的整数点(即 E 的方程"不计 p 的整数倍"的整数解)全体记为 $E(F_p)$,其点的个数记为 $\#E(F_p)$. 记

$$a_p=p+1-\#E(F_p).$$

例如,方程 $y^2+y=x^3-x^2$ 表示一条椭圆曲线,此时数 a_p 有非常好的性质,即 a_p 恰为下述幂级数的系数 c_p(对11以外的所有素数 p)

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nq^n=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^2(1-q^{11n})^2.$$

这里级数 $\sum c_n e^{2\pi inz}$ 是一个模形式(即 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 的同余子群 $\Gamma_0(11)$ 上的权为2的尖点形式). 数 a_p 有如此好性质的椭圆曲线称为模椭圆曲线. 也就是说,称 E 是模椭圆曲线(简称 E 是模的)意味着:存在某同余子群的权为2的尖点形式 $f=\sum c_n e^{2\pi inz}$,使得 $a_p=c_p$ 对几乎所有的素数 p 成立(使模 p 约化后曲线奇异的个别"坏" p 除外). 注意, f 一般不一定要有上述形式的无穷乘积.

谷山丰-志村五郎猜想为:有理域上的所有椭圆曲线都是模的. 此猜想源于他们1950—1960年的工作. 在怀尔斯做此工作之前,人们仅知道此猜想对有限多椭圆曲线(类)成立. 例如,志村五郎(Shimura, G.)于1971年证明有复乘法的椭圆曲线都是模的. 也还有别的方法刻画一条 E 是模的,如"E 可被模曲线有限覆盖". 由于瑞拜特的工作,怀尔斯只要证明半稳定的椭圆曲线是模的. 他是通过相应的伽罗瓦表示的模的性质来研究的. 他首先考虑 $p=3$. 以 $E[3]$ 记椭圆曲线 E 的3分点(复数点)全体,即

$$E[3]=\{P\in E(\mathbb{C})\mid P+P+P=0\}.$$

由于环面 $E(\mathbb{C})$ 等同于平行四边形(对边视为同一),可知 $E[3]$ 是两个三阶循环群的直积,亦即 $E[3]=F_3^2$,是三元域 F_3 上的二维空间. 复数域 $\mathbb{C}$ 的每个自同构(即伽罗瓦群 G 作用到点的坐标上)都是 $E[3]$ 的线性变换,从而可表示为 F_3 上的二阶方阵(即有群表示 $\rho_0: G\to\mathrm{GL}(2,F_3)$). 选取3是很关

键的，因为此时有很强的朗兰兹-坍奈尔定理，说明 $E[3]$(或说 ρ_0)是模的，即 $a_p \equiv c_p \pmod 3$ 对某 $f=\sum c_n e^{2\pi i n z}$ 成立(对除 3 外的所有素数 p)(这里先设 $E[3]$(或说 ρ_0)不可约. 对于 ρ_0 可约的情形，怀尔斯巧妙地另用 $p=5$ 迂回地得到结果). 怀尔斯的想法是设法把 $E(3)$的模性"提升"到 E. 他不但考虑 3 分点，而且考虑 3^n 分点，其全体记为 $E[3^n]$. 当 n 趋于无穷时取直接极限，就得到群 G 的 3 进(adic)表示 $\rho_E: G \to GL(2,\mathbf{Z}_3)$($\rho_E$ 称为 ρ_0 的提升). 而 E 是模的当且仅当 ρ_E 是模的. 迈组尔猜想：有适当局部性质的所有提升都是模的. 怀尔斯用交换代数把迈组尔猜想归结为对塞莫(Selmer)群等的研究. 最终，他将科利瓦金-弗拉赫方法与他早先应用的岩泽健吉(Iwasawa,K.)方法相结合，证明了迈组尔猜想，从而证明了谷山丰-志村五郎猜想(部分)：有理域上的半稳椭圆曲线都是模的. 这就得出费马大定理.

椭圆曲线(elliptic curve)　一类重要的曲线. 因它与椭圆积分的关系得名. 域 K 上的一条椭圆曲线 E，即是域 K 上一条亏格为 1 的光滑曲线，且 E 上至少有一个 K 有理点 O(即坐标属于 K 的点). 每条 K 上椭圆曲线 E 都可经 K 有理变换同构地化为如下外尔斯特拉斯方程给出的曲线

$$E':\ y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6,$$

其中 $a_i \in K$. 当域 K 的特征不是 2 或 3 的时候，更可以化为

$$E'':\ y^2=x^3+Ax+B\ (A,B\in K).$$

常将 E,E' 或 E'' 视为等同，因此，椭圆曲线有外尔斯特拉斯方程表示. 再设 $b_2=a_1^2+4a_2$；$b_4=2a_4+a_1a_3$；$b_6=a_3^2+4a_6$；$b_8=a_1^2a_6+4a_2a_6-a_1a_3a_4+a_2a_3^2-a_4^2$；$c_4=b_2^2-24b_4$；$c_6=-b_2^3+36b_2b_4-216b_6$；

$$\Delta=-b_2^2b_8-8b_4^3-27b_6^2+9b_2b_4b_6$$
$$=-16(4A^3+27B^2)$$

称为判别式，

$$j=\frac{c_4^3}{\Delta}=-\frac{1728(4A)^3}{\Delta}$$

称为 j 不变量. 于是，当且仅当 $\Delta\neq 0$ 时上述方程表示椭圆曲线(即无奇点)；当且仅当 $\Delta=0$ 且 $c_4\neq 0$ 时上述曲线有一奇点为结点；当且仅当 $\Delta=0$ 且 $c_4=0$ 时上述曲线有一奇点为尖点. 两椭圆曲线 $\overline{K}$ 同构($\overline{K}$ 为 K 的代数闭包)当且仅当其 j 不变量相同.

K 为有理数域 $\mathbf{Q}$ 或其他数域是特别有意义的情形. 此时，因为 E 的亏格为 1，所以其复数点全体 $E(\mathbf{C})$是一个环面(即轮胎形)，也可看成平行四边形(对边视为等同). 后者可看做复平面 $\mathbf{C}$ 上由四点 $\{0,\omega_1,\omega_2,\omega_1+\omega_2\}$构成的四边形(对边视为等同)，因而是复数(加法群)$\mathbf{C}$ 对其格 $L=\mathbf{Z}\omega_1+\mathbf{Z}\omega_2$ 的商群 $\mathbf{C}/L$. 严格说法如下：设 E 为数域上的椭圆曲线，由外尔斯特拉斯方程给出. 设 α_1,α_2 是 $E(\mathbf{C})$上两条路径，是同调群 $H_1(E,\mathbf{Z})$的基. 若：

$$\omega_i=\int_\lambda \alpha_i \mathrm{d}x/y\ (i=1,2),\quad L=\mathbf{Z}\,\omega_1+\mathbf{Z}\omega_2,$$

则有如下李群的复解析同构 F：

$$E(\mathbf{C})\to \mathbf{C}/L, F(P)=\int_O^P \mathrm{d}x/y\ (\mathrm{mod}\,L),$$

其逆映射为 $\varphi(z)=(\mathscr{P}(z,L),\mathscr{P}'(z,L))$，其中

$$\mathscr{P}(z,L)=z^{-2}+\sum_{0\neq\omega\in L}(z-\omega)^{-2}+\omega^{-2}$$
$$=z^{-2}+\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)G_{2k+2}z^{2k}$$

称为外尔斯特拉斯 $\mathscr{P}$ 函数(其劳朗(Laurent)级数在 $z=0$ 附近展开)，$\mathscr{P}'(z,L)$为其导数，

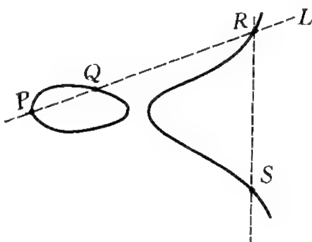
$$G_{2k}(L)=\sum_{0\neq\omega\in L}\omega^{-2k}$$

称为艾森斯坦级数. 反之，对 $\mathbf{C}$ 的任一格 $L=\mathbf{Z}\omega_1+\mathbf{Z}\omega_2$，若 $g_2(L)=60G_4$，$g_3(L)=140G_6$，则

$$E:\ y^2=4x^3-g_2x-g_3$$

为椭圆曲线，且 $E(\mathbf{C})$与 $\mathbf{C}/L$ 为复解析同构的李群(通过上述 F 和 φ). 因此，常将 $E(\mathbf{C})$与 $\mathbf{C}/L$ 等同.

有理数域 $\mathbf{Q}$ 上椭圆曲线 E 的实数点(即 x,y 都是实数的点(x,y))全体 $E(\mathbf{R})$构成形如下的图形.



椭圆曲线的引人之处在于，它的点之间可以定义加法，点全体构成一个加法群：任给椭圆曲线 E 上两点 P，Q，过此两点做直线 L，必交 E 于第三点 R，再过 R 和无穷远点 O 做直线交 E 于 S，则 P 加 Q 的和定义为 $P+Q=S$. 当 P,Q 两点重合时，L 为 E 的切线. 这一加法的定义称为弦切律. 无穷远点 O 是加法的零元. 对于数域 K 上的椭圆曲线 E，其 K 有理点全体 $E(K)$和复数点全体 $E(\mathbf{C})$都是阿贝尔群. $E(K)$称为莫德尔-韦伊群，由莫德尔-韦伊定理知它是有限生成的阿贝尔群，即

$$E(K)\cong E(K)_{\mathrm{tors}}\oplus \mathbf{Z}^r,$$

其中 $E(K)_{\mathrm{tors}}$称为 $E(K)$的扭部分，是有限群，r 称为 $E(K)$的秩. 迈组尔定理断言：有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的椭圆曲线 E 的莫德尔群的扭部分只能是下列 15 种情形：

$$\frac{\mathbf{Z}}{N\mathbf{Z}}\ (1\leqslant N\leqslant 10 \text{ 或 } N=12);$$

$$\frac{\mathbf{Z}}{2\mathbf{Z}}\oplus\frac{\mathbf{Z}}{2N\mathbf{Z}}\ (1\leqslant N\leqslant 4).$$

椭圆曲线在代数数论中的高斯猜想和费马最后定理等研究中起着关键作用.

椭圆曲线的约化(reduction of an elliptic curve)　对椭圆曲线的一种刻画. 设 E 为域 K 上的

椭圆曲线，K 对离散赋值 ν 完备（或 K 嵌入到它对于赋值 ν 的完备化），R 是 K 的 ν 整数环，$\mathscr{I}$ 为其最大理想，π 为 R 的素元（即 $\mathscr{I}=\pi R$），$k=R/\mathscr{I}=R/\pi R$为剩余类域. 设椭圆曲线 E 由外尔斯特拉斯方程给出

$$E:\ y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6,$$

其中 $a_i\in K$. 可设此方程为最小方程，即 $a_i\in R$ 且其判别式$\Delta(E)$绝对值（赋值）最小. 记 $t\in R$ 在 $k=R/\pi R$中的像为 $\bar{t}$，则称

$$\widetilde{E}:\ y^2+\widetilde{a}_1xy+\widetilde{a}_3y=x^3+\widetilde{a}_2x^2+\widetilde{a}_4x+\widetilde{a}_6$$

为 E 的模 π 约化，其中 $a_i\in R$. 分别当 $\widetilde{E}$ 非奇异（即为 k 上椭圆曲线）、有结点或有尖点时，称 E 在 ν 有好的、积性的或加性的约化；也分别成为稳定、半稳定或不稳定的约化. 这三种情形分别相当于 $\nu(\Delta)=0$，$\nu(\Delta)>0$ 且 $\nu(c_4)=0$ 或 $\nu(\Delta)>0$ 且 $\nu(c_4)>0$，后两种情形合称为坏约化. 对 E 的积性约化，若结点处的切线的斜率属于 k，则称约化为分裂积性的；否则，称为非分裂积性的. 约化是研究椭圆曲线的重要方法. 对于 $P=(x,y)\in E(K)$，设 $\widetilde{P}=(\widetilde{x},\widetilde{y})\in\widetilde{E}(k)$，于是有约化映射：$E(K)\to\widetilde{E}(k)$，$P\mapsto\widetilde{P}$，使 $\widetilde{P}$ 为奇点的 $P\in E(K)$全体记为 $E_0(K)$，则$E_0(K)$是 $E(K)$的指数有限的子群.

椭圆曲线的 L 级数（*L*-series of an elliptic curve） 亦称 L 函数. 对椭圆曲线的一种刻画. 是记录椭圆曲线对任意素数模约化信息的母函数. 设 E 为域 K 上的椭圆曲线，M_K 为 K 的互不等价的赋值集，M_K^0 为其中非阿基米德赋值集. 设 $\nu\in M_K^0$ 使 E 在 ν 有好约化 $\widetilde{E}_\nu$（即 $\widetilde{E}_\nu$ 仍为椭圆曲线，定义在 K 关于 ν 剩余类域 k_ν 上，k_ν 是 q_ν 元有限域）. 记 $a_\nu=q_\nu+1-\#\widetilde{E}_\nu(k_\nu)$，则 E 的 L 级数由下列乘积定义

$$L_{E/K}(S)=B\prod_\nu\left(1-\frac{a_\nu}{q_\nu^s}+\frac{1}{q_\nu^{2s-1}}\right)^{-1},$$

其中 B 是对应于坏约化的有限积. 详言之，首先定义 $\widetilde{E}_\nu$ 的 ζ 函数为

$$Z(\widetilde{E}_\nu/k_\nu;T)=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\#\widetilde{E}_\nu(k_{\nu,n})T^n/n\right),$$

其中 $k_{\nu,n}$是 k_ν 的惟一 n 次扩张. 可证明

$$Z(\widetilde{E}_\nu/k_\nu;T)=L_\nu(T)/(1-T)(1-q_\nu T),$$

其中 $L_\nu(T)=1-a_\nu T+q_\nu T^2$. 在对使 E 有坏约化的 ν 定义 $L_\nu(T)=1-T$，$1+T$ 或 1（分别当 E 在 ν 的约化为分裂积性、非分裂积性或加性）；则 E 的 L 级数由如下欧拉乘积定义：

$$L_{E/k}(S)=\prod_{\nu\in M_K^0}L_\nu(q_\nu^{-s})^{-1}.$$

此乘积在 $\mathrm{Re}(s)>3/2$ 时收敛且给出一解析函数，这是由于

$$|a_\nu|\leqslant 2\sqrt{q_\nu}.$$

猜想 $L_{E/K}(s)$可以解析开拓到全复平面，且满足一个函数方程将 s 和 $2-s$ 处的值相联系. 已知对有复乘的椭圆曲线此猜想成立，此时 $L_{E/K}(s)$等于一个赫克 L 级数. 对模椭圆曲线也成立，此时 $L_{E/K}(S)$是模形式的梅林变换. 为明确叙述，设 $K=\mathbf{Q}$ 为有理数域. 对 $\nu\in M_{\mathbf{Q}}^0$，若 $f_\nu=0,1,2$（分别当 E 在 ν 的约化是好的、积性的、加性的），则记 E 的导子为

$$N_E=\prod_{\nu\in M_{\mathbf{Q}}^0}p_\nu^{f_\nu},$$

其中 ν 是 p_ν-adic 赋值. 记 $L_E=L_{E/\mathbf{Q}}$，

$$\xi_E(s)=N_E^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_E(s).$$

谷山丰-志村五郎-韦伊猜想：对有理数域上任意椭圆曲线 E，$\xi_E(s)$可以解析开拓到全复平面，且满足函数方程 $\xi_E(s)=w\xi_E(2-s)$，$w=\pm1$. 进而，猜想 E 是模的：若 $L_E(s)=\sum c_nn^{-s}$，$f(\tau)=\sum c_n\exp(2\pi in\tau)$ 为其梅林反变换，则 $f(\tau)$是 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$的同余子群

$$\Gamma_o(N_E)=\left\{\begin{pmatrix}a & \\ c & d\end{pmatrix}:c\equiv 0(\mathrm{mod}\ N_E)\right\}$$

的权为 2 的尖点形式；对每一素数 $p\nmid N_E$，若记$T(p)$为相应的赫克算子，而算子 W 定义为

$$(Wf)(\tau)=f(-1/N_E\tau),$$

则 $T(p)f=c_pf$，$Wf=wf$；存在 $\mathbf{Q}$ 上态射 $\phi:X_0(N_E)\to E$，将 E 的微分 ω 诱导为$X_0(N_E)$上由 $f(\tau)\mathrm{d}\tau$ 表示的微分形式的倍.

BSD 猜想是另一著名猜想. 仍设 E 为有理数域上的椭圆曲线，由外尔斯特拉斯方程（处处最小）给出，$\omega=\mathrm{d}x/(2y+a_1x+a_3)$ 为其不变微分，$\Omega=f_{E(\mathbf{R})}|\omega|$. 著名的 BSD 猜想（由伯奇（Birch，B. J.）和斯文耐尔顿-代尔（Swinnerton-Dyer）提出）是：

1. $m=r$，即 $L_E(s)$在 $s=1$ 处有一个 $m=r$ 阶的零点，r 为 $E(\mathbf{Q})$的秩.

2. 有下式：

$$\lim_{s\to1}(s-1)^{-r}L_E(s)=\Omega\#\text{Ш}R(\#E_{\text{tors}})^{-2}\prod_p c_p,$$

其中 Ш 称为沙发列维奇-泰特群（由 E 相关的整体和局部序列定义），R 为 E 的正规子（由其高定义），$c_p=1$（当 E 在 p 有好约化）或$\#E(\mathbf{Q}_p)/E_0(\mathbf{Q}_p)$.

对于秩 $r=0$ 和 1 的情形，BSD 猜想现已基本被证明. 但对秩更大的情形几乎无进展.

谷山丰-志村五郎猜想（Taniyama-Shimuracon jecture） 关于椭圆曲线的一个重要猜想. 该猜想是：椭圆曲线都是模的. 它对费马大定理的证明起很大作用.

BSD 猜想（BSD conjecture） 见“椭圆曲线的 L 级数”.

撰 稿 李德琅 张贤科 裘焯明

审 阅 王 元 冯克勤 李德琅 裴定一 潘承洞

解析数论

解析数论(analytic number theory)　数论的一个重要分支.它主要是用解析方法来研究数论问题.解析数论所研究的著名问题有素数分布、黎曼猜想、狄利克雷除数问题、华林问题、哥德巴赫猜想等.解析数论方法不仅对其他数论分支(如代数数论、超越数论、数的几何、计算数论等),而且对数学的其他分支乃至计算机科学等的发展,都有极其重要的应用和深远的影响.解析数论方法主要有:黎曼 ζ 函数与狄利克雷 L 函数方法、复变积分法、圆法、三角和方法、筛法与大筛法等.18 世纪时,欧拉(Euler,L.)首创用解析方法研究数论问题.为研究素数分布问题,他利用算术基本定理(即:每个大于 1 的整数 n 皆可惟一表为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$,其中 p_i 皆为素数,$p_1<p_2<\cdots<p_s$,$\alpha_i\geqslant 1$ 为整数,$i=1,2,\cdots,s$)证明了如下重要的恒等式:对实变数 $s>1$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p(1-p^{-s})^{-1},$$

这就是著名的欧拉恒等式,它是算术基本定理的解析等价形式,揭示了素数分布与函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ (s>1)$$

之间的深刻的联系.例如,由此恒等式及调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

的发散性立即推出素数无穷及级数

$$\sum_p\frac{1}{p}$$

发散.黎曼(Riemann,G. F. B.)于 1859 年系统地研究了复变数 s 的函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ (\mathrm{Re}s>1),$$

即著名的黎曼 ζ 函数.他从欧拉恒等式出发,把$\zeta(s)$解析开拓成除 $s=1$ 外在全平面上解析的函数,在 $s=1$ 有一个一阶极点.他导出了 ζ 函数的函数方程:

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos(\pi s/2)\Gamma(s)\zeta(s).$$

由此推出:当 $\mathrm{Re}s<0$ 时,$\zeta(s)$除了在 $s=-2,-4,\cdots,-2n,\cdots$有一阶零点外(它们称为$\zeta(s)$的"无聊零点"或"显然零点")不再有其他零点.而 $\zeta(s)$的一切其他零点(即"非显然零点")均位于带状区域 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ 中,这里 $\sigma=\mathrm{Re}s$.此外,黎曼还在论文中对 $\zeta(s)$的零点分布等问题提出了六个重要的猜想,其中五个已先后获得证明,而第五个猜想却至今未能得到证明,这就是当今著称的黎曼猜想:$\zeta(s)$的所有非显然零点均位于直线 $\sigma=1/2$ 上.黎曼的思想为近代解析数论的发展做出了不朽的贡献.设 $q\geqslant 3$,$1\leqslant l<q$,$(l,q)=1$,在算术级数 $l+nq(n=0,1,2,\cdots)$中是否有无穷多个素数,是与"自然数列中素数无穷"相似的又一基本数论问题.欧拉曾宣布此级数当 $l=1$ 时有无穷多个素数,勒让德(Legendre,A.-M.)首次提出:在上述一般条件下,该级数中有无穷多个素数.狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)于 1837 年引入了狄利克雷特征 $\chi(n)$及与 ζ 函数类似的狄利克雷 L 函数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}\ (s>1).$$

由算术基本定理,它有类似的欧拉恒等式成立.对 $s>1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}=\prod_p(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}.$$

由此出发,他证明了上述算术级数中必有无穷多个素数.L 函数与算术级数中素数分布有深刻的联系,它与 ζ 函数有许多类似的性质.例如关于函数方程、零点分布等.特别地,对 L 函数的非显然零点有如下著名的猜想:对模 q 的任意特征 χ,函数 $L(s,\chi)$的所有非显然零点都在直线 $\sigma=1/2$ 上.此即为广义黎曼猜想,至今未能得到证明.

用$\pi(x)$表示不超过 x 的素数个数,$\pi(x)$的阶的估计是 19 世纪人们研究的一个中心课题.勒让德与高斯(Gauss,C. F.)都猜测

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}=1.$$

此为著名的素数定理.利用黎曼的思想及复变积分方法,阿达马(Hadamard,J.)与瓦莱·普桑(vallée-Poussin,C. de la)于 1896 年相互独立地给出素数定理的证明.对于算术级数 $l+nq(n=0,1,2,\cdots,q\geqslant 3,1\leqslant l<q,(l,q)=1)$中不超过 x 的素数个数 $\pi(x;q,l)$,也可以用 L 函数及复积分方法推出与素数定理类似的结论.从此,解析数论进入了一个蓬勃发展的新时期.

1916 年,外尔(Weyl,(C. H.)H.)在关于一致分布的开创性工作中给出了某种指数和(现称为外尔和)的上界估计,此法经改进与发展,在华林问题、整点问题、ζ 函数论、素数分布等一系列重要问题的研究中发挥了重要的作用.1920 年前后,为了研究整数分拆问题,哈代(Hardy,G. H.)与拉马努金(Ramanujan,S. A.)提出了圆法.为了研究华林问题、哥德巴赫猜想等一系列著名问题,哈代与李特尔伍德(Littlewood,J. E.)在一系列论文中系统发展了圆法,开创了近代解析数论的新时期.1920 年,为了研究关于偶数的哥德巴赫猜想及孪生素数猜想,布龙(Brun,V.)对古老的埃拉托斯特尼(Eratosthenes)筛法作出重大改进,提出了布龙筛法.林尼克(Линник,Ю. В.)于 1941 年首创大筛法,塞尔贝格

(Selberg,A.)于1947年利用二次型极值这一简单思想又给出埃拉托斯特尼法的另一重大改进——塞尔贝格筛法. 这些方法与库恩(Kuhn,P.)于1941年提出的加权筛法相结合,是目前解决关于偶数的哥德巴赫猜想的最有效方法. 为了去掉哈代-李特尔伍德关于奇数的哥德巴赫猜想的著名结果中没有证明的假设,维诺格拉多夫(Виноградов,И. М.)不仅改进了哈代与李特尔伍德的圆法,而且于1934年首创估计素变数指数和的方法,从而给出奇数哥德巴赫猜想的几乎完全的解答. 今天,维诺格拉多夫独创的指数和方法在解析数论的一系列著名问题中均有重要的应用.

20世纪50年代初,华罗庚与闵嗣鹤分别在中国科学院数学研究所与北京大学培养了一批从事数论(主要是解析数论)研究的人才,他们对近代解析数论的发展做出了不可磨灭的贡献,形成了中国的数论学派.

欧拉恒等式(Euler identity)　见"解析数论".

哥德巴赫猜想(Goldbach conjecture)　亦称哥德巴赫问题. 解析数论中著名的问题. 1742年,哥德巴赫(Goldbach,C.)在与欧拉(Euler,L.)的几次通信中提出了如下几个猜想:

1. 每个大于2的偶数都是两个素数的和.

2. 若正整数 N 是两个素数的和,则它也是(直到 N 个的)任意多个素数(1也算作一个)的和.

3. 每个大于2的整数都是三个素数的和.

欧拉在回信中指出2可由1推出,他认为1是正确的,但他不能证明. 在笛卡儿(Descartes,R.)遗留的手稿中,叙述有如下猜想:

4. 每个偶数是至多三个素数之和.

华林(Waring,E.)则在1770年出版的《代数沉思录》中叙述了哥德巴赫的论断,并补充了如下的猜想:

5. 每个奇数或者是一个素数,或者是三个素数之和.

综上所述得到下面两个猜想:A) 每个不小于6的偶数都是两个奇素数之和;B) 每个不小于9的奇数都是三个奇素数之和. 此即著名的哥德巴赫猜想. A)常称为关于偶数的哥德巴赫猜想,B)称为关于奇数的哥德巴赫猜想(亦称三素数定理). B)是A)的直接推论. 它们与黎曼猜想合起来组成希尔伯特第八问题.

1918年,哈代(Hardy,G. H.)与拉马努金(Ramanujan,S. A.)在一篇研究整数分拆的论文中首次提出圆法. 1920－1928年间,哈代与李特尔伍德(Littlewood,J. E.)连续发表了一系列文章,系统发展了圆法,对解决这些猜想做出了巨大贡献. 然而,他们得到的结果都要依赖某种未经证明的假设. 维诺格拉多夫(Виноградов,И. М.)于1937年改进了圆法,并用他自己独创的素变数指数和估计方法给出余项的合理估计,无条件地给出了猜想B)的近乎完全的证明. 然而,用圆法研究猜想A)却收效甚微. 它只能导出下述类型的结果:几乎所有偶数都是两个奇素数的和.

至今研究猜想A)最有效的方法是筛法. 最古老的筛法是两千多年前希腊学者爱埃拉托斯特尼(Eratosthenes)创造的. 1920年左右,布龙(Brun,V.)首先对埃拉托斯特尼筛法做了有重要理论价值的改进,由此他证明了两个惊人的结论:(1) 命题{9,9}成立;(2) 以 p 表示使 $p+2$ 也为素数之素数,则级数

$$\sum_p \frac{1}{p}$$

收敛. 这里用记号$\{m,n\}$(m,n 皆为正整数)表示如下命题:每个充分大的偶数均可表为 P_m+P_n 之形,这里 P_k 表示其素因子个数至多为 k 的正整数(称为殆素数). 20世纪40年代,罗塞(Rosser,J. B.)曾改进了布龙的筛法,但在当时未能引起人们的注意. 直到20世纪70年代才为人们重新发现,并由伊瓦尼克(Iwaniec,H.)做了重要改进与发展. 1947年,塞尔贝格(Selberg,A.)利用求二次型极值这一简单思想给出埃拉托斯特尼筛法的另一重大改进,此即塞尔贝格筛法. 塞尔贝格于1950年曾宣布他的方法可以证出{2,3},但一直未发表他的证明. 1957年,王元首先给出{2,3}的证明. 1941年,库恩(Kuhn,P.)提出了加权筛法,它可以加强其他筛法的效果. 有关筛法的许多重要成果都和这一思想有关. 同年,林尼克(Линник,Ю. В.)为研究模 p 的最小正的二次非剩余而提出了大筛法,这给逼近猜想A)提供了一个重要的解析工具.

1932年,埃斯特曼(Estermann,T.)在假设广义黎曼猜想为真的条件下得到$\{1,n\}$. 1948年,雷尼(Renyi,A.)用大筛法证明了某种类型的算术级数中素数分布的均值定理,结合布龙筛法,他第一次给出了$\{1,n\}$的无条件证明,但他未能定出 n 的值. 1962年,潘承洞首次定出 $n\leqslant5$. 同年,王元证得 $n\leqslant4$,并在广义黎曼猜想为真的条件下得到 $n\leqslant3$. 同年,潘承洞利用改进的均值定理也证得{1,4}. 1965年,邦别里(Bombieri,E.)与维诺格拉多夫(Виноградов,И. М.)相互独立地对均值定理做了重要改进,从而证得{1,3},布赫施塔伯(Бухштаб,А. А.)也于同年用他独创的迭代法证得{1,3}.

1966年,陈景润宣布他证明了{1,2},但仅叙述了几个引理的结论,未给出证明,国际数学界对此没有反应. 1973年,他发表了详细证明并改进了有关的数值结果,在国际数学界引起强烈反响,被公认为

是筛法理论光辉的顶点.这是至今为止关于猜想 A)所得到的最佳结果.关于陈景润的工作及筛法,近年来又有许多新改进和进展,但猜想 A)离完全解决还相差甚远.

研究哥德巴赫猜想还有一个重要的初等方法——密率方法,它是由施尼雷尔曼(Шнирельман,Л. Г.)于 1930 年左右提出的.他用此方法与布龙筛法相结合证明:每个自然数 $n\geqslant 2$ 皆可表为至多 c 个素数之和.但他的方法定出的常数 c 太大.c 现在称为施尼雷尔曼常数.由于大筛法与密率方法的改进,常数 c 的值有了很大改进,目前已知最好的结果属于里塞尔(Riesel,H.)与沃恩(Vaughan,R. C.),他们于 1983 年得到 $c\leqslant 19$.这种类型的结果是用其他方法无法得到的.

哥德巴赫问题(Goldbach problem) 即"哥德巴赫猜想".

三素数定理(three prime theorem) 见"哥德巴赫猜想".

哥德巴赫数(Goldbach number) 一类特殊偶数.即表为两个奇素数之和的偶数.其他的偶数称为非哥德巴赫数.用 $E(x)$ 表示不大于 x 的非哥德巴赫数组成之集合,其中元素的个数也用 $E(x)$ 表示,则关于偶数的哥德巴赫猜想 A)(参见"哥德巴赫猜想")就等价于命题:$(A_1)\,E(x)=2, x\geqslant 4$($E(x)$称为哥德巴赫例外集).1937 年前后,华罗庚、邱达可夫(Чудаков,Н. Г.)、海尔布伦(Heilbronn,H.)、范德科尔普特(van der Corput,J. G.)及埃斯特曼(Estermann,T.)利用维诺格拉多夫(Виноградов,И. М.)证明奇数哥德巴赫猜想 B)的思想,几乎同时证明了:对任何正数 A 有

$$E(x)=O\left(\frac{x}{\log(x)^A}\right).$$

由此立即推出:几乎所有偶数均可表为二奇素数之和.其中华罗庚的结果比其他四人更强一些.1975 年,蒙哥马利(Montgomery,H. L.)与沃恩(Vaughan,R. C.)把大筛法及 L 函数零点分布的重要结果用于研究这一问题,证明了存在常数 $\delta>0$ 使 $E(x)=O(x^{1-\delta})$.1979 年,陈景润与潘承洞首次定出了 $\delta>0.01$.目前最好的结果属于陈景润:$\delta>0.05$.这离猜想的(A_1)还相差甚远.对于短区间中的哥德巴赫例外集,见川宏(Hiroshi,M.)所证明的如下结果:对 $\theta>7/8$ 及 $A>0$ 有

$$E(x+x^\theta)-E(x)=O(x^\theta(\log\ x)^{-A}).$$

非哥德巴赫数(Non-Goldbach-number) 见"哥德巴赫数".

哥德巴赫例外集(Goldbach exceptional set) 见"哥德巴赫数".

圆法(Circle method) 亦称为哈代-李特尔伍德方法.解析数论中的一个重要方法.1918 年,哈代(Hardy,G. H.)与拉马努金(Ramanujan,S. A.)在一篇研究整数分拆的论文中首次提出了圆法,并用圆法导出了无限制分拆函数 $p(n)$的渐近公式.为了研究著名的华林问题及哥德巴赫猜想等问题,1920—1928 年间,哈代与李特尔伍德(Littlewood,J. E.)连续发表了七篇论文,系统地发展了圆法.圆法与其他方法相结合,对解决诸如华林问题、哥德巴赫猜想、哥德巴赫-华林问题等各种数论中的困难问题提供了一种强有力的方法.利用圆法常可得到相应问题解法个数的渐近公式,这是圆法不同于其他方法的一大特点.

圆法的思想可以概述如下.设 $X_1,X_2,\cdots,X_s$ 是任意 s 个由自然数组成的集合,n 是自然数,用$R_s(n)$表示方程 $n_1+n_2+\cdots+n_s=n$, $n_k\in X_k(1\leqslant k\leqslant s)$的解数.若能证明:对所有自然数 $n\geqslant N$,皆有 $R_s(n)>0$,就说明任何自然数 $n\geqslant N$ 皆是分别取自 $X_1,X_2,\cdots,X_s$ 的 s 个数的和.若 z 为复数,$|z|<1$,定义

$$f(z)=\prod_{k=1}^{s}f_k(z),$$

而

$$f_k(z)=\sum_{n_k\in X_k}z^{n_k}\quad(1\leqslant k\leqslant s),$$

则

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}R_s(n)z^n,$$

于是,$f(z)$称为 $R_s(n)$的生成函数.由柯西积分公式易有

$$R_s(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)z^{-n-2}dz,$$

C 是圆周 $|z|=r, 0<r<1$.从而方程解数的计算就化为复积分的计算问题.当 $r\to 1-0$ 时研究此复积分,把积分圆 $|z|=r$ 分成基本区间 E_1 和余区间 E_2 两部分,通常 E_1 由那些以分母较小的既约分数为中心的小区间所组成.对于很广泛的一类数论问题,相应于基本区间 E_1 上的那部分积分常给出 $R_s(n)$的主要部分,而相应于余区间 E_2 上的积分常是比主要部分小得多的余项,适当计算或估计出它们,便可导出 $R_s(n)$的一个渐近公式.1928 年,维诺格拉多夫(Виноградов,И. М.)在圆法中引进有限指数和

$$S_k(\alpha)=\sum_{\substack{m\in X_k\\ m\leqslant n}}e^{2\pi i\alpha m}\quad(1\leqslant k\leqslant s)$$

代替 $f_k(z)$(在一般情形中,$f_k(z)$常是一个无限和),利用恒等式

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha m}d\alpha=\begin{cases}1 & (m=0),\\ 0 & (m\text{ 为非零整数})\end{cases}$$

得到

$$R_s(n)=\int_0^1 s(\alpha)e^{-2\pi i\alpha n}d\alpha,$$

这里定义

$$s(\alpha)=\prod_{k=1}^{s}S_k(\alpha).$$

类似地,把积分区间[0,1]分成基本区间$\widetilde{E_1}$与余区间$\widetilde{E_2}$两部分,可以经适当的计算与估计导出$R_s(n)$的渐近公式.维诺格拉多夫的这一改进,不仅大大简化了哈代-李特尔伍德的圆法,而且对大量不同类型的问题的解决给出一条统一的途径,它已成为现代圆法的标准形式.

哈代-李特尔伍德方法(Hardy-Littlewood method)　即“圆法”.

弗莱分割(Farey dissection)　对圆法的一种刻画.圆法中划分积分区间的基本方法.圆法中,为了计算方程$n_1+n_2+\cdots+n_s=n, n_k\in X_k(1\leqslant k\leqslant s)$的解数$R_s(n)$,常把它表成积分形式

$$R_s(n)=\int_0^1 s(\alpha)e^{-2\pi i\alpha n}d\alpha,$$

这里

$$s(\alpha)=\prod_{k=1}^{s}s_k(\alpha),$$

且

$$s_k(\alpha)=\sum_{\substack{m\in X_k\\ m\leqslant n}}e^{2\pi i\alpha m}\quad(1\leqslant k\leqslant s).$$

于是,对任意实数$\tau\neq0$有

$$R_s(n)=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-1/\tau}s(\alpha)e^{-2\pi i\alpha n}d\alpha.$$

设正数Q,τ满足$1<Q<\tau/2$,用E_1表示下列所有区间之并

$$\left[\frac{a}{q}-\frac{1}{q\tau},\frac{a}{q}+\frac{1}{q\tau}\right],$$

$(a,q)=1, 0\leqslant a<q, 1\leqslant q\leqslant Q$.这些小区间均在单位区间

$$\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right]$$

中,且两两互不相交.再设

$$E_2=\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right]\Big\backslash E_1,$$

这样作出的E_1与E_2称为单位区间

$$\left[-\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right]$$

的一个弗莱分割.其中E_1称为基本区间(也称为主区间,或称优弧),E_2称为余区间(也称为劣弧).E_1上的这部分积分通常是积分中的主要部分,它给出$R_s(n)$的主项,而E_2上的积分通常给出$R_s(n)$的余项.一般地,余项的估计是较为复杂的部分,需要用到如维诺格拉多夫方法等更为精深的解析方法.当然,根据实际问题,也可给出略有不同形式的弗莱分割.

基本区间(basic interval)　见“弗莱分割”.

优弧(major arc)　见“弗莱分割”.

余区间(supplementary interval)　见“弗莱分割”.

劣弧(minor arc)　见“弗莱分割”.

三角和方法(trigonometric sum method)　亦称指数和方法.解析数论中的一种重要方法.目前,人们所称的三角和方法,主要是指由前苏联数学家维诺格拉多夫(Виноградов, И. М.)所创造的一整套估计各种类型三角和的方法.三角和也称指数和,主要指形如$\sum e(f(n))$的和式,这里定义$e(x)=e^{2\pi i x}$,$f(x)$为满足某些条件的实函数,n取遍某个整数集合.在许多解析数论问题中,常要估计这种和式的上界.重要的三角和主要有以下三种:

1. 完整三角和:设q为给定正整数,$f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x$为整系数多项式,$(a_k,\cdots,a_1,q)=1$.称

$$S(q,f(x))=\sum_{x=1}^{q}e(f(x)/q)$$

为以q为模的完整三角和.当$k=2, f(x)=x^2$时,这是著名的高斯和的一种特殊情形.当$f(x)=ax^k$时($(a,q)=1, k\geqslant2$),高斯(Gauss, C. F.)证明了

$$|S(q,f(x))|\leqslant c_1(k)q^{1-\frac{1}{k}},$$

其中$c_1(k)$为一仅与k有关的正常数.对一般情形的多项式$f(x)$,当$q=p$为奇素数时,利用韦伊(Weil, A.)关于有限代数函数域上的类似黎曼猜想,卡里茨(Carlitz, L.)与内山三郎(Uchiyama, S.)于1957年证明了

$$|S(p,f(x))|\leqslant(k-1)\sqrt{p}.$$

1970年,斯捷潘诺夫(Степанов, С. А.)对此给出一个纯分析的初等证明.这一结果近年来也有某种改进.对一般的模q,华罗庚于1940年得到:对任给$\varepsilon>0$有

$$|S(q,f(x))|\leqslant C_2(k,\varepsilon)q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon},$$

实际上此不等式中之ε很容易去掉.其中的阶$1-1/k$是最好可能的结果,惟有与k有关的系数尚未获得最佳估计.完整三角和的估计在华林问题$G(k)$的表法个数的主项研究中起着重要的作用.

2. 外尔三角和:1916年,外尔(Weyl,(C. H.)H.)在关于一致分布的开创性工作中首先引入形如

$$\sum_{a<n\leqslant b}e(f(n))$$

的三角和(现称为外尔和),并给出它的非平凡的上界估计,这里$f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$是一个足够多次可导的实函数.1923年前后,范德科尔普特(van der Corput, J. G.)给出了一种新的处理外尔和的方法.

他的方法在于把和式

$$\sum_{a<n\leqslant b} e(f(n))$$

转化为指数积分

$$\int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx,$$

当函数 $f(x)$的二阶导数在(a,b)中满足 $f''(x)\geqslant r>0$(或 $f''(x)\leqslant -r<0$)时,上述指数积分有很好的上界估计

$$\left|\int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx\right| \leqslant \frac{8}{\sqrt{r}}.$$

而当 $f(x)$的二阶导数不满足条件时,可对其做适当变换,化为满足条件的情形加以处理. 1934 年,维诺格拉多夫提出另一种估计外尔和的方法. 华罗庚于 1949 年对此做了改进,并且指出:维诺格拉多夫方法的关键在于首先给出形如

$$J_k^{(n)}(P) = \int_0^1\cdots\int_0^1\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)\right|^{2k} d\alpha_1 d\alpha_2\cdots d\alpha_n$$

的三角和均值的上界估计,然后由均值估计得到单个外尔和的估计. 此种均值估计称为维诺格拉多夫中值定理. 范德科尔普特方法与维诺格拉多夫方法相比,各有优劣,但它们一般都优于外尔的方法. 外尔和的估计在黎曼 ζ 函数论、素数分布、数列的一致分布、华林问题、整点问题、丢番图逼近等重要课题的研究中,都有关键性的作用. 这些方法还被推广到了多维情形.

3. 素变数三角和:形如

$$\sum_{p\leqslant x} e(f(p))$$

的和式称为素变数三角和,其中 $f(x)$是在所给范围内有足够多次导数的实函数. 在 1920—1928 年间,哈代(Hardy, G. H.)与李特尔伍德(Littlewood, J. E.)连续发表了七篇论文,其中发表于 1922 年的第三篇论文是专门研究关于奇数的哥德巴赫猜想的. 他们用圆法求出了大奇数 n 表为三个奇素数和的表法个数的主要部分,但在余项的估计中遇到极大困难,不得已对狄利克雷 L 函数的零点作出某种假设. 为了取消这一未经证明的假设,维诺格拉多夫于 1937 年首先考虑了素变数线性三角和

$$\sum_{p\leqslant x} e(\alpha p),$$

并成功地给出它的非平凡上界估计,从而无条件证明:每个充分大的奇数均可表为三个奇素数之和. 他于 1938 年对一般的素变数三角和

$$\sum_{p\leqslant x} e(f(p))$$

给出了非平凡估计,这些方法在诸如华林-哥德巴赫等问题的研究中有极其重要的作用.

指数和方法(exponental sum method) 即“三角和方法”.

有理三角和(rational trigonometric sum) 见“三角和方法”.

外尔三角和(Weyl's trigonometric sum) 见“三角和方法”.

素变数三角和(trigonometric sum with prime numbers) 见“三角和方法”.

维诺格拉多夫中值定理(Vinogradov's mean value theorem) 三角和方法中的一个中心定理. 指形如

$$J_k^{(n)}(P) = \int_0^1\cdots\int_0^1\left|\sum_{1\leqslant x\leqslant P} e(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)\right|^{2k} d\alpha_1 d\alpha_2\cdots d\alpha_n$$

的积分的上界估计. 华罗庚于 1949 年证明:当 $k\geqslant n(n+1)/4+ln$ 时有($l\geqslant 0$ 为整数,$P\geqslant 1$,$n\geqslant 2$)

$$J_k^{(n)}(P) \leqslant (7k)^{4kl} P^{2k-\frac{1}{2}n(n+1)+\delta}(\log P)^{2l},$$

其中

$$\delta = \frac{1}{2}n(n+1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^l.$$

他还指出,这一中值定理是估计外尔和的维诺格拉多夫方法的关键. 卡拉楚巴(Карацуба, А. А.)于 1963 年给出改进的上界估计:当 $k\geqslant n^2+nl$ 时有

$$J_k^{(n)}(P) \leqslant (4n)^{4kl} P^{2k-\frac{1}{2}n(n+1)+\delta},$$

这里 δ 定义同上. 其中系数 $(4n)^{4kl}$ 还可以改进为 $(3n)^{2kl}$. 维诺格拉多夫中值定理在华林问题、黎曼 ζ 函数的无零点区域、素数分布等问题的研究中起着至关重要的作用.

彼龙公式(Perron formula) 解析数论中的一个重要的复积分公式,它常常是把数论问题与复积分方法联系在一起的桥梁,下面是一个常用的关于狄氏级数的彼龙公式. 若

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s} \quad (\sigma_a < +\infty),$$

又,存在递增函数 $H(u)$及函数 $B(u)$使(σ_a 为绝对收敛横坐标)$|a(n)|\leqslant H(n)$,$n=1,2,\cdots$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a(n)| n^{-\sigma} \leqslant B(\sigma), \quad 对\ \sigma > \sigma_a.$$

则对任意的 $s_0=\sigma_0+it_0$ 及 $b_0>\sigma_a$,当 $b_0\geqslant b>0$,$b_0\geqslant \sigma_0+b>\sigma_a$,$T\geqslant 1$ 及 $x\geqslant 1$ 时有:

1. 当 x 不为正整数时

$$\sum_{n\leqslant x} a(n)n^{-s_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-it}^{b+it} Tf(s_0+s)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x^b B(b+\sigma_0)}{T}\right) + O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\log x}{T}\right)\right)$$

$$+O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{T\|x\|}\right)\right),$$

这里 N 是离 x 最近的整数(当 x 为半奇数时,取 $N=x-1/2$),$\|x\|=|N-x|$.

2. 当 x 为正整数 N 时

$$\sum_{n<N}a(n)n^{-s_0}+\frac{1}{2}a(N)N^{-s_0}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}f(s_0+s)\frac{N^s}{s}ds+O\left(\frac{N^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)$$
$$+O\left(N^{1-\sigma_0}H(2N)\min\left(1,\frac{\log N}{T}\right)\right),$$

这里 O 常数仅与 σ_a 及 b_0 有关.

可用同样的想法处理形如($x\geqslant1$,整数 $k\geqslant1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s_0}e^{-n/x},$$
$$\frac{1}{k!}\sum_{n\leqslant x}a(n)n^{-s_0}\left(\log\frac{x}{n}\right)^k,$$
$$\frac{1}{k!}\sum_{n\leqslant x}a(n)n^{-s_0}\left(1-\frac{n}{x}\right)^k$$

的加权和,可得到与上述彼龙公式类似的结果.

大筛法(large sieve)　近代解析数论的一个重要工具.为了研究模 p 的最小正的二次非剩余,林尼克(Линник,Ю. В.)于 1941 年首次提出了大筛法.雷尼(Renyi,A.)于 1948 年对大筛法做了重要改进,用来研究算术级数中素数的平均分布,并结合布龙筛法证明了结论$\{1,n\}$:每个充分大的偶数均可表为一个素数和一个至多有 n 个素因子的殆素数之和.这一结果显示了大筛法的强大威力.但初期的大筛法表述比较麻烦,其实质不易为人理解.1965 年,罗特(Roth,K. F.)与邦别里(Bombieri,E.)先后对大筛法做了重要改进.特别是邦别里的工作,把大筛法建立在一个便于使用的分析形式上.此后,达文波特(Davenport,H.)与哈伯斯塔姆(Halberstam,H.)又明确给出大筛法的分析形式,这就是人们现在普遍采用作为定义的大筛法形式.从此,大筛法不断得到深入的研究,在解析数论的一系列著名问题的研究中发挥了重要的作用.大筛法就是要对形如

$$S(x)=\sum_{n=M+1}^{M+N}a_ne(nx)$$

的三角和建立形如

$$\sum_{r=1}^{R}|S(x_r)|^2\leqslant\Delta(N,\delta)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2$$

的不等式,这里 $N\geqslant1$ 与 M 为整数,a_n 为任意复数,$x_1,x_2,\cdots,x_R$ 为一组实数,满足 $\|x_r-x_s\|\geqslant\delta$ $(r\neq s)$,这里 δ 为一个正数.$\Delta(N,\delta)$是仅与 N,δ 有关的值.目前证明这种类型不等式的方法主要有以下几种:

1. 加拉格尔方法:其出发点为一简单的索伯列夫型不等式,用此法可得到 $\Delta(N,\delta)=\delta^{-1}+\pi N$,这并非最优结果.

2. 对偶原理方法:利用巴拿赫空间上的对偶原理的某个特例作为出发点.

3. 贝塞尔不等式方法:利用复数域上内积空间中贝塞尔不等式的某种推广作为出发点.

后两种方法本质上是一致的,都能导出一般情形下最好可能的结果 $\Delta(N,\delta)=\delta^{-1}+N-1$.大筛法原来的形式(称为算术形式)是形如

$$\sum_{p\in\mathscr{P}}pD(p)$$

的和式之上界估计,这是由雷尼(Renyi,A.)指出的.其中 $\mathscr{P}$ 是一个有限素数集合,

$$D(p)=\sum_{j=0}^{p-1}\left|Z(p,j)-\frac{Z}{p}\right|^2,$$
$$Z(p,j)=\sum_{n\equiv j(\operatorname{mod}p)}a_n,$$
$$a_n=\begin{cases}1 & (n=n_i,1\leqslant i\leqslant Z),\\0 & (\text{其他}),\end{cases}$$

而 $M+1\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_Z\leqslant M+N$ 是任意选定的 Z 个整数.邦别里首先注意到有

$$pD(p)=\sum_{a=1}^{p-1}\left|S\left(\frac{a}{p}\right)\right|^2.$$

此式可推广到复合模 q 的情形:若 $a_n(M+1\leqslant n\leqslant M+N)$为任意复数,

$$Z=\sum a_n,\quad Z(q,j)=\sum_{n\equiv j(\operatorname{mod}q)}a_n,$$

则有

$$\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2=q\sum_{h=1}^{q}\left|\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}Z\left(\frac{q}{d},h\right)\right|^2.$$

这是蒙哥马利(Montgomery,H. L.)于 1968 年给出的,它们导致了目前大筛法的分析形式.大筛法有极其重要的算术应用,其基础是重要不等式

$$\mu^2(q)\left(\prod_{p|q}\frac{\omega(p)}{p-\omega(p)}\right)\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\right|^2$$
$$\leqslant\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2,$$

其中 $\omega(p)$ 表示满足下述条件 $a_n=0$ 对 $n\equiv h(\operatorname{mod}p)$的剩余类 $h(\operatorname{mod}p)$的个数.例如,利用 $\Delta(N,\delta)=\delta^{-1}+N$ 对应的大筛法不等式

$$\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2\leqslant(Q^2+N)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2$$

立即推出不等式

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\right|\leqslant\frac{Q^2+N}{\sum_{q\leqslant Q}\mu^2(q)}\prod_{p|q}\frac{\omega(p)}{p-\omega(p)}.$$

大筛法及其思想在诸如哥德巴赫猜想、孪生素数猜想、布龙-蒂奇马什不等式、ζ 函数与 L 函数的均值估计及零点密度估计、算术级数中最小素数等一系

列问题的研究中均有极其重要的应用.

阶的估计方法(the estimation method of the order) 数论与函数论等学科的重要方法.它在本质上属于极限方法.阶的估计方法包括各种求和法.例如,分部求和法、欧拉求和法、泰勒展开及各种渐近展开法、母函数方法、拉普拉斯方法、驻相法、最速下降法以及阿贝尔方法等.运用这种方法,可以卓有成效地处理各种复杂的数学问题,简化计算程序,得到精密的结果.因此,在自然科学和工程技术的许多领域中都有广泛的应用.阶的估计方法所研究的主要对象是各种形式的变量,特别是无穷小量和无穷大量(简称为无穷量).由于无穷量的定义只是刻画变量的变化趋势,要描述它们变化的快慢问题就需要阶的概念.若

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A,$$

当 $A=0$ 时,称 $x\to a$ 时 $f(x)$ 相对于 $g(x)$ 是一个无穷小量,这时当 x 充分接近 a 时,$|f(x)|$ 与 $|g(x)|$ 比起来可以忽略不计.特别地,若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷大量,则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷大或 $g(x)$ 比 $f(x)$ 为高阶的无穷大;若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无穷小量,则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小量或 $g(x)$ 是比 $f(x)$ 低阶的无穷小量.当 $A\neq 0$ 时,称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶的.特别地,当 $A=1$ 时,称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价的,这时,当 x 充分接近 a 时,$f(x)$ 与 $g(x)$ 的值几乎是相等的.例如,$x\to 0$ 时,无穷小量 $\sin x^2$ 比 x 高阶,但与 x^2 等价;$x\to+\infty$ 时,$\sqrt{x}$ 是比 $\log x$ 高阶的无穷大量,但比 e^x 是低阶,与 $\sqrt{x^2+1}$ 却是等价的.在 $x\to a$ 时,往往将无穷小量 $(x-a)^\alpha(\alpha>0)$ 作为基本无穷小量,并用它去度量当 $x\to a$ 时趋于0的一切无穷小量.在 $x\to a$ 时,凡是与基本无穷小量 $(x-a)^\alpha(\alpha>0)$ 同阶的无穷小量(有无限个)其趋于0的快慢都是一个等级的,可用数 α 来反映,并称它们都是 α 阶的无穷小量(当 $x\to a$ 时).这样可将这些无穷小量按 α 来加以分类.当然,有的无穷小量,如

$$\int_0^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t \quad (x\to 0)$$

却不与任何 $x^\alpha(\alpha>0)$ 同阶,对于无穷大量的情形也类似.在理论与实际应用中所遇到的无穷量往往比较复杂,要找出与它等价的简单或基本无穷量是比较困难的.但许多问题往往并不需要知道一个函数的精确性状,而只要对其阶作出符合要求的估计就可以了.例如,要求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t,$$

虽然,对它不能用洛必达法则,但是,若用分部积分法估计无穷小

$$\int_0^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

的阶,则可以求得它的阶要比任何基本无穷小量 x^α $(0<\alpha<2)$ 的阶都高;有了这个估计,就可以立即断定上述极限为0.

要对无穷量或变量的阶进行估计,就需要一个重要的数学符号“O”或“$\ll$”,前者是由德国数学家兰道(Landau,E. G. H.)引进的,后者则是由前苏联数学家维诺格拉多夫(Виноградов,И. М.)首先采用,它们的含义相同,但在用法上各有优点.设 D 是给定的一个实数集,$f(x)$ 是定义在 D 上的复值函数,$\varphi(x)$ 是在 D 上的正值函数.若存在一个与 x 无关的正常数 A,使得 $|f(x)|\leqslant A\varphi(x)$ 在 D 上恒成立,则称 $\varphi(x)$ 在集 D 上是 $f(x)$ 的优势函数或强函数,并记为 $f(x)=O(\varphi(x))$ 或 $f=O(\varphi)(x\in D)$,也可记为 $f(x)\ll\varphi(x)$ 或 $f\ll\varphi(x)(x\in D)$,其中常数 A 称为大 O(或$\ll$)常数,这两个符号是不等式的缩写,它表明了 $|f(x)|$ 在 D 上的数量阶不超过 $\varphi(x)$ 的阶,这是阶的估计中最基本最重要的概念.特别地,当 $\varphi(x)\equiv 1$ 时,这两个符号表明 $|f(x)|$ 在 D 上有界.例如,$\sin x=O(1)$ 或 $\sin x\ll 1(-\infty<x<+\infty)$;$\log x=O(x^\alpha)(\alpha>0)$ 或 $\log x\ll x^\alpha(x\geqslant 1)$;$x^\alpha=O(e^x)$ 或 $x^\alpha\ll e^x(x\geqslant 1)$ 等.符号 O 与 $\ll$ 有许多重要法则,例如,若 $f_1(x)=O(\varphi_1(x))$ 或 $f_1(x)\ll\varphi_1(x)$,$f_2(x)=O(\varphi_2(x))$ 或 $f_2(x)\ll\varphi_2(x)$,$x\in D$,则有

$$f_1(x)+f_2(x)=O(\varphi_1(x)+\varphi_2(x))$$

或

$$f_1(x)+f_2(x)\ll\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\quad(x\in D).$$

若

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A\ (A\ 有限),$$

则在 a 的某邻域内有 $f(x)=O(|g(x)|)$ 或 $f(x)\ll|g(x)|$.从泰勒公式还可得到重要定理:若在 a 的某邻域内,$f(x)$ 具有有界的 n 阶导数,则

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1!}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots+f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+O(|x-a|^n)$$

在该邻域内成立.利用它,可以得到一系列关于初等函数的重要公式.例如,$\sin x=x-x^3/3!+O(|x|^5)$ $(-\infty<x<+\infty)$;$e^x=1+x+O(x^2)(-\infty<x\leqslant A$,$A$ 为任一固定正数),对 $\cos x$,$\log(1+x)$,$(1+x)^\alpha$ 也有类似公式,这就是阶的估计方法中最简单而重要的方法——泰勒方法.利用阶的估计的其他方法可以得到许多复杂而重要的函数的渐近表达式.例如,伽马函数

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}(x/e)^x(1+O(1/x));$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}, x \to 1;$$

n 阶贝塞尔函数

$$I_n(t) = \frac{1}{t}\int_0^{\pi} e^{t\cos x}\cos nx\,dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}}e^t \quad (t \to \infty)$$

等.

优势函数(major function)　见“阶的估计方法”.

强函数(major function)　见“阶的估计方法”.

平均阶(average order)　数论中的重要概念.它有两个不同含义的概念.其一用来描述一个算术函数的阶的平均大小.定义如下:设 $f(n)$ 为一算术函数,称

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

的阶为 $f(n)$ 的平均阶.单个算术函数值 $f(n)$ 常变化无规则,但往往可得到其平均阶之估计.这也称为 $f(n)$ 的均值估计.同一名词还用在加性数列之研究中.定义如下:用 Z_0 表示所有非负整数之集合,$\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$,$\mathscr{C}$,…均表示 Z_0 的子集合,它们也称为“序列”.用 $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ 表示一切形如 $a+b, a\in\mathscr{A}, b\in\mathscr{B}$ 的不同整数组成之集合.简记

$$\underbrace{\mathscr{A}+\mathscr{A}+\cdots+\mathscr{A}}_{m\text{重}} = m\mathscr{A}.$$

若对某个 $\mathscr{A}$,存在一个自然数 h,使 $h\mathscr{A}=\mathsf{Z}_0$,则称 $\mathscr{A}$ 是一个阶为 h 的基,具有此性质的最小的正整数 h_0 称为 $\mathscr{A}$ 的精确阶.设 $\mathscr{A}$ 是一个精确阶为 h_0 的序列,对每个自然数 m,定义 $l(m)$ 为 $\mathscr{A}$ 中和为 m 的元素之最少个数,称

$$h^* = \sup_n \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} l(m)$$

为序列 $\mathscr{A}$ 的平均阶.有 $h^* \leqslant h_0$.平均阶这一概念在施尼雷尔曼密率方法中有重要价值.例如,兰道(Landau,E.G.H.)曾引入这一概念改进了爱尔特希(Erdös,P.)关于和集密率的结果.

精确阶(exact order)　见“平均阶”.

均值估计(mean value estimation)　解析数论中的重要概念与方法.即数论函数值的平均估计.由于许多重要的数论函数,其值的分布是很不规则的,所以不能得到其渐近公式.例如,当 n 为素数时,$\omega(n)=\Omega(n)=1$;但当 n 取 2 的乘方而趋于无穷时,就有

$$\Omega(n) = \frac{\log n}{\log 2} \to \infty;$$

当 n 取素数的连乘积 $p_1p_2\cdots p_s$ 而趋于无穷时,亦有 $\omega(n)=s\to\infty$.因此,由 $\omega(n)$,$\Omega(n)$ 的不规则性,不能得到它们的渐近公式,这时常去研究其算术平均值,即如下的均值估计

$$F(n) = \frac{1}{n}\sum_{m\leqslant n} f(m)$$

或

$$F(x) = \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n) \quad (x \geqslant 1).$$

函数 $F(n)$ 或 $F(x)$ 的性质比起 $f(n)$ 要规则得多.若当 $n\to\infty$ 或 $(x\to\infty)$ 时,$F(n)\sim g(n)$ 或 $(F(x)\sim g(x))$,则称 $f(n)$ 的平均值为 $g(n)$(或 $g(x)$).例如,除数函数的平均值为 $\log n$(或 $\log x$);$\omega(n)$ 与 $\Omega(n)$ 的平均值都是 $\log\log n$(或 $\log\log x$)等.数论中的许多重要问题都与均值估计有关.

正规阶(normal order)　数论函数估计的一个概念.设 $f(n)$ 为数论函数,若当 $n\to\infty$ 时,对几乎所有的正整数 n 有 $f(n)\sim F(n)$,则称 $f(n)$ 有正规阶 $F(n)$;或者说,不满足 $f(n)\sim F(n)$,即对任给的 $\varepsilon>0$,不满足

$$(1-\varepsilon)F(n) < f(n) < (1+\varepsilon)F(n)$$

的正整数 n 的个数为 $o(n)$ 时,称 $f(n)$ 有正规阶 $F(n)$.例如,$\omega(n)$ 与 $\Omega(n)$ 都有正规阶 $\log\log n$(同时也是平均阶),但是一个函数可能有平均阶而无正规阶;反之也可能仅有正规阶而无平均阶.例如,定义函数 $f(n)$:当 n 为偶数时,$f(n)=0$;当 n 为奇数时,$f(n)=2$.此时,$f(n)$ 有平均阶,但无正规阶.另一函数 $g(n)$ 定义如下:当 $n=2^m$ 时,$g(n)=2^m$;当 $n\neq 2^m$ 时,$g(n)=1$.这时 $g(n)$ 有正规阶 1,但无平均阶.而除数函数 $d(n)$ 既有平均阶 $\log n$,又有正规阶

$$\exp\{\log 2 \log\log n\},$$

且它们并不相等.

渐近级数(asymptotic series)　亦称渐近展开.带余项的级数展开.设 $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 为一函数列,它满足下列条件:

$$\varphi_1(x) = o(\varphi_0(x)) \quad (x\to\infty);$$
$$\varphi_2(x) = o(\varphi_1(x)) \quad (x\to\infty);$$
$$\varphi_n(x) = o(\varphi_{n-1}(x)) \quad (x\to\infty);\cdots.$$

若存在一列常数 $c_0,c_1,c_2,\cdots$,使得函数 $f(x)$ 有以下估计:

$$f(x) = O(\varphi_0(x)) \quad (x\to\infty);$$
$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + O(\varphi_1(x)) \quad (x\to\infty);$$
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i\varphi_i(x) + O({}'\varphi_n(x)) \quad (x\to\infty);$$

则记为 $f(x)\approx c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots$ $(x\to\infty)$,并称右边级数为 $f(x)$ 的渐近级数或渐近展开.例如,设

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}dt,$$

则 $e^{-x}f(x)$ 有渐近展开式

$$e^{-x}f(x) \approx \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \cdots \quad (x\to\infty).$$

特别重要的是：若函数 $F(x)$ 与级数

$$c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\cdots+\frac{c_n}{x^n}+\cdots$$

的第 n 个截断

$$S_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{c_i}{x^i}$$

之差 $\rho_n(x)=F(x)-S_n(x)$ 对任意固定的 n 满足

$$\lim_{x\to\infty}x^n\rho_n(x)=0,$$

则称级数

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_i}{x^i}$$

为 $F(x)$ 的渐近级数. 注意，$F(x)$ 的渐近级数并不一定收敛到 $F(x)$，它甚至可以是发散的.

渐近展开(asymptotic expansion) 即"渐近级数".

渐近级数性质(property of asymptotic series) 对渐近级数的刻画. 渐近级数的重要性质是：

1. 惟一性，若

$$F(x)\approx\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_i}{x^i},\ F(x)\approx\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{x^i},$$

则必有 $c_i=B_i\ (i=0,1,2,\cdots)$.

2. 若 $F(x)\approx\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_i}{x_i},G(x)\approx\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B_i}{x^i}$，则有

$$F(x)+G(x)\approx\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_i+B_i}{x^i},$$

$$F(x)G(x)\approx\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A_i}{x^i},$$

其中

$$A_i=\sum_{m=0}^{i}c_mB_{i-m}.$$

这就是渐近级数对加法与乘法是封闭的.

3. 可逐项积分，若 $F(x)\approx\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_i}{x^i}$，则

$$\int_x^{\infty}F(t)\mathrm{d}t\approx\sum_{i=2}^{\infty}\frac{c_i}{(i-1)x^{i-2}}.$$

4. 若 $F(x)\approx\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c_i}{x^i}$，则

$$\mathrm{e}^{F(x)}\approx1+\frac{c_1}{x}+\cdots+\left(\frac{c_1^n}{n!}+\cdots+\frac{c_n}{1}\right)\frac{1}{x^n}+\cdots.$$

可以举出例子说明：渐近级数的逐项微分一般来说是不行的.

阿贝尔求和公式(Abel's summation formula) 亦称分部求和法. 是变换分析表达式以进行阶的估计所使用的基本方法之一. 它有广泛的应用，对某些问题则可得到相当深刻的结果. 若

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i,$$

则有

$$\sum_{n=1}^{N}a_nb_n=\sum_{n=1}^{N-1}S_n(b_n-b_{n+1})+S_Nb_N.$$

这就是阿贝尔离散型的分部求和公式. 若定义函数

$$S(x)=\begin{cases}\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant x}a_i & (x\geqslant1),\\ 0 & (x<1),\end{cases}$$

则上述公式可以变为下面的积分形式，即

$$\sum_{n=1}^{N}a_nb(n)=S(N)b(N)-\int_1^N S(x)b'(x)\mathrm{d}x,$$

这里假定 $b'(x)$ 及积分是存在的. 利用分部求和公式的积分形式，可以得到以下精密的估计

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kt\log k=O\left(\frac{1}{t}\log n\right),$$

其中 $1/n\leqslant t\leqslant\pi$；及

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kt\log k=O(n^2t\log n)\ \left(0\leqslant t\leqslant\frac{1}{n}\right).$$

一般地，有以下分部求和公式：设数列 $\lambda_n\uparrow+\infty(n\to\infty)$，而

$$c(x)=\sum_{\lambda_n x}c_n$$

(c_n 可为复数). 若 $\Phi(x)$ 有连续一阶导数，则当 $x\geqslant\lambda$ 时，

$$\sum_{\lambda_n\leqslant x}c_n\Phi(\lambda_n)=-\int_{\lambda_1}^{x}c(t)\Phi'(t)\mathrm{d}t+c(x)\Phi(x).$$

分部求和法(summation method by parts) 见"阿贝尔求和公式".

拉普拉斯方法(Laplace method) 渐进估计的一种方法. 拉普拉斯方法的中心是要对形如

$$\int_a^b\varphi(x)\mathrm{e}^{nh(x)}\mathrm{d}x$$

的积分进行估计，其基本思想是：由于 $x\to\infty$ 时，$\mathrm{e}^x\to\infty$，且其增长速度是"很快"的，所以当 $h(x)$ 在 (a,b) 中某一点 x_0 达到最大值时，对于 x_0 的任一邻域外的 x 值，$h(x)$ 也较小，因此，$\mathrm{e}^{nh(x)}$ 相对于 $\mathrm{e}^{nh(x_0)}$ 就可以忽略不计. 拉普拉斯方法的基本定理就是以下的拉普拉斯定理：若 $\varphi(x)$ 与 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，且满足条件：

1. 当 $n\geqslant n_0$ 时，$\varphi(x)\mathrm{e}^{nh(x)}$ 在 $[a,b]$ 上可积.

2. $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有一个最大值点 $x=\xi\in(a,b)$，而且在任何一个不含 ξ 的闭区间 $[\alpha,\beta]$ 内有

$$\sup_{x\in[\alpha,\beta]}h(x)<h(\xi).$$

3. 在 ξ 的某邻域内，$h''(x)$ 连续，$h''(x)<0$.

4. $\varphi(\xi)\neq0$，$\varphi(x)$ 在 $x=\xi$ 连续.

则当 $n\to\infty$ 时，有

$$\int_a^b\varphi(x)\mathrm{e}^{nh(x)}\mathrm{d}x\sim\varphi(\xi)\sqrt{-\frac{2\pi}{nh''(\xi)}}\mathrm{e}^{nh(\xi)}.$$

欧拉求和公式(Euler summation formula) 亦称欧拉-马克劳林公式. 利用积分估计和式的一个重

要公式.它的一般形式如下:若 m 为正整数,$f(x)$在区间$[a,b]$上 m 次连续可微,则有

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{m}(-1)^j b_j(x) f^{(j-1)}(x)\Big|_a^b + (-1)^{m+1}\int_a^b b_m(x) f^{(m)}(x)\mathrm{d}x.$$

这里函数 $b_m(x)$定义如下:

$$b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2},$$

$$b_{k+1}(x) - b_{k+1}(0) = \int_0^x b_k(u)\mathrm{d}u \quad (k = 1,2,\cdots),$$

$$\int_0^1 b_{k+1}(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (k = 1,2,\cdots).$$

例如,可以算出

$$b_2(x)=\frac{1}{2}(x-[x])^2-\frac{1}{2}(x-[x])+\frac{1}{12},$$

$$b_3(x)=\frac{1}{6}(x-[x])^3-\frac{1}{4}(x-[x])^2+\frac{1}{12}(x-[x]),$$

$$b_4(x)=\frac{1}{24}(x-[x])^4-\frac{1}{12}(x-[x])^3+\frac{1}{24}(x-[x])^2-\frac{1}{720},$$

等.多项式 $b_m(x)$与相应的伯努利多项式 $B_m(x)$有如下密切的关系

$$b_m(x) = \frac{1}{m!}B_m(x - [x]).$$

特别地,当 $m=1$ 时得到如下简单而有用的结果,它也常称为欧拉求和公式

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x + \left(a - [a] - \frac{1}{2}\right)f(a) - \left(b - [b] - \frac{1}{2}\right)f(b).$$

又当 a,b 皆为整数时,公式取如下形式:

$$\sum_{n=a+1}^{b} f(n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{m}(-1)^j\frac{B_j}{j!}\{f^{(j-1)}(b)-f^{(j-1)}(a)\} + \frac{(-1)^{m-1}}{m!}\int_a^b B_m(x-[x])f^{(m)}(x)\mathrm{d}x,$$

这里 B_m 为第 m 个伯努利数,$B_m(x)$表示第 m 个伯努利多项式.伯努利数满足如下定义性质:

1. 对 $k\geqslant 1$ 有 $B_{2k+1}=0$.

2. 对 $m\geqslant 2$ 有递推公式

$$1+C_m^1B_1+C_m^2B_2+\cdots+C_m^{m-1}B_{m-1}=0.$$

3. 开始几个不为 0 的伯努利数是

$$B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\cdots,$$

而伯努利多项式满足如下定义性质:

1. 递推公式:

$$B_m(x) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k B_k x^{m-k}.$$

2. 差分方程:

$$B_m(x+1)-B_m(x)=mx^{m-1}(m\geqslant 1).$$

3. $B_m(1-x)=(-1)^m B_m(x)$.

开始几个伯努利多项式为

$$B_0(x) = 1,$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x,$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.$$

欧拉-马克劳林公式(Euler-Maclaurin formula)　即"欧拉求和公式".

驻点法(saddle point method)　阶的估计中的重要方法.它主要是对积分

$$I = \int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}nf(x)}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

进行阶的估计,其中 $f(x)$与 $\varphi(x)$都是实函数.若将被积函数看做一个向量,则它的相角应该是 $nf(x)$.当 $f(x)$的数值"不稳定",即其变化较大时,由于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nf(x)}$的数值在$-1$ 与 1 之间交替变化,这样正值与负值"相互抵消",使得相应的 $\varphi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nf(x)}$的数值对整个积分值所起的作用仅处于"次要地位",而相应于 $f(x)$"变化稳定"部分 $\varphi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nf(x)}$的数值对整个积分值所起的作用处于"主要地位",这就是驻相法的基本思想.所谓 $f(x)$变化"稳定",自然可用条件$f'(x)=0$ 来加以描述,使$f'(x)=0$ 的点 x_0 称为驻相点.关于这方面的主要结果有:

1. 若 $f(z)$与 $\varphi(z)$在包含$[a,b]$的某个单连通域内解析,而且它们在$[a,b]$上均取实值,$f'(z)$仅在点 $x=a$ 为零,则当 $f''(a)>0$ 时,

$$I = \left(\frac{\pi}{2}nf''(a)\right)^{\frac{1}{2}}\varphi(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nf(a)+\frac{1}{4}\pi\mathrm{i}} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

当 $f''(a)<0$ 时,

$$I = \left(-\frac{\pi}{2}nf''(a)\right)^{\frac{1}{2}}\varphi(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nf(a)-\frac{1}{4}\pi\mathrm{i}} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. 若 $f(z)$与 $\varphi(z)$的条件与 1 相同,但 $f'(z)$仅在 $x=b$ 为零,则当 $f''(b)>0$ 时,

$$I=\left(\frac{\pi}{2}nf''(b)\right)^{\frac{1}{2}}\varphi(b)e^{inf(b)+\frac{1}{4}\pi i}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

当 $f''(b)<0$ 时，

$$I=\left(-\frac{\pi}{2}nf''(b)\right)^{\frac{1}{2}}\varphi(b)e^{inf(b)-\frac{1}{4}\pi i}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. 若 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 的条件与结果 1 相同，但 $f'(a)=f''(a)=0, f'''(a)>0$，则

$$I=\Gamma(4/3)(6/nf'''(a))^{\frac{1}{3}}e^{inf(a)+\frac{1}{6}\pi i}\varphi(a)+O(n^{-2/3}).$$

4. 若 $0<\lambda<1, 0<\mu<1, \varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上 m 次连续可微，$f(x)$ 连续可微且有关系式

$$f'(x)=(x-a)^{\rho-1}(b-x)^{\theta-1}f_1(x),$$

其中 $\rho\geqslant1, \theta\geqslant1, f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上正值，而且也是 m 次连续可微，则

$$I=\int_a^b\varphi(x)e^{inf(x)}(x-1)^{\lambda-1}(b-x)^{\mu-1}dx$$
$$=B(n)-A(n),$$

其中

$$A(n)=A_m(n)+R_m(n),$$
$$B(n)=B_m(n)+Q_m(n),$$

$$A_m(n)$$
$$=-\sum\frac{h^{(k)}(0)}{k!\rho}\Gamma\left(\frac{k+\lambda}{\rho}\right)e^{\pi i(k+\lambda)/2\rho}n^{-(k+\lambda)/\rho}e^{inf(a)},$$

$$|R_m(n)|\leqslant\frac{1}{(m-1)!}\Gamma\left(\frac{m}{\rho}\right)$$
$$\times n^{-\frac{m}{\rho}}\int_0^{u_1}u^{\lambda-1}\left|\frac{d^m(\gamma_1uh)}{du^m}\right|du,$$

$$B_m(n)$$
$$=-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{l^{(k)}(0)}{k!\theta}\Gamma\frac{k+\mu}{\theta}e^{-\pi i(k+\mu)/2\theta}n^{-(k+\mu)/\theta}e^{inf(b)},$$

$$Q_m(n)=O(n^{-m/\theta}).$$

以上结果有许多重要应用. 例如，利用结果 1 及 2 可得，当 $n\to\infty$ 时，

$$I(n)=\int_0^1e^x\cos n(x^2-x)dx$$
$$=\left(\frac{e\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi-n}{4}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right);$$

利用结果 4 可得，当 $n\to\infty$ 时，

$$\int_0^1e^{inx^3}/\sqrt{x(1-x)}dx\sim\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)e^{\pi i/12}n^{-1/6}$$
$$+\left(\frac{1}{6}e^{\pi i/4}+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i(n-\pi/4)}\right)\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

等.

阿贝尔定理(Abel's theorem)　数论、函数论中的重要定理. 阿贝尔定理是指，当

$$\sum_{i=0}^{\infty}a_i=s$$

时，有

$$\lim_{x\to1-}\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i=s.$$

它的逆命题并不成立，但是，若对系数 a_i 加上某些限制，例如 $a_i\geqslant0(i=0,1,2,\cdots)$，则阿贝尔定理的逆定理成立. 在 $a_k=o(1/k)$ 的条件下，陶贝尔(Tauber)首先证明了逆定理成立，李特尔伍德(Littlewood, J. E.)证明了当 $a_k=O(1/k)$ 的情形下逆定理成立. 若

$$\lim_{a\to1-}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\lim_{y\to0+}\sum_{k=0}^{\infty}a_ke^{-ky}=s,$$

则称

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k$$

是阿贝尔可求和的. 因此，若

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k$$

是阿贝尔可求和时，则还要加上某些附加条件才能保证

$$\lim_{x\to0^+}\sum_{k=0}^{\infty}a_ke^{-kx}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k.$$

由于陶贝尔在

$$a_k=o\left(\frac{1}{k}\right)\ (k\to\infty)$$

的条件下首先证明上面定理的逆定理，所以通常把研究这类问题的定理都称之为陶贝尔定理.

小 *o* 或大 *O* 的陶贝尔定理(*o* or *O* Tauberian theorem)　阶的估计方法中的著名定理. 由

$$\lim_{x\to1-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=s,\quad a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

或由

$$\lim_{x\to0+}\int_0^{\infty}f(t)e^{-tx}dt=s,\quad f(t)=o\left(\frac{1}{t}\right)\ (t\to\infty)$$

分别保证了

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s,\quad\int_0^{\infty}f(t)dt=s.$$

这种定理称为小陶贝尔定理. 而当 $f(x)=O(1/x)$,

$$F(x)=\int_0^{\infty}e^{-xt}f(t)dt\to s\ (x\to0+)$$

满足时，必有

$$\int_0^{\infty}f(t)dt=s.$$

以及当 $a_n=O(1/n)$ 与

$$\lim_{x\to1-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=s$$

时，亦必有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s.$$

即将上述的小 o 改为大 O 时，结论仍然成立. 所得到的定理称为大 O 陶贝尔定理. 小 o 陶贝尔定理是

由陶贝尔首先得到，后来李特尔伍德(Littlewood，J. E.)将小 o 这一条件减弱为大 O 证明陶贝尔定理仍然成立，所以后者亦称李特尔伍德大 O 定理.

弱型陶贝尔定理(weak type Tauberian theorem)　数论中的重要定理. 若用 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数个数，则著名的素数定理就是要证明 $\pi(x)\sim x/\log x, x\to\infty$. 若

$$\theta(x)=\sum_{p\leqslant x}\log p,$$

则可得 $\theta(x)$ 与 $\pi(x)$ 的重要关系为

$$\frac{\theta(x)}{x}=\frac{\pi(x)\log x}{x}+O\left(\frac{1}{x}\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\log t}\right).$$

由此可推出 $\theta(x)\sim x, x\to\infty$. 反之，从 $\theta(x)\sim x$ 亦可推出 $\pi(x)\sim x/\log x, x\to\infty$. 由于从

$$\sum_{p\leqslant x}[x/p]\log p=x\log p+O(x)$$

可推出 $Ax\leqslant\theta(x)\leqslant Bx$，其中 A, B 为正常数. 此结果远较 $\theta(x)\sim x$ 为差，所以称它为弱型陶贝尔定理. 而一般的弱型陶贝尔定理是指：当 $a_n\geqslant 0$，

$$\sum_{n\leqslant x}a_n[x/n]=x\log x+O(x),$$

$x\geqslant 1$ 成立时，必存在两个正常数 A 与 B，使得当 $x\geqslant x_0$ 时，有

$$Ax\leqslant\sum_{n\leqslant x}a_n\leqslant Bx.$$

孪生素数(twin primes)　一对特殊素数. 除 2 与 3 这对素数外，凡相差为 2 的一对素数. 当 p 与 $p'=p+2$ 均为素数时，它们称为一对孪生素数. 布尼亚科夫斯基(Буняковский, В. Я.)于 1857 年提出一个猜想，它的一个特例是著名的孪生素数猜想：(L)存在无穷多个素数 p，使 $p+2$ 也为素数. 设 $H(N)$ 表示满足条件 $p\leqslant N, p+2=p'$ 的素数 p 的个数，根据圆法可以给出如下猜想的渐近公式

$$H(N)\sim 2C\frac{N}{\log^2 N},$$

这里

$$C=\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

但这些猜想至今都没有得到证明. 根据陈景润 1966 年的著名结果立即推出：存在无穷多个素数 p，使 $p+2$ 至多只有两个素因子. 这是至今在这一问题中获得的最好结果. 关于 $H(N)$ 的上界估计，目前已知的最好结果属于傅里(Fouvry, E.)与格鲁帕(Gruvpp, F.)：

$$H(N)\leqslant(6.908+\varepsilon)C\frac{N}{\log^2 N},$$

其中 ε 为大于 0 的任何实数. 用 $(N,2)$ 表示满足下述条件的素数 p 的个数：$p\leqslant N$，$p+2$ 至多有两个素因子，陈景润于 1978 年给出

$$H(N,2)>0.81C\frac{N}{\log^2 N}.$$

对于这一估计式中的系数，现已得到较大的改进. 也有人从事寻找孪生素数对的工作. 目前已知最大的一对孪生素数是 $1159142985\times 2^{2304}\pm 1$，它们有 723 位. 这是阿特金(Atkin, A. O. L.)与里克特(Rickert, N. W.)于 1979 年发现的.

相邻素数差(difference between consecutive primes)　两个相邻素数之差的绝对值. 设 p_n 表示第 n 个素数，研究差 $d_n=p_{n+1}-p_n$ 的分布是数论中一个重要问题. 关于相邻素数差，有以下一些问题：

1. 寻求函数 $f_1(n)$，使对所有充分大的 n 皆有 $d_n=O(f_1(n))$. 若黎曼猜想成立，克拉默(Cramer, H.)于 1921 年证明了可取

$$f_1(n)=p_n^{\frac{1}{2}}\log p_n.$$

目前关于此问题的最好结果是可取

$$f_1(n)=p_n^{\frac{6}{11}+\varepsilon}.$$

克拉默于 1937 年猜想可以取 $f_1(n)=(\log p_n)^2$.

2. 寻求函数 $f_1(n)$，使对无穷多个 n 有 $d_n\geqslant f_2(n)$. 目前已知最好的结果是可取[兰金(Rankin, A. R.)]

$$f_2(n)=(\mathrm{e}^\gamma-\varepsilon)\frac{\log n\log\log n\log\log\log\log n}{(\log\log\log n)^2}$$

(γ 为欧拉常数). 人们猜想可以取

$$f_2(n)=3(\log_{10}p_n)^2.$$

3. 寻求函数 $f_3(n)$，对所有充分大的 n 有 $d_n\geqslant f_3(n)$. 若孪生素数猜想为真，则 $f_3(n)=3$. 目前人们对 $f_3(n)$ 还一无所知.

4. 寻求函数 $f_4(n)$，对无限多个 n 有 $d_n\leqslant f_4(n)$. 兰金在广义黎曼猜想为真的条件下证明了可取

$$f_4(n)=\left(\frac{126}{215}+\varepsilon\right)\log p_n.$$

他还用布赫施塔伯方法证明了

$$f_4(n)=\left(\frac{57}{59}+\varepsilon\right)\log p_n.$$

5. 寻求函数 $f_5(n)$，使对几乎全体 n 有 $d_n\geqslant f_5(n)$. 瓦尔菲施(Walfisz, A.)于 1953 年证明：

$$f_5(n)=\log p_n(\log\log\log p_n)^{-2};$$

普拉哈尔(Prachar, K. A. T.)于 1954 年得到可取

$$f_5(n)=\log\frac{p_n}{g(p_n)},$$

这里 $g(x)$ 当 $x>x_0$(x_0 为一正数)时单调，$g(x)\to\infty$(当 $x\to\infty$ 时)且 $\log x/g(x)\to\infty$($x\to\infty$ 时).

6. 寻求函数 $f_6(n)$，对几乎全体 n 有 $d_n\leqslant f_6(n)$. 克拉默(Cramer, H.)于 1936 年在黎曼猜想为真的假定下证明：可取 $f_6(n)\leqslant(\log n)^3$.

几何数论(geometric number theory)　数论的

一个分支.为了将丢番图逼近的解析理论进行简化，闵科夫斯基(Minkowski,H.)将格与凸集等几何概念引进了数论,并建立了一整套简单而有效的方法，从而形成了一个独特的理论体系,这就是数的几何.这个理论与数论等各数学分支紧密相关并协调发展,至今已取得了许多重要的结果.数的几何理论中最基本的概念如下述.设在 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内,取 n 个点 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,若 X_i 对应的位置向量 $x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})^t(i=1,2,\cdots,n)$($t$ 表示转置)线性无关,则将点集

$$\Lambda=\left\{X\mid X\leftrightarrow x=\sum_{i=1}^{n}u_ix_i(u_i\text{ 为有理整数})\right\}$$

称为 n 维齐次格,属于这些格的点称为格点,将 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 称为 Λ 的基,另外,将 $X\in\Lambda$ 所对应的位置向量 x 的全体 Λ^* 称为格群,但通常所谓的格点,多指坐标为有理整数的点. Λ^* 为具有 n 个线性无关生成元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的自由阿贝尔群.若 Λ^* 的另一组基为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$,则记为 $y_i=Ax_i$,即 A 是以有理整数为元素的矩阵,且 $|\det A|=1$.因此,$|\det(x_1,x_2,\cdots,x_n)|$ 只与 Λ 有关,而与基的选择无关,将它用 $d(\Lambda)$ 表示,称之为格 Λ 的行列式.另外,Λ 的点之间的距离的最小值用 $\delta(\Lambda)$ 表示.若 Λ 为齐次格,x_0 为 $\mathbb{R}^n$ 中任意点,则称

$$L=\{X\mid X\leftrightarrow x=x_0+x',x'\in\Lambda^*\}$$

为非齐次格,它是由齐次格平行移动所得.

格点问题(lattice-point problem) 亦称整点问题.几何数论研究的一个主要问题.若在方格纸上面画出有长度的若尔当闭曲线,其长为 L,内部面积为 F,在曲线上及其内部坐标都是整数的点即格点的个数设为 A,则 $A=F+O(L)$ 成立.特别地,若取原点为中心,半径为 $\sqrt{x}$ 的圆,则

$$A(x)=\pi x+O(\sqrt{x}).$$

另外,若在 $uv\leqslant x,u\geqslant1,v\geqslant1$ 所围成的闭区域上的格点个数为 $D(x)$,则

$$D(x)=x\log x+(2c-1)x+O(\sqrt{x}),$$

其中 c 为欧拉常数.在上述两个特殊情形,若将级数

$$\sum_{\substack{n,m=-\infty\\(m,n)\neq(0,0)}}^{\infty}(m^2+n^2)^{-s}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\right)^2$$

表为

$$\sum_{n=1}^{\infty}F(n)n^{-s},$$

则问题也可看成是研究

$$H(x)=\sum_{n\leqslant x}F(n)$$

的问题.前者称为高斯圆问题,$F(n)$ 为 $u^2+v^2=n$ 的整数解 (u,v) 的个数,后者称为狄利克雷除数问题,$F(n)$ 为 $uv=n$ 的正整数解 (u,v) 的个数,也是 n 的正除数的个数 $d(n)$.

整点问题(Lattice-point problem) 即“格点问题”.

圆内整点问题(lattice point in circle problem) 数论中的著名问题.用 $r(n)$ 表示将非负整数 n 分解成两个平方数之和的分法种数.和数

$$A(x)=\sum_{0\leqslant n\leqslant x}r(n)$$

就等于落在圆 $u^2+v^2\leqslant x$ 内的整点 (u,v)(即 u,v 均为整数的点)的个数.圆内整点问题就是去寻求最小的 θ,使 $A(x)=\pi(x)+O(x^{\theta+\varepsilon})$ 对所有 $\varepsilon>0$ 都成立.高斯(Gauss,C.F.)首先证明了

$$A(x)=\pi(x)+O(\sqrt{x}),$$

为圆内整点问题作出了开创性的工作,因此圆内整点问题也称高斯圆问题.对此问题,华罗庚于 1942 年就得到了

$$A(x)=\pi(x)+O(x^{\frac{13}{40}+\varepsilon}).$$

1963 年,陈景润得到

$$A(x)=\pi(x)+O(x^{\frac{12}{37}+\varepsilon}).$$

目前已知最好的结果是伊瓦尼克(Iwaniec,H.)与莫佐其(Mozzochi,C.J.)于 1988 年得到的:

$$A(x)=\pi(x)+O(x^{\frac{7}{22}+\varepsilon}).$$

高斯圆问题(Gauss circle problem) 见“圆内整点问题”.

广义圆内整点问题(Generalized cirele lattice point in circle problem) 数论中的重要问题.研究 n 维椭球

$$F(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_iv_j\quad(a_{ij}=a_{ji})$$

中的整点个数 $A(x)=A_F(x)$,其中 $F(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 为一具有行列式 D 的正定二次型.若存在 $\alpha(\neq0)$,使对全体 i,j,αa_{ij} 都是整数,则称型 F 为有理的;否则,称 F 为无理的.若用 $V(x)=V_F(x)$ 表椭球 $F(u_1,u_2,\cdots,u_n)\leqslant x$ 的体积,且记 $P(x)=A_Q(x)-V_Q(x)$,兰道(Landau,E.G.H.)首先证明:

$$P(x)=O(x^{\frac{n}{2}-\frac{n}{n+1}})\quad\text{及}\quad P(x)=\Omega(x^{\frac{n-1}{4}}).$$

对于 $n\geqslant8$,关于有理型 F 的大 O 问题已被瓦尔菲施(Walfisz,A.)于 1924 年完全解决.对于 $4\leqslant n\leqslant7$,兰道用瓦尔菲施方法的一个变形得到了如下结果:当 $n=4$ 时,$P(x)=O(x\log^2x)$;当 $4\leqslant n\leqslant7$ 时,

$$P(x)=O(x^{\frac{n}{2}-1})\quad\text{及}\quad P(x)=\Omega(x^{\frac{n}{2}-1}).$$

球内的整点问题(lattice point in sphere problem)数论中的重要问题.用 $R(n)$ 表示将非负整数 n 分解为三个平方数之和的分法种数,和数

$$P(x)=\sum_{0\leqslant n\leqslant x}R(n)$$

就等于落在球 $u^2+v^2+w^2\leqslant x$ 内整点 (u,v,w)（即 u,v,w 均为整数的点）的个数. 球内整点问题就是去寻求最小的 η，使

$$P(x)=\frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}}+O(x^{\eta+\varepsilon})$$

对所有的 $\varepsilon>0$ 都成立. 对此问题，前苏联数学家维诺格拉多夫（Виноградов, И. М.）于 1963 年得到

$$P(x)=\frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}}+O(x^{2/3}(\log x)^6).$$

同年，陈景润也得到几乎相同的估计

$$P(x)=\frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}}+O(x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}),$$

这些仍是目前最好的结果.

除数问题（divisor problem）　数论中的著名问题. 设 $d(n)$ 表示 n 的因子个数，和数

$$D(x)=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}d(n)$$

就等于包含在双曲线的扇形 $uv\leqslant n, u\geqslant 1, v\geqslant 1$ 内的整点 (u,v)（即 u,v 均为正整数的点）的个数. 除数问题就是去寻求最小的 θ，使

$$D(x)=x\log x+(2\gamma-1)x+O(x^{\theta+\varepsilon})$$

对所有 $\varepsilon>0$ 都成立，其中 γ 为欧拉常数. 狄利克雷（Dirichlet, P. G. L.）首先证明了

$$D(x)=x\log x+(2\gamma-1)x+O(\sqrt{x}),$$

为除数问题作出了开创性的工作，因此除数问题也称狄利克雷除数问题. 对此问题迟宗陶于 1950 年得到

$$D(x)=x\log x+(2\gamma-1)x+O(x^{\frac{15}{46}+\varepsilon}).$$

1959 年，尹文霖得到余项为 $O(x^{\frac{13}{40}+\varepsilon})$，目前，最好的结果属于伊瓦尼克（Iwaniec, H.）与莫佐其（Mozzochi, C. J.），他们于 1988 年得到余项为 $O(x^{\frac{7}{22}+\varepsilon})$.

狄利克雷除数问题（Dirichlet' divisor problem）　即“除数问题”.

广义除数问题（generalized divisor problem）　数论中的重要问题. 若 $d_k(n)$ 表示将 n 表为 k 个因子乘积的表法种数，又若

$$D_k(x)=\sum_{n\leqslant x}d_k(n),$$

则有

$$D_k(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\zeta^k(w)\frac{x^w}{w}\mathrm{d}w\quad(c>1),$$

其中 $\zeta(w)$ 为黎曼 ζ 函数，$w=1$ 为一 k 次极点，其上的留数形如 $xP_k(\log x)$. 此外，P_k 为一 $k-1$ 次多项式，记 $D_k(x)=xP_k(\log x)+\Delta_k(x)$. 当 $k=2$ 时，即为除数问题；当 $k>2$ 时，即为广义除数问题. 其定义 α_k 为使 $\Delta_k(x)=O(x^\theta)$ 成立的数 θ 的下极限，估计 α_k 即为广义除数问题的中心. 对 α_k 的上界估计，其结果有

$$\alpha_6\leqslant\frac{43}{96},\ \alpha_7\leqslant\frac{71}{107},\ \alpha_8\leqslant\frac{41}{59},\ \alpha_9\leqslant\frac{31}{43}$$

等. 一般地，$\alpha_k\leqslant(k-1)/(k+2), k=4,5,\cdots$（哈代-李特尔伍德，1992 年），下界估计为 $\alpha_k\geqslant(k-1)/2k$（哈代（Hardy, G. H.），1915 年），猜想结果是 $\alpha_k=(k-1)/2k$. 上列问题，至今仍未解决.

齐次问题（Prouhet-Tarry problem）　数论中的重要问题. 用 $N(k)$ 表示使方程组 (A)：$x_1+x_2+\cdots+x_t=y_1+y_2+\cdots+y_t, \cdots, x_1^k+x_2^k+\cdots+x_t^k=y_1^k+y_2^k+\cdots+y_t^k$，在下述意义下为可解的最小整数 t：$x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_t$ 都是正整数，但 $y_1, y_2, \cdots, y_t$ 不能是 $x_1, x_2, \cdots, x_t$ 的重新排列. 又用 $M(k)$ 表示使方程组 (A) 为可解且使 $x_1^{k+1}+x_2^{k+1}+\cdots+x_t^{k+1}\neq y_1^{k+1}+y_2^{k+1}+\cdots+y_t^{k+1}$ 成立的最小的 t. 有 $k+1\leqslant N(k)\leqslant M(k)$，并用初等方法可证明 $N(k)\leqslant k(k+1)/2+1$. 对此问题，目前较好的结果是：当 $2\nmid k$ 时，$N(k)\leqslant(k^2+3)/2$，当 $2|k$ 时，$N(k)\leqslant(k^2+4)/2$；

$$M(k)\leqslant(k+1)\left[\log\frac{1}{2}\frac{k+2}{\log}\left(1+\frac{1}{k}\right)1\right].$$

后者是由华罗庚于 1938 年得到的. 关于上述两个问题，至今还没有完全解决.

他利问题（Prouhet-Tarry problem）　见“齐次问题”.

等幂和问题（Prouhet-Tarry problem）　见“齐次问题”.

无 k 方因子整数（k-free integer）　一类重要的整数. 指不能被大于 1 的任何整数的 k 次幂整除之整数. 用 $Q_k(x)$ 表示不超过 x 的无 k 方因子（正）整数的个数. 有

$$\begin{aligned}Q_k(x)&=\sum_{l^k m\leqslant x}\mu(l)=\sum_{l\leqslant x^{1/k}}\mu(l)\left[\frac{x}{l^k}\right]\\&=x\sum_{l\leqslant x^{1/k}}\frac{\mu(l)}{l^k}+O(x^{\frac{1}{k}})\\&=x/\zeta(k)+O(x^{\frac{1}{k}}),\end{aligned}$$

此误差项可以加以改进. 用 $q_k(n)$ 表示第 n 个无 k 方因子数，当 $n\to\infty$ 时有 $q_k(n)\sim n/\zeta(k)$，且达文波特（Davenport, H.）等与罗特（Roth, K. F.）于 1951 年得到

$$q_k(n+1)-q_k(n)=O(n^{\frac{1}{2k}+\varepsilon}).$$

里歇特（Richert, H. E.）于 1954 年对 $k=2$ 的情形给出如下改进结果

$$q_2(n+1)-q_2(n)=O(n^{\frac{2}{9}}\log n).$$

对此，爱尔特希（Erdös, P.）于 1951 年得到

$$q_2(n+1)-q_2(n)=\Omega\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right).$$

此外，关于 $k=2$ 时 $Q_k(x)$ 的余项估计，目前已知的

最好结果是 $O(x^{\frac{17}{54}+\varepsilon})$.

华林问题(Waring's problem) 数论中的著名问题. 由华林(Waring, E.)于 1770—1782 年间提出. 现代的华林问题指以下两个问题:

1. 对每个正整数 $k\geqslant 2$, 是否存在一个只与 k 有关的正整数 $s=s(k)$, 使每个正整数皆可表为至多 s 个正整数的 k 次方之和? 求满足要求的最小正整数 $s(k)=g(k)$, 称为关于小 $g(k)$ 的华林问题.

2. 若不要求上述表示对每个正整数都成立, 而只要求对充分大的正整数成立, 求满足要求之最小正整数 $s(k)=G(k)$, 称为关于大 $G(k)$ 的华林问题.

$g(2)=4$ 这一结论早在 1621 年就由巴歇(Bachet de Méziriac, C. G.)提出, 拉格朗日(Lagrange, J.-L.)给出了 $g(2)=4$ 的证明, 此为初等数论中有名的四平方定理. $g(3)=9$ 的证明首先于 1909 年由威弗瑞奇(Wieferich, A.)给出, 次年巴赫曼(Bachmann, P. G. H.)指出其证明中有一处漏洞, 此漏洞由肯普勒(Kempner, A. J.)于 1912 年改正. 对一般的 k, 欧拉(Euler, L.)于 1772 年得到下界估计

$$g(k)\geqslant 2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2, \tag{1}$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 人们猜想有

$$g(k)=2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2, \tag{2}$$

这一猜想现在称为欧拉猜想. 希尔伯特(Hilbert, D.)于 1909 年用重积分对一般的 k 证明了 $s(k)$ 的存在性, 但他的方法求出的 $s(k)$ 的值与理想的值相差太大. 迪克森(Dickson, L. E.)与比兰(Pillai, S. S.)于 1936 年相互独立地证明了对 $7\leqslant k\leqslant 100$ 欧拉猜想成立. 比兰还于 1940 年证明了 $g(6)=73$. 1942—1944 年, 鲁布甘地(Rubugunday, R. K.)、尼文(Niven, I. M.)等人对 $g(k)$ 之研究得到如下结果: 若 $k\geqslant 6$, 定义 X_k, Y_k, ξ_k 及 η_k 如下:

$$X_k=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]+1=\left(\frac{3}{2}\right)^k+\xi_k,$$

$$Y_k=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]+1=\left(\frac{4}{3}\right)^k+\eta_k.$$

则当

$$\xi_k\geqslant\left(\frac{3}{4}\right)^k \tag{3}$$

时, 欧拉猜想成立; 当 $X_kY_k=2^k+1$ 时有

$$g(k)=2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]+\left[\left(\frac{4}{3}\right)^k\right]-2;$$

当 $X_kY_k>2^k+2$ 时有

$$g(k)=2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]+\left[\left(\frac{4}{3}\right)^k\right]-3.$$

于是, (3)式能否对一切 $k\geqslant 7$ 成立即为欧拉猜想成立与否之关键所在. 马勒(Mahler, K.)于 1957 年证明: 存在 $k_0>0$, 当 $k>k_0$ 时有不等式(3)成立. 但他的 k_0 不能有效地计算出来. 此后有人用计算机对(3)式进行验证. 目前已知最好的结果是库比那(Kubina, J. M.)与温德里希(Wunderlich, M. C.)于 1990 年得到的结论: (3)对 $2\leqslant k\leqslant 471\,600\,000$ 成立. 陈景润于 1964 年证明: $g(5)=37$, 并对 $g(4)$ 的估计做出了重要贡献. 直到 1986 年才由巴拉苏不拉马连(Balasubramanian, R.)、戴舍尔(Deshouillers, J. M.)与德瑞斯(Dress, F.)合作完成了 $g(4)=19$ 的证明.

关于大 $G(k)$ 问题, 1920—1928 年间, 哈代(Hardy, G. H.)与李特尔伍德(Littlewood, J. E.)用圆法对自然数 n 表为 s 个 k 次方之和的表法数 $R_s(n)$ 给出如下渐近公式: 若 $s\geqslant(k-2)2^{k-1}+5, k\geqslant 3$, 则当 n 充分大时有

$$R_s(n)\sim\mathscr{G}(n)n^{\frac{s}{k}-1}\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)^s}{\Gamma\left(\frac{s}{k}\right)}, \tag{4}$$

其中 $\Gamma(x)$ 为 Γ 函数, $\mathscr{G}(n)$ 大于某个正常数. 由此他们首次给出显式上界:

$$G(k)\leqslant(k-2)2^{k-1}+5\ (k\geqslant 3). \tag{5}$$

维诺格拉多夫(Виноградов, И. М.)于 1924 年用他独创的三角和方法得到以下二结果:

1. 若要求渐近式(4)成立, 则有

$$G(k)\leqslant 2k^2(2\log k+\log\log k+5)\ (k\geqslant 4). \tag{6}$$

2. 若放弃(4)式, 只要求不等式

$$R_s(n)>0 \tag{7}$$

成立, 则可得当 $k>170000$ 时,

$$G(k)<k(2\log k+4\log\log k+2\log\log\log k+13). \tag{8}$$

另一方面, 有 $G(k)>k\ (k\geqslant 2)$, 因此(8)式的主阶 $k\log k$ 已基本上是最好可能的了. 在(4)成立时, 华罗庚得到比(6)稍好的估计

$$G(k)\leqslant 2k^2(2\log k+\log\log k+2.5)\ (k>10). \tag{9}$$

1962—1966 年间, 卡拉楚巴(Karacuba, A. A.)提出一种 p-adic 形式的维诺格拉多夫方法, 并于 1985 年证得: 在(7)成立时有

$$G(k)<2k(\log k+\log\log k+6)\ (k\geqslant 4000). \tag{10}$$

对于较大的 k, 这是目前已知最好的结果. 对较小的 k, 陈景润于 1958 年得到 $G(k)\leqslant k(3\log k+5.2)$ ($k\geqslant 15$), 沃恩(Vaughan, R. C.)于 1977 年改进为 $G(k)\leqslant k(3\log k+4.2)$ ($k\geqslant 9$). 1988 年, 沃恩在德国 Oberwolfach 召开的国际数论会上宣布得到以下结果:

$G(5)\leqslant 19$, $G(6)\leqslant 29$, $G(7)\leqslant 41$, $G(8)\leqslant 57^*$,
$G(9)\leqslant 75$, $G(10)\leqslant 93$, $G(11)\leqslant 109$,
$G(12)\leqslant 125$, $G(13)\leqslant 141$, $G(14)\leqslant 156$,

$G(15)\leqslant 171$，$G(16)\leqslant 187$，$G(17)\leqslant 202$，

$G(18)\leqslant 217$，$G(19)\leqslant 232$，$G(20)\leqslant 248$.

他还于 1986 年证明了(4)式对 $k=3$ 及 $s\geqslant 8$ 时成立. 对于 $G(k)$ 的精确值，目前知之甚少：$G(2)=4$（拉格朗日(Lagrange，J.-L.)，1770 年）；$G(4)=16$（达文波特(Davenprt，H.)，1939 年）. 此外，1943 年，林尼克(Линник，Ю. В.)证明了 $G(3)\leqslant 7$；1990 年，伯吕登(Brudern，J.)证明了 $G(5)\leqslant 18$；1993 年，沃恩证明了 $G(8)\leqslant 42$. 哈代与李特尔伍德的一个猜想可以推出如下猜测：

1. 对 $k=2^m$ 及 $m\geqslant 2$ 有 $G(k)=4k$.

2. 对其他情形，皆有 $G(k)\leqslant 2k+1$.

除了个别情形，这两个猜想至今尚未解决.

欧拉猜想(Euler's conjecture)　见“华林问题”.

黎曼ζ函数(Riemann zeta function)　数论中一个重要函数. 瑞士数学家欧拉(Euler，L.)最早把

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

作为实变数 s 的函数来研究，对 $s>1$ 他得到著名的欧拉乘积

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}(1-p^{-s})^{-1}.$$

黎曼(Riemann，G. F. B.)于 1859 年首次把它作为复变数 s 的函数来研究，此即黎曼ζ函数，记为 $\zeta(s)$. 黎曼把

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\ (\mathrm{Re}s>1)$$

解析开拓成除在 $s=1$ 有一个一阶极点外处处解析的函数. 证明了它满足函数方程

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s).$$

对 $\mathrm{Re}s>1$，它仍有欧拉乘积公式. 对 $\mathrm{Re}s>1$ 它没有零点，对 $\mathrm{Re}s<0$，它仅在实轴上有显然零点 $s=-2n$ $(n\in\mathbb{N})$. 从而它可能有的零点都在带状区域 $0\leqslant\mathrm{Re}s\leqslant 1$（临界域）中. 又在 $0\leqslant s\leqslant 1$ 中它无(实)零点，因此所有在带域 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ 中的零点(若存在的话，称为非显然零点)必均为复零点. 这些都是黎曼所证明的结果. 黎曼还对此函数提出如下六个猜想：

1. $\zeta(s)$ 在带状区域 $0\leqslant\mathrm{Re}s\leqslant 1$ 有无穷多个零点.

2. 若用 $N(T)$ 表示 $\zeta(s)$ 在矩形 $0\leqslant\mathrm{Re}s\leqslant 1$，$0<\mathrm{Im}s<T$ 中的零点个数，则

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}T\log T-\frac{1+\log(2\pi)}{2\pi}T+O(\log T).$$

3. 若用 $\rho=\beta+\mathrm{i}\gamma$ 表示 $\zeta(s)$ 的非显然零点，则 $\sum|\rho|^{-2}$ 收敛，而 $\sum|\rho|^{-1}$ 发散.

4. 整函数

$$\xi(s)=\pi^{-\frac{1}{2}s}(s-1)\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$$

可以表成无穷乘积

$$a\mathrm{e}^{bs}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\mathrm{e}^{\frac{s}{\rho}},$$

ρ 经过 $\zeta(s)$ 的全体非显然零点，且此无穷乘积为绝对收敛.

5. $\zeta(s)$ 的所有非显然零点都在直线 $\mathrm{Re}s=\frac{1}{2}$ 上.

6. 若定义

$$\prod(x)=\sum_{2\leqslant n\leqslant x}\frac{\Lambda(n)}{\log n}$$

及

$$\prod{}_0(x)=\frac{1}{2}\left(\pi(x+0)+\prod(x-0)\right),$$

则有公式(称为黎曼素数公式)

$$\prod{}_0(x)=\mathrm{li}\,x-\sum_{\rho}\mathrm{li}\,x^{\rho}+\int_x^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(u^2-1)u\log u}-\log 2\ \ (x>1),$$

这里 $\mathrm{li}\,x^{\rho}=\mathrm{li}\,\mathrm{e}^{\rho\log x}$，而

$$\mathrm{li}\mathrm{e}^{w}=\int_{-\infty+vi}^{u+vi}\frac{\mathrm{e}^{Z}\mathrm{d}z}{z},\quad w=u+\mathrm{i}v, v\gtrless 0.$$

阿达马(Hadamard，J.)于 1893 年证明了猜想 1，3 与 4，在 4 中有

$$a=\frac{1}{2},\quad b=\log 2+\frac{1}{2}\log\pi-1-\frac{1}{2}\gamma,$$

γ 为欧拉常数. 曼戈尔特(Mangoldt，H. C. F. von)于 1894—1905 年证明了猜想 2 与 6. 至此，只有猜想 5 未获得解决，此即当今著称的黎曼猜想.

黎曼猜想(Riemann hypothesis)　数论中的一个著名猜想：黎曼ζ函数的全部非显然零点都在直线 $\mathrm{Re}s=1/2$ 上. 它与哥德巴赫猜想合起来即为希尔伯特第八问题，至今仍未解决. 若用 $N_0(T)$ 表示 $\zeta(s)$ 在直线段 $\mathrm{Re}s=1/2$，$0<\mathrm{Im}s<T$ 上的零点个数，则黎曼猜想等价于：$N(T)=N_0(T)$（对 $T>0$）. 哈代(Hardy，G. H.)于 1914 年首先证明：$\zeta(s)$ 在直线 $\mathrm{Re}s=1/2$ 上有无穷多个零点，即

$$\lim_{T\to+\infty}N_0(T)=+\infty.$$

哈代与李特尔伍德(Littlewood，J. E.)于 1921 年证明：存在正数 A_1 使 $N_0(T)>A_1T$. 塞尔贝格(Selberg，A.)于 1942 年证明：存在正数 A_2，使 $N_0(T)>A_2N(T)$；闵嗣鹤于 1956 年首先定出 $A_2>1/60000$. 莱云森(Levinson，N.)于 1974 年作出重大改进，他得到 $A_2>0.342$. 关于 A_2 估计已知最好的结果是 $A_2>0.3658$，系由康利(Conrey，J. B.)于 1983 年得到的. 关于 $\zeta(s)$ 的各阶导数零点，也有类似的结果. 此外，一直有人致力于 $\zeta(s)$ 非显然零点的计算. 格拉姆(Gram，J. P.)于 1903 年算出 $\zeta(s)$ 在上半平面的

前 15 个零点都在直线 $\mathrm{Re}s=1/2$ 上. 这方面目前已知最新的结果属于范德伦(van de Lune, J.)、特里尔(te Riele, H. J. J.)与云特(Winter, D. T.), 他们于 1986 年通过计算证明: $\zeta(s)$ 的前 15 亿个非显然零点(上半平面中)都在直线 $\mathrm{Re}s=1/2$ 上, 且都是一阶零点.

黎曼ζ函数的零点(zeros of Riemann ζ function) 解析数论与函数论所研究的一个重要问题. 它的研究与数论中许多著名问题都有密切的联系. 以下是与 $\zeta(s)$ 零点有关的一些最基本的结果:

1. $\zeta(s)$ 的无穷多个非显然零点均在带状区域 $0\leqslant\mathrm{Re}s\leqslant 1$ 中, 且关于直线 $\mathrm{Re}s=1/2$ 及关于实轴均为对称.

2. 若定义函数

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

则 $\xi(s)$ 是一阶整函数, 满足函数方程 $\xi(s)=\xi(1-s)$, $\xi(s)$ 有无穷多个零点 ρ_n, $0\leqslant\mathrm{Re}\rho_n\leqslant 1$, 这些零点恰为 $\zeta(s)$ 的全部非显然零点. 级数 $\sum|\rho_n|^{-1}$ 发散, 而对任给 $\varepsilon>0$, 级数 $\sum|\rho_n|^{-1-\varepsilon}$ 收敛. 还有无穷乘积展开式

$$\xi(s)=\mathrm{e}^{A+Bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)\mathrm{e}^{\frac{s}{\rho_n}},$$

其中 $A=-\log 2$, $B=\frac{1}{2}\log\pi+\log 2-1-\frac{1}{2}\gamma$ (γ 为欧拉常数).

3. 有(设 s 不为 $\zeta(s)$ 的零点)

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\frac{-1}{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)+B_0,$$

这里 $B_0=-1+\log 2\pi$.

4. 对任意实数 T 有(ρ 过 $\zeta(s)$ 的非显然零点)

$$\sum_{\rho}\frac{1}{1+(T-\gamma)^2}=O(\log(|T|+2)),$$

这里 $\gamma=\mathrm{Im}\,\rho$.

5. 若 $T\geqslant 2$ 且 T 不是 $\zeta(s)$ 非显然零点之纵坐标, 则

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{7}{8}+S(T)+O\left(\frac{1}{T}\right),$$

这里, 若定义

$$S(T)=\frac{1}{\pi}\arg\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}T\right),$$

则还有 $S(T)=O(\log T)$. 由此可得, 对 $T\geqslant 2$ 有

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T).$$

该公式中的余项估计一直没有得到改进.

黎曼ζ函数的无零点区域(zero-free region for Riemann ζ function) 解析数论的一个重要问题. 许多重要的数论问题都与这一问题有密切的联系. 例如著名的素数定理的证明就有赖于 ζ 函数无零点区域的结果. 1899—1900 年, 瓦莱·普桑(vallée-Poussin, C. de la)首先给出了下形之无零点区域(设 $s=\sigma+\mathrm{i}t$)

$$\mathrm{Re}s>1-\frac{a_1}{\log(|t|+2)}, \qquad (1)$$

其中 a_1 为一正的绝对常数. 李特尔伍德(Littlewood, J. E.)于 1922 年曾用估计三角和方法得到一个改进的结果. 利用维诺格拉多夫(Виноградов, И. М.)独创的三角和估计方法, 维诺格拉多夫本人与科罗博夫(Коробов, Н. М.)于 1958 年相互独立地得到下列之无零点区域

$$\mathrm{Re}s>1-\frac{a_2}{(\lg(|t|+2))^{\frac{2}{3}}}, \qquad (2)$$

它仍是目前已知最好的结果. 本桥洋一(Motohashi, Y.)于 1981 年用筛法代替复变数方法证明了下形之无零点区域

$$\mathrm{Re}s>1-\frac{a_3}{((\lg(|t|+3))^{\frac{2}{3}}(\lg\lg(|t|+3))^{\frac{1}{3}})}. \qquad (3)$$

蒙哥马利(Montgomery, H. L.)于 1971 年也用零点增值原理给出(3)的一个证明. 在蒙哥马利的证明中要用到里歇特(Richert, H. E.)于 1967 年所做关于 $\zeta(s)$ 在 $\mathrm{Re}s=1$ 附近的一个改进的估计. (3)比(2)要略好一点. 根据黎曼猜想, $\zeta(s)$ 在 $\mathrm{Re}s>1/2$ 均无零点. 现有的无零点区域的结果与猜想的结果还相差很远. 现在甚至还无法证明这样"简单"的结论: 存在某个正数 $\delta<1/2$, $\zeta(s)$ 在 $\mathrm{Re}s>1-\delta$ 中没有零点.

注: 关于(1)型无零点区域中 a_1 的最好估计值是罗塞(Rosser, J. B.)与施恩费尔德(Schoenfeld, L.)于 1975 年得到的 $a_1=1/9.645\,908\,801$.

群的特征(character of group) 群论的一个重要概念. 设 G 为任一群, 定义在 G 上的一个复值函数 f 称为 G 的一个特征, 若它满足以下条件: 1. 积性: 对任何 $a,b\in G$ 有 $f(ab)=f(a)f(b)$. 2. 存在至少一个 $c\in G$ 使 $f(c)\neq 0$. 若 G 为一个 n 阶有限群, e 为其单位元, 则对 G 上的任何特征 f, 皆有:

1. $f(e)=1$.

2. 对任何 $a\in G$, $f(a)$ 皆为 n 次单位根.

3. G 恰有 n 个不同的特征.

设 G 为一个 n 阶有限群, 定义 G 上的函数 f_1 如下: 对每个 $a\in G$ 有 $f_1(a)=1$. f_1 为 G 上一个特征, 称为主特征. 设 G 为一个 n 阶阿贝尔群, 它的 n 个特征记为 $f_1, f_2, \cdots, f_n$(其中 f_1 仍表示主特征). 对任何两个特征 f_i 与 f_j($1\leqslant i,j\leqslant n$), 定义它们的乘积 f_if_j 如下

$$(f_if_j)(a)=f_i(a)f_j(a)\quad(\forall\, a\in G).$$

于是, $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ 在此乘法下构成一个 n 阶阿贝尔群 $\hat{G}$, 称之为 G 的特征群. f_1 即为 $\hat{G}$ 之单位元, 且

$f_i^{-1}=1/f_i$. 定义特征$\overline{f_i}$如下：$\overline{f_i}(a)=\overline{f_i(a)}$，$\forall\ a\in G$，称之为 f_i 的共轭特征. $\overline{f_i}(a)=1/f_i(a)=f_i(a^{-1})$. 特征满足如下的直交关系（$G$ 为 n 阶阿贝尔群）：

$$1.\ \sum_{a\in G}f_j(a)=\begin{cases}n & (f_j=f_1\text{ 为主特征}),\\ 0 & (\text{其他情形}).\end{cases}$$

$$2.\ \sum_{j=1}^{n}f_j(a)=\begin{cases}n & (a=e\text{ 为单位元}),\\ 0 & (\text{其他情形}).\end{cases}$$

一般地，群 G 的特征是 G 到某个标准的阿贝尔群的同态.

群的主特征(principal character of group)　见“群的特征”.

特征群(character group)　见“群的特征”.

群的共轭特征(conjugate character of group)　见“群的特征”.

狄利克雷特征(Dirichlet character)　一个重要的数论函数. 用 $\hat{a}$ 表示整数 a 关于模 k 的剩余类，定义剩余类乘法如下：$\hat{a}\cdot\hat{b}=\widehat{ab}$. 易见，模 k 的简化剩余系在此乘法下做成一个 $\varphi(k)$阶的有限阿贝尔群，记为 $U(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$. 于是，群 $U(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$上恰有$\varphi(k)$个不同的特征，记为 $f_1,f_2,\cdots,f_{\varphi(k)}$，其中 f_1 为主特征. 对于 $U(\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$上每个特征 f_j，相应定义一个数论函数 x_j 如下

$$x_j(n)=\begin{cases}f_j(n) & ((n,k)=1),\\ 0 & (\text{其他情形}).\end{cases}$$

称函数 x_j 为模 k 的狄利克雷特征，x_1 称为狄利克雷主特征. 狄利克雷特征与群特征有许多相似的性质，例如正交性等.

狄利克雷主特征(Dirichlet principal character)　见“狄利克雷特征”.

主特征(principal character)　一种特殊的狄利克雷特征. 设 χ 为模 k 之狄利克雷特征（以下均简称为特征），若

$$\chi(n)=\begin{cases}1 & ((n,k)=1),\\ 0 & (\text{其他情形}),\end{cases}$$

则称 χ 为主特征. 以下用 χ_1 表示主特征. 设 χ 为模 k 的特征. 若存在 k 的一个正因子 d，使对所有满足 $(n,k)=1$，$n\equiv1\pmod d$的 n 均有 $\chi(n)=1$，则称 d 为 χ 的一个简化模. k 是 χ 自身的一个简化模. 又，当且仅当 $\chi=\chi_1$ 时，1 是 χ 的一个简化模. 称特征 χ 为原特征，若 χ 没有小于 k 的简化模. 反之，称 χ 为非原特征. 而称最小的简化模 d 为 χ 的前导子. 若 χ 为模 k 的一个特征，d 为 χ 的前导子，则 χ 可以表为下形之乘积 $\chi(n)=\psi(n)\chi_1(n)$（对所有 n），这里 χ_1 为模 k 之主特征，ψ 是模 d 的一个原特征. 对一切 $(n,k)=1$ 有 $\chi(n)=\psi(n)$. 把 ψ 称为与 χ 对应的原特征，而把 χ 称为原特征 ψ 的导出特征. 对任一特征 $\chi(\mathrm{mod}\ k)$，其前导子 d 及模 d 之原特征 ψ 是惟一确定的；反过来，对正整数 k 的每一个正因子 d 及模 d 的任一个原特征 ψ，必存在模 k 的惟一特征 χ，使对一切$(n,k)=1$ 有 $\chi(n)=\psi(n)$.

原特征(primitive character)　见“主特征”.

简化模(reduced modulus)　见“主特征”.

非原特征(imprimitive character)　见“主特征”.

前导子(conductor)　见“主特征”.

导出特征(induce character)　见“主特征”.

特征和(character sum)　各种含有特征的和式. 它们的计算或估计在数论中有重要的意义，但目前在这方面还知之甚少. 下面仅举几个常用的结果：

1. 高斯和. 称

$$G(n,\chi)=\sum_{m=1}^{k}\chi(m)\mathrm{e}^{2\pi imn/k}$$

为与特征 $\chi(\mathrm{mod}\,k)$相对应的高斯和，简记 $\tau(\chi)=G(1,\chi)$；当 $\chi=\chi_1$ 为主特征时，记 $C_k(n)=G(n,\chi_0)$，称 $C_k(n)$为拉马努金和. 高斯和有以下简单性质：

1）可分性：$G(n,\chi)=\overline{\chi}(n)\tau(\chi)$（当$(n,k)=1$时）.

2）若 χ_i,χ_j 分别是以 k_i,k_j 为模的特征，$(k_i,k_j)=1$，定义 $\chi(n)=\chi_i(n)\chi_j(n)$，则 χ 是以 $k=k_ik_j$ 为模的特征，且有分解式

$$G(n,\chi)=\chi_i(k_j)\chi_j(k_i)G(n,\chi_i)G(n,\chi_j).$$

3）若 χ 为模 k 之原特征，且$(n,k)>1$，则有 $G(n,\chi)=0$.

4）一般情形

$$|G(n,\chi)|\leqslant\frac{\varphi(k)\sqrt{\dfrac{k}{(n,k)}}}{\varphi\left(\dfrac{k}{(n,k)}\right)}.$$

5）若 $\psi(\mathrm{mod}\,d)$是与 $\chi(\mathrm{mod}\,k)$对应的原特征，则

$$\tau(\chi)=\psi(k/d)\mu(k/d)\tau(\psi).$$

6）对任意特征 $\chi\ (\mathrm{mod}\,k)$有 $|\tau(\chi)|\leqslant\sqrt{k}$. 若 χ 为原特征，则有等式成立，即 $|\tau(\chi)|=\sqrt{k}$；若 χ 为实原特征，模 k 为奇数，则

$$\tau(\chi)=\begin{cases}\pm\sqrt{k} & (k\equiv1\pmod 4),\\ \pm\mathrm{i}\sqrt{k} & (k\equiv3\pmod 4).\end{cases}$$

7）$C_k(n)$为 k 之积性函数，且有

$$C_k(n)=\frac{\varphi(k)}{\varphi\left(\dfrac{k}{(n,k)}\right)}\mu\left(\frac{k}{(n,k)}\right).$$

2. 波利亚-维诺格拉多夫不等式. 波利亚(Polya, G.)与维诺格拉多夫(Виноградов, И. М.)于1918 年相互独立地证明了下述不等式：若 χ 为模 k 非主特征，则

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}\chi(n)\right|<2\sqrt{k}\log k,$$

M 与 $N>0$ 为任意整数；又当 χ 为原特征($k\geqslant3$)时有更精密的不等式

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}\chi(n)\right|<\sqrt{k}\log k.$$

舒尔(Schur,J.)于 1918 年对 χ 为原特征得到

$$\max_N\left|\sum_{n\leqslant N}\chi(n)\right|>\frac{1}{2\pi}\sqrt{k}.$$

佩利(Paley,R. E. A. C.)于 1932 年构造出一列无穷多个不同的二次特征 $\chi_{k_j}(j=1,2,\cdots)$，使

$$\max_N\left|\sum_{n\leqslant N}\chi_{k_j}(n)\right|\geqslant\frac{1}{7}\sqrt{k_j}\log\log k_j.$$

蒙哥马利(Montgomery,H. L.)与沃恩(Vaughan,R. C.)于 1979 年在广义黎曼猜想为真的假设下证明了对非主特征 χ 有

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}\chi(n)\right|\ll\sqrt{k}\log\log k.$$

由此可见，波利亚-维诺格拉多夫不等式与最好可能结果已相当接近. 此外，当 $N<2\sqrt{k}\log k$ 时，伯吉斯(Burgess,D. A.)对此不等式做了若干重要的改进.

3. 大筛法型特征和估计：

1)若 $k\geqslant1$，a_n 为复数，则对任意整数 M 及 $N>0$ 有

$$\sum_{\chi(\mathrm{mod}\,k)}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2=\varphi(k)\sum_{\substack{h=1\\(h,k)=1}}^{k}\left|\sum_{\substack{n=M+1\\n\equiv h(\mathrm{mod}\,k)}}^{M+N}a_n\right|^2.$$

2) 在上述条件下有

$$\sum_{\chi(\mathrm{mod}\,k)}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2$$
$$\leqslant\varphi(k)1+\left[\frac{N-1}{k}\right]\sum_{\substack{n=M+1\\(n,k)=1}}^{M+N}|a_n|^2.$$

3) 加拉格尔不等式，若 $\sum\limits_{\chi}{}^{*}$ 表示过模 k 的所有原特征求和，a_n 为任意复数 $e(x)=\mathrm{e}^{2\pi ix}$，$M$ 与 $N>0$ 为整数，则

$$\frac{k}{\varphi(k)}\sum_{\chi}{}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2$$
$$\leqslant\sum_{\substack{h=1\\(h,k)=1}}^{k}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_ne\left(\frac{hn}{k}\right)\right|^2.$$

4) 在同样条件下，若 $Q\geqslant1$，则有

$$\sum_{k\leqslant Q}\frac{k}{\varphi(k)}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\,k)}{}^{*}\left|\sum_{n=M+1}^{M+N}a_n\chi(n)\right|^2$$
$$\leqslant(N+Q^2)\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2.$$

高斯和(Gauss sum)　见“特征和”.

拉马努金和(Ramanujan sum)　见“特征和”.

波利亚-维诺格拉多夫不等式(Polys-Vinogradov inequality)　见“特征和”.

大筛法型特征和估计(large sieve type charactersum estimate)　见“特征和”.

狄利克雷 L 函数(Dirichlet L-function)　数论中的一个重要函数. 它可以看成是黎曼 ζ 函数的推广. 它与一系列重大数论问题均有密切的联系. 设 χ 为模 k 的特征，称复变数 s 的函数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\ (\mathrm{Re}s>1)$$

为狄利克雷 L 函数. 当 $\mathrm{Re}s>1$ 时，L 函数有类似的欧拉乘积公式

$$L(s,\chi)=\prod_p(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}.$$

不仅如此，L 函数还与 ζ 函数有许多类似的性质及研究问题.

狄利克雷级数(Dirichlet series)　研究数论的一个重要工具. 设 λ_n 为一列实数，$0\leqslant\lambda_1<\lambda_2<\cdots$，且

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty,$$

又，a_n 为一列复数，$s=\sigma+\mathrm{i}t$ 为复变数，称

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{-\lambda_ns}\qquad(*)$$

为广义狄利克雷级数，λ_n 称为它的指数，a_n 称为系数. 很多重要的函数都是广义狄利克雷级数的特例：

1. 取 $a_n=1$，$\lambda_n=\log n$，即得黎曼 ζ 函数.

2. 取 $a_n=\chi(n)$ 为模 k 之特征，$\lambda_n=\log n$，即得关于特征 χ 的狄利克雷 L 函数.

3. 设 $a>0$，取 $a_n=1$，$\lambda_n=\log(n-1+a)$，即得

$$\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+a)^{-s},$$

这是熟知的胡尔维茨(Hurwitz,A.)ζ 函数.

广义狄利克雷级数有以下基本性质：

1. 定义部分和为

$$A(u,s)=\sum_{\lambda_n\leqslant u}a_n\mathrm{e}^{-\lambda_ns},$$

设 $s_0=\sigma_0+\mathrm{i}t_0$ 为给定复数，α 为给定实数，若 $A(u,s_0)\ll\mathrm{e}^{\alpha u}$，则：

1) 对任给正数 δ，H_1 及 H_2，级数($*$)在区域 $|t-t_0|\leqslant H_1(\sigma-\sigma_0)\mathrm{e}^{H_2(\sigma-\sigma_0)}$，$\sigma\geqslant\sigma_0+\alpha+\delta$ 中必一致收敛.

2) 级数($*$)必在半平面 $\sigma>\sigma_0+\alpha$ 内收敛，它所确定的函数 $A(s)$ 必在此半平面内解析，且

$$A(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{-\lambda_ns}$$
$$=(s-s_0)\int_{\lambda_1}^{\infty}A(u,s_0)\mathrm{e}^{-u(s-s_0)}\mathrm{d}u$$

(对 $\sigma>\sigma_0+\alpha$).

2. 对每个狄利克雷级数($*$)，必有惟一实数 σ_c

（可取$+\infty$或$-\infty$）存在，当$\mathrm{Re}s>\sigma_c$时，级数（＊）收敛，而当$\mathrm{Re}s<\sigma_c$，级数（＊）发散，称σ_c为级数（＊）的收敛横坐标，半平面$\sigma>\sigma_c$称为级数（＊）的收敛半平面.

3. 对每个狄利克雷级数（＊），必有惟一实数σ_a（可取$+\infty$或$-\infty$）存在，当$\mathrm{Re}s>\sigma_a$时级数（＊）绝对收敛，而$\mathrm{Re}s<\sigma_a$时它不绝对收敛，σ_a称为级数（＊）的绝对收敛横坐标，半平面称为绝对收敛半平面.

4. 对广义狄利克雷级数（＊），恒有

$$0\leqslant\sigma_a-\sigma_c\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\lambda_n}.$$

5. 设级数（＊）有有限的收敛横坐标σ_c，若存在$\sigma_0>\sigma_c$，使当$\mathrm{Re}s\geqslant\sigma_0$时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{-\lambda_n s}=0,$$

则必有一切$a_n=0$（惟一性）.

6. 若级数当$\mathrm{Re}s=\alpha$时绝对收敛，则

$$a_n=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A(\alpha+\mathrm{i}t)\mathrm{e}^{\lambda_n(\alpha+\mathrm{i}t)}\mathrm{d}t\quad(n=1,2,\cdots),$$

这里

$$A(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{-\lambda_n s}$$

是由级数（＊）确定的，在半平面$\mathrm{Re}s>\sigma_c$内为解析的函数.

狄利克雷级数的收敛横坐标(abscissa of the convergence for Dirichlet series)　见“狄利克雷级数”.

狄利克雷级数的收敛半平面(half-plane of convergence for Dirichlet series)　见“狄利克雷级数”.

狄利克雷 L 函数的函数方程(functional equation of Dirichlet L-fuction)　有关L函数所满足的一个方程. 若χ为模k之原特征，则当$\chi(-1)=1$时有

$$\pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}k^{\frac{1}{2}(1-s)}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)L(1-s,\overline{\chi})$$
$$=\frac{\sqrt{k}}{\tau(\chi)}\pi^{-\frac{1}{2}s}k^{\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)L(s,\chi),$$

而当$\chi(-1)=-1$时有

$$\pi^{-\frac{1}{2}(2-s)}k^{\frac{1}{2}(2-s)}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)L(1-s,\overline{\chi})$$
$$=\frac{\mathrm{i}\sqrt{k}}{\tau(\chi)}\pi^{-\frac{1+s}{2}}k^{\frac{1+s}{2}}\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)L(s,\chi).$$

这些称为L函数的函数方程. 若定义

$$\delta=\begin{cases}0 & (\chi(-1)=1),\\ 1 & (\chi(-1)=-1),\end{cases}$$

以及

$$\xi(s,\chi)=\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+\delta}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s,\chi),$$

则上两式可以统一为

$$\xi(1-s,\overline{\chi})=\frac{\mathrm{i}^{\delta}\sqrt{k}}{\tau(\chi)}\xi(s,\chi),$$

它称为对称形式的函数方程.

狄利克雷 L 函数的零点(zeros of Dirichlet L function)　解析数论与函数论所研究的一个重要问题. 它与数论中许多著名问题的研究有密切的联系. 以下是一些最基本的结果：

1. $\chi(-1)=1$时，在半平面$\mathrm{Re}s\leqslant0$内$L(s,\chi)$只有零点$s=0,-2,-4,\cdots$；当$\chi(-1)=-1$时，在$\mathrm{Re}s\leqslant0$时只有零点$s=-1,-3,-5,\cdots$，它们称为显然零点. 此外，$L(s,\chi)$在带状区域$0\leqslant\mathrm{Re}s\leqslant1$中有无穷多个非显然零点，这些零点关于直线$\mathrm{Re}s=1/2$为对称.

2. 若定义

$$\xi(s,\chi)=\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{1}{2}(s+\delta)}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s,\chi),$$

这里

$$\delta=\begin{cases}0 & (\chi(-1)=1),\\ 1 & (\chi(-1)=-1),\end{cases}$$

则有函数方程

$$\xi(1-s,\overline{\chi})=\frac{\mathrm{i}^{\delta}\sqrt{k}}{\tau(\chi)}\xi(s,\chi).$$

若χ为模k之原特征，则$\chi(s,\chi)$为一阶整函数，它有无穷多个零点ρ_n，$0\leqslant\mathrm{Re}\rho_n\leqslant1$，$\rho_n\neq0$，这些零点恰为$L(s,\chi)$的全部非显然零点. 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\rho_n|^{-1}$$

发散，而对任给$\varepsilon>0$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\rho_n|^{-1-\varepsilon}$$

收敛. 还有无穷乘积展式

$$\xi(s,\chi)=\mathrm{e}^{A(\chi)+B(\chi)s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)\mathrm{e}^{s/\rho_n},$$

$A(\chi)$与$B(\chi)$为与χ有关的常数，且

$$\mathrm{Re}B(\chi)=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho_n}+\frac{1}{\overline{\rho}_n}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\frac{1}{\rho_n}.$$

3. 若χ为原特征，δ定义同上，s不为$L(s,\chi)$之零点，则有

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{k}{\pi}\right)+B(\chi)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'\left(\frac{s+\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right).$$

4. 若χ为$\mathrm{mod}\,k\,(k\geqslant3)$之原特征，则对任意实

数 T 有

$$\sum_{\rho}\frac{1}{1+(T+\gamma)^2}=O(\log(k(|T|+2))),$$

这里 ρ 经过 $L(s,\chi)$ 所有非显然零点，而 $\gamma=\mathrm{Im}\rho$.

5. 若 χ 为 $\bmod k$ 之原特征，用 $N(T,\chi)$ 表示 $L(s,\chi)$ 在矩形 $0<\mathrm{Re}s<1$，$|\mathrm{Im}s|<T$ 中之零点个数，且 $\pm T$ 不是 L 函数的零点纵坐标，则有

$$N(T,\chi)=\frac{T}{\pi}\log\left(\frac{kT}{2\pi}\right)-\frac{T}{\pi}-\frac{1}{4}+S(T,\chi)+O\left(\frac{1}{T}\right),$$

其中

$$S(T,\chi)=\frac{1}{\pi}\left(\arg L\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}T,\chi\right)-\arg L\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}T,\chi\right)\right),$$

并有 $S(T,\chi)=O(\log(kT))$. 于是，对任何 $T\geqslant 2$ 有

$$N(T,\chi)=\frac{T}{\pi}\log\left(\frac{kT}{2\pi}\right)-\frac{T}{\pi}+O(\log(kT)).$$

关于 L 函数的零点，有许多重要的猜想至今未得到证明. 其中最为著名的是广义黎曼猜想，简记为 GRH：对模 k 的任意特征，L 函数的全部非显然零点均在直线 $\mathrm{Re}s=1/2$ 上. 赫克(Hecke，E.)曾猜想，当 χ 为实特征时，对任何实的 $s\in(0,1)$，皆有 $L(s,\chi)\neq 0$. 这一猜想至今也未得到证明. 鲁米尼(Rumely，R.)于 1993 年对 GRH 做了部分验证工作，他得到前导子 $q\leqslant 13$ 的所有本原的 $L(s,\chi)$，以及直到 $t=2500$，GRH 都是正确的.

广义黎曼猜想(Generalized Riemann hypothesis)　见“狄利克雷 L 函数的零点”.

***L* 函数的无零点区域**(zero-free region for L function)　解析数论中的一个重要问题. 许多重要的数论问题(例如算术级数中的素数定理等)都与它有密切的联系. 对每个固定模 k 的特征 χ 对应的 L 函数，可以应用与 ζ 函数中相似的方法得到相应的结果. 但是，由于实特征对应的 L 函数可能存在接近 1 的实零点，所以其结论有所不同. 这种类型的结果首先是由格朗沃尔(Gronwall，T. H.)与蒂奇马什(Titchmarsh，E. Ch.)独立证明的.

定理 1：存在绝对常数 $c_1>0$，使：

1. 当 χ 为模 k 复特征时，在域

$$\mathrm{Re}s>1-c_1(\log(k(|t|+2)))^{-1}\qquad(1)$$

中 $L(s,\chi)\neq 0$.

2. 当 χ 为模 k 实特征时，$L(s,\chi)$ 在域(1)中没有复零点，但可能(也至多)有一个实零点 $\tilde{\beta}$，且此种 $\tilde{\beta}$ 若存在，则必为一阶零点.

根据麦克利(McCurley，K. S.)于 1984 年所得的结果知，当 $k\geqslant 5$ 时，可取 $c_1=1/9.645\,908\,801$. 关于实原特征对应的 L 函数可能存在的实零点，有如下的兰道定理.

定理 2：若 χ_1 与 χ_2 分别是模 k_1 与 k_2 的实原特征，β_j 分别为 $L(s,\chi_j)(j=1,2)$ 的实零点，则必存在绝对常数 $c_2>0$，使

$$\min(\beta_1,\beta_2)<1-c_2(\log k_1k_2)^{-1}.\qquad(2)$$

仍由麦克利的结果知，当 $k_1k_2\geqslant 13$ 时可取

$$c_2=(15-10\sqrt{2})/(5-\sqrt{5}).$$

1949－1950 年间，罗塞(Rosser，J. B.)经计算证明：若 χ 是模 $k\leqslant 986$ 的实原特征，则 $L(s,\chi)$ 必没有正的实零点. 但至今为止，人们对这种实零点仍然知之甚少，这是 L 函数研究中的一个主要困难. 对这种实零点的上界，有以下两个重要结果.

定理 3：存在绝对常数 $c_3>0$，对任何实特征 $\chi(\bmod k)(k\geqslant 3)$，当

$$\sigma\geqslant 1-c_3(\sqrt{k}\log^2 k)^{-1}\qquad(3)$$

时必有 $L(\sigma,\chi)\neq 0$.

虽然这一结果很弱，但是它的优点是常数 c_3 可以有效计算出来. 这一结果属于佩奇(Page，A.).

定理 4：对任给 $\varepsilon>0$，存在常数 $c_4(\varepsilon)>0$，使对任一实原特征 $\chi(\bmod k)(k\geqslant 3)$，当

$$\sigma\geqslant 1-c_4(\varepsilon)k^{-\varepsilon}\qquad(4)$$

时有 $L(\sigma,\chi)\neq 0$.

此结果显然优于定理 3，但其中常数 $c_4(\varepsilon)$ 至今无法具体算出. 这个结果属于西格尔(Siegel，C. L.).

零点密度(density of zeros)　解析数论中的一个重要概念. 设 $1/2\leqslant\alpha\leqslant 1$，$T\geqslant 2$，$\chi$ 为模 $k\geqslant 1$ 的特征，$Q\geqslant 3$. 用 $N(\alpha,T)$ 表示 ζ 函数在区域

$$\alpha\leqslant\mathrm{Re}s\leqslant 1,\ |\mathrm{Im}s|\leqslant T\qquad(*)$$

中零点个数，用 $N(\alpha,T,\chi)$ 表示 $L(s,\chi)$ 在区域(*)中零点个数. 又定义：

$$N(\alpha,T,k)=\sum_{\chi(\bmod k)}N(\alpha,T,\chi),$$

$$N^*(\alpha,T,k)=\sum_{\chi(\bmod k)}{}^{*}N(\alpha,T,\chi),$$

这里 $\sum\limits_{\chi(\bmod k)}{}^{*}$ 表示过模 k 的所有原特征求和. 有：

$$N(\alpha,T)=N(\alpha,T,1),$$

$$N(\alpha,T,\chi)=N(\alpha,T,\chi^*),$$

$$N(\alpha,T,k)=\sum_{\chi(\bmod k)}N(\alpha,T,\chi^*),$$

这里 χ^* 是与 χ 对应的原特征. 所有这种类型的函数都称为零点密度函数. 人们关心的是下述类型的估计式：

$$N(\alpha,T)\ll T^{A_1(\alpha)(1-\alpha)}(\log T)^{B_1},$$

$$N(\alpha,T,k)\ll(kT)^{A_2(\alpha)(1-\alpha)}(\log kT)^{B_2},$$

$$\sum_{k\leqslant Q}N^*(\alpha,T,k)\ll(Q^2T)^{A_3(\alpha)(1-\alpha)}(\log QT)^{B_3},$$

它们统称为零点密度定理. 人们猜想可取 $A_1(\alpha)=$

$A_2(\alpha)=A_3(\alpha)=2$，而 B_1, B_2 与 B_3 为适当的正常数，或取 $A_1(\alpha)=A_2(\alpha)=A_3(\alpha)=2+\varepsilon$ 而 $B_1=B_2=B_3=0$. 这就是著名的零点密度猜想，现有的结果在 α 的某些范围内可得到相当甚至超过密度猜想的结论. 例如，赫胥黎(Huxley, M. N.)于 1972，1975 及 1977 年分别证明了可在上述密度定理中分别取：

$$A_1(\alpha)=\frac{12}{5},\quad B_1=27;$$

$$A_2(\alpha)=A_3(\alpha)=\frac{12}{5}+\varepsilon,\quad B_2=B_3=0.$$

零点密度定理有广泛而重要的应用. 它与线性素变数三角和估计、算术级数中最小素数问题、算术级数中素数分布、相邻素数差及哥德巴赫猜想等一系列重要问题均有密切的联系. 例如，由密度估计可以得到相邻素数差的对应结论. 若已知有估计

$$N(\alpha,T)\ll T^{c_1(1-\alpha)}(\log T)^{c_2}\quad(1/2\leqslant\alpha<1),$$

又存在 α_0 使有

$$N(\alpha,T)\ll T^{c_3(1-\alpha)}(\log T)^{c_4}\quad(1/2\leqslant\alpha_0\leqslant\alpha<1),$$

其中 $c_1>2$ 且 $c_1>c_3$，则对任意 $\varepsilon>0$ 有

$$\rho_{n+1}-\rho_n\ll\rho_n^{1-\frac{1}{c_1}}(\log\rho_n)^{c_5},$$

这里 $c_5=2+\varepsilon+c_6/c_1$，$c_6=(1+\varepsilon+c_2)(1-\alpha_0)^{-1}$.

零点密度定理(zero-density theorem)　见“零点密度”.

算术级数的素数定理(prime number theorem of arithmetic progression)　解析数论中的一个重要定理. 定义

$$\psi(x;k,l)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l(\operatorname{mod}k)}}\Lambda(n),$$

$$\pi(x;k,l)=\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l(\operatorname{mod}k)}}1.$$

基本定理：若 $3\leqslant k<x$，$(l,k)=1$，$1\leqslant l<k$，则存在绝对常数 $c>0$ 使

$$\psi(x;k,l)=\frac{x}{\varphi(k)}-\widetilde{E}(k)\chi(l)\frac{x^{\widetilde{\beta}}}{\varphi(k)\widetilde{\beta}}+O(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}),$$

$$\pi(x;k,l)=\frac{\operatorname{Li}x}{\varphi(k)}-\widetilde{E}(k)\frac{\widetilde{\chi}(l)}{\varphi(k)}\int_2^x\frac{u^{\widetilde{\beta}-1}}{\log u}\mathrm{d}u+O(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}),$$

其中

$$\widetilde{E}(k)=\begin{cases}1 & (\text{存在模 } k \text{ 的例外特征 } \widetilde{\chi}),\\ 0 & (\text{反之}),\end{cases}$$

$\widetilde{\beta}$ 表示与例外特征 $\widetilde{\chi}$ 对应的 $L(s,\widetilde{\chi})$ 相应的例外实零点. 利用佩奇(Page, A.)定理可得以下有实效的结果.

推论 1：若 $0<\varepsilon<1/2$，则当 $k\leqslant(\log x)^{2-\varepsilon}$ 时有：

$$\psi(x;k,l)=\frac{x}{\varphi(k)}+O(x\exp(-c(\log x)^{\varepsilon/3})),$$

$$\pi(x;k,l)=\frac{\operatorname{li}x}{\varphi(k)}+O(x\exp(-c(\log x)^{\varepsilon/3})).$$

如改用西格尔(Siegel, C. L.)定理，可得如下更好的结果，它称为西格尔-瓦尔菲施定理，但其中的常数是非实效的.

推论 2：对任意 $A>1$，当 $k\leqslant(\log x)^A$ 时有：

$$\psi(x;k,l)=\frac{x}{\varphi(k)}+O(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}),$$

$$\pi(x;k,l)=\frac{\operatorname{li}x}{\varphi(k)}+O(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}),$$

其中常数 c 与 A 有关.

伯努利多项式(Bernoulli's polynomial)　一种特殊的多项式. 将函数

$$g(t,z)=\frac{t\mathrm{e}^{xz}}{\mathrm{e}^t-1}$$

(z 是复数)展开成 z 的幂级数得

$$\frac{t\mathrm{e}^{tz}}{\mathrm{e}^t}-1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}B_n(z),$$

其中多项式 $B_n(z)$ 称为第 n 个伯努利多项式，而数 $B_n(0)$ 称为第 n 个伯努利数. 函数 $g(t,z)=t\mathrm{e}^{tz}/\mathrm{e}^t-1$ 称为伯努利多项式的母函数，而 $t/\mathrm{e}^t-1=g(t)$ 称为伯努利数的母函数. 伯努利多项式有以下重要性质：

1. $B_n(z)$ 是 z 的多项式，并由等式

$$B_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_kz^{n-k}$$

决定，其中 B_k 是伯努利数.

2. $B_n(z)$ 满足差分方程

$$B_n(z+1)-B_n(z)-nz^{n-1}\quad(n\geqslant1),$$

因而当 $n\geqslant2$ 时，有 $B_n(0)=B_n(1)$.

3. $B_n(1-z)=(-1)^nB_n(z)$，由此记 $z=0$ 得

$$B_n(1)-(-1)^nB_n(0)\text{ 及 }B_{2n+1}(0)=1\quad(n>1).$$

4. $B_n'(z)=nB_{n-1}(z)$，由展开式

$$\frac{t}{\mathrm{e}^t}-1=\sum_{n=0}^{\infty}B_nt^n$$

可得伯努利数为：$B_0=1$，$B_1=-1/2$，$B_2=1/6$，$B_3=0$，$B_4=(-1)/30$，$B_5=0$，$B_6=1/42$，$B_7=0$，$B_8=-1/30$，$B_9=0$，…. 由这些伯努利数进一步又可得到伯努利多项式为：$B_0(z)=1$，$B_1(z)=z-1/2$，$B_2(z)=z^2-z+1/6$，$B_3(z)=z^3-3/2z^3+1/2z$，$B_4(z)=z^4-2z^3+z^2-1/30$ 等.

伯努利数(Bernoulli number)　见“伯努利多项式”.

母函数(Generating function)　亦称发生函数或生成函数. 数论、组合数学、插值与逼近论中的重要数学工具. 设关于函数 $g(t)$ 在 $t=0$ 的某邻域内收敛的幂级数为

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n,$$

这就确定了数列 $\{a_n\}$. 这时，称 $g(t)$ 为序列 $\{a_n\}$ 的母

函数. 对于函数列$\{f_n(x)\}$，类似地，把在(x,t)空间的某个域内关于x,t收敛的级数

$$K(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)t^n$$

称为函数列$\{f_n(x)\}$的母函数. 例如，二项式系数与勒让德多项式的母函数分别为$(1+t)^n$与$(1-2tx+t^2)^{-1/2}$. 对于多元的母函数也可同样定义. 若已知$\{a_n\}$或$\{f_n(x)\}$的母函数，则可以给出a_n与$f_n(x)$的积分表示. 例如，对后一种情形，有

$$f_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_c K(x,t)/t^{n+1}dt,$$

其中积分路径c是以原点为中心，正方向的充分小的圆周可以把母函数关于t解析开拓到幂级数的收敛域以外. 由于许多重要的正交函数系的简单母函数是已知的，所以借助于母函数，可以导出数列和函数列的许多重要的解析性质. 因此，母函数的方法在数学、计算数学与工程力学中被广泛地应用. 当参数不是整数n而是连续变量的情形时，可将母函数作为拉普拉斯变换或傅里叶变换的形式来定义，从而可用拉普拉斯变换或傅里叶变换的性质来进行研究. 最早将母函数方法应用到数论的广泛领域中去的是欧拉(Euler, L.)，他首先用母函数方法解决了线性丢番图方程的解数问题. 例如，设n为一正整数，若线性丢番图方程

$$x+2y+5z+10u+20v+50w=n$$

的非负整数解的个数为A_n，则根据幂级数的乘法可知，A_n的母函数就是

$$\begin{aligned}F(s)&=\sum_{n=0}^{\infty}A_ns^n\\&=(1+s+s^2+\cdots+s^x+\cdots)\\&\quad\cdot(1+s^2+s^4+\cdots+s^{2y}+\cdots)\\&\quad\cdot(1+s^5+s^{10}+\cdots+s^{5z}+\cdots)\\&\quad\cdot(1+s^{10}+s^{20}+\cdots+s^{10u}+\cdots)\\&\quad\cdot(1+s^{20}+s^{40}+\cdots+s^{20v}+\cdots)\\&\quad\cdot(1+s^{50}+s^{100}+\cdots+s^{50w}+\cdots)\\&=[(1-s)(1-s^2)(1-s^5)(1-s^{10})\\&\quad\cdot(1-s^{20})(1-s^{50})]^{-1},\quad |s|<1,\end{aligned}$$

并且乘积级数中s^n的系数就是A_n. 因此，由泰勒展开定理得

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)\\&=\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{ds}\right)^n((1-s)(1-s^2)(1-s^5)\\&\quad\cdot(1-s^{10})(1-s^{20})(1-s^{50}))^{-1}|_{s=0}.\end{aligned}$$

这就是关于A_n的一般公式.

在理论与应用中十分重要的伯努利多项式也可以用母函数定义. 用母函数

$$te^{xt}/e^t-1=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)t^n/n!$$

定义的多项式系

$$\begin{aligned}B_n(x)&=B_n(0)x^n+\binom{n}{1}B_1(0)x^{n-1}\\&\quad+\binom{n}{2}B_2(0)x^{n-2}+\cdots+B_n(0)\end{aligned}$$

称为n次伯努利多项式. 由于$B_k(0)$是

$$t/e^t-1=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(0)t^n/n!$$

中$t^k/k!$的系数，所以$B_0(0)=1, B_1(0)=-1/2$, $B_2(0)=1/6,\cdots,B_{2n+1}(0)=0, n\geqslant1$. 当$n\geqslant1$时，$(-1)^{n-1}\cdot B_{2n}(0)>0$，称$B_n=B_n(0)$为伯努利数. 此多项式具有重要性质：

$$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1},$$
$$dB_n(x)/dx=nB_{n-1}(x).$$

它们广泛地被应用于插值法等问题中. 例如，差分方程

$$f(x+1)-f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

的多项式解，就要用

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{a_n}{n+1}B_{n+1}(x)+c$$

给出，其中c是任意常数. 特别地，有公式

$$1^n+2^n+\cdots+p^n=\frac{B_{n+1}(p+1)-B_{n+1}(1)}{(n+1)}.$$

生成函数(generating function)　即“母函数”.

发生函数(generating function)　即“母函数”.

整数分拆(partition of integer)　数论中的一类重要问题. 它与若干数论分支及方法有密切的联系. 例如著名的圆法就是在研究整数分拆问题中产生的. 最重要的整数分拆问题是无限制分拆问题：把正整数n表为若干个不计次序的正整数之和，称为n的一个分拆. n的不同分拆的个数记为$p(n)$，称为无限制分拆函数. 若对分出的项数或对每个被加数给以适当的限制，则可得到各种有限制的分拆问题. 此外，还有乘法分拆等问题. 称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(n)z^n$$

为$p(n)$的母函数，当$|z|<1$时此级数收敛，且

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(n)z^n=\prod_{r=1}^{\infty}(1-z^r)^{-1}=F(z).$$

母函数$F(z)$满足某种形式的函数方程. 若τ为复数，$\mathrm{Im}\tau>0$，$\tau'=V\tau=(a\tau+b)/(c\tau+d)$，则

$$e^{-\frac{\pi i\tau}{12}}F(e^{2\pi i\tau})=\omega(c\tau+d)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi i\tau'}{12}}F(e^{2\pi i\tau'}),$$

这里ω仅与a,b,c,d有关，且$\omega^{24}=1$，并规定$a<\arg\tau<\pi$. 又a,b,c,d为满足$ad-bc=1$之整数.

可以算出

$$\omega=\begin{cases}\exp\left\{\frac{\pi i}{12}\frac{a+d}{c}-\pi is(d,c)-\frac{\pi i}{4}\right\} & (c>0),\\ \exp\left\{\frac{\pi i}{12}\frac{a+d}{c}+\pi is(d,-c)+\frac{\pi i}{4}\right\} & (c<0),\\ \exp\left\{\frac{\pi i}{12}\frac{b}{d}\right\} & (c=0),\end{cases}$$

这里

$$s(h,k)=\sum_{r(\mathrm{mod}\,k)}\left(\left(\frac{r}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hr}{k}\right)\right)$$

是戴德金和，而

$$((u))=\begin{cases}u-[u]-\frac{1}{2} & (u\neq 整数),\\ 0 & (u=整数).\end{cases}$$

哈代(Hardy, G. H.)与拉马努金(Ramanujan, S. A.)于 1918 年首次提出用圆法研究 $p(n)$，得到一个形如下列的渐近公式

$$p(n)=\sum_{k<a\sqrt{n}}P_k(n)+O(n^{-\frac{1}{4}}),$$

其中 a 为一常数，$P_1(n)$是主项，且

$$P_1(n)\sim e^{K\sqrt{n}}/(4n\sqrt{3}),\quad K=\pi\sqrt{2/3}.$$

由此可得出

$$p(n)=\frac{e^{K\sqrt{n}}}{4n\sqrt{3}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

然而，级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}P_k(n)$$

却是发散的. 拉德马赫(Rademacher, H.)于 1937 年对此做了重要的改变，他改用 $R_k(n)$代替 $P_k(n)$得到一个收敛级数展开式

$$p(n)=\sum_{k=1}^{\infty}R_k(n),$$

这里

$$R_k(n)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{k}A_k(n)\cdot\frac{d}{dn}\left[\frac{\sinh\left\{\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right\}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right],$$

而

$$A_k(n)=\sum_{\substack{h(\mathrm{mod}\,k)\\(h,k)=1}}e^{\pi is(h,k)-\frac{2\pi inh}{k}}.$$

无限制分拆函数(unreserved partition function)　见“整数分拆”.

戴德金和(Dedekind sum)　见“整数分拆”.

卡他兰数(Catalan number)　一种特殊的正整数. 一个凸 n 边形，通过不相交 n 边形内部的对角线，把 n 边形分成若干三角形，不同拆分法的个数称为卡他兰数，并记为 h_n. 例如，五边形有五种拆分法，故 $h_5=5$. 卡他兰数有重要的非线性逆推关系：

1. $h_{n+1}=h_2\cdot h_n+h_3h_{n-1}+\cdots+h_nh_2$.

2. $(n-3)h_n=\frac{n}{2}(h_3h_{n-1}+h_4h_{n-2}+\cdots+h_{n-2}h_4+h_{n-1}h_3)$.

由此可以得到计算卡他兰数的方便的计算公式

$$nh_{n+1}=(4n-6)h_n,\quad h_{n+1}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

例如，

$$h_6=\frac{1}{5}\binom{8}{4}=14.$$

又如，若 $P=a_1a_2\cdots a_n$ 为 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的乘积，按乘法结合律，不改变其顺序，只用括号表示成对的乘积，则不同的乘法方案数 p_n 即为卡他兰数 h_{n+1}. 以 $n=4$ 为例，

$$p_4=h_5=\frac{1}{4}\binom{6}{3}=5,$$

即

$$(a_1(a_2a_3))a_4,\ ((a_1a_2)a_3)a_4,\ (a_1a_2)(a_3a_4),\ a_1(a_2(a_3a_4)),\ a_1((a_2a_3)a_4).$$

斯特林数(Stirling's number)　一种特殊的正整数. 设

$$[x]_n=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)=S(n,0)+S(n,1)x+S(n,2)x^2+\cdots+S(n,n)x^n.$$

称 $S(n,a),S(n,1),S(n,2),\cdots,S(n,n)$为第一类斯特林数. 对此，有

$$S(n+1,k)=S(n,k-1)-nS(n,k).$$

设 n 个有区别的球放到 m 个相同的盒子中，若要求无一空盒，其不同的放法用 $S(n,m)$表示，则称此数 $S(n,m)$为第二类斯特林数. 例如，红、黄、蓝、白四种颜色的球，放到两个无区别的盒子里不允许空盒，其放法有七种，所以$S(4,2)=7$. 第二类斯特林数 $S(n,k)$有重要性质：

1. $S(n,0)=0$.
2. $S(n,1)=1$.
3. $S(n,2)=2^{n-1}-1$.
4. $S(n,n-1)=c(n,2)=\frac{n(n-1)}{2}$.
5. $S(n,n)=1$.
6. 当 $n>1,m\geqslant 1$ 时，

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1).$$

根据性质 6，若将红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的两个盒子里，其放法数

$$S(5,2)=2S(4,2)+S(4,1)=2\times 7+1=15.$$

有特殊素因子的整数(integer with special prime dvisor)　一种特殊的正整数. 考虑两类有特

殊素因子的整数之计数问题,它们在诸如筛法与哥德巴赫猜想等一系列数论问题中都有重要的应用.

1. 用 $\Phi(x,y)$ 表示不超过 x 且没有 $<y$ 的素因子的自然数的个数. 布赫施塔伯(Бухштаб, A. A.)于1937年证明:

$$\Phi(y^u,y)=w(u)\frac{y^u}{\log y}+O\left(\frac{y^u}{\log^u(y)^{3/2}}\right),$$

O 中常数与 u 无关,且

$$w(u)=\frac{1}{u}\ (1\leqslant u\leqslant 2),$$
$$(uw(u))'=w(u-1)\ \ (u>2).$$

华罗庚于1951年得到

$$|w(u)-e^{-\gamma}|<\exp\{-u(\log u+\log\log u-\log\log u\cdot(\log^{-1}u)+O(\log^{-1}u))\}.$$

2. 若用 $\psi(x,y)$ 表示不超过 x 且没有 $>y$ 的素因子的自然数的个数,则有

$$\psi(y^u,y)=\rho(u)y^u+O(y^u(\log y)^{-\frac{1}{2}}),$$

其中

$$\rho(u)=1\ \ (0<u\leqslant 1),$$
$$u\rho'(u)=-\rho(u-1)\ \ (u>1)$$

(布赫施塔伯、乔拉(Chowla, S.)与维贾伊拉卡文(Vijayraghaven, T.)). 华罗庚、闵嗣鹤、德布鲁因(de Bruijn, N. G.)及布赫施塔伯得到

$$\rho(u)=\exp\{-u(\log u+\log\log u-1+\log\log u\cdot\log^{-1}u)+O(u\log^{-1}u)\},$$

函数 $\rho(u)$ 也称为狄克曼函数.

狄克曼函数(Dickman's function) 见"有特殊素因子的整数".

撰　稿　张明尧　裘焯明

审　阅　王　元　冯克勤　张贤科　裴定一　潘承洞

超越数论与丢番图逼近

超越数(transcendental number) 一种复数. 即不是代数数的复数. 若 α 是一个非代数数的复数,则 α 称为一个超越数. 由于一个实的 n 次代数数只能找到有限个有理数 p/q 满足

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^{n+1}}\ \ (q>0),$$

所以对任一实数 α,若对每个 n 都有无限多个有理数 p/q 满足

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^{n+1}}\ \ (q>0)$$

则 α 就不是任何次代数数,从而 α 是超越数. 这是构造和判别一个实数是否为超越数的重要方法. 例如,

$$\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{n!}}$$

就是一个超越数. 进而,自然对数的底 e,圆周率 π 也是超越数. 希尔伯特(Hilbert, D.)于1900年提出下面的问题,当 β 是代数数而不是有理数,α 是代数数但不等于0与1时,α^β 是否一定是超越数. 这就是著名的希尔伯特23个难题之一. 希尔伯特当时认为这个问题要比费尔马问题困难,但是,盖尔芳特(Gelfond, A. O.)与施奈德(Schneider, T.)于1934年都互相独立地证明了 α^β 的超越性,从而进一步证明了 e^π 是超越数(因为 $e^\pi=(-1)^{-i}$). 此外,根据近代代数数论,还可证明 $\sin 1$, $\log 2$, $\log 3/\log 2$ 是超越数,但是,至今还不知道 α^e, α^π, π^e 及欧拉常数

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

之中哪些是超越数. 人们对于超越数的知识还相当贫乏,至今还不知道 γ 是不是无理数.

二重对数函数(double logarithmic function) 代数数论中的著名函数. 函数

$$L_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}{}^{*}\frac{x^n}{n^k}\ \ (k=0,1,2,\cdots)$$

(这里 $\sum^*$ 当 $k\geqslant 1$ 时由 $n=1$ 开始)称为 k 重对数函数,函数 $L_2(x)$ 则称为二重对数函数. 对此函数有许多重要问题:例如米尔诺(Milnor, J. W.)关于与 $\operatorname{Im}L_2(x)$ 有关的数的线性无关性的猜测;对于 $L_k(x)$ 在接近单位圆周的代数数点 x 处的值是无理数等. 对于 $L_2(x)$ 的有理逼近问题是二重对数函数的重要问题,至今所得到的重要结果有:

1. 若 $q>p^2\cdot 2^4\cdot e^2$,则 $L_2(p/q)$ 是一个无理数. 由此可得,当 n 是整数时,$n\geqslant n_0(\varepsilon)$,$\varepsilon>0$,有

$$\left|L_2\frac{1}{n}-\frac{p}{q}\right|>|q|^{-3+\varepsilon}.$$

对于更一般情形,有

2. 设 ξ 为代数数,其次数小于或等于 d,高度 $H=H(\xi)$,若 $|\xi|<c_1\cdot\exp(-(c_2\sqrt{\log H(\xi)}))$,其中 $c_1=c_1(d)>0$, $c_2=c_2(d)>0$,则 $L_2(\xi)$ 是无理数,且其次数大于 d,但是其中常数 $c_1(d)$ 和 $c_2(d)$ 等于什么,至今还没有解决. 对于任意 k 重对数,同样类型结果也成立. 例如,若 $\varepsilon>0$,n 为一整数,$n\geqslant c_3(k,\varepsilon)$,$k\geqslant 1$,则

$$\left|L_k\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{p}{q}\right|>|q|^{-(k+1)(1-\varepsilon)}.$$

一致分布(uniform distribution) 数论中的一个重要问题. 设 $f(x)$ 是在 $x=1,2,3,\cdots$ 上定义的实值函数,α,β 为任意实数,$0\leqslant\alpha<\beta<1$. 设在 $x=1,2,\cdots,N$ 中,使得 $\alpha\leqslant f(x)<\beta \pmod 1$ 成立的 x 的个数为 $T(N)$. 若

$$\lim_{N\to\infty}\frac{T(N)}{N}=\beta-\alpha$$

总成立,则 $f(x)\pmod 1$ 称为在单位区间上一致分

布. 对于任一整数 $h\neq0$,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}e^{2\pi ihf(x)}=0$$

成立,乃是 $f(1),f(2),\cdots(\mathrm{mod}\,1)$ 为一致分布的充分必要条件. 这就是重要的外尔原理. 根据这一原理可得到以下重要定理:若 θ 为无理数,$\theta x-[\theta x]$ 为 $\theta x(\mathrm{mod}1)$,则 $0\leqslant\theta x<1(\mathrm{mod}\,1)$. 当 $x=1,2,3,\cdots$ 时,$\theta x(\mathrm{mod}\,1)$ 在单位区间 $(0,1)$ 上为稠密分布,并且 $\theta,2\theta,3\theta,\cdots(\mathrm{mod}\,1)$ 在单位区间上为一致分布.

外尔原理(Weyl's principle)　一致分布的一个重要判别法. 即函数 $f(x)$ 模 1 一致分布的充分必要条件是

$$\lim_{P\to\infty}\frac{1}{P}\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi ihf(x)}=0$$

对于任何确定的整数 $h\neq0$ 都成立. 由此判别法便可导出以下重要结果:

1. 对于任何实无理数 α,序列 $\alpha,2\alpha,3\alpha,\cdots$ 模 1 一致分布.

2. 若 $f(x)$ 为一非常数的并且至少有一无理系数的多项式,则序列 $f(x),x=1,2,\cdots$ 模 1 一致分布.

3. 若对于任何固定的正整数 q,$f(x+q)-f(x)$ 模 1 一致分布,则函数 $f(x)$ 模 1 一致分布.

4. 若 $g(x)$ $(x=1,2,\cdots)$ 为一列互不相同的整数,则对几乎全体 α,函数 $\alpha g(x)$ 模 1 一致分布.

5. 对于几乎全体实数 $\alpha\geqslant1$,序列 $\alpha^x(x=1,2,\cdots)$ 都模 1 一致分布.

但是,对 e^x 是否模 1 一致分布的问题,至今还尚未解决.

$\{a^x\}$的分布问题(distribution problem of a^x)　一致分布理论中的重要问题. 虽然对于几乎全体实数 a,$\{a^x\}$ 都是一致分布的,但是对某一给定的 a,$\{a^x\}$ 是否一致分布的问题,至今尚未解决. 例如,还不知道 $\{e^x\}$ 是否一致分布,但用维诺格拉多夫(Виноградов, И. М.)的方法可得到以下重要的判别法:

1. 设 P 为一$\geqslant2$ 的整数,α 为一实数,用 $N(p;a,b)$ 表示使 $a\leqslant\{\alpha q^x\}\leqslant b$ $(0\leqslant a<b\leqslant1)$ 的整数 $x\leqslant P$ 的个数,若存在常数 $c>1$ 及 $k>0$,使

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\frac{N(P;a,b)}{P}\leqslant c(b-a)\left(1+\alpha\log\frac{1}{b-a}\right)^k$$

对任何 a 与 b 都成立,则函数 αq^x 模 1 一致分布.

2. 设 $\varphi(x)$ 为一实值函数,对于任意给定的不全为零的整数 $m_1,m_2,\cdots,m_s$,若和数

$$m_1\varphi(x+1)+m_2\varphi(x+2)+\cdots+m_s\varphi(x+s)\quad(x=1,2,\cdots)$$

模 1 一致分布,又

$$\beta=\sum_{k=1}^{\infty}[\{\varphi(k)\}q]/q^k,$$

则 $\{\beta q^x\}$ 一致分布.

不定不等式(unsteady inequality)　一致分布中的一个重要不等式. 设 $f(x)$ 模 1 一致分布,它有离差 $D(P)$,亦即适合 $\gamma-\varepsilon\leqslant\{f(x)\}\leqslant\gamma+\varepsilon$ 的整数 $x\leqslant P$ 的个数等于 $\alpha\varepsilon P+PD(P)$. 于是,对于 $\varepsilon>|D(P)|/2$,存在整数 x,使 $\{f(x)\}-\gamma\}<\varepsilon$ 成立. 特别地,若 $k\geqslant11$ 及 $f(x)=a_{k+1}x^{k+1}+\cdots+a_1x$,$|a_1-(h/q)|<1/q^2$,则得:存在整数 $x\leqslant P$,使对大的 P,有 $|\{f(x)\}-\gamma|\ll P^{-P}$. 维诺格拉多夫(Vinogradov, I. M.)推广了这个定理,并得到下列结果:设 $f(x)=a_kx^k+\cdots+a_hx^h$ 为一实系数多项式,且 $k<\cdots<h$ 都是正整数,又 a_l 为 x^l 的系数,并有 $|a_l-(a/q)|<1/q^2$,$(a,q)=1$. 若用 g 表 $f(x)$ 中非零系数的个数,D 为其足标之和,则必有以下性质的 $c_0(h)$:对于 $q>c_0(h)$,存在整数 x,使得

$$|\{f(x)\}-\gamma|<q^{-\rho}\ (0<x<q^{\frac{2}{l}})$$

成立,其中

$$\rho=\frac{\log D}{4hgl(\log D+1)\log(D\log D+D)}.$$

图埃定理(Thue theorem)　有理逼近的一个重要定理. 若 $n\geqslant3$,$f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}++a_1z+a_0$ 是一个整系数的 n 次有理数域上的不可约多项式,则不定方程 $H(x,y)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}y+\cdots+a_1xy^{n-1}+a_0y^n=c$ 仅有有限多组整数解 x,y,其中 c 是给定的整数. 这就是著名的图埃定理. 这个定理的证明依赖于下面的重要定理:若 θ 是一个次数 $n\geqslant3$ 的整系数不可约多项式的根,则只有有限组整数 x,$y>0$ 适合

$$\left|\theta-\frac{x}{y}\right|<1/y^{\frac{n}{2}+1}.$$

英国著名数学家罗特(Roth, K. F.)于 1958 年对它又作出了重要改进,他证明:若 θ 是一个 $n\geqslant2$ 次的代数数,对于任给 $\varepsilon>0$,则只有有限组整数 $x,y>0$ 适合

$$\left|\theta-\frac{x}{y}\right|<1/y^{2+\varepsilon};$$

并且,若 θ 是无理数,则有无穷多对整数 $x,y>0$ 满足

$$\left|\theta-\frac{x}{y}\right|<y^{-2},$$

这一结果已不能再进一步改进了. 由于罗特的这一杰出工作,他于 1958 年获得了国际数学大奖——菲尔兹奖. 应用罗特定理,可以证明更多的不定方程,它们解的个数有限. 例如,柯召于 1962 年证明:当 p,q 是不同的奇素数,在 $q>2(p-1)$ 或 $p>2(q-1)$ 时,不定方程 $x^p-y^q=1$ 只有有限组整数解 x,y.

刘维尔定理(Liouville theorem)　超越数理论及丢番图逼近中的重要定理.在代数数的有理逼近问题中,刘维尔(Liouville,J.)首先得到了以下重要结果,即刘维尔定理:对于任给的一个 $n>1$ 次代数数 α,存在一个与 α 有关的常数 $b>0$,使得对所有的有理数 $p/q(q>0)$,均有

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{b}{q^n}.$$

由此可得到重要的推论,即:若 α 是任一 n 次$(n>1)$代数数,则对任一 $\varepsilon>0$ 和 $A>0$,适合不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{A}{q^{n+\varepsilon}}$$

的有理数 $p/q(q>0)$ 只有有限个.这是超越数理论的开创性的工作.正是运用这个定理,最先构造出一类超越数.例如,

$$\xi=\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n!}$$

就是一个超越数.然而如何使刘维尔定理精密化,仍然是有理逼近论中的重要课题.自 1844 年刘维尔创立上述定理以来,图埃(Thue. A.)、西格尔(Siegel, C. L.)等人的改进,直至 1955 年才由罗特(Roth, K. F.)得到了最好的结果,他证明:若 ξ 是一个 $n>1$ 次代数数,对于任给的 $\varepsilon>0$,仅有有限组整数对 p,q $(q>0)$适合

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2+\varepsilon}}.$$

当 ξ 是无理数时,则有无穷多对整数 $p,q(q>0)$适合

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

因而,罗特的结果已不能再予改进.史密特(Schmidt,E.)于 1970 年将罗兹定理推广至联立逼近的情况,即:若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为实代数数,且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 在有理数域上线性无关,则对任何 $\varepsilon>0$,皆仅有有限多个正整数 q,使得 $\|q\alpha_1\|\cdots\|q\alpha_n\|q^{1+\varepsilon}<1$,其中 $\|\xi\|$ 表示实数 ξ 与它最近整数的距离.特别地,由此可得

$$\left|\alpha_i-\frac{p_i}{q}\right|<q^{-(n+1)/n-\varepsilon}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

仅有有限多组有理解 $p_1/q,p_2/q,\cdots,p_n/q$.这是至今为止,关于这个问题的最好结果.

罗思定理(Roth theorem)　见“刘维尔定理”.

贝克方法(Baker method)　代数数论的重要方法.贝克方法是从研究超越数的理论开始的.所谓超越数就是指不是代数数的数.在 19 世纪,就已经知道了数 e 和 π 都是超越数.后来就得到了判别是否为超越数的重要定理,即对任给的 m 个不同的代数数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,则数 $e^{\alpha_1},e^{\alpha_2},\cdots,e^{\alpha_m}$ 在全体代数数组成的域 A 上是线性无关的.从这个定理就很容易推出 e 和 π 是超越数.

1900 年,在希尔伯特(Hilbert,D.)提出 23 个著名问题中,第七个问题就是关于超越数的.希尔伯特第七问题是指:“若 α 是一个代数数,$\alpha\neq0,1$,β 是一个非有理数的代数数,问 α^β 是否为超越数?”1934 年和 1935 年,前苏联数学家盖尔芳特(Gelfond,A. O.)和施奈德(Schneider,T.)分别独立地解决了上述问题,他们证明:若 α 是代数数,$\alpha\neq0,1$,β 是一个非有理数的代数数,则 α^β 是超越数.接着,又先后得到了与此等价的另外两个定理:

1. 若 α 和 γ 是非零的代数数,且 $\alpha\neq1$,则 $\log\gamma/\log\alpha$ 或者是有理数或者是超越数.

2. 设 α,β 是非零代数数,若 $\log\alpha$ 和 $\log\beta$ 在有理数域 Q 上线性无关,则它们在 A 上线性无关.

对于定理 2,人们猜想可以推广到任意多个非零代数数的情形.1966 年,贝克(Baker,A.)证明了这一猜想,并且得到了更强的定理,即:设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是任给的 n 个$(n\geqslant2)$非零代数数,若 $\log\alpha_1,\log\alpha_2,\cdots,\log\alpha_n$ 在 Q 上线性无关,则 $1,\log\alpha_1,\log\alpha_2,\cdots,\log\alpha_n$ 在 A 上线性无关.贝克在证明中使用的是初等方法和复变函数论的方法.接着,贝克进一步证明了在不定方程中有重要应用的结果:设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 个$(n\geqslant2)$非零代数数,$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$的次数和高分别不超过 $d(d\geqslant4)$ 和 $A(A\geqslant4)$.若存在整数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 满足

$$0<|b_1\log\alpha_1+b_2\log\alpha_2+\cdots+b_n\log\alpha_n|<e^{-\delta H},$$

其中 $0<\delta\leqslant1$,$H=\max(|b_1|,|b_2|,\cdots,|b_n|)$,则

$$H<(4^{n^2}\delta^{-1}d^{2n}\log A)^{(2n+1)^2}.$$

这里所指的代数数 α 的高 h,是指 α 所适合的整系数不可约多项式 $a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots a_1x+a_0$ 中系数 $|a_j|(j=0,1,2,\cdots,m)$的最大值,即

$$h=\max(|a_0|,|a_1|,\cdots,|a_m|).$$

利用这条重要定理,贝克证明了某些类型的不定方程整数解的绝对值的上界.例如,不定方程 $y^2=x^3+k\ (k\neq0)$的整数解 x,y 满足

$$\max(|x|,|y|)\leqslant\exp(10^{10}|k|^{10^4}),$$

后来,斯塔尔克(Stark,H. M.)于 1973 年又把它改进为

$$\max(|x|,|y|)\leqslant\exp(c|k|^{1+\varepsilon})$$

对于每一个 $\varepsilon>0$ 成立,其中 $c=c(\varepsilon)$是可以有效计算的常数.贝克和达文波特(Davenport,H.)于 1969 年还证明:不定方程 $y^2-3x^2=-2,z^2-8x^2=-7$ 仅有正整数解 $x=y=z=1$ 和 $x=11,y=19,z=31$.最近,特艾德曼(Tijdeman,R.)用贝克的方法证明:当

$$n>10^{10^{300}}\quad(l>1,s>1)$$

时，不定方程 $n=x^t, n+1=y^s$ 不可能有整数解 $x>0, y>0$. 这在实际上给出了卡他兰猜想的解的上界.

莱默问题(Lehmer problem)　超越数论的重要问题. 设 $\alpha\neq0$ 是 d 次代数数，$\alpha=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_d$ 是 α 的最小多项式的全部零点，a_0 是 α 的最小多项式的首项系数，记

$$M(\alpha)=|a_0|\prod_{i=1}^{d}\max(1,|d_i|).$$

若 α 是代数整数，则必有 $M(\alpha)\geqslant1$；若 α 是单位根，则 $M(\alpha)=1$. 1857 年，克罗内克(Kronecker, L.)证明：若 $M(\alpha)=1$，则 α 必为单位根. 莱默(Lehmer, D. H.)于 1933 年提出了这样的问题：对于任给的 $\varepsilon>0$，是否存在非零代数数 α，使得 $1<(M(\alpha)<1+\varepsilon$? 这就是著名的莱默问题. 这个问题虽然没有解决，但利用施奈德方法，可以得到关于这个问题的一个重要结果：若 α 是 $d(d\geqslant d_0)$ 次代数整数，则当 d_0 充分大时，必有常数 $c_1>0$，使得当

$$M(\alpha)<1+\frac{c_1}{d\log d}$$

时，α 是单位根.

类数问题(problem of class)　代数数论的著名问题. 类数问题涉及有理数的最简单扩张，即是二次域. 设 $\mathrm{Q}(\sqrt{d})$ 为有理数域 Q 添加以 $\sqrt{d}$ (d 为无平方因子整数)而得的域. 正如 Q 包含通常的整数环 Z 一样，$\mathrm{Q}(\sqrt{d})$ 也包含一个“整数”环 R，即 $\mathrm{Q}(\sqrt{d})$ 中满足任一首项系数为 1 的整系数多项式方程的那些元素组成的环. 环 R 与 Z 在许多方面相似，但有一点不同：Z 中的整数总可惟一分解为素数的乘积，但 R 中的整数却不一定. 例如，$\mathrm{Q}(\sqrt{3})$ 的整数有惟一的因子分解，但 $\mathrm{Q}(\sqrt{-5})$ 却不然. 要使 $\mathrm{Q}(\sqrt{d})$ 中的环有惟一的因子分解，其充分必要条件是它所包含的“整数”环 R 的每个理想都是主理想. 但是，R 的理想往往不是主理想. 若有主理想 (α) 与 (β)，使得 $(\alpha)A=(\beta)B$，则称此两理想 A 与 B 等价. 所有主理想都属于同一等价类，但也可能有别的一些类. 等价类的个数 $h(d)$ 称为 $\mathrm{Q}(\sqrt{d})$ 的类数，而 $h(d)=1$ 恰好说明 R 有惟一的因子分解. 高斯猜测：每个类数只有有限个与之相关的负数 d，这就是著名的类数问题. 当 $h(d)=1$ 时，高斯(Gauss, C. F.)断言只有九个域，即 $-d=1,2,3,7,11,19,43,67$ 和 163.

贝克(Baker, A.)由于在超越数论中的重要工作，使得他终于在 1967 年成功地解决了类数 $h(d)=1$ 的问题，因而他获得了 1970 年的菲尔兹国际数学大奖. 1971 年，他又与斯塔尔克(Stark, H. M.)独立地解决了负数 d 的类数 $h(d)=2$ 的问题，并举出了使 $h(d)=2$ 的 18 个负数 d. 对于使 $h(d)>2$ 的负数 d 的估值已在 1976—1983 年为哥德菲尔德(Goldfeld, D. M.)、格罗斯(Gross, B.)与扎盖尔(Zagier, D. B.)解决，而对正数 d 而言，整个类数问题似乎还高不可攀.

西格尔引理(Siegel lemma)　超越数理论的重要工具. 利用著名的狄利克雷原则可以得到以下重要定理：设 N 为自然数集，Z 表整数环，若 $m\in\mathrm{N}$，$n\in\mathrm{N}$，$n>m$，$a_{ij}\in\mathrm{Z}$ ($1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant m$)，$u=\max\limits_{i,j}|a_{ij}|\geqslant1$，则存在一组非零有理整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得

$$\max_i|x_i|\leqslant(nu)^{\frac{n}{n-m}},$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0\ \ (1\leqslant i\leqslant m).$$

这就是重要的西格尔引理，它在超越数论以及不定方程等问题中有许多应用.

马勒测度(Mahler measure)　超越数论的重要概念. 设 C 为复数集. 若多项式 $p(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ 的系数 $c_i\in\mathrm{C}(0\leqslant i\leqslant n)$，则称

$$M(P)=\exp\left(\int_0^1\log\ |P(\mathrm{e}^{2\pi it})|\mathrm{d}t\right)$$

为 $P(x)$ 的马勒测度. 若 $P(x)=0$，则规定 $M(0)=0$. 若 α 是代数数，$P(x)$ 是它的最小多项式，则规定 $M(\alpha)=M(P)$ 为 α 的马勒测度. 马勒测度有以下重要性质：

1. 若 $P(x)\neq0$，则 $M(P)>0$.
2. 对于多项式 $P_1(x)$ 与 $P_2(x)$，有
$$M(P_1P_2)=M(P_1)M(P_2).$$
3. 若 α 是 d 次代数数，则
$$M(\alpha)=|a_0|\prod_{i=1}^{d}\max(1,|\alpha_i|),$$

其中 a_0 是 α 的最小多项式的首项系数，$\alpha=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_d$ 是 α 的最小多项式的全部零点.

刘维尔数(Liouville number)　超越数的一种. 对于任意实数 $\xi\overline{\in}\mathrm{Q}$，若存在与自然数 n 无关的正数 C，满足 $\inf\{H(\alpha)^*|\xi-\alpha|/\alpha\in\mathrm{Q}\}>C$，则根据刘维尔定理可知，$\xi$ 为超越数，这样的 ξ 称为刘维尔数. 例如：

1. $\xi=\sum\limits_{n=1}^{\infty}g^{-n!}(g>2)$.

2. 给出一个自然数数列 $\{n_k\}$，$n_k\to\infty(k\to\infty)$，若无限正则连分数 $\xi=[b_0,b_1,b_2,\cdots]$ 满足 $b_{n_k+1}\geqslant B_{n_k}^{n_k-2}$ ($k\geqslant1$，B_l 为第 l 个渐近分数的分母)，则 ξ 均为刘维尔数.

若 $f(x)$ 是当 x 为自然数时亦取自然数值但不为常数的任意多项式，则在小数点以后形式地将

$f(1),f(2),\cdots$排起来所构成的数(例如当$f(x)=x$时,就是0.123456789101112…),根据罗思定理,可以证明它是非刘维尔数的超越数.这些都是应用丢番图逼近论而构成超越数.

超越数的分类(sort of transcendental umber)　超越数论一个重要问题.超越数主要有以下两种分类法:

1.马勒分类.对于任意的复数ξ及自然数n,H,记

$$W_n(H,\xi)=$$

$$\min\left\{\left|\sum_{i=0}^{n}a_i\xi^i\right|\ \middle|a_i\in\mathbf{Z},|a_i|\leqslant H,\sum_{i=0}^{n}a_i\xi^i\neq 0\right\},$$

$$w_n(\xi)=W_n=\limsup_{H\to\infty}(-\frac{\log w_n(H,\xi)}{\log H}),$$

$$w(\xi)=w=\limsup_{n\to\infty}\frac{w_n(\xi)}{n},$$

$\mu=$(使得$w_n=\infty$成立的第一个数目n).

这样就会出现$w=0,\mu=\infty$;$0<w<\infty$;$w=\mu=\infty$;$w=\infty,\mu<\infty$等四种情形,对应于各种情形的ξ依次分别称为A数、S数、T数与U数,并将每一种数的全体所组成的集合分别记为A,S,T,U.

2.柯凯斯曼分类.对于任意的超越数ξ及自然数n,H,设

$$w_n^*(H,\xi)=\min\{|\xi-\alpha|/\alpha\in\overline{\mathbf{Q}},H(\alpha)\leqslant H,[\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q}]\leqslant n\},$$

$$w_n^*(\xi)=w_n^*=\limsup_{H\to\infty}\left(-\frac{\log Hw_n^*(H,\xi)}{\log H}\right),$$

$$w^*(\xi)=w^*=\frac{\limsup_{n\to\infty}w_n^*(\xi)}{n},$$

$\mu^*=$(使得$w_n^*=\infty$成立的第一个数目n).

这样就会出现$w^*<\infty$;$\mu^*=\infty$;$w^*=\mu^*=\infty$;$w^*=\infty,\mu^*<\infty$等三种情形,对应于每种情形的ξ依次分别称为S^*数、T^*数、U^*数,并将每一种数的全体所组成的集合分别记为S^*,T^*,U^*.

马勒分类(Mahler's classification)　见"超越数的分类".

柯凯斯曼分类(Koksma's classification)　见"超越数的分类".

概率数论(probability number theory)　用概率论研究数论问题的研究领域.该方向起源于哈代(Hardy,G.H.)与拉马努金(Ramanujan,S.A.)关于一个正整数n的素因子个数函数$\Omega(n)$或$\omega(n)$的研究.随后爱尔特希(Erdös,P.)与卡茨(Kac,M.)把分布函数与统计独立性与概率统计的概念正式引入数论研究,与此同时林尼克(Линник,Ю.В.)由于兼长数论与概率论,对此也做过很好的研究,并由概率论的想法,提出了筛法,由林尼克的学生雷尼(Renyi,A.)用于哥德巴赫猜想的研究,获得了很好成绩.之后图兰(Turán,P.)与库比利斯(Kubilius,J.P.)一方面用大数定理的办法给出哈代-拉马努金定理的新证明,另一方面对一般的可加函数,在一定条件下证明了图兰-库比利斯不等式,这些工作相当于概率论中的大数定理.由于概率数论的进一步发展,还在一定条件下证明了相应分布函数的存在性.最后,以一个有趣的例子来结束这一条目的叙述.在适当的规定下,可以把正整数被一个给定的素数整除看做一个随机的事件,而概率数论证明了被不同素数整除的随机事件彼此不是独立的.

计算数论(computational number theory)　数论的一个现代分支.近年来,由于功能强大的电子计算机的出现,以及数学、计算机科学和密码学的长足进步,计算数论本身已成为一个愈来愈重要的研究对象.计算数论的内容包括算法数论以及数论在数值分析、数值统计中的应用等.在20世纪50—60年代,主要是把数论中的各种理论应用于数值积分等,从事这方面工作的主要数学家有华罗庚、王元、科罗博夫(Коробов,Н.М.)、哈尔通(Halton,J.H.)等.特别是华罗庚与王元所发展的代数数域的单位用于高维数值积分的方法,在世界近似计算界引起了巨大的反响,被称为华-王方法.从20世纪70年代开始,由于公钥密码体制的建立,大素数检验与大数分解的研究成了一个热潮,在这方面有所谓的RSA体制、大素数检验的各种有效算法.大数分解的研究无不与数论的最新发展密切相关.另外有限域理论在密码学中的应用也可列于计算数论范畴.这方面的研究有许多涉及代数几何,例如代数几何码,但也可列入算术代数几何的算法理论,总的来说仍然属于数论范畴.

撰　稿　张明尧　蔺大正
审　阅　冯克勤　李德琅　陆洪文　裴定一

模　形　式

迷向群(group of isotropy)　亦称稳定群.拓扑群的一个子群.设M是拓扑空间,G是M的拓扑变换群,对M中点x,$B_x=\{g\in G|g(x)=x\}$是G的闭子群,称为G在x点的迷向群.对M中点x,称$G(x)=\{g(x)|g\in G\}$为G通过x的轨道.对M中两个点x,y,若它们具有相同的轨道,则称x与y关于G等价.两个等价点的迷向群是同构的.

稳定群(stable group)　即"迷向群".

基本区域(fundamental domain)　某种变换群作用轨道的代表元集合.设X是一个豪斯道夫空间,Γ为X上不连续变换群.将X中点按关于Γ的等价关系分类,这些等价类(轨道)构成空间$\Gamma\backslash X$

（称为 X 关于 Γ 的商空间），$\Gamma\backslash X$ 的一个完全代表系 F（即 X 的一个子集 F，它使得 $\Gamma F=X$，且 F 中无两点关于 Γ 等价）具有某些拓扑性质，称为 Γ 在 X 中的基本区域. 例如对模变换群，通常要求其基本区域 F 为连通、单连通.

模变换（modular transformation） 一种重要的变换. 指行列式等于 1 的二阶整数方阵对应的线性分式变换. 模变换全体构成一个群，它同构于 $\mathrm{SL}(z,\mathbf{Z})/\{\pm I\}$，这里

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

设 a,b,c,d 是整数，$ad-bc=1$，称分式线性变换

$$\tau\rightarrow\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

为一个模变换. 为简单计，记

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

规定 $A\tau=(a\tau+b)/(c\tau+d)$. 例如 $T\tau=\tau+1$ 与 $S\tau=-1/\tau$. 这就是两个特殊的模变换，它们对应的矩阵分别为

$$T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

（注意，A 与 $-A$ 对应同一个变换，在取作变换的对应二阶矩阵时，对 A 与 $-A$ 不加区分）. 设：

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix},$$

定义 $C=BA$，易见 $B(A\tau)=C\tau$，这就定义了两个模变换的乘积. 所有模变换在上述乘法下构成一个群 Γ，称为模变换群. 且 Γ 是由与 T 及 S 两个方阵对应的模变换生成的. 群 Γ 及其子群（例如 $\Gamma_0(q)$ 等）在模函数及模形式论中有重要的作用，在其他数学分支中也有重要的地位. 对模变换：

$$z\rightarrow\frac{az+b}{cz+d},$$

1. 若 $|a+d|>2$，则称为双曲变换，它有两个不同的实不动点，且这两个实数为二次代数数.

2. 若 $|a+d|=2$，则称为抛物变换，它有一个不动点，该数或为有理数，或为∞.

3. 若 $|a+d|<2$，则称为椭圆变换，它有两个复不动点.

模变换群（modular transformation group） 见“模变换”.

双曲变换（hyperbolic transformation） 见“模变换”.

抛物变换（parabolic transformation） 见“模变换”.

椭圆变换（elliptic transformation） 见“模变换”.

模群（modular group） 亦称椭圆模群或全模群. 数论中的一种群. 二阶幺模整系数矩阵群$\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$（或与它对应的线性分式变换群——模变换群）是作用在上半平面 $H=\{x+\mathrm{i}y\in\mathbf{C}\,|\,y>0\}$上的第一类富克斯群，区域 $D=\{z=x+\mathrm{i}y\in H\,|\,|z|\geqslant1,-1/2\leqslant x<1/2$，且当 $x>0$ 时，$|z|>1\}$是它的一个基本区域. 模群 Γ 的生成元是

$$T\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

H 中那些迷向群由椭圆变换生成的点称为 Γ 的椭圆点，其全体由 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$和 $\rho=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$所代表的两个等价类构成，且模

$$\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

i 的迷向群阶为 2，ρ 的阶为 3. 抛物变换的不动点称为尖点，也称抛物尖点，其迷向群是由某个抛物变换生成的无限循环群. Γ 的尖点集只由一个等价类构成，且与 $\mathbf{Q}\cup\{\infty\}$重合. Γ 的基本区域添加尖点，并适当定义一个解析结构即成为一个黎曼球面，这是 $\Gamma\backslash H$ 的一个紧化. 对自然数 N，由条件

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(\mathrm{mod}N)$$

所定义的 Γ 的正规子群 $\Gamma(N)$称为级为 N 的主同余子群. 一般地，使得 $\Gamma\supset\Gamma^1\supset\Gamma(N)$成立的子群 Γ^1 称为级为 N 的同余子群. 常见的同余子群有：

$$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma\,|\,c\equiv0(\mathrm{mod}\,N)\right\},$$

$$\Gamma_1(N)$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma\,\middle|\,a\equiv d\equiv1(\mathrm{mod}\,N)\ c\equiv0(\mathrm{mod}\,N)\right\}$$

和 θ 群

$$\Gamma_\theta=\left\{\text{由}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\text{和}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\text{生成的 }\Gamma\text{ 之子群}\right\}.$$

对于 Γ 的指标 μ 的同余子群 G，选陪集表示 $T_1,T_2,\cdots,T_\mu$，使得 $\Gamma=GT_1\cup GT_2\cup\cdots\cup GT_\mu$，则

$$D_G=T_1D\cup T_2D\cup\cdots\cup T_\mu D$$

是 G 的一个基本区域. 同 D 一样，在添加尖点并适当定义一个解析结构后，D_G 亦成为一个紧黎曼面，但是，此时 G 的尖点集通常由不只一个等价类组成，所以该黎曼面的亏格一般也不是 0.

椭圆模群（elliptic modular group） 即“模群”.

全模群（full modular group） 即“模群”.

尖点（cusp） 见“模群”.

主同余子群（principal congruence subgroup） 见“模群”.

同余子群（congruence subgroup） 见“模群”.

级（level） 见“模群”.

自守函数(automorphic function)　圆函数、双曲函数、椭圆函数等概念的推广. 设 X 是 $\mathbf{C}^n$ 中有界连通开集, G 是 X 赋以紧开拓扑后的自同构(即双全纯双射)群, Γ 是 G 的离散子群,若一个亚纯函数 f 在 Γ 作用下不变,则称为(关于 Γ 的)自守函数. 若存在一个 $\Gamma\times X$ 到 $\mathbf{C}$ 的函数 $\alpha(r,z)$,它关于 $z\in X$ 全纯,且处处非零,使得对每个 $\gamma\in\Gamma$ 有: $f(\gamma,z)=\alpha(r,z)f(z)(z\in X)$,则称 f 为(关于 Γ 的)自守形式, α 被称为自守因子,它应满足关系 $\alpha(\gamma\gamma',z)=\alpha(\gamma,\gamma'z)\alpha(\gamma',z)$(注意:这里 f 通常要求是全纯的,并且 f 在尖点处的性态要有一些适当的条件).

自守函数与自守形式的研究历史很久,早在高斯(Gauss,G. F.)就有了初步的概念,但他没有发表这些结果,直至19世纪60年代才被重新发现和研究. 第一个系统地研究并形成理论的是庞加莱(Poincaré,(J.-)H.),他关于单变量自守函数理论的工作被誉为是划时代的,极大地推动了解析函数论的发展. 西格尔(Siegel,C. L.)则创造性地把单变量的研究推广到多变量情形,这并不是一件自然的事情,这一工作对多复变函数论的发展起了极大的促进. 盖尔芳特(Gelfand,I.)和塞尔贝格(Selberg,A.)从酉表示的观点来研究自守函数和自守形式,这一思想极大地开拓、丰富、发展了自守函数和自守形式理论,近年来,朗兰兹(Langlands,R.)进一步发展了这一思想,他在这方面的结果和想法,更是涉及到数学的几乎每一个分支,特别对数论、代数几何、非交换调和分析和自守函数与自守形式理论本身等学科的发展产生了极其深远的影响. 时至今日,自守函数与自守形式的研究已成为现代数学的中心课题之一.

自守形式(automorphic form)　见"自守函数".

自守因子(factor of automorphy)　见"自守函数".

权(weight)　自守形式的一个重要概念. 若变换 γ 的函数行列式为 $J(\gamma_-,z)$,则以 $j(\gamma,z)=J(\gamma,z)^{-m}$ 为自守因子的自守形式称为权为 m 的自守形式.

模形式论(theory of modular form)　关于模群或其他算术子群的自守形式理论. 就其内容和方法而言,应是数论的一部分,它与椭圆曲线、非交换调和分析、代数几何等有着十分深刻的联系,现已成为数学中的一个综合学科. 设 Γ 是模群, H 是上半平面, k 是整数. H 上全纯函数 f 若满足条件:

1. 对 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma$,

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(cz+d)^k f(z);$$

2. f 在尖点的邻域内全纯,即 f 有正则傅里叶展开

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z};$$

则称 f 为权 k 的模形式. 若进一步还有

3. 在条件2的傅里叶展开中, $a_0=0$,则称 f 是权 k 的尖点形式.

权 k 的模形式全体构成一个线性空间 $M_k(\Gamma)$,尖点形式全体构成一个子空间 $S_k(\Gamma)$. 由

$$M_k(\Gamma)M_{k'}(\Gamma)\subseteq M_{k+k'}(\Gamma),$$
$$M_k(\Gamma)S_{k'}(\Gamma)\subseteq S_{k+k'}(\Gamma)$$

知

$$M(\Gamma)=\sum_k M_k(\Gamma)$$

成为一个分次环,

$$S(\Gamma)=\sum_k S_k(\Gamma)$$

是其理想. $M_k(\Gamma)$ 是一个有限维空间,其维数可由黎曼-罗赫定理或迹公式求出:当 $k<0$, $k=2$ 或 k 为奇整数时, $\dim M_k(\Gamma)=\dim S_k(\Gamma)=0$;当 $k=0,4,6,8,10$ 时, $\dim S_k(\Gamma)=0$;当 $k>12$ 且 k 为偶数时, $\dim M_k(\Gamma)=1+\dim M_{k-12}(\Gamma)$, $\dim S_k(\Gamma)=\dim M_{k-12}(\Gamma)$. 具体构造模形式的方法可通过庞加莱级数和艾森斯坦级数给出:设 $k=2r$ 为大于3的偶数,记

$$G_r(z)=\sum_{m,n}{}'(mz+n)^{-k},$$

$\sum_{m,n}'$ 表示对所有非 $(0,0)$ 的整数组 (m,n) 求和,这一级数称为艾森斯坦级数,它在 ∞ 处有傅里叶展开

$$G_r(z)=2\sum_{n=1}^{\infty}n^{-k}+\frac{2(2\pi i)^2}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{d|n}d^{k-1}\Big)e^{2\pi i n z},$$

这是一个权 k 的模形式但不是尖点形式. 又设

$$\Gamma_0=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\in\Gamma\right\}.$$

记

$$P_v(z)=\sum_{T\in\Gamma_0\backslash\Gamma} e^{2\pi i v T(z)}(cz+d)^k,$$

其中

$$v=0,\pm1,\pm2,\cdots,\quad T=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

这类级数也是权 k 的模形式,称为庞加莱级数. 当 $v\geqslant1$ 时, P_v 是尖点形式,并且每个权 k 的尖点形式均可表示为这类级数的线性组合,这样模形式空间可由庞加莱级数和艾森斯坦级数线性生成. 此外,诸 $G_2^a(z)G_3^b(z)$ $(4a+6b=k$, a,b 为非负整数)生成 $M_k(\Gamma)$. 判别式模形式

$$\Delta(z)=(60G_2(z))^3-27(140G_3(z))^2$$

是权12的尖点形式,这是权最小的尖点形式,于是 $S(\Gamma)=M(\Gamma)\Delta$. 当 $k\geqslant3$ 时,在 $S_k(\Gamma)$ 中可定义如下

内积

$$(f,g)=\int_D f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

($z=x+\mathrm{i}y$，D 为 Γ 的基本区域)，这个内积称为彼得松内积. $S_k(\Gamma)$关于这个内积构成一个希尔伯特空间. 由于 $f,g\in M_k(\Gamma)$中有一个为尖点形式时，这个积分就收敛，所以可定义 $S_k(\Gamma)$在 $M_k(\Gamma)$中正交补空间 $E_k(\Gamma)$，它由艾森斯坦级数生成，也称艾森斯坦空间.

定义在 H 上关于模群的自守函数称为模函数. 任何一个模函数 f，对充分大的 k，可表为两个模形式 $f_1,f_2\in M_k(\Gamma)$的商：$f=f_1/f_2$. 对于 Γ 的子群，也可类似地定义模形式. 特别地，关于级为 N 的同余子群的模形式称为级 N 模形式，许多对级 1 模形式成立的结果对级 N 模形式也成立或有类似的结论. 研究这些群上的模形式空间的构造是模形式论中一个重要课题. 顺便指出，上述模形式论中的许多概念、结论对一般的自守形式论也成立. 模形式的研究历史很长，研究它的一个主要动机是研究二次型，特别是计算二次型表整数的表法个数问题，最简单的就是计算一个整数 n 可以写成 k 个整数的平方和的表示法个数 $r_k(n)$. 雅可比(Jacobi，C. G. J.)首先注意到这个问题与模形式之间的联系，他引入 θ 级数

$$\theta(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}n^2z},$$

则

$$\theta^k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}r_k(n)\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}nz}.$$

当 $k=8m$ 时，$\theta^k(z)$是一个权为 $4m$ 的级 4 模形式. 于是利用模形式论，可以用艾森斯坦级数的傅里叶系数给出 $r_k(n)$的渐近公式，并在一些特殊情况下求出其精确值. 例如

$$r_8(n)=16\sum_{d|n}d^3.$$

20 世纪初，赫克(Hecke，E.)在总结前人工作的基础上建立了赫克理论，开辟了模形式研究的新途径，使得模形式理论成为一门完整、优美的学科，并发挥出越来越大的作用. 赫克在 $M_k(\Gamma)$中引入了一类新的线性算子(赫克算子)，它关于彼得松内积是埃尔米特算子，并且是交换的，于是模形式空间可由赫克算子的公共特征函数生成. 而这些函数的傅里叶展开式系数具有一定的算术性质. 赫克还建立了模形式与狄利克雷级数之间的联系(赫对应)：若

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}nz}$$

是一模形式，则

$$L(f,s)=\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}(f(\mathrm{i}y)-a_0)y^{\frac{s-1}{2}}\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s},$$

称为对应于 f 的 L 函数，它满足一定的函数方程，并可解析开拓至全平面. 特别地，当 f 是尖点形式且是所有赫克算子的公共特征函数时，$L(f,s)$是整函数，且有欧拉积

$$L(f,s)=\prod_{p\text{素数}}L_p(s),$$

其中 $L_p(s)=(1-\alpha_pp^{-s})^{-1}(1-\beta_pp^{-s})^{-1}(\alpha_p,\beta_p\in C)$. 赫克的工作后来又被其他一些数学家继续发展和完善，现已成为模形式论中最优美、最有力的理论之一.

前面所谈的都是权为整数的情形. 此外在二次域的算术、椭圆曲线等的研究中，半整权模形式也是十分常见的. 例如，在 k 为奇数时，计算 $r_k(n)$，半整权模形式也扮演了重要角色. 日本数学家志村五郎(Shimura，G.)于 1974 年建立了一个从 $k/2$ 权到 $k-1$ 权之间模形式空间的对应(志村提升)，这里 k 为奇整数，并对半整权模形式也建立了相应的赫克理论，开始了对半整权模形式的系统研究. 后又经许多数学家的努力，半整权模形式现已成为一个十分活跃的领域，并在许多领域取得了很好的应用. 例如，关于同余数问题的研究就借助了半整权模形式理论.

盖尔芳特(Gelfand，I.)、塞尔贝格(Selberg，A.)从群表示的角度推广了模形式的概念. 朗兰兹(Langlands，R.)则进一步发展了他们的思想，并提出了一系列的猜想，称为朗兰兹纲领. 它对表示论、数论、代数几何乃至数学的发展都产生了极其深刻的影响.

模形式与许多重要的数学问题有关，上述朗兰兹纲领即是针对非阿贝尔扩域的类论研究. 此外，著名的高斯类数猜想即虚二次域类数问题的解决也用到了模形式. 而模形式论中著名的拉马努金-彼得松猜想则依赖于代数几何中韦伊猜想的解决. 模形式有许多推广形式，如西格尔模形式、希尔伯特模形式以及埃尔米特模形式、希尔伯特-西格尔模形式、四元数上的模形式等，它们为丰富和发展数学这一古老的学科起了积极的推动作用.

尖点形式(cusp form)　见“模形式论”.

艾森斯坦级数(Eisenstein series)　见“模形式论”.

庞加莱级数(Poincaré series)　见“模形式论”.

彼得松内积(Peterson inner product)　见“模形式论”.

赫克理论(Heckes theory)　模形式的一种重要理论. 即关于尖点形式和对应的狄利克雷级数之间关系及其性质的理论. 这个由赫克(Hecke，E.)开创，又经许多数学家发展的理论已成为模形式论的核心. 下面仅就 $\Gamma=\Gamma_0(N)$上权 k 的尖点形式空间

$S_k(N)$介绍这一优美的理论.其他情况有着类似的结论.设$\mathrm{GL}^+(2,\mathbf{Q})$表行列式大于0的二阶有理矩阵集,由双边陪集$\Gamma\sigma\Gamma(\sigma\in\mathrm{GL}^+(2,\mathbf{Q}))$生成的自由模中,定义运算

$$\Gamma\sigma\Gamma\cdot\Gamma\tau\Gamma=\sum_{\Gamma\rho\Gamma}m(\sigma,\tau;\rho)\Gamma\rho\Gamma,$$

其中$m(\sigma,\tau;\rho)$表示有$\Gamma\sigma\Gamma=\bigcup_i\Gamma\sigma_i$,$\Gamma\tau\Gamma=\bigcup_i\Gamma\tau_i$这样的分解时,满足$\Gamma\sigma_i\tau_j=\Gamma\rho$的组$(i,j)$的个数.这样得到的环称为赫克环.记为$\mathscr{H}(\mathrm{GL}^+(2,\mathbf{Q}),\Gamma)$.它是交换的,且可由

$$\Gamma\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}\Gamma\ (p\text{ 为素数})$$

生成.利用初等因子理论可得

$$\Gamma\begin{pmatrix}1&0\\0&p\end{pmatrix}\Gamma=\bigcup_{\substack{(a,N)=1\\ad=p\\a>0}}\bigcup_{b=0}^{d-1}\Gamma\sigma_a\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix},$$

其中

$$\sigma_a=\begin{pmatrix}a'&b'\\0&d'\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}).$$

可以选择得$\mathrm{mod}N$同余于

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}.$$

于是在$S(N)$上可以定义第p个赫克算子$T(p)$为

$$T_k(p)f=p^{k-1}\sum_{\substack{a>0\\ad=p}}\sum_{b=0}^{d-1}f\left(\frac{az+b}{d}\right)d^{-k}.$$

由此可定义赫克环$\mathscr{H}(\mathrm{GL}^+(2,\mathbf{Q}),\Gamma)$在$S_k(N)$上作用.赫克环中元素对应的$S_k(N)$上算子均称为赫克算子.设$p$是一个与$N$互素的素数,$T(p)$关于彼得松内积是埃尔米特的,因此$S_k(N)$有一组基,其中每个元都是$T(p)$的公共特征函数.对每个

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{2\pi inz}\in S_k(N),$$

它结合了一个狄利克雷级数

$$L(f,s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}.$$

赫克证明:$L(f,s)$满足一定的函数方程,且可解析开拓至全平面,当f是所有$T(p)$(p为素数)的公共特征函数时,函数$L(f,s)$有欧拉积.作为推论,若$S_k(N)$中两个函数f_1,f_2是所有$T(p)$的公共特征函数,且有公共特征值,则f_1与f_2只相差一个常数倍.韦伊(Weil,A.)进一步发展了赫克的工作,他证明一个狄利克雷级数在满足一定条件下一定有一个模形式对应于它.

一个$S_k(N)$中函数f,若是$S_k(N')$中元,其中$N'|N$,则称f是旧形式.$S_k(N)$中旧形式空间关于彼得松内积的正交补称为新形式空间,其中的元称为新形式.阿特金(Atkin,A. O. L.)和莱纳(Lehner. J.)于1970年建立了新形式、旧形式理论,并证明了$S_k(N)$的基可由新形式和旧形式组成,且互相不等价(即关于$T(p)$(p为与N互素的素数)它们没有同样的特征值),这一工作进一步完善了赫克理论.对于其他类型模形式,建立相应的赫克理论是模形式论中一个重要课题,虽已有了许多很好的结果,但仍是目前十分活跃的一个研究领域.

赫克环(Hecke ring) 见“赫克理论”.

赫克算子(Hecke operator) 见“赫克理论”.

旧形式(old form) 见“赫克理论”.

新形式(new form) 见“赫克理论”.

判别式模形式$\Delta(z)$(discriminant modular form $\Delta(z)$) 一种特殊的尖点形式.指首项系数为$(2\pi)^{12}$的权12的关于模群的尖点形式.它是所有赫克算子的公共特征函数,且有无穷乘积展开

$$\Delta(z)=(2\pi)^{12}q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24},$$

其中$q=e^{2\pi iz}$.它是关于模群权最小的尖点形式,所有关于模群的整权尖点形式都可由$\Delta(z)$乘上一个模形式得到.若$G_2(z)$,$G_3(z)$分别为关于模群的权4,6的艾森斯坦级数,则

$$\Delta(z)=(60G_2(z))^3-27(140G_3(z))^2,$$

而这正好是椭圆曲线

$$y^2=4x^3-(60\,G_2(z))x-(140G_3(z))\ (z\text{ 固定})$$

的判别式,这也是其名称之由来.

拉马努金函数(Ramanujan function) 一个积性算术函数.若$\tau(n)$是$(2\pi)^{-12}\Delta(z)$的第n个傅里叶系数,则函数$n\mapsto\tau(n)$称为拉马努金函数.这些$\tau(n)$都是整数,并满足关系:当m与n互素时,$\tau(mn)=\tau(n)\tau(m)$;当p为素数,a为正整数时,

$$\tau(p^{a+1})=\tau(p^a)\tau(p)-p^{11}\tau(p^{a-1}).$$

它是首先由拉马努金(Ramanujan,S. A.)研究的.他证明

$$\tau(n)\equiv\sum_{d|n}d^{11}(\mathrm{mod}\,691),$$

并且猜测了$\tau(n)$的许多性质,它们后来被陆续证明,其思想和方法大大推动了模形式论的发展.其中之一是著名的拉马努金猜想:$|\tau(p)|\leqslant2p^{11/2}$($p$为素数),德利涅(Deligne,P.)关于这一猜想的证明深刻影响了许多数学分支的发展.

拉马努金-彼得松猜想(Ramanujan-Peterson conjecture) 关于尖点形式傅里叶展开系数的一个猜想.拉马努金(Ramanujan,S. A.)于1916年首先对拉马努金函数$\tau(n)$猜测:$|\tau(p)|\leqslant2p^{11/2}$($p$为素数),后又由彼得松(Peterson,H.)一般化至对一般的权k尖点形式的傅里叶展开系数有类似的结论:若C_p是赫克算子$T(p)$(p为素数)在权k的尖点形式空间中的特征值,则$|C_p|\leqslant2p^{(k-1)/2}$.法国数学家德利涅(Deligne,P.)证明这可由有限域上代数流形

的广义韦伊猜想推出.德利涅于1974年关于韦伊猜想的精彩证明同时也就证明了这一猜想.

模不变量(modular invariant)　亦称模函数.关于模群的自守函数.在上半平面 H 上定义为 $g_2^3(z)/\Delta(z)$,其中 $g_2(z)=60G_2(z)$,记为 $J(z)$.它把 $\Gamma\backslash H\cup\{\infty\}$一一地解析映射到黎曼球 $C\cup\{\infty\}$,分别把 $\zeta_3=e^{2\pi i/i}$,i,∞映为0,1,∞.从而由 J 生成的有理函数域 $C(J)$ 与模函数域相同.与 (ω_1,ω_2) 为基本周期的椭圆曲线 $E(\omega_1,\omega_2)=C/(\mathbf{Z}\omega_1+\mathbf{Z}\omega_2)$ 的解析同构类,由其模数 $z=\omega_2/\omega_1$ 从而由 $J(z)$ 惟一确定,这是模函数名称的历史由来.有些地方也称

$$J(z)=\frac{1728g_2^3(z)}{\Delta(z)}$$

为模不变量.

模函数(modular function)　定义在上半平面 H 上关于模群的自守函数.模函数全体构成一个域,它与由模不变量 J 生成的有理函数域相同.关于其他同余子群的模函数域也有类似的结论.

克洛斯特曼和(Kloosterman sum)　一种指数和.这是克洛斯特曼(Kloosterman,H.D.)为改进尖点形式的傅里叶系数估计而引入的,现已广泛应用于解析数论.模形式理论中,具体形式是

$$k(u,v,q)=\sum_{\substack{x(\bmod q)\\(x,q)=1}}\exp\left(\frac{2\pi i}{q}\left(ux+\frac{v}{x}\right)\right),$$

其中 u,v,q 都是整数.

基问题(basis problem)　模形式理论的一个重要问题.给出模形式空间的一组基,它们应具有鲜明的算术特色,且其傅里叶系数应该明了或很容易求出.

θ 级数(theta series)　亦称 θ 函数.一种与二次型相联系的级数.若 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ 是 r 个变量的有理整系数正定二次型,对复数 z,定义

$$\theta(z,Q)=\sum_{x_1,x_2,\cdots,x_r\in\mathbf{Z}}e^{2\pi iQ(x_1,x_2,\cdots,x_r)z},$$

则当 $z\in H$ 时,该级数收敛并表示为 z 的一个整函数.这种形式的级数就称为 θ 级数.若记 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_r)=m$ 的有理整数解的个数为 $r(m,Q)$,则有

$$\theta(z,Q)=\sum_0^{\infty}r(m,Q)e^{2\pi inz}.$$

特别地,它是一个权 $r/2$ 的模形式(关于适当的同余子群),这为利用模形式论求 $r(m,Q)$ 提供了可能.对于多个变量的 θ 级数也有类似的结论.另外需要指出,对 θ 级数的研究现已不仅仅局限于数论、函数论领域,在许多数学分支中,θ 级数都扮演了一个重要角色.

θ 函数(θ-function)　即“θ 级数”.

西格尔上半空间(Siegel's upper half-space)　一种特殊空间.由所有虚部是正定的 n 阶复对称矩阵组成的空间 H_n 称为 n 阶西格尔上半空间.在 $n=1$ 时,它就是普通的上半平面 H.这也称为庞加莱上半平面.利用凯莱变换

$$l:H_n\to D_n,\quad z\mapsto w=l\langle z\rangle=\frac{(z-iI)}{(z+iI)},$$

将 H_n 双全纯地映为 n 阶单位球 $D_n=\{W\mid W$ 为 n 阶复对称矩阵,且 $I-\overline{W}W>0\}$,这里 I 是 n 阶单位方阵.这一性质为许多研究提供了方便.

庞加莱上半平面(Poincaré upper half plane)　见“西格尔上半空间”.

n 次西格尔模群(Siegel moduler group of degree n)　对应于辛群 $\mathrm{Sp}(n,\mathbf{Z})$ 的分式线性变换群,常记为 Γ_n,它是作用于西格尔上半空间 H_n 上的第一类不连续群.当 $n=1$ 时,这就是模群.类似于模群,$\Gamma_n\backslash H_n$ 也可做类似的紧化.同样地,这里也有同余子群、级等概念.

西格尔模形式(Siegel modular form)　定义在西格尔上半空间上关于西格尔模群的自守形式.精确地讲,H_n 上的全纯函数 $f(Z)$,若满足条件:

1. 对 $\sigma=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\Gamma_n$,

$$f(\sigma(Z))=f(Z)\det(Z+D)^k;$$

2. 有正则傅里叶展开

$$f(Z)=\sum_{T\geqslant 0}a_Te^{2\pi i trTZ};$$

其中 T 取遍所有 n 阶半整、半正定对称矩阵,则称 $f(Z)$ 为权 k 的 n 次西格尔模形式.若还有:

3. 在条件2的傅里叶展式中,$a_T\neq 0$;

则 T 一定正定,称 $f(Z)$ 为尖点形式.当 $n=1$ 时,这就是模形式.于是许多关于模形式的结论对于西格尔模形式也成立,或有类似的形式.作为西格尔模形式的具体例子有艾森斯坦-庞加莱级数

$$E_{s,k}(Z)=\sum_{\sigma\in\Gamma(s)\backslash\Gamma_n}e^{2\pi i tr(S\sigma(Z))}\det(CZ+D)^k,$$

其中 S 是 n 阶半正定的有理对称矩阵,

$$\Gamma(s)=\left\{\begin{pmatrix}U&T{}^tU^{-1}\\0&{}^tU^{-1}\end{pmatrix}\in\Gamma_n\mid {}^tUSU=S,\ e^{2\pi i tr(ST)}=\det(U)^k\right.,$$

这个级数在 $k>n+\mathrm{rank}S+1$(当 $s>0$ 时只需 $k>2n$)时收敛,其全体张成权 k 的 n 次西格尔模形式空间.特别地,$E_{s,k}(s>0)$ 张成尖点形式空间.当 k 小时,这些级数不收敛,但此时由整系数二次型定义的 θ 级数扮演了类似的角色,借助于对奇异形式的研究也得到了相应的结果.与模形式类似,也可对西格尔模群的同余子群定义西格尔模形式.这个由西格尔(Siegel,C.L.)创立的分支现仍是模形式理论研究的重点之一,其中仍有许多问题有待于进一步深入研究.

西格尔算子(Siegel operator)　一种特殊映射. 指从 n 阶权 k 西格尔形式空间到 $n-1$ 阶权 k 西格尔形式空间的线性映射. 若 $Z\in H_{n-1}$,则

$$Z_\lambda=\begin{pmatrix} Z & 0\\ 0 & \mathrm{i}\lambda\end{pmatrix}\in H_n\quad(\lambda>0).$$

对 n 阶权 k 的西格尔模形式 f,定义

$$f|\Phi(Z)=\lim_{\lambda\to\infty}f(Z_\lambda).$$

这个算子 Φ 称为西格尔算子. 它是一个满射,且其核是全体 n 阶权 k 尖点形式集.

奇异形式(singular modular form)　一个西格尔模形式. 其傅里叶系数 $a(t)$ 对半整、正定的 t 是零. 设 f 是 n 阶西格尔模形式,权是 k. 当 $k<n/2$(此时称 k 为奇异权)时,f 定是奇异形式.

奇异权(singular weight)　见"奇异形式".

傅里叶-雅可比展开(Fourier-Jacobi expansion)　西格尔模形式的部分傅里叶展开. 设

$$Z=\begin{pmatrix} Z_1 & {}^tZ\\ W & Z_2\end{pmatrix}\in H_{n+j},$$

其中 $Z_1\in H_n, Z_2\in H_j$. 对 $n+j$ 阶西格尔模形式 F,将它关于 Z_2 做傅里叶展开

$$F(Z)=F(Z_1,W,Z_2)=\sum_{\substack{\mu\geqslant 0\\ \mu\text{半整}}}\varphi_\mu(Z_1,W)\mathrm{e}^{2\pi i tr(\mu Z_2)},$$

这称为 F 的傅里叶-雅可比展开.

希尔伯特模形式(Hilbert modular form)　一种模形式概念的推广. 设 K 是全实有限次代数数域,K 之共轭为 $K^{(1)},K^{(2)},\cdots,K^{(n)}$,$n=[K:Q]$,$\alpha\in K$ 的共轭表为 $\alpha^{(1)},\alpha^{(2)},\cdots,\alpha^{(n)}$. 若 $\mathscr{D}$ 为 K 的主整环,$\Gamma_{\mathscr{D}}=\mathrm{SL}(2,\mathscr{D})$,定义 $\Gamma_{\mathscr{D}}$ 在

$$H^n=\{Z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)|z_i\in H\}$$

上的作用为

$$\sigma(z)=\left(\frac{\alpha^{(1)}z_1+\beta^{(1)}}{\gamma^{(1)}z_1+\delta^{(1)}},\cdots,\frac{\alpha^{(n)}z_n+\beta^{(n)}}{\gamma^{(n)}z_n+\delta^{(n)}}\right),$$

其中

$$\sigma=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

则 $\Gamma_{\mathscr{D}}$ 是 $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})^n$ 的不可约离散子群,称为(狭义)希尔伯特模群. 定义在 H^n 上关于希尔伯特模群的自守形式就称为希尔伯特模形式,注意这里自守因子为

$$J(\sigma,z)=\prod_{i=1}^{n}(\gamma^{(i)}z_i+\delta^{(i)})^k.$$

当 $n=1$ 时就是普通的模形式. 关于希尔伯特模形式也有类似于模形式、西格尔模形式等情形的结果.

希尔伯特模群(Hilbert modular group)　见"希尔伯特模形式".

迹公式(trace formula)　亦称塞尔贝格迹公式. 波松求和公式的推广. 它是由塞尔贝格(Selberg,A.)于 1956 年提出的,深刻地影响了非交换调和分析、自守形式理论的发展. 经过许多数学家多年的努力,迹公式已成为这些领域中一个非常有力的工具. 若 G 是一个局部紧的幺模群,Γ 是 G 的离散子群,$\Gamma\backslash G$ 上平方可积函数全体构成了一个希尔伯特空间 $L^2(\Gamma\backslash G)$,对 $\varphi\in L^2(\Gamma\backslash G)$,$x,y\in G$,定义 $(R(y)\varphi)(x)=\varphi(xy)$,则 R 是 G 在 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 上一个酉表示. 将 R 分解为不可约表示这一问题在自守形式理论和数论中是十分重要的. 在研究这一问题中,塞尔贝格迹公式扮演了一个重要角色. 当 $\Gamma\backslash G$ 为紧时,迹公式可以写作

$$\sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}a_\Gamma^G(\gamma)I_G(\gamma,f)=\sum_{\pi\in\Pi(G)}a_\Gamma^G(\pi)I_G(\pi,f),$$

其中 $a_\Gamma^G(\gamma)=\mathrm{volum}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)$,$\Gamma_\gamma,G_\gamma$ 分别为 γ 在 Γ,G 中的中心化子. $\{\Gamma\}$ 为 Γ 中共轭类的表示元集,$\Pi(G)$ 是 G 的不可约表示的等价类集,$a_\Gamma^G(\pi)$ 是正整数,

$$I_G(\gamma,f)=\int_{G_\gamma\backslash G}f(x^{-1}\gamma x)\mathrm{d}x,$$

$I_G(\pi,f)=\mathrm{tr}\pi(f)$,$f\in L^2(\Gamma\backslash G)$. 当 $\Gamma\backslash G$ 非紧时,在许多情况下,仍有类似的迹公式. 这是现在研究的课题.

迹公式应用于模形式理论,可以求赫克算子的迹,模形式空间中赫克算子的迹公式亦独立地被艾希勒(Eichler,M.)得到,因此,又称此公式为艾希勒-塞尔贝格迹公式. 利用这一公式可以求模形式空间的维数. 此外,它在研究不同的模形式空间的对应时是个有力的工具. 而在研究模形式空间基问题时,它也扮演了一个重要角色.

塞尔贝格迹公式(Selberg trace formula)　即"迹公式".

艾希勒-塞尔贝格迹公式(Eichler-Selberg trace formula)　见"迹公式".

朗兰兹纲领(Langlands grogram)　一个以李群的无限维表示来统一阐明数论的计划,其中心是自守表示 π 及其 L 函数 $L(s,\pi)$ 的一般性概念,而这些概念是用群论和阿代尔群上的调和分析来阐述的. 朗兰兹猜想:数论中所提出的种种函数,L 函数只不过是上述函数 $L(s,\pi)$ 的特例,这样 n 次数域可以由 $\mathrm{GL}(n)$ 的诸不可约无限维表示来刻画. 这一纲领被誉为克莱因(Klein,(C.)F.)的爱尔郎根纲领的继承,它将会推动今后数学的发展.

编　者　李云峰　裘焯明
审　阅　冯克勤　李德琅　陆洪文　裴定一

代 数 几 何

代数几何(algebraic geometry) 研究多项式方程组在仿射或射影空间里的公共零点集合的几何特性的数学分支学科. 换言之,它是研究代数簇的. 代数几何与许多其他数学分支有着密切的联系. 通常假设代数簇 V 中点的坐标在某个固定域 k 中选取,k 称为 V 的基域. V 为不可约(即 V 不能分解成两个比它小的闭代数子簇的并)时,V 上所有有理函数(即两个多项式的商)全体也构成一个域,称为 V 的有理函数域,它是 k 的一个有限生成扩域. 通过这样的一个对应关系,代数几何可以看成是用几何的语言和观点来研究有限生成扩域.

代数几何的基本问题就是代数簇的分类. 包括双有理分类与双正则分类(即同构分类). 若一个代数簇 V_1 到另一个代数簇 V_2 的映射诱导了函数域之间的同构,则称该映射为双有理映射. 设有两个代数簇 V_1,V_2,若 V_1 中有一个稠密开集同构于 V_2 的一个稠密开集,则称 V_1,V_2 是双有理等价的. 这等价于 V_1 和 V_2 的函数域之间的同构. 按这个等价关系对代数簇进行分类就称为双有理分类. 分类理论是这样建立的:首先,找出代数簇的双有理等价类;其次,在这个等价类中找到一个好对象的子集,如非奇异射影簇,对它们进行分类;第三步就是确定一个任意簇与这些好的对象相差多远. 因为任意特征 0 的基域上的代数簇都双有理等价于一个非奇异射影簇,所以为实现这三步,人们往往先找一组与非奇异射影簇对应的整数,称为它的数值不变量. 例如,在射影簇的情形,它的各阶上同调空间的维数就都是数值不变量. 然后试图在所有具有相同的数值不变量的代数簇的集合上建立一个自然的代数结构,称为它们的参量簇,使得当参量簇中的点在某个代数结构中变化时,对应的代数簇也在相应的代数结构中变化. 目前,只有代数曲线、一部分代数曲面以及少数特殊的高维代数簇有较完整的分类.

20 世纪初期,由于抽象代数方法的引入,抽象域上的代数几何理论建立起来了. 特别是在 20 世纪 50 年代,塞尔(Serre,J. P.)把代数簇的理论建立在层的概念上,并建立了凝聚层的上同调理论,这为格罗腾迪克(Grothendieck,A.)随后建立概形理论奠定了基础. 概形理论的建立使代数几何的研究进入了一个全新的阶段. 概形的概念是代数簇的推广. 粗浅地,它允许点的坐标在任意有单位元的交换环中选取,并允许结构层中有幂零元. 概形理论把代数几何和代数数域的算术统一到了一个共同的语言之下,这使得在代数数论的研究中可以应用代数几何中大量的概念、方法和结果.

20 世纪以来,复数域上代数几何中的超越方法也有重大的进展,例如,德·拉姆(de Rham,G.-W.)的解析上同调理论,霍奇(Hodge,W. V. D.)的调和积分理论的应用,小平邦彦和斯潘塞(Spencer,D. C.)的变形理论以及格里菲思(Griffiths,P.)的一些重要工作. 这使得代数几何的研究可以应用偏微分方程、微分几何、拓扑学等理论.

双有理分类(birational classification) 见"代数几何".

算术几何(arithmetic geometry) 亦称算术代数几何,代数几何的一个分支. 原指从法尔廷斯(Faltings,G.)、奎林(Quillen,D. G.)等的算术曲面上黎曼-罗赫定理开始的一系列研究工作,现在一般指所有以数论为背景或目的的代数几何. 在算术几何中许多学科起着重要作用,并且相互交叉和渗透,包括数论、模形式、表示论、代数几何、代数数论、李群、多复变函数论、黎曼面、K 理论等,所以,它是典型的边缘学科. 丢番图方程是算术几何的一个重要课题,其中的问题可以自然地用几何语言表达. 在许多著名问题如莫德尔猜想、费马大定理等的研究中,都表明 几何方法的必要性. 这正是算术几何的生命力所在.

算术代数几何(arithmetic algebraic geometry) 即"算术几何".

环空间(ringed space) 一类重要的拓扑空间. 指一种带有一个环层 O_X 的拓扑空间 X. 环层 O_X 被称为环空间(X,O_X)的结构层. 一般地,O_X 是一个带单位元的交换环层. 环空间的态射$(f,f^{\#}):(X,O_X)\to(Y,O_Y)$是由拓扑空间的连续映射 $f:X\to Y$ 以及 X 上的环层同态 $f^{\#}:O_Y\to f_*O_X$ 所构成. 环空间及其态射构成一个范畴. 当 O_X 是局部环层时,(X,O_X)称为局部环空间. 作为局部环空间的态射,还要求对每个点 $x\in X$,同态 $f_x^{\#}:O_{Y,f(x)}\to O_{X,x}$是局部同态,即它把极大理想映入极大理想. 局部环空间的范畴是环空间范畴的子范畴. 环空间的重要例子有:概形、微分流形、解析簇、解析空间等. 环空间的概念起源于嘉当(Cartan,H.).

环空间的结构层(structure sheaf of a ringed space) 见"环空间".

局部环空间(locally ringed space) 见"环空间".

仿射概形(affine scheme)　一类特定的拓扑空间构成的系统.指由某个带单位元的交换环 A 所确定的局部环空间$(\mathrm{Spec}\,A,\widetilde{A})$.它是构成概形的"砖块".构成仿射概形的拓扑空间是环 A 的谱 $\mathrm{Spec}\,A$,即 A 的所有素理想的集合,再带上扎里斯基拓扑所成的拓扑空间.扎里斯基拓扑的开集基由子集

$$D(f)=\{p\in\mathrm{Spec}\,A\,|\,f\notin p\}$$

所构成,这里的 f 取遍 A 的元素.这个仿射概形的结构层 $\widetilde{A}$ 是如下定义的:$\Gamma(D(f),\widetilde{A})=A_f$,$A_f$ 是 A 关于乘法子集$\{f^n\}_{n\geqslant 0}$的局部环.环同态 $\varphi:A\to B$ 可以诱导局部环空间的态射

$$({}^a\varphi,\widetilde{\varphi}):(\mathrm{Spec}\,B,\widetilde{B})\to(\mathrm{Spec}\,A,\widetilde{A}),$$

这里${}^a\varphi(p)=\varphi^{-1}(p)$对 $p\in\mathrm{Spec}\,B$.反之,仿射概形间的态射$(\mathrm{Spec}\,B,\widetilde{B})\to(\mathrm{Spec}\,A,\widetilde{A})$可以惟一确定同态 $A\to B$.这表明函子 $A\to(\mathrm{Spec}\,A,\widetilde{A})$是从带单位元的交换环范畴到仿射概形范畴的反变函子,使这两个范畴成为反变等价的.仿射概形的概念是由格罗腾迪克(Grothendieck,A.)于 20 世纪 60 年代在他的巨著《代数几何原本》中引入的.若 A 是诺特环、整环、没有幂零元的环、整闭整环或正则环,则由 A 确定的仿射概形相应地称为诺特的、整的、既约的、正规的或正则的.仿射概形的一个重要的上同调性质就是拟凝聚层的正次上同调群都消失为零.

环的谱(spectrum of a ring)　见"仿射概形".

概形(scheme)　代数几何的基本研究对象.它实际上就是一个局部同构于仿射概形的局部环空间.更精确地,概形(X,O_X)是一个环空间,其拓扑空间 X 有一个开覆盖$\{X_i\}_{i\in I}$,使得$(X_i,O_X|X_i)$同构于仿射概形 $\mathrm{Spec}\,\Gamma(X_i,O_X)$(这样的覆盖称为仿射开覆盖).概形间的态射就是局部环空间的态射.概形的范畴是局部环空间范畴的子范畴.若概形 X 有一个仿射开覆盖$\{X_i\}$,使得每个仿射概形都是诺特概形、既约概形、正规概形或正则概形,则相应地称概形 X 是局部诺特的、既约的、正规的或正则的.这些性质都是概形的局部性质,就是说,只要存在一个仿射开覆盖具有上述某种性质,这个概形就具有此性质,而且任意一个仿射开子概形都有此性质.若概形 X 的拓扑空间是连通空间或不可约空间(即它不能表成两个不同真闭子集的并),则称此概形为连通的或不可约的.

在研究概形的性质或有关的概念时,往往要考虑具有相同基础的概形.带有态射 $f:X\to S$ 的概形 X 称为 S 概形.若 $S=\mathrm{Spec}\,A$ 是仿射概形,则 S 概形简称 A 概形.显然任何概形都是 $\mathbb{Z}$ 概形.给出基变换态射 $S'\to S$ 后,可以得到一个 S'概形 $X_{S'}=X\times_S S'$,称为 S 概形 X 的基扩张.与 S 概形相关的概念称为相对概念,以区别于与概形相关的绝对概念.S 概形与态射 $f:X\to S$ 密切相关.不同性质的态射就给出了不同的 S 概形.例如,设 $f:X\to S$ 是一个态射,若对角浸入 $X\to X\times_S X$ 是闭态射,则称 f 是分离态射;若存在 S 的一个仿射开覆盖 $\{U_i\}=\{\mathrm{Spec}\,B_i\}$,使得每个 $f^{-1}(U_i)$都有一个有限仿射开覆盖$\{V_{ij}\}=\{\mathrm{Spec}\,A_{ij}\}$,并且 A_{ij}都是有限生成 B_i 代数,则称 f 是有限型的;若 $f^{-1}(U_i)=\mathrm{Spec}\,A_i$,$A_i$ 都是有限生成 B_i 模,则称 f 是有限态射.有限态射是仿射态射.代数几何中研究的 S 概形一般都是分离、有限型的.

仿射开覆盖(affine open covering)　见"概形".

局部诺特概形(locally Noetherian scheme)　见"概形".

连通概形(connected scheme)　见"概形".

不可约概形(irreducible scheme)　见"概形".

S 概形(S-scheme)　见"概形".

齐次谱(homogeneous spectrum)　由一个分次环所确定的特殊概形.设

$$R=\sum_{n=0}^{\infty}R_n$$

是一个分次环,环 R 的齐次谱 $\mathrm{Proj}\,R=(X,O_X)$是如下定义的一个概形:X 的点是 R 中不包含$\sum_{n=1}^{\infty}R_n$ 的齐次素理想 p.X 的拓扑由所有的 $f\in R_n(n>0)$所对应的开集基 $D_+(f)=\{p\in X\,|\,f\notin p\}$构成.结构层 O_X 由$\Gamma(D_+(f),O_X)=R_{(f)}$所定义,这里的 $R_{(f)}$是 R 关于乘法集$\{f^n\}_{n\geqslant 0}$的局部环 R_f 的 0 次元素子环.齐次谱的最重要的例子是

$$P^n_{\mathbb{Z}}=\mathrm{Proj}\,\mathbb{Z}[T_0,T_1,\cdots,T_n],$$

就是整数环上的射影空间.当 R_1 是有限生成 R_0 模,$R_n(n>1)$可由 R_1 中元素相乘生成时,$\mathrm{Proj}\,R$ 是一个射影 R_0 概形.

既约概形(reduced scheme)　代数簇的推广.若一个概形(X,O_X)的每一个点 x 的局部环 $O_{X,x}$都不含非零幂零元,则称 X 是既约概形.任意一个概形(X,O_X)都含有一个极大的既约闭子概形

$$(X_{\mathrm{red}},O\,X_{\mathrm{red}}).$$

子概形(subscheme)　开子概形、闭子概形与一般子概形的统称.概形(X,O_X)的开子概形就是一个概形(U,O_U),其中拓扑空间 U 是 X 的开子集,结构层 $O_U\cong O_X|_U$.若 $\mathscr{I}$ 是概形 X 的拟凝聚 O_X 理想层,$Y=\mathrm{supp}\,O_X/\mathscr{I}$,则 Y 是 X 的闭子集,而称$(Y,(O_X/\mathscr{I})|_Y)$为由 $\mathscr{I}$ 确定的闭子概形.可见对于拓扑空间 X 的一个闭子集 Y,以 Y 作为拓扑空间的闭子概形不止一个,但其中必有一个惟一的最小闭子概形,这个闭子概形一定是既约的.若概形 Y 是 X 的某个开子概形的闭子概形,则称 Y 为 X 的子概形.若态射 $f:Y\to X$ 诱导了 Y 到 X 的一个开子概形(或

相应地：闭子概形、子概形）上的同构，则相应地称 f 是一个开浸入（或闭浸入、浸入）.

开子概形(open subscheme)　见“子概形”.

闭子概形(closed subscheme)　见“子概形”.

开浸入(open immersion)　见“子概形”.

闭浸入(closed immersion)　见“子概形”.

浸入(immersion)　见“子概形”.

诺特概形(Noetherian scheme)　诺特环的推广.若一个概形 X 有一个由诺特环的谱所构成的有限仿射开覆盖，则称 X 是诺特概形.诺特概形中的任意一个仿射开子概形都是诺特环的谱.域上或诺特环上的有限型概形都是诺特概形.

正规概形(normal scheme)　整闭整环的推广.若一个概形 X 的所有局部环 $O_{X,x}$ 都是整闭整环，则称 X 是正规概形.正规概形是局部不可约的，因此它的连通分支与不可约分支重合.正规诺特概形的奇点集的余维数大于 1.对于一个既约概形 X 总存在一个典范的正规概形 $\tilde{X}$ 与 X 相伴，称为 X 的正规化.当 X 是域上有限型概形时，$\tilde{X}\to X$ 一定是有限态射.

正则概形(regular scheme)　光滑代数簇的推广.若概形 (X,O_X) 在每个点 $x\in X$ 的局部环 $O_{X,x}$ 都是正则局部环，则称为正则概形.若 X 是代数闭域上的代数簇，则正则性和非异性是等价的.

光滑概形(smooth scheme)　光滑代数簇概念的推广.设 X 是域 k 上的有限型概形，若 $\bar{k}$ 是 k 的代数闭包，X 的基扩张 $X_{\bar{k}}$ 是正则概形，则称 X 是光滑概形.当 k 是完全域时，正则 k 概形与光滑 k 概形是一致的.仿射 k 空间 A_k^n 和射影 k 空间 P_k^n 都是光滑 k 概形的例子.若概形 X 是在仿射 k 空间 A_k^m 内由方程

$$F_i(X_1,X_2,\cdots,X_m)=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

所给出，则 X 是光滑 k 概形，当且仅当雅可比矩阵 $(\partial F_i/\partial X_j)$ 在 X 的每一个点 x 的秩等于 X 在 x 的余维数.

群概形(group scheme)　具有代数的群结构的概形.若 S 为任意概形，则一个 S 上的群概形指的是一个态射 $\pi:G\to S$，连同 S 态射 $m:G\times_S G\to G$（乘法），$o:S\to G$（单位元）及 $\iota:G\to G$（逆元），满足下述条件：

1. $m\circ(\mathrm{id}_G\times_S m)=m\circ(m\times_S\mathrm{id}_G):G\times_S G\times_S G\to G$（结合律）.

2. $m\circ(o\times_S\mathrm{id}_G)=m\circ(\mathrm{id}_G\times_S o)=\mathrm{id}_G:G\cong S\times_S G\to G$.

3. $m\circ(\iota\times_S\mathrm{id}_G)\circ\Delta=m\circ(\mathrm{id}_G\times_S\iota)\circ\Delta=o\circ\pi:G\to G$，其中 $\Delta:G\to G\times_S G$ 是对角态射.

群概形 $G\to S$ 称为交换的，若还满足：

4. $m\circ(\mathrm{pr}_2,\mathrm{pr}_1)=m:G\times_S G\to G$.

若 π 是仿射（有限、有限型、分离、正常、射影、光滑、平坦、…）态射，则称 S 群概形为仿射（有限、有限型、分离、正常、射影、光滑、平坦、…）的.

分离态射(separated morphism)　见“群概形”.

有限型态射(morphism of finite type)　见“群概形”.

有限态射(finite morphism)　见“群概形”.

仿射态射(affine morphism)　仿射概形的相对化.设有概形间的态射：$f:X\to S$，使得 S 中任何仿射开子概形的原像都是仿射概形，这时 X 称为仿射 S 概形.仿射态射当然是一个局部性质.概形的闭浸入、有限态射、仿射概形间的态射都是仿射态射.若 $\mathscr{A}$ 是一个 O_s 代数层，则 $\mathscr{A}$ 可以定义一个仿射 S 概形 $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}$；反过来任意一个仿射 S 概形都可如此表示.

仿射 S 概形(affine S-scheme)　见“仿射态射”.

射影态射(projective morphism)　射影簇的推广及相对化.设 S 是一个概形，$\mathbf{Z}$ 上射影空间

$$P_{\mathbf{Z}}^n=\mathrm{Proj}\,\mathbf{Z}[T_0,T_1,\cdots,T_n]$$

用 $S\to\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$ 做基扩张后可以得到 S 上的射影空间 $P_S^n=P_{\mathbf{Z}}^n\times_{\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}}S$.若态射 $f:X\to S$ 可以分解为一个闭浸入 $X\to P_S^n$ 以及投影 $P_S^n\to S$ 的复合，则称 f 是射影态射，X 称为射影 S 概形.直观地看，射影 S 概形就是 S 上某个射影空间的闭子概形.诺特概形的射影态射一定是正常态射.射影态射是一个整体概念，即射影态射 $f:X\to S$ 在任一点 $s\in S$ 上的纤维 $f^{-1}(s)$ 都是剩余域 $k(s)$ 上的射影概形；但反之则不对.当 $S=\mathrm{Spec}\,A$ 是仿射概形时，射影 S 概形一定是某个分次 A 代数的齐次谱.当 S 是一般概形时，一定存在分次 O_S 代数层 $\mathscr{R}$，使得射影 S 概形同构于 $\mathrm{Proj}\,\mathscr{R}$.

射影 S 概形(projective S-scheme)　见“射影态射”.

拟射影态射(quasi-projective morphism)　拟射影簇的推广及相对化.若 $g:Y\to S$ 是射影态射，$f:X\to S$ 是一个态射，使得 $X\to Y$ 是 S 上开浸入，则称 f 是拟射影态射，X 称为拟射影 S 概形.换句话说，拟射影 S 概形是 S 上某个射影空间的子概形.

拟射影 S 概形(quasi-projective S-scheme)　见“拟射影态射”.

正常态射(proper morphism)　完备簇的相对化.就是概形间的分离、绝对闭、有限型态射.若概形间的一个闭态射：$f:X\to Y$ 在任意的基变换 $Y'\to Y$ 下诱导的态射 $X\times_Y Y'\to Y'$ 仍是闭态射，则称 f 是绝

对闭的. 一个态射是否正常态射是一个局部性质. 正常态射的概念起源于谢瓦莱(Chevalley, C.). 正常态射与射影态射非常接近: 射影态射必是正常态射, 拟射影的正常态射必是射影态射. 周炜良定理又断言: 正常态射被射影态射所支配. 正常态射具有良好的上同调性质, 因此在概形的层上同调理论中起着重要作用.

绝对闭态射(absolutely closed morphism) 见"正常态射".

平坦态射(flat morphism) 平坦模的推广和相对化. 设 $f:X\to S$ 是概形的态射, 若对于任意的点 $x\in X$, 局部环 $O_{X,x}$是平坦 $O_{Y,f(x)}$环, 则称 f 是平坦态射, X 称为平坦 S 概形. 直观上看, 有限型平坦态射相当于代数簇的连续族. 平坦态射是开映射, 而且是等维数的(即对于 $s\in S$ 的邻域, f 的纤维有相同维数). 若平坦态射 $f:X\to S$ 又是满的, 则 f 称为忠实平坦的.

平坦 S 概形(flat S-scheme) 见"平坦态射".

忠实平坦态射(faithfully flat morphism) 见"平坦态射".

光滑态射(smooth morphism) 光滑概形的相对化, 也可看成是非异代数簇的族. 设 $f:X\to S$ 是有限型态射, 若 f 是平坦态射, 并且对任一个点 $s\in S$, 纤维 $f^{-1}(s)$是剩余域 $k(s)$上的光滑概形, 则称 f 是光滑态射, X 称为光滑 S 概形. 仿射 S 空间 A_S^n 和射影 S 空间 P_S^n 都是光滑 S 概形. 当 X 和 S 有相同维数时平展态射是光滑态射. 反之, 光滑态射 $f:X\to S$ 总可以局部地分解为平展态射 $X\to A_S^n$ 与投影 $A_S^n\to S$ 的合成.

光滑 S 概形(smooth S-scheme) 见"光滑态射".

不分歧态射(unramified morphism) 代数数论中的不分歧扩张的推广. 不分歧态射 $f:X\to S$ 是概形间的局部有限型态射, 使得对每个 $s\in S$ 都有 $X_s=\dot{\bigcup}\operatorname{Spec}k_i$, 其中 k_i 是 s 的剩余域 $k(s)$的有限可分扩域. 特别地, 平坦的不分歧态射就是平展态射. 闭浸入都是不分歧态射.

平展态射(étale morphism) 一种重要的光滑态射. 代数簇或概形间相对维数等于 0 的光滑态射, 它也可以等价地定义为概形间的不分歧平坦态射. 当 X 和 Y 都是光滑簇(即复流形)时, 平展态射 $f:X\to Y$ 蕴含了对应点的切空间的同构或解析局部环间的同构. 平展态射在平展上同调理论以及概形的基本群和代数空间的定义中都起着重要的作用.

代数簇(algebraic variety) 代数几何的基本研究对象. 设 k 是一个域, 域 k 上的代数簇就是一个整的、分离、有限型 k 概形. 这里的基域 k 往往被取作代数闭域. 若一个代数簇又是射影、拟射影、仿射或正常 k 概形, 则把这个代数簇相应地称为射影、拟射影、仿射、完备(代数)簇. 射影簇必定是完备簇, 反之则不然. 永田定理断言: 对任意的代数簇 X, 必存在一个完备簇 $\overline{X}$, 使得 $X\to\overline{X}$ 是开浸入. 代数簇的概念最早是在 20 世纪 20 年代由范·德·瓦尔登(Van der Waerden, B. L.)和诺特(Noether, E.)等提出的, 以后又经过韦伊(Weil, A.)、塞尔(Serre, J. P.)等人的发展, 直至格罗腾迪克(Grothendieck, A.)把它纳入概形体系, 才得到上述的现代定义.

射影簇(projective variety) 见"代数簇".

拟射影簇(quasiprojective variety) 见"代数簇".

仿射簇(affine variety) 见"代数簇".

完备簇(complete variety) 见"代数簇".

代数空间(algebraic space) 代数簇和概形概念的推广. 概形 S 上的代数空间是 S 的平展拓扑意义下的集合层 A, 并且存在概形 U 以及层的态射 $u: U\to A$, 还有一个等价关系 $i_1, i_2: R \rightrightarrows U$, 使得 i_1 和 i_2 都是满平展态射, $(i_1, i_2): R\to U\times_S U$ 是拟紧的, 而且 u 诱导了 A 与商层 U/R 间的等价. 这时称 U 为层 A 的平展覆盖. 代数空间是阿廷(Artin, E.)引入的, 主要目的是为了弥补概形范畴关于许多取商的函子不封闭的缺陷. 代数空间关于平坦等价关系取商仍是代数空间. 概形理论里的许多概念都能推广到代数空间, 并且代数空间中包含有扎里斯基拓扑意义下的开稠密子空间, 使它是一个概形.

平展覆盖(étale covering) 见"代数空间".

射影空间(projective space) 整体几何最基本的研究对象之一. 射影空间的概念最初产生于古典射影几何. 对于射影定理中的奇异情形(即有些直线相互平行的情形), 为方便起见引入无穷远点的概念, 即规定平面上每条直线上有一个无穷远点, 两条直线平行就是相交于无穷远点, 所有无穷远点组成一条无穷远直线. 这种构造方法还可以推广到高维空间, 建立 n 维(实)射影空间 $P_{\mathbf{R}}^n$. 在 n 维射影空间中常采用齐次坐标$(X_0:X_1:\cdots:X_n)$, 其中 $X_0, X_1, \cdots, X_n$ 不全为 0; 若 $a\neq 0$, 则$(aX_0:aX_1:\cdots:aX_n)$与$(X_0:X_1:\cdots:X_n)$表示同一个点. 因此 n 维(实)射影空间同构于$(\mathbf{R}^{n+1}-\{0\})/\mathbf{R}^*$. 进一步的研究表明 $P_{\mathbf{R}}^n$ 是紧致解析流形. 若令 $U_i(0\leqslant i\leqslant n)$为 $P_{\mathbf{R}}^n$ 中坐标 $X_i\neq 0$ 的点全体, 则 $U_i\cong\mathbf{R}^n$, 且 $U_0, U_1, \cdots, U_n$ 组成 $P_{\mathbf{R}}^n$ 的一个开覆盖. 上述构造方法可以推广到任意体 K 上, 建立 K 上的 n 维射影空间 P_K^n. 在概形理论中, 还将射影空间建立在整数环 $\mathbf{Z}$ 上, 即建立射影概形 $P_{\mathbf{Z}}^n$. 由此对任意概形 X 可以建立 P_X^n, 它是 X 和 $P_{\mathbf{Z}}^n$(在 $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ 上)的纤维积. 特别地, 若 $X=$

Spec K(K 为域)，则 $P_X^n = P_K^n$.

由于射影空间的性质非常丰富难以全面列举，仅举数例如下：

1. $P_{\mathbb{R}}^1$ 同胚于圆，$P_{\mathbb{C}}^1$ 可看做添上无穷远点的复平面，同胚于球面.

2. $P_{\mathbb{R}}^2$ 是单侧曲面，可以同胚地嵌入四维空间 $\mathbb{R}^4$，但不能同胚地嵌入三维空间 $\mathbb{R}^3$，$P_{\mathbb{C}}^2$ 是代数极小曲面.

3. $P_{\mathbb{C}}^n$ 是克勒流形，它的闭解析子空间都是代数的.

4. 对任意域 k，P_k^n 是齐性空间，其切丛由整体向量场生成，其自同构群为射影群 $\mathrm{PSL}(n+1,k)$，其皮卡群 $\mathrm{Pic}(P_k^n)\cong\mathbb{Z}$.

扎里斯基拓扑(Zariski topology)　代数簇与概形的研究中使用的一种拓扑. 扎里斯基拓扑往往用指定空间中的闭子集的方式来定义. 仿射空间 A^n 中的扎里斯基闭集就是某一族多项式的公共零点集. 从 A^n 的扎里斯基拓扑就可诱导得代数簇的扎里斯基拓扑. 对于一个仿射概形 Spec A，把扎里斯基闭集取为

$$V(I) = \{p \in \mathrm{Spec}\ A \mid p \supset I\},$$

其中 I 是环 A 的一个理想. 类似地即可得到概形的扎里斯基拓扑. 扎里斯基拓扑是很弱的拓扑，因此有时在概形的研究中要使用更强的平展拓扑. 当基域是复数域时，有时要使用通常的复拓扑.

算术亏格(arithmetic genus)　代数簇的一个数值不变量. 对于一个 n 维完备代数簇 X，它的算术亏格 $p_a(X)$可定义为$(-1)^n(\chi(O_X)-1)$，其中

$$\chi(O_X) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim_k H^i(X,O_X).$$

当基域 k 的特征数等于 0 时，算术亏格是一个双有理不变量.

几何亏格(geometric genus)　光滑代数簇的一个数值不变量. 对于一个 n 维光滑完备代数簇 X，几何亏格 $p_g(X)$定义为 X 上的正则 n 微分形式空间的维数. 根据塞尔对偶性，

$$p_g(X) = \dim H_k^n(X,O_X).$$

光滑射影簇的几何亏格是一个双有理不变量.

不规则性(irregularity)　光滑代数簇的一个数值不变量. 当 X 是光滑完备代数簇时，X 上的正则 1 微分形式构成一个向量空间，它的维数就是 X 的不规则性 $q(X)$. 光滑射影簇的不规则性是一个双有理不变量.

欧拉-庞加莱特征标(Euler-Poincaré characteristic)　代数簇的一个数值不变量. 对于 n 维完备簇 X，X 的欧拉-庞加莱特征标 $\chi(O_X)$定义为

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim_k H^i(X,O_X).$$

它与算术亏格 $p_a(X)$间有关系式

$$p_a(X)=(-1)^n(\chi(O_X)-1).$$

当基域 k 的特征数等于 0 时，欧拉-庞加莱特征标是双有理不变的.

小平维数(Kodaira dimension)　代数簇的一个数值不变量. 设 X 是 n 维完备正规代数簇，K_X 是 X 的一个典范除子，若对所有的自然数 $m\geqslant 1$ 都有 $|mK_X|=\varnothing$，则定义 X 的小平维数 $\kappa(X)=-\infty$；否则，定义 $\kappa(X)=\max_{m\geqslant 1}\{\dim \Phi_{mK_X}(X)\}$，这里 Φ_{mK_X} 表示由线性系 $|mK_X|$ 所定义的双有理映射 $\Phi_{mK_X}: X \to P_k^{h^0(mK_X)-1}$. 于是，有不等式 $\kappa(X)\leqslant \dim X$. 小平维数在代数簇的分类理论中起着重要作用，$\kappa(X)=\dim X$ 的代数簇被称为一般型的. 当 $\dim X=1$ 时，$\kappa(X)=-\infty$ 的光滑代数曲线就是射影直线 P^1；$\kappa(X)=0$ 的光滑代数曲线就是椭圆曲线；$\kappa(X)=1$ 的光滑代数曲线是所有亏格大于 1 的曲线.

一般型代数簇(algebraic variety of general type)　见“小平维数”.

典范环(canonical ring)　代数簇的双有理不变量之一. 当 X 是光滑射影簇时，ω_X 是其典范层. 定义 X 的典范环为

$$R(X)=\bigoplus_{n\geqslant 0} H^0(X,\omega_X^{\otimes n}).$$

对于一般的代数簇，它的典范环就是与它双有理等价的光滑射影簇的典范环. 典范环是否有限生成是一个重要而又困难的问题，这一问题直接联系到 X 的典范模型的存在性. 当 X 是 2 维或 3 维的一般型代数簇时，有限生成性已被证明，更高维数的情形则尚未解决.

皮卡群(Picard group)　一种阿贝尔群. 指由环空间引出的一种群. 环空间(X,O_X)的可逆层的同构类所成的群. 群的运算由可逆层的张量积所诱导. X 的皮卡群记为 $\mathrm{Pic}(X)$(或 $\mathrm{Pic}X$)，自然同构于上同调群 $H^1(X,O_X^*)$，这里 O_X^* 是 O_X 的可逆元构成的层. 当 X 是代数闭域上的光滑代数簇时，$\mathrm{Pic}(X)$是一个代数群，它的零连通分支 $\mathrm{Pic}^0(X)$是一个阿贝尔簇，称为皮卡簇.

皮卡簇(Picard variety)　见“皮卡群”.

拟凝聚层(quasicoherent sheaf)　环空间上的一类特殊的层. 更精确地，它是环空间(X,O_X)上的一个 O_X 模层 $\mathscr{F}$，并且对 X 的任意一点 x 都存在一个邻域 U 和正合列 $\mathscr{P}\to\mathscr{Q}\to\mathscr{F}|_U\to 0$，其中 $\mathscr{P}$，$\mathscr{Q}$ 是自由 O_U 模层. 当 $X=\mathrm{Spec}\,A$ 是仿射概形时，拟凝聚 O_X 模层的范畴通过对应 $\mathscr{F}\to\Gamma(X,\mathscr{F})$等价于 A 模的范畴.

凝聚层(coherent sheaf)　环空间上的一类特殊的层，更精确地，它是环空间(X,O_X)上的一类 O_X 模层 $\mathscr{F}$. 它满足：

1. $\mathscr{F}$ 是有限型的(即 $\mathscr{F}$ 局部地由有限多个 O_X 的截面生成).

2. 开集 U 上的任意一个同态 $O^n|_U \to \mathscr{F}|_U$ 的核也是有限型的,这里的 n 是任意正整数.

一般总是假设环空间的结构层 O_X 本身是一个凝聚层. 代数闭域上的解析空间和代数簇都具有此性质. 代数簇或诺特概形上的凝聚层在代数几何的研究中起着重要作用,尤其是层上同调的理论更是建立在凝聚层之上的. 当 $X=\operatorname{Spec} A$ 是诺特仿射概形时,凝聚 O_X 模层的范畴等价于有限生成 A 模的范畴.

可逆层(invertible sheaf) 环空间上的一类结构层. 指环空间 (X,O_X) 上秩为 1 的局部自由 O_X 模层. X 上的可逆层的同构类关于层的张量积构成一个阿贝尔群,就是著名的皮卡群 $\operatorname{Pic} X$. 可逆层 $\mathscr{L}$ 的对偶层 $\mathscr{H}om(\mathscr{L},O_X)$ 就是 $\mathscr{L}$ 在皮卡群中的逆元. 这就是可逆层名称的由来. 当 X 是代数簇或解析空间时,可逆层与线丛之间有着一个一一对应的关系. 此外可逆层与除子之间也有一个很好的对应关系,这使得可逆层成为代数几何中的一个重要研究工具. 例如,若 $[y_0:y_1:\cdots:y_N]$ 是射影空间 P_k^N 的齐次坐标,U_i 是 P_k^N 中由 $y_i\neq 0$ 所定义的开集,则坐标变换 $g_{ij}=(y_i/y_j)^n$ 定义了 P_k^N 上的一个可逆层 $O(n)$.

甚丰层(very ample sheaf) 与一个拟射影簇到射影空间内的嵌入有关的可逆层. 设 X 是一个拟射影簇,$\mathscr{L}$ 是 X 上的可逆层,若存在一个嵌入 $i:X\to P_k^n$,使得 $\mathscr{L}=i^*O_{P^n}(1)$,则称 $\mathscr{L}$ 是 X 上的甚丰层. 因此,一个代数簇能否嵌入到射影空间内,就取决于甚丰层的存在性. 甚丰层的概念相对化后,就可得到 S 甚丰层.

丰富层(ample sheaf) 与到射影空间内的嵌入有关的局部自由层. 设 X 是一个代数簇,$\mathscr{L}$ 是 X 上的可逆层,若存在一个正整数 n,使得 $\mathscr{L}^{\otimes n}$ 成为 X 的甚丰层,则称 $\mathscr{L}$ 是丰富层. 当 $\mathscr{E}$ 是局部自由层时,则可构作 X 上的射影空间丛 $P=P(\mathscr{E})$. 若 P 上的可逆层 $O_P(1)$ 是丰富层,则称局部自由层 $\mathscr{E}$ 为 X 上的丰富层.

半丰富层(semiample sheaf) 代数簇 X 上的一类特殊的可逆层. 当可逆层 $\mathscr{L}$ 是半丰富层时,存在 $m>0$ 使得 $\mathscr{L}^{\otimes m}$ 可由整体截面生成. 也就是说,$\mathscr{L}^{\otimes m}$ 可以确定一个从 X 到某个射影空间里的态射.

切层(tangent sheaf) 代数簇上的点的切空间构成的层. 更精确地,对于代数簇 X,切层就是 X 上一次微分所构成的层 Ω_X^1 的对偶层,即

$$\mathscr{T}_X=\mathscr{H}om(\Omega_X^1,O_X).$$

当 X 为光滑代数簇时,切层是一个局部自由层,其秩等于 X 的维数.

法层(normal sheaf) 代数簇 X 的闭子概形 Y 上的一个层. 若 Y 在 X 中的理想层为 $\mathscr{I}$,则称 $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ 为 Y 在 X 中的余法层. 它的对偶层

$$N_{Y/X}=\mathscr{H}om(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2,O_Y)$$

称为 Y 在 X 中的法层. 当 X 和 Y 都是光滑代数簇时,法层 $N_{Y/X}$ 是一个局部自由层,其秩等于 Y 在 X 内的余维数 r. 这时有一个典范的正合列

$$0\to\mathscr{T}_Y\to\mathscr{T}_X\otimes O_Y\to N_{Y/X}\to 0.$$

余法层(conormal sheaf) 见"法层".

除子(divisor) 亦称韦伊除子. 是研究代数簇的重要工具之一. 不可约簇 X 上余维数为 1 的不可约子簇的代数和. 具体地,若 $\mathscr{D}$ 表示 X 中不含于 X 的奇异轨迹之中且余维数为 1 的不可约子簇的全体,$\operatorname{Div}(X)$ 表示以 $\mathscr{D}$ 为基的自由阿贝尔群,则 $\operatorname{Div}(X)$ 中的元称为除子. 设 $A=\sum n_iA_i$ 是一个除子,A_i 是不可约子簇,若所有的 $n_i\geqslant 0$,则称 A 为有效除子,称 A_i 为素除子. 例如,若 X 是余维数 1 正则的(即 X 的所有一维局部环都是正则环)射影簇,A 是 X 上的素除子,则 O_A 是一个离散赋值环. 若 f 是 X 上的非零有理函数,则对 O_A 的赋值 v_A,$v_A(f)$ 是个整数,且除了有限多个 A 之外,$v_A(f)=0$. 因此,可以定义 f 的除子

$$\operatorname{div}(f)=\sum v_A(f)A,$$

这种除子称为主除子. 若两个除子 D,D' 的差等于一个主除子,即 $D-D'=\operatorname{div}(f)$,则称 D 和 D' 是线性等价的. $\operatorname{Div}(X)$ 关于线性等价的商群称为 X 的除子类群,记为 $\operatorname{Cl}(X)$.

韦伊除子(Weil divisor) 即"除子".

有效除子(effective divisor) 见"除子".

素除子(prime divisor) 见"除子".

主除子(principal divisor) 见"除子".

除子类群(divisor class group) 见"除子".

卡蒂埃除子(Cartier divisor) 除子概念在任意概形上的推广. 若 X 是概形,$\mathscr{K}$ 是其结构层 O_X 的分式环层,$\mathscr{K}^*$ 是环层 $\mathscr{K}$ 中可逆元组成的乘法群层,O_X^* 是 O_X 的可逆元层,则 X 上的一个卡蒂埃除子就是商层 $\mathscr{K}^*/O_X^*$ 的一个整体截面. 卡蒂埃除子也可表述为 $\{(U_i,f_i)\}$,其中 $\{U_i\}$ 是 X 的一个开覆盖,$f_i\in\Gamma(U_i,\mathscr{K}^*)$,且对每对 i,j 都有

$$f_i/f_j\in\Gamma(U_i\cap U_j,O_X^*).$$

与 $\{(X,f)\}$ 相对应的卡蒂埃除子称为主除子. 若两个卡蒂埃除子的差是一个主除子,则称它们是线性等价的. 当 X 是光滑射影簇时,卡蒂埃除子与韦伊除子成一一对应,并且此对应还保持线性等价关系.

线性等价除子(linearly equivalent divisors) 见"除子"和"卡蒂埃除子".

半正除子(numerically effective divisor) 除子

概念的推广. 设 X 是光滑射影簇, D 是一个除子, 若对 X 上任一不可约曲线 C, 相交数 $DC\geqslant 0$, 则称 D 是 X 上的半正除子.

典范除子(canonical divisor) 代数簇上的一类特殊的除子. 具体地, 若 X 是光滑代数簇, Ω_X^1 是 X 上的正则 1 形式芽层, $\omega_X=\wedge^r\Omega_X^1$, $r=\dim X$, 则称可逆层 ω_X 对应的除子 K_X 为 X 的典范除子. 等价地, X 上正则 r 形式的零点和极点的代数和(考虑重数)所定义的除子称为典范除子. 典范除子在射影代数簇或紧复流形的分类中起重要作用. X 的许多不变量就是通过典范除子及其上同调定义的.

例外除子(exceptional divisor) 被某个态射收缩的除子. 设 $f:X\to Y$ 是两个正规簇之间的正常满态射, E 是 X 上的一个有效除子, 若 $f(E)$ 在 Y 中的余维数 $\geqslant 2$, 则称 E 是 f 的例外除子. 例如, 若对维数 $\geqslant 2$ 的簇 Y 上的一个点 p 做爆发, 则 p 的逆像就是此爆发的例外除子.

线性系(linear system) 完备不可约簇 X 上的一个除子集合. 若 D 是 X 的一个除子, $f_0, f_1, \cdots, f_n$ 是 X 上的有理函数, 满足 $\mathrm{div}(f_i)+D\geqslant 0$, 则称除子集合

$$\Lambda=\left\{\mathrm{div}\left(\sum a_i f_i\right)+D \mid a_i\in k, a_i\ \text{不全为零}\right\}$$

为线性系. 若 Λ 包含所有与 D 线性等价的有效除子, 则称 Λ 是 D 的完全线性系, 记为 $|D|$. 每个非空线性系均可定义从 X 到某个射影空间内的有理映射.

完全线性系(complete linear system) 见"线性系".

一般点(generic point) 近代(19 世纪末至今)代数几何的一个基本概念. 若 X 是域 k 上的一个(整的)代数簇, Ω 是 k 的一个"足够大的"扩域(可以通过添加无穷多个不定元的超越扩张取代数闭包得到), 则 X 的"坐标在 Ω 中的"点称为 Ω 点, 用概形的语言, 这相当于一个 K 态射 $\mathrm{Spec}\,\Omega\to X$. 若 X 的点的坐标满足某个代数关系, 则 X 的任一 Ω 点 P 的坐标也满足这个关系. 若 P 的坐标除了这些关系外没有其他代数关系, 则称 P 是 X 的一个一般点. 用概形的语言, 若 $U=\mathrm{Spec}\,R\subset X$ 是一个包含 P: $\mathrm{Spec}\,\Omega\to X$ 的像的仿射开子集, 则 P 是一般点相当于 P 诱导的环同态 $R\to\Omega$ 是单射. 事实上, 若 P 是一般点, 则 P 的像包含于 X 的任一扎里斯基非空开子集中. 因此, 若一个一般点 P 的坐标满足某个代数关系, 则 X 的所有点的坐标都满足该关系. 在概形理论中, 一般点的定义略有不同. 一个仿射概形 $\mathrm{Spec}\,R$ 的一个一般点指的是 R 的一个极小素理想, 而一个概形的一般点指的是它的所有仿射开子概形的一般点全体.

奇点(singular point) 代数几何的一类重要概念. 概形 X 中不正则的点. 若一个点的局部环不是正则的, 则称这个点为奇点. 设 X 是不可约代数簇, 若有光滑簇 $\widetilde{X}$ 以及双有理态射 $\widetilde{X}\to X$, 则称 $\widetilde{X}$ 为 X 的奇点解消. 广中平祐证明了特征零的代数簇的奇点均可被解消, 但特征 $p>0$ 的情形至今尚未完全解决.

奇点解消(resolution of singularities) 见"奇点".

有理奇点(rational singular point) 最简单的奇点之一. 设 X 是代数簇, p 是 X 的一个奇点(不妨设 X 只有此奇点), $f:\widetilde{X}\to X$ 是奇点解消, 若对所有的 $i>0$, 都有 $R^i f_* O_{\widetilde{X}}=0$, 则称 p 是 X 的有理奇点. 例如, 曲面的 A-D-E 型奇点就是有理奇点.

黎曼-罗赫定理(Riemann-Roch theorem) 代数几何的一个重要定理. 它是表述代数簇或解析簇 X 上的局部自由层 $\mathscr{E}$ 的特征标与 $\mathscr{E}$ 和 X 的类之间的关系的定理. 古典的黎曼-罗赫定理是关于亏格 g 的代数曲线上的除子 D 的, 它可表述为

$$l(D)-l(K-D)=\deg D+1-g.$$

黎曼(Riemann, (G. F.)B.)在 19 世纪时建立了关于 $l(D)$ 的不等式, 他的学生罗赫(Roch, G.)得到上述等式. 黎曼-罗赫定理向高维的推广是由希策布鲁赫(Hirzebruch, F.)在 20 世纪中叶完成的. 若 X 是 n 维光滑射影簇, $\mathscr{E}$ 是 X 上秩 r 的局部自由层, 则黎曼-罗赫-希策布鲁赫定理可表述为:

$$\chi(\mathscr{E})=\deg(\mathrm{ch}(\mathscr{E})\mathrm{td}(\mathscr{T}_X))_n,$$

其中 $\mathrm{ch}(\mathscr{E})$ 是 $\mathscr{E}$ 的指数陈特征标, $\mathrm{td}(\mathscr{T}_X)$ 是 X 的切层的托特类.

扎里斯基定理(Zariski's theorem) 亦称扎里斯基主要定理. 代数几何的一个重要定理. 该定理断言: 若 $f:X\to Y$ 是不可约簇间的正常满态射, 且有理函数域 $k(Y)$ 在 $k(X)$ 内是可分代数闭的, 则对于正规点 $y\in Y$, 其完全原像 $f^{-1}(y)$ 是连通的. 扎里斯基定理也可表述成以下形式: 设 $T:X\to Y$ 是射影簇之间的双有理映射, 若 X 正规, p 是 T 没有定义的点, 则完全像 $T(p)$ 是维数 $\geqslant 1$ 的连通集.

贝祖定理(Bézout's theorem) 齐次多项式方程组解的个数的定理. 若 $n+1$ 个未知量的 n 个齐次多项式方程组在代数闭域上仅有有限多个不成比例的非零解, 则考虑到重数的解数等于这个多项式的次数的乘积. 应用到平面代数曲线, 定理可叙述为: m 次与 n 次代数曲线的相交数等于 mn.

贝尔蒂尼定理(Bertini's theorem) 关于代数簇上线性系的一般除子的性质定理. 设 X 是特征零代数闭域上的代数簇, L 是 X 上不含固定部分的线性系, 若 L 所确定的 X 到射影空间内的映射的像的维数大于 1, 则线性系 L 中几乎所有的除子都是既

约的不可约代数簇，并且 L 中几乎所有的除子在 L 的基点以及 X 的奇点之外都是光滑的. 但是这个定理对于正特征的域不对.

周炜良定理(Chow's theorem)　阐述代数几何与解析几何的联系(即原则)的重要定理，发表于1949年. 该定理断言：复射影空间的任意解析子集都是代数簇. 它在阐述代数几何与解析几何间的联系的GAGA原则中占据重要的地位.

塞尔对偶(Serre's duality)　代数几何中上同调计算的一个基本定理. 若 X 是 n 维光滑完备代数簇，$\mathscr{F}$ 是 X 上的局部自由层，ω_X 是典范层，$\mathscr{F}^\vee$ 是 $\mathscr{F}$ 的对偶层，则 $H^q(X,\mathscr{F})$ 的对偶空间就是 $H^{n-q}(X,\mathscr{F}^\vee\otimes\omega_X)$. 特别地，$H^n(X,\omega_X)$ 典范同构于基域 k. 这就是塞尔对偶定理.

相伴公式(adjunction formula)　代数几何的一个重要公式. 指建立了代数簇与它的余维数1的子簇的典范层之间关系的公式. 若 X 是光滑代数簇，Y 是 X 的光滑的余维数1的子簇，则有

$$\omega_Y=\omega_X\otimes O_X(Y)\otimes O_Y.$$

称其为相伴公式.

有理映射(rational mapping)　代数簇上的有理函数概念的推广. 但是，它并不是集合意义下的映射. 设 X 和 Y 都是代数簇，下述二元组 (U,φ_U) 的等价类称为一个有理映射 $\varphi: X\to Y$，这里的 U 是 X 的非空开子集，$\varphi_U: U\to Y$ 是一个态射，(U,φ_U) 与 (V,φ_V) 等价，当且仅当 φ_U 和 φ_V 在 $U\cap V$ 上相重合. 当 Y 是仿射直线时，从 X 到 Y 的有理映射就是代数簇 X 上的有理函数. 上述开子集 U 的并集 $\tilde{U}$ 称为有理映射 φ 的定义域. $\tilde{U}$ 在 φ 下的像称为有理映射 φ 的像，并被记为 $\varphi(X)$. 当 $\varphi(X)$ 在 Y 内稠密时，φ 可以定义有理函数域间的嵌入 $\varphi^*: k(Y)\to k(X)$；反之，有理函数域的嵌入又可确定从 X 到 Y 内的一个有理映射. 当 φ^* 是 $k(Y)$ 到 $k(X)$ 上的同构映射时，φ 被称为双有理映射.

有理映射的定义域(domain of rational mapping)　见"有理映射".

有理映射的像(range of rational mapping)　见"有理映射".

双有理映射(birational mapping)　一种特殊的有理映射. 它诱导了两个代数簇的有理函数域间的同构. 双有理映射 $\varphi: X\to Y$ 诱导了 X 和 Y 的两个稠密开子簇间的同构，而且反之亦正确. 这样的两个代数簇被称为是双有理等价的或双有理同构的. 利用双有理等价关系对代数簇进行分类是代数几何的根本问题之一. 双有理映射的最简单的例子是具有非异中心的爆发(或称独异变换). 对于维数 $\leqslant 2$ 的光滑完备簇，双有理映射一定可分解为上述的爆发或其逆映射的复合映射.

双有理等价代数簇(birationally equivalent varieties)　见"双有理映射".

双有理同构代数簇(birationally isomorphic varieties)　见"双有理映射".

韦罗内塞映射(Veronese map)　射影空间之间的一种嵌入映射. 具体定义如下：设 H 为 P^n 中的一个超平面. 完全线性系 $|dH|$ 定义了 P^n 到 P^N 内的一个闭嵌入 $\varphi_{dH}: P^n\to P^N$，这里 $N=C_{d+n}^d-1$. 若 $Z=[z_0:z_1:\cdots:z_n]$ 为 P^n 的齐次坐标，$\{z^\alpha=z_0^{\alpha_0},z_1^{\alpha_1},\cdots,z_n^{\alpha_n}\}$ 为 z 的 d 次单项式的集合，

$$d=|\alpha|=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n,$$

则 $\varphi_{dH}(z)=[\cdots:z^\alpha:\cdots]$. 例如，当 $n=1$ 时，$\varphi_{dH}(P^1)$ 是 P^d 中次数为 d 的非退化曲线，称为有理正规曲线. $n=2$ 时，$\varphi_{2H}(P^2)$ 是 P^5 中的曲面，称为韦罗内塞曲面.

有理正规曲线(rational normal curve)　见"韦罗内塞映射".

克雷蒙纳变换(Cremona transformation)　一种重要的双有理变换. 指域 k 上射影空间 $P_k^n(n\geqslant 2)$ 的双有理变换. 克雷蒙纳变换构成的群称为克雷蒙纳群，记为 $\mathrm{Cr}(P_k^n)$. 当 $n=2$ 时，除了射影变换外最简单的克雷蒙纳变换是二次变换，它在非齐次坐标下可写成以下的分式线性变换形式：

$$(x,y)\to\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2},\frac{a_3x+b_3y+c_3}{a_4x+b_4y+c_4}\right).$$

最简单的二次变换就是 $(x,y,z)\to(yz,xz,xy)$. 诺特-卡斯泰尔诺沃定理断言：当 k 是代数闭域时，射影平面上的克雷蒙纳变换可以表示成有限多个二次变换的复合. 但是，当 $n=3$ 时，此定理已不再成立.

克雷蒙纳群(Cremona group)　见"克雷蒙纳变换".

二次变换(quadratic transformation)　见"克雷蒙纳变换".

塞格雷嵌入(Segre embedding)　一种重要的嵌入. 指从射影空间的积 $P^r\times P^s$ 到射影空间 P^N 里的嵌入，这里 $N=rs+r+s$. 塞格雷嵌入 ψ 被定义为

$$\psi([x_0,x_1,\cdots,x_r]\times[y_0,y_1,\cdots,y_s])=[\cdots,x_iy_j,\cdots].$$

塞格雷嵌入的像 $\psi(P^r\times P^s)$ 称为塞格雷簇.

塞格雷簇(Segre variety)　见"塞格雷嵌入".

独异变换(monoidal transformation)　亦称爆发. 一种特殊的双有理态射. 设 X 是一个诺特概形，D 是由理想层 $\mathscr{I}$ 所定义的闭子概形，称态射

$$\sigma:\ \tilde{X}=\mathrm{Proj}\ (\oplus_{d\geqslant 0}I^d)\to X$$

为 X 的以 D 为中心的独异变换. σ 诱导了 $\tilde{X}-\sigma^{-1}(D)$ 与 $X-D$ 间的同构. 独异变换在奇点解消理论中起着重要的作用. 广中平祐证明：特征数0的代

数簇都可通过有限多个特殊类型的独异变换把奇点解消.

爆发(blowing-up) 即"独异变换".

完全交(complete intersection) 射影空间 P_k^n 中的一类特殊的闭子概形或子簇. 若定义 Y 的齐次理想可由 $n-\dim Y$ 个元素生成,则称 Y 是完全交. 例如,P_k^n 中的 r 个不可约超曲面截出的一个不可约的 $n-r$ 维子簇就是一个完全交.

局部完全交(local complete intersection) 完全交的推广. 设 Y 是代数闭域 k 上的非异代数簇 X 的闭子概形,它的余维数是 r,若 Y 在 X 中的理想层在每个点上均可由 r 个元局部生成,则称 Y 在 X 中是局部完全交. 当 Y 是非异簇时,它一定是局部完全交. 局部完全交子概形有很多好的性质. 例如,Y 正规,当且仅当 Y 是余维数 1 正则的.

广拓扑(site) 为了推广概形上同调理论而建立的一个范畴论概念. 若一个范畴 $\mathscr{S}$ 满足下述的两个条件,则称它为一个广拓扑:

1. 它具有纤维积,即对任意 $X,Y,T\in\mathscr{S}$ 及任意态射 $f:X\to T$,$g:Y\to T$,存在 $Z\in\mathscr{S}$ 及态射(投射) $p:Z\to X$,$q:Z\to Y$,满足条件:

1) $f\circ p=g\circ q$.

2) 若有 $Z'\in\mathscr{L}$ 及态射 $p':Z'\to X$,$q':Z'\to Y$ 使得 $f\circ p'=g\circ q'$,则存在惟一的态射 $\varphi:Z'\to Z$ 使得 $p'=p\circ\varphi$,$q'=q\circ\varphi$,这样的 Z 在同构之下惟一,记为 $X\times_T Y$.

2. 对每个 $T\in\mathscr{S}$,给定了一个由覆盖(即态射的集合$\{T_i\to T\mid i\in I\}$)组成的集合,满足:

1) T 到自身的单位态射单独组成一个覆盖.

2) 任意多个覆盖的并是覆盖.

3) 若$\{T_i\mid i\in I\}$是 T 的覆盖,$U\to T$ 为态射,则$\{U\times_T T_i\mid i\in I\}$是 U 的覆盖.

4) 若$\{T_i\mid i\in I\}$是 T 的覆盖,且对每个 $i\in I$,T_i 有覆盖$\{U_{ij}\mid j\in I_j\}$,则$\{U_{ij}\mid i\in I,j\in I_j\}$为 T 的覆盖.

设 $\mathscr{S}$ 是一个广拓扑. $\mathscr{S}$ 上的一个预层指的是 $\mathscr{S}$ 到阿贝尔群范畴的一个反变函子. 若一个预层 F 对任何 $T\in\mathscr{S}$ 及任何覆盖$\{T_i\to T\mid i\in I\}$,下面的列

$$0\to F(T)\to\prod_{i\in I}F(T_i)\underset{\Pi F(q)}{\overset{\Pi F(p)}{\rightrightarrows}}\prod_{i,j}F(T_i\times_T T_j)$$

是正合的,其中 p,q 分别是 $T_i\times_T T_j$ 到 T_i 和 T_j 的投射,则称 F 为层. $\mathscr{S}$ 上所有层的范畴称为一个(阿贝尔群的)拓扑斯,记为 $\mathrm{Ab}(\mathscr{S})$. 若给定 $\mathscr{S}$ 上的一个环层 R,则 $\mathscr{S}$ 上所有 R 模层组成 $\mathrm{Ab}(\mathscr{S})$的一个子范畴 $\mathrm{Mod}(\mathscr{S},R)$,也称为一个拓扑斯. $\mathrm{Ab}(\mathscr{S})$和 $\mathrm{Mod}(\mathscr{S},R)$都是阿贝尔范畴,而且都有足够内射对象,因而可以在其上建立上同调理论.

拓扑斯(topos) 见"广拓扑".

平展上同调(étale cohomology) 通过平展拓扑所得到的概形上层的一种不变量. 一个概形 X 上的平展广拓扑由 X 上的所有平展态射 $f:Y\to X$ 组成,其中的覆盖即平展覆盖. X 上的一个层 $\mathscr{F}$ 诱导平展广拓扑上的一个层 $F:F(Y)=f^*\mathscr{F}$. F 在平展拓扑斯中的(n 次)上同调称为 $\mathscr{F}$ 的平展上同调,记为 $H^n(X_{et},\mathscr{F})$. 它主要用于基域 k 的特征非零的情形(如计算基本群、贝蒂数等),因为在这种情况下无法建立通用覆盖.

结晶上同调(crystalline cohomology) 通过结晶拓扑所得到的特征非零的域上的概形的一种不变量. 设 A 是一个变换环,若对于 A 的一个理想 I,已经定义了一列映射 $\gamma_i:I\to A(i\geqslant 0)$,且满足条件:

1. 对所有 $x\in I$,$\gamma_0(x)=1$,$\gamma_1(x)=x$,而当 $i>1$ 时,$\gamma_i(x)\in I$;

2. 若 $x,y\in I$,则
$$\gamma_k(x+y)=\sum_{i+j=k}\gamma_i(x)\gamma_j(y);$$

3. 若 $\lambda\in A$,$x\in I$,则 $\gamma_k(\lambda x)=\lambda^k\gamma(x)$;

4. 若 $x\in I$,则
$$\gamma_i(x)\gamma_j(x)=\frac{(i+j)!}{i!\ j!}\gamma_{i+j}(x);$$

5. $\gamma_i(\gamma_j(x))=\dfrac{(ij)!}{i!\ (j!)^i}\gamma_{ij}(x)$;

则称 I 是一个 PD 理想. 此时称 A 是 A/I 的一个 PD 加厚(若 A 是 Q 代数,则取 $\gamma_n(x)=x^n/n!$). 设 k 为特征 $p>0$ 的域,R 为一个离散赋值 PD 环,其极大理想为(p),且 $R/(p)\supset k$ (例如维特环 $W(\bar{k}_1)$). 设 X 是一个 k 概形,X 在 R 上的结晶广拓扑$(X/R)_{\mathrm{cris}}$由所有 X 的仿射开子概形的 PD 加厚 $U\to T$ 组成,其中 T 为 R 概形,且 T 的 PD 结构与 R 的 PD 结构相容. 设 $O_{X/R}$为$(X/R)_{\mathrm{cris}}$的结构环层,对于$(X/R)_{\mathrm{cris}}$上的 $O_{X/R}$模层 F,记
$$\Gamma(X/R,F)=\varprojlim_{T\in(X/R)_{\mathrm{cris}}}F(T).$$

若 $I^{\cdot}$ 为 $O_{X/R}$在结晶拓扑斯 $\mathrm{Mod}((X/R)_{\mathrm{cris}},O_{X/R})$中的一个单射分解,则 $H^n_{\mathrm{cris}}(X/R)=H^n(\Gamma(X/R,I^{\cdot}))$($H^n$ 为超上同调)称为 X 在 R 上的结晶上同调. 若 X 可以提升到一个 R 概形 Y,且 Y 在 R 上是分离、光滑、有限型的,则有 $H^n_{\mathrm{cris}}(X/R)\cong H^n_{DR}(Y/R)$.

周环(Chow ring) 光滑拟射影代数簇上的代数闭链的有理等价类所成的环. 环的乘法就是两个闭链的相交. 簇 X 的周环
$$A(X)=\bigoplus_{i\geqslant 0}A^i(X)$$
是一个交换分次环,其中 $A^i(X)$就是余维数等于 i 的闭链的等价类所成的加群. 例如 $A(P^n)\cong\mathbb{Z}[k]/k^{n+1}$. 当簇 X 定义在复数域上时,有分次环的

同态 $A(X)\to H^*(X,\mathbb{Z})$，这里 $H^*(X,\mathbb{Z})$ 是 X 的奇异上同调环. 作为周环的一个应用，X 上有限秩局部自由层的陈类就是在周环里取值的. 这个概念得名于华人数学家周炜良.

周炜良坐标(Chow coordinates)　刻画域上射影空间 P_k^n 中代数子簇的齐次坐标. 可以看成普吕克坐标的推广. 设 V 是 P_k^n 中 d 次 r 维代数子簇. P_k^n 中的 $r+1$ 个超平面可以看成是 $(P_k^n)^{r+1}$ 中的点 $(u^{(0)},u^{(1)},\cdots,u^{(r)})$. 若这 $r+1$ 个超平面的交集与 V 相交，则把这个点看成属于集合 $S(V)$. $S(V)$ 是 $(P_k^n)^{r+1}$ 中的超曲面，因而可由一个不可约 d 次齐次多项式 $F_V(u^{(0)},u^{(1)},\cdots,u^{(r)})$ 所定义. 把 F_V 的系数看成齐次坐标，就称为 V 的周炜良坐标. 从而每个 d 次 r 维代数子簇都可对应 P_k^v 中的一个点，这里 v 由 r 和 d 确定. 周炜良坐标可以推广到正代数 r 闭链 $X=\sum a_jV_j(a_j>0,a_j\in\mathbb{Z})$. 其应用可参见“周炜良簇”. 此概念由周炜良和范・德・瓦尔登(Van der Waerden,B.L.)于1937年提出.

相交理论(intersection theory)　代数几何学中最基本的理论之一. 若 X 是 n 维光滑拟射影代数簇，Y 和 Z 是 X 的余维数为 r 和 s 的子簇，并且 Y 和 Z 正常地相交，也就是说 $Y\cap Z$ 的不可约分支的余维数都是 $r+s$，则可以定义 Y 和 Z 沿着它们交集的某个不可约分支 W_j 上的相交重数 $i(Y,Z;W_j)$，使得它与几何直观相容. 然后就可定义 Y 和 Z 的相交积 $Y.Z$ 为一个余维数 $r+s$ 的闭链 $Y.Z=\sum i(Y,Z;W_j)W_j$. 若 Y 和 Z 并非正常地相交，则根据周炜良的移动定理，可以找一个与 Z 代数等价的 Z'，使得 Y 与 Z' 正常地相交，记 $Y\cdot Z=Y\cdot Z'$，利用双线性性质，就可定义任意的余维数 r 的闭链与余维数 s 的闭链的相交. 这样建立的相交理论满足一系列公理，并使得周环得以定义.

莫德尔猜想(Mordell conjecture)　关于算术曲线的有理点的重要猜想. 具体地，设 k 为有理数域的有限扩张，C 为 k 上射影光滑(代数)曲线，莫德尔猜想是：若 C 的亏格大于1，则 C 只有有限多个 k 点(即坐标在 k 中的点). 该猜想已被法尔廷斯(Faltings,G.)于1984年证明.

沙法列维奇猜想(Shafarevich conjecture)　算术几何中的重要猜想. 设 X 为数域(即有理数域的有限扩张)K 上的阿贝尔簇，P 是 O_K(K 的代数整数环)的素理想，若 X 可以扩张成 $\mathrm{Spec}(O_K)_P$ 上的阿贝尔概形，则称 X 在 P 具有好约化. 沙法列维奇猜想是：对 O_K 的素理想的任一有限集 S，在同构之下只存在有限多个 K 上的 g 维主极化阿贝尔簇，在 S 外处处具有好约化. 该猜想已被法尔廷斯(Faltings,G.)于1984年证明.

好约化(good reduction)　见“沙法列维奇猜想”.

韦伊猜想(Weil conjecture)　关于多项式方程在有限域上解的个数的一个著名猜想，它揭示了定义在有限域上的代数簇的算术与定义在复数域上的代数簇拓扑之间的深刻联系. 韦伊猜想被德利涅(Deligne,P.)在20世纪70年代初证明. 对于定义在有限域 F_q 上的簇 X，可以联系一个 ζ 函数

$$Z(t)=\exp\left(\sum_{p>0}N_r\frac{t^r}{r}\right),$$

其中 N_r 是 X 的坐标取在 F_{q^r} 里的点的个数. 当 X 是 d 维光滑射影簇时，韦伊猜测：

1. $Z(t)=\dfrac{P_1(t)\cdots P_{2d-1}(t)}{P_0(t)\cdots P_{2d}(t)}$，其中 $P_0(t)=1-t$，$P_{2d}(t)=1-q^dt$，$P_i(t)$ 都是整系数多项式，其零点的绝对值为 $q^{-i/2}$.

2. $Z\left(\dfrac{1}{q^dt}\right)=\pm q^{dE/2}t^EZ(t)$，其中 E 是 $X\times X$ 的对角线的自相交数.

3. 若 Y 是定义在代数整数环 R 上的光滑射影簇，X 是 Y 模去 R 的一个素理想 P 后得到的约化簇，则 P_i 的次数恰好就是复流形 $Y(C)$ 的拓扑贝蒂数.

代数曲线(algebraic curve)　代数几何的一个基本概念. 一维代数簇称为代数曲线. 任意一条代数曲线都可通过正规化把奇点解消，成为一条光滑曲线. 再完备化后就得到一条光滑射影代数曲线. 由于光滑射影曲线间的双有理映射必定是同构映射，因此代数曲线的双有理分类问题可以归结为光滑射影代数曲线的双正则(即同构)分类问题. 以下只考虑复数的情形. 这时，复光滑射影代数曲线与紧黎曼面之间有一个一一对应的关系. 再考虑这个紧黎曼面上的半纯函数域，就得到了一个 $\mathbb{C}$ 的超越次数等于1的扩域. 反之，从 $\mathbb{C}$ 的一个超越次数等于1的扩域出发，可以定义一条抽象射影代数曲线. 这就是著名的“三位一体”：光滑射影代数曲线、紧黎曼面以及复数域上超越次数为1的有限生成扩域实质上是同一个对象的三种不同表现方式. 从而代数曲线的最重要的数值不变量——亏格也可用各种不同的方式来定义：它既是一个拓扑不变量，也是一个可由紧黎曼面上的整体全纯微分形式空间的维数或以结构层的第一级上同调空间的维数来定义的代数不变量.

黎曼(Riemann,(G.F.)B.)首先考虑了亏格 g 的所有紧黎曼面的参量空间问题，并发现这个参量空间的维数是 $3g-3$(当 $g\geqslant 2$ 时)，但黎曼未能严格证明它的存在性. 20世纪中期，由于芒福德(Mumford,D.B.)等人的工作，人们对代数曲线参量空间簇 $\mathscr{M}_g$ 已经有了较深入的了解. 芒福德把格罗腾迪克(Grothendieck,A.)的概形理论用到古典的不变

量理论，创立了几何不变量理论，并且，用它证明了 $\mathscr{M}_g$ 的存在性及拟射影性．目前，人们对 $\mathscr{M}_g$ 的结构已有了深入的研究，例如：当 $g \geqslant 23$ 时，$\mathscr{M}_g$ 是一般型的；当 $g \leqslant 13$ 时，$\mathscr{M}_g$ 是单有理的．人们猜测，当 $g < 23$ 时，$\mathscr{M}_g$ 是单直纹的．

对偶曲线(dual curve)　研究平面代数曲线的一个重要工具．设 C 是射影平面中次数 $m>1$ 的不可约曲线．C 的所有非奇异点的切线的全体确定了对偶平面上的一个集合，它的闭包是一条代数曲线 $\hat{C}$，称为 C 的对偶曲线．$\hat{C}$ 的对偶曲线就是 C．$\hat{C}$ 的次数 m' 称为 C 的类，它是一个射影不变量，正好等于射影平面上过一个一般位置的点与 C 相切的直线数．

拐点(inflection point, flex)　代数几何的一个基本概念．代数曲线的一类重要的点．平面代数曲线 C 上的一个非奇异点，C 在这点的切线与 C 的相交重数 $\geqslant 3$．若此重数等于 3，则称该点为通常拐点．若 C 是 $m>1$ 次不可约曲线，由齐次多项式 F 所定义，则由

$$\det \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

定义的曲线称为海赛曲线．C 的非奇异点 p 为拐点的充分必要条件是 p 在 C 的海赛曲线上．因此，C 的拐点个数是 $3m(m-2)$（包括重数）．例如，一条光滑椭圆曲线有 9 个拐点．

通常拐点(ordinary inflection point)　见“拐点”．

普吕克公式(Plücker formula)　曲线计数几何中的一组重要公式．若 C 是 $m>1$ 次不可约平面射影曲线，其类数为 m'，p 是 C 上的点，C 在 p 点的局部方程可表为 $y^2=x^3+$高阶项，则称 p 为尖点．若 C 恰有 d 个简单二重点，d' 条与 C 在两个不同点相切的二重切线，k 个尖点，k' 个通常拐点，则当基域的特征不等于 2 时，有下列公式：

1. $m'=m(m-1)-2d-3k$，
   $m=m'(m'-1)-2d'-3k'$．
2. $k'=3m(m-1)-6d-8k$，
   $k=3m'(m'-1)-6d'-8k'$．

这些公式被称为普吕克公式．最早由普吕克(Plücker, J.)于 1839 年利用贝祖定理得到．

尖点(cusp)　见“普吕克公式”．

赫尔维茨公式(Hurwitz formula)　代数几何中的一个重要公式．是把两个紧黎曼面（即光滑射影曲线）的亏格与它们的覆盖次数和分歧点重数相联系的公式．设 $\widetilde{R} \to R$ 是两个紧黎曼面的 m 重有分歧的覆盖，分歧点的重数为 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，则有公式

$$2g(\widetilde{R}) - 2 = m(2g(R) - 2) + \sum (k_i - 1).$$

这里 $g(\widetilde{R})$ 和 $g(R)$ 分别代表 $\widetilde{R}$ 和 R 的亏格．

克利福德定理(Clifford's theorem)　给出代数曲线上的特殊除子的维数上界的定理．设 D 是光滑射影曲线 C 上的一个除子，若 $h^0(D) = l(D) \neq 0$，$h^1(D) = l(K-D) \neq 0$，则称 D 是特殊除子．克利福德定理断言：对于特殊除子 D，$h^0(D) \leqslant \deg D/2 + 1$，而且等号成立，当且仅当 $D=0$，$D=K$（典范除子）或 C 是超椭圆曲线，D 是 C 上 g_2^1 的倍数．

特殊除子(special divisor)　见“克利福德定理”．

外尔斯特拉斯点(Weierstrass point)　曲线上一类重要的点．亏格 g 的光滑射影曲线（即紧黎曼面）C 上的一类特殊点：存在 C 的非常数的有理函数，使它在这个点上有不超过 g 阶的极，而不再有其他极点．一条曲线只能有有限多个外尔斯特拉斯点，但是，当亏格 $g \geqslant 2$ 时，外尔斯特拉斯点必定存在，并且至少有 $2g+2$ 个．一条亏格 $g(\geqslant 2)$ 的曲线恰有 $2g+2$ 个外尔斯特拉斯点，当且仅当它是一条超椭圆曲线．

代数对应(algebraic correspondence)　代数簇间的一种映射．设 X 和 Y 是两个代数簇，$X \times Y$ 的一个扎里斯基闭子集 Z 就给出了 X 与 Y 间的一个代数对应．对于 $p \in X, q \in Y$，若 $(p,q) \in Z$，则称 p 与 q 互相对应．若 Z 不可约，并且存在 X 的一个扎里斯基开子集 U，使得 U 中的每个点仅对应于 Y 中惟一的点，则称对应 Z 是从 X 到 Y 的有理映射．若 Z 又是从 Y 到 X 的有理映射，则称这个对应是双有理的．

有理曲线(rational curve)　一类重要的一维代数簇．指域 k 上的函数域同构于 $k(x)$（单纯超越扩张）的一维代数簇，也就是双有理等价于射影直线 P_k^1 的曲线．光滑有理曲线只有射影直线 P_k^1．当 k 为复数域 $\mathbb{C}$ 时，P_k^1 就是黎曼球面．

椭圆曲线(elliptic curve)　一类重要的代数曲线．指亏格等于 1 的光滑射影代数曲线．现在，人们一般认为代数几何起源于对椭圆曲线的研究；从历史上看，椭圆曲线理论来源于椭圆积分和椭圆函数，因而得名．任一椭圆曲线都同构于射影平面上的一条光滑三次曲线．当基域 k 是特征数异于 2 或 3 的代数闭域时，椭圆曲线 X 同构于射影平面上的方程 $y^2=x^3+ax+b$ 所定义的三次代数曲线，它的判别式 $\Delta=-4a^3-27b^2 \neq 0$．椭圆曲线 X 的 j 不变量

$$j(X) = -\frac{4 \times 1728}{\Delta} a^3 \in k.$$

利用 j 不变量可以建立起椭圆曲线的等价类与 k 的元素间的一一对应关系．此外，取定 X 上一点 P_0，映射 $P \to P - P_0$ 建立了 X 的点与 X 的零次皮卡群 $\mathrm{Pic}^0\ X$ 之间的一个一一对应，因而 X 获得了群结构，使得 (X, P_0) 成为阿贝尔簇．当基域 k 是复数域

C 时,复椭圆曲线就是亏格等于 1 的紧黎曼面,它也是一个复交换李群或一个一维复环面 $\mathbf{C}/\Lambda$,这里 Λ 是复平面上的一个格.借助于以 Λ 作为周期的外尔斯特拉斯椭圆函数,可在一维复环面 $\mathbf{C}/\Lambda$ 和一条三次平面曲线 X 之间建立一个双全纯同构.当基域 k 是有限域、局部域或整体域时,与椭圆曲线 X 的 k 有理点集 $X(k)$ 有关的性质称为算术性质.譬如,著名的莫德尔-韦伊定理就断言:当 k 是素域上的有限生成扩域时,$X(k)$ 是一个有限生成群.

超椭圆曲线(hyperelliptic curve) 一类重要的代数曲线.指具有一个 g_2^1 的光滑代数曲线 C,即,若亏格 $g\geqslant 2$ 的曲线 C 具有一个次数为 2 的有限态射 $f:C\to P^1$,则称 C 为超椭圆曲线.当 $g\geqslant 3$ 时,存在非超椭圆曲线.事实上,"一般的"代数曲线都是非超椭圆的.若 $\mathscr{M}_g$ 表示亏格 g 的曲线的参量空间,则当 $g\geqslant 2$ 时 $\mathscr{M}_g$ 是一个 $3g-3$ 维的不可约拟射影簇.而超椭圆曲线对应于 $\mathscr{M}_g$ 的一个 $2g-1$ 维不可约子簇.超椭圆曲线的典范映射就是到有理直线 P^1 上的二次有限态射.而亏格 $g\geqslant 3$ 的非超椭圆曲线的典范映射是到 P^{g-1} 的一个典范嵌入,其像是一个 $2g-2$ 次的曲线,称为典范曲线.

典范曲线(canonical curve) 见"超椭圆曲线".

雅可比簇(Jacobian variety) 与代数曲线相联系的一个特殊子簇.具体地,任一域上的任一光滑射影曲线 C 的皮卡簇 Pic^0C 和它的阿尔班尼斯簇 $\mathrm{Alb}(C)$ 典范同构,称为 C 的雅可比簇,记为 $J(C)$.因此,$J(C)$ 是有下述性质的主极化阿贝尔簇:

1. 存在 $C\times J(C)$ 上的可逆层 $\mathscr{P}$(庞加莱层),若 $\mathscr{E}$ 是 C 上的可逆层且 $c_1(\mathscr{E})=0$,则存在惟一的点 $x\in J(C)$ 使得 $\mathscr{P}$ 在 $C\times\{x\}$ 上的限制同构于 $\mathscr{E}$.

2. 存在典范态射 $\mu:C\to J(C)$,对任一阿贝尔簇 X 及任一态射 $\mu':C\to X$,存在惟一态射 $f:J(C)\to X$ 使得 $\mu'=f\circ\mu$.

3. (托莱里定理)C 在同构之下由 $J(C)$ 及其主极化惟一决定,若 C 是复数域 $\mathbf{C}$ 上亏格 $g>0$ 的光滑射影曲线,则 $J(C)$ 也可如下构造:取 $H_1(C,\mathbf{Z})$ 的一组基 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{2g}$ 以及整体微分形式空间 $H^0(C,\Omega_C)$ 中的一组基 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_g$,可以得到黎曼面 C 的周期矩阵

$$\Omega=\left(\int_{\delta_j}\omega_i\right).$$

Ω 的 $2g$ 个列向量在 $\mathbf{C}^g$ 中生成一个格 Λ,于是,g 维复环面 $J(C)=\mathbf{C}^g/\Lambda$ 就是 C 的雅可比簇(参见"阿贝尔定理").一个主极化阿贝尔簇在什么条件下才是某条曲线的雅可比簇,就是著名的肖特基问题.

肖特基问题(Schottky problem) 见"雅可比簇".

托莱里定理(Torelli theorem) 关于光滑曲线同构条件的定理.指域 k 上的两条光滑射影曲线同构,当且仅当它们的雅可比簇作为极化阿贝尔簇是同构的.若 $\mathscr{A}_g$ 是 g 维主极化阿贝尔簇(在 $\mathbf{Z}$ 上的)粗糙参量空间,$J(C)$ 是曲线 C 的雅可比簇,则对应 $C\to J(C)$ 定义了一个态射 $i:\mathscr{M}_g\to\mathscr{A}_g$.托莱里定理断言:$i$ 是单射.实际上,i 还是一个开浸入.托莱里定理说明代数曲线的全部信息都包含在它的雅可比簇中.

代数曲线的参量空间(moduli space of algebraic curves) 代数几何的一个概念.指给定亏格 g 的所有光滑代数曲线的参量空间.亏格 g 曲线的粗糙参量空间 $\mathscr{M}_g$ 是一个正规拟射影簇,当 $g>0$ 时,不是完备的.$\mathscr{M}_g$ 的维数 $=0(g=0),1(g=1),3g-3(g\geqslant 2)$.$\mathscr{M}_g$ 只有商奇点.当 $g\leqslant 13$ 时,$\mathscr{M}_g$ 是单有理簇;当 $g\geqslant 23$ 时,$\mathscr{M}_g$ 是一般型的.人们猜测,当 $g<23$ 时,$\mathscr{M}_g$ 是单直纹的.另一方面,亏格 g 曲线的精细参量空间不存在.

代数曲线的自同构群(automorphism group of an algebraic curve) 代数几何的一个概念.指代数闭域 k 上亏格 g 的光滑射影曲线的自同构群,记为 $\mathrm{Aut}(C)$.当 $g=0$ 时,$C\cong P_k^1$,这时 $\mathrm{Aut}(P_k^1)$ 由 P_k^1 的所有分式线性变换组成,即它同构于射影一般线性群 $\mathrm{PGL}(2,k)$.当 $g=1$ 时,C 为椭圆曲线,此时 $\mathrm{Aut}(C)$ 是 C 的平移群与一个有限群 G 的半直积.当域 k 的特征 $p\neq 2,3$ 时,G 的阶只可能是 2,4,6.当 $g\geqslant 2$ 时,$\mathrm{Aut}(C)$ 是有限群.当域 k 的特征为零时,赫尔维茨不等式断言:$\mathrm{Aut}(C)$ 的阶$\leqslant 84(g-1)$.当域 k 的特征数非零时,此不等式不再成立.但除了一些已知的例外情形外,其阶数$\leqslant 16g^4$.

代数曲面(algebraic surface) 代数几何的一个基本概念.二维代数簇称为代数曲面.以下只考虑复代数曲面.代数曲面的双有理分类的研究是从 19 世纪末开始的.人们在代数曲面的双有理等价类中找到一个极小模型(即一个不含第一类例外曲线的光滑曲面),使得等价类中其他的光滑曲面都可通过对极小模型的爆发得到.这样,就只需对极小模型作双有理分类.按恩里奎斯(Enriques,F.)的分类,极小曲面可分为四类.用现代的语言来讲,就是小平维数等于 $-\infty$,0,1,2 的四类:

1. 小平维数为 $-\infty$ 的极小曲面是射影平面,或者是某条曲线上的直纹曲面.

2. 小平维数为 0 的曲面只有四种:$K3$ 曲面、恩里奎斯曲面、阿贝尔曲面和双椭圆曲面.

3. 小平维数为 1 的曲面一定是椭圆曲面,即其上有一个亏格 1 的纤维化.

4. 小平维数为 2 的曲面称为一般型曲面.

前两类曲面的分类是很清楚的.到了 20 世纪 60 年代中期,小平邦彦彻底弄清了椭圆曲面的分类

及性质.从某种意义上来讲,几乎所有的曲面都是一般型的.例如,三维空间中5次以上的光滑曲面,两条亏格≥2的曲线的纤维积,都是一般型曲面的例子.丘成桐用微分几何的方法证明了联系一般型曲面的陈数的重要不等式,即宫冈-丘不等式:$c_1^2 \leqslant 3c_2$.吉塞克(Gieseker)于1977年证明了一般型极小曲面有一个满意的参数化,即具有取定陈不变量c_1^2, c_2的一般型极小曲面有一个拟射影的粗糙参量空间$\mathscr{M}_{c_1^2, c_2}$.但是$\mu_{c_1^2, c_2}$的结构却知之甚少.邦别里(Bombieri,E.)和芒福德(Mumford,D. B.)把复数域上的恩里奎斯分类推广到特征数$p>0$的基域上,并发现当$p \neq 2, 3$时,它们的分类与复数域上的无太大差别.

极小曲面(minimal surface) 代数几何的一个基本概念.是指一种光滑射影代数曲面,它到任何光滑曲面的双有理态射都是同构映射.与一个代数曲面S'双有理等价的极小曲面S称为S'的极小模型,S可以通过收缩S'的奇点解消曲面上的所有(−1)曲线(即自交数为(−1)的射影直线)而得到.因此,光滑射影曲面S为极小曲面的充分必要条件是S不含(−1)曲线.但是,一个曲面的极小模型不一定惟一,例如,P^2和$P^1 \times P^1$都是有理曲面的极小模型.实际上,S有惟一极小模型的充分必要条件是S不双有理等价于直纹面.

极小模型(minimal model) 见"极小曲面".

卡斯泰尔诺沃定理(Castelnuovo theorem) 给出代数曲面有理性的数值判别法的定理.该定理断言:一个非异射影曲面S是有理曲面的充分必要条件是$q(S)=P_2(S)=0$.

有理曲面(rational surface) 与射影平面P_k^2双有理等价的曲面,或者说函数域是域k的2次纯超越扩张的二维代数簇.卡斯泰尔诺沃(Castelnuovo,G.)的有理性判别准则断言:满足$q=P_2=0$的非异完备代数曲面必是有理曲面.另一个有理性判别准则是:非异完备曲面是有理曲面的充分必要条件是在此曲面上存在自交数大于零的非异有理曲线.极小有理曲面除了射影平面P_k^2之外,还有希策布鲁赫(Hirzebruch,F.)的有理直纹面

$$F_n = P(O_{P^1} \oplus O_{P^1}(n)),$$

其中$n \geqslant 0, n \neq 1$.

韦罗内塞曲面(Veronese surface) 5维射影空间P_k^5中的一个特殊的4次曲面,它是P^2上的二次线性系$O(2)$所定义的嵌入映射$P^2 \to P^5$的像.该曲面是韦罗内塞(Veronese,G.)于1884年发现的.这个曲面有一个著名的性质:其上的不可约曲线都是偶次数的,它还包含有一个2维二次线性系,它们恰好是P^2中直线的像.

直纹面(ruled surface) 由一族射影直线构成的曲面.具体地,在代数几何中是指一个光滑射影曲面X,它具有一个亏格0的纤维化$\pi: X \to B$,即到光滑曲线B上的满态射,使得π的每条纤维都同构于射影直线P^1.有时也被称为几何直纹面.这种曲面的小平维数为$-\infty$.若一个曲面双有理等价于一条光滑射影曲线与P^1的积,则称这个曲面为双有理直纹面.它可用$P_{12} = h^0(12K_X) = 0$来刻画.几何直纹面必定是双有理直纹面,反之不对.

几何直纹面(geometrically ruled surface) 见"直纹面".

双有理直纹面(birationally ruled surface) 见"直纹面".

***K*3曲面**($K3$ surface) 具有平凡典范丛的单连通紧复解析曲面.$K3$曲面的小平维数为0,$K3$曲面的形变仍是一个$K3$曲面.小平邦彦证得了$K3$曲面都是$P_{\mathbb{C}}^3$中4次光滑曲面的形变.但是,并非所有$K3$曲面都是代数曲面,不过萧荫堂证得$K3$曲面都是克勒曲面.所有$K3$曲面的同构类构成一个不可约的20维簇Σ,而所有代数$K3$曲面对应于Σ的可列个19维不可约子簇.$P_{\mathbb{C}}^3$中具有16个奇点的4次曲面称为库默尔曲面,其极小光滑模型就是一个$K3$曲面.$K3$曲面由研究它的三位K字当头的数学家而得名,他们是:库默尔(Kummer,E. E.),克勒(Kähler,E.),小平邦彦.

恩里奎斯曲面(Enriques surface) 一类代数曲面,它是满足$p_g = q = 0, K^2 = 0$的光滑射影曲面.恩里奎斯曲面的二次覆盖曲面是一个$K3$曲面,后者因是单连通的,所以是恩里奎斯曲面的万有覆盖空间.恩里奎斯曲面是一个代数椭圆曲面,其小平维数等于零.

椭圆曲面(elliptic surface) 带有一个椭圆纤维化的代数曲面.具体地,一个光滑的紧复解析曲面X,它具有一个椭圆纤维化$\pi: X \to B$,也就是到非异曲线B上的态射,使π的一般纤维是一条椭圆曲线.日本数学家小平邦彦在20世纪60年代对这类曲面做了开创性的、深入的研究.椭圆曲面的小平维数$\kappa(X) \leqslant 1$.$\kappa(X)=1$的椭圆曲面称为基本型的,它可以是代数的或非代数的.$\kappa(X)=-\infty$的椭圆曲面必是直纹面.$\kappa(X)=0$的椭圆曲面有以下一些类型:

1. 椭圆$K3$曲面.
2. 恩里奎斯曲面,它一定是代数的.
3. 二维复环面.
4. 超椭圆曲面,也称双椭圆曲面,它必是代数的.
5. 小平曲面(非代数的).

超椭圆曲面(hyperelliptic surface) 亦称双椭

圆曲面，一种小平维数等于零的光滑射影曲面. 它是两条椭圆曲线 E 和 F 的积关于一个有限群 G 的商曲面，这个有限群 G 作用在 E 上相当于平移，而作用在 F 上则使得 F 关于 G 的商是一条有理曲线. 它的数值特征是 $p_g=0, q=1$.

双椭圆曲面(bielliptic surface)　即"超椭圆曲面".

希尔伯特模曲面(Hilbert modular surface)　模形式的 2 维推广. 设 O 是一个判别式为 d 的实二次域的代数整数环. 希尔伯特模群 $G=\mathrm{SL}(2,O)/\{\pm 1\}$作用于 2 维的上半复平面 H^2，可以通过添加有限多个点使正规复空间 H^2/G 紧致化，从而得到一个正规曲面. 通过一个典范的方法可解消其上的奇点，得到光滑紧复曲面 $Y(d)$，称 $Y(d)$为具有判别式 d 的希尔伯特模曲面. $Y(d)$是单连通的，所以有 $q(Y(d))=0$. 当 $d=5,8,12,13,17,21,24,28,33,60$ 时，$Y(d)$是有理曲面. 当 $d=29,37,40,41,44,56,57,69,105$ 时，$Y(d)$双有理等价于一个 $K3$ 曲面. 当 $d=53,61,65,73,76,77,85,88,92,93,120,140,165$ 时，$Y(d)$为椭圆曲面. 其他情形的 $Y(d)$是一般型极小曲面.

一般型代数曲面(algebraic surface of general type)　小平维数为 2 的紧复曲面. 一般型代数曲面还可刻画为：其极小模型 S 满足 $P_2(S)>1, c_1^2(S)>0$，这里 c_1^2 是陈数. S 的形变仍是一般型的. S 的多重典范映射 φ_{mK}在 $m\geqslant 5$ 时是双有理态射，它在 S 上的 (-2)-曲线(只有有限多条)以外是同构映射，而将每一条(-2)-曲线收缩到一个有理奇点. 对于一般型极小曲面 S，其基本不变量满足：

$$c_1^2(S)>0,\ \chi(O_S)>0,\ c_1^2(S)\geqslant 2\chi(O_S)-6$$

(诺特不等式)，$c_1^2(S)\leqslant 9\chi(O_S)$ (宫冈-丘成桐不等式). 从某种意义上来说，几乎所有的曲面都是一般型. 吉塞克(Gieseker)证明：陈数 c_1^2, c_2 固定的所有一般型极小曲面的参量空间是一个拟射影概形.

诺特不等式(Noether inequality)　见"一般型代数曲面".

宫冈-丘成桐不等式(Miyaoka-Yau inequality)　见"一般型代数曲面".

曲面地理学(geography of surfaces)　亦称陈数的地理学，研究陈数的值与线数曲面的性质间的关系的分支. 这是对一般型极小复代数曲面而言的. 每个一般型极小曲面有一对陈数 c_1^2 和 c_2，它们满足：$c_1^2>0, c_2>0, c_1^2+c_2\equiv 0(\mathrm{mod}\,12), 5c_1^2-c_2+36\geqslant 0, c_1^2\leqslant 3c_2$. 这些不等式刻画了陈数的存在范围. 所谓曲面地理学就是研究以下两类问题：

1. 若把不变量限制在某个范围内，则相应的曲面会有什么特殊的性质？

2. 若对曲面加上一些自然的条件，则相应的不变量会有什么限制？

与上述范围内的陈数相对应的曲面的存在性问题也是一个基本的问题. 这个问题目前已大体上解决.

正指数曲面(surface with positive index)　陈数满足 $c_1^2>2c_2$ 的光滑复射影曲面. 因为射影曲面的相交二次型的指数$(c_1^2-2c_2)/3$ 在这种情况下大于零而得名. 由于这样的曲面的结构比较复杂，长期以来例子也很少，所以曾被认为是很神秘的曲面.

算术曲面(arithmetic surface)　算术代数几何里的重要研究对象. 设 R 是一个戴德金环，F 是 R 的分式域，记 $Y=\mathrm{Spec}\,R$，若 X 是一个 Y 整概形，使得 $X\to Y$ 是一个正常、平坦态射，并且一般纤维 X_F 是一条非奇异曲线，则称 X 为算术曲面. 算术曲面最简单的例子就是费马曲面，即取

$$R=\mathbf{Z},\quad X=\mathrm{Proj}\,\mathbf{Z}[x,y,z]/(x^n+y^n-z^n).$$

这时 $Y=\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$ 是与整数环对应的算术曲线，X 就相当于 Y 上的一个纤维化曲面. 因此研究算术曲面的目的之一就是为了解决费马猜想.

高维代数簇(algebraic variety of higher dimension)　维数不小于 3 的代数簇. 假设基域是特征 0 的域. 高维代数簇的双有理分类是从 20 世纪 70 年代开始的. 同曲面的情形相似，首先使用的工具仍然是多重典范映射和小平维数. 饭高首先证明：若 X 的小平维数不为 $-\infty$，0 或 $\dim X$，则多重典范映射有一个纤维空间结构. 从这个意义上来说，高维代数簇的分类可归结为对小平维数为 $-\infty$，0，$\dim X$ 的代数簇的分类. 在分类理论中，一个本质性的猜测便是 $C_{n,m}$猜测：$f:X\to Y$ 是一个纤维空间，$\dim X=n$，$\dim Y=m$，若一般纤维为 F，则它们的小平维数满足$\kappa(X)\geqslant\kappa(F)+\kappa(Y)$. 然而只有当 n,m 很小时，或当 $\kappa(X)\geqslant 0$，Y 是一般型时，$C_{n,m}$猜测得到证明. 在 20 世纪 80 年代，由于森重文(Mori, S.)引进了几个新的思想，大大推进了高维代数簇的分类. 同曲面的情形不一样，为了找到高维代数簇的极小模型，不可避免地要碰到一些奇点：典范奇点和末端奇点. 然后可定义极小模型为：典范除子为半正的、仅含末端奇点的射影簇. 极小模型猜想认为小平维数非负的光滑射影簇必有极小模型. 在三维的情形这个猜想已被森重文证明，从而完成了三维代数簇双有理分类的第一步. 为找到射影簇的极小模型，森重文提出了一个程序：通过有限次收缩以及翻转以得到极小模型. 而当维数大于三时，由于翻转猜想、良性猜想都没有解决，所以这个程序还无法实现. 高维代数簇的精细分类都紧紧依赖于森重文的程序. 到目前为止只有很少一类簇(例如法诺簇)有了较完整的分类.

Q 卡蒂埃除子(Q-Cartier divisor)　卡蒂埃除子的推广. 设有正规簇 X 上的韦伊除子 D，若存在

自然数 n，使 nD 是一个卡蒂埃除子，则称 D 是 Q 卡蒂埃除子.

典范奇点(canonical singularity)　一种在代数簇的典范模型和极小模型上不可避免的奇点. 具体定义如下：设 (X,p) 是正规代数(或解析)奇点芽，若它满足下述两个条件，则称 p 是 X 的一个典范奇点：

1. 存在一个正整数 r，使得韦伊除子 rK_X 是卡蒂埃除子(这里最小的 r 称为 X 在 p 点的指数).

2. 对任何(或等价地，对某个)解消 $f:Y\to X$ 有

$$rK_X = f^*(rK_Y) + \sum_i a_iE_i,$$

其中对任意 i，$a_i\geqslant 0$，E_i 跑遍所有例外除子.

进一步地，若还要求对任意 i 都有 $a_i>0$，则称 p 为 X 的末端奇点. 特别地，指数为 1 的典范奇点称为戈朗斯坦奇点. 例如，曲面典范奇点就是有理二重点，末端奇点就是光滑点.

末端奇点(terminal singularity)　见"典范奇点".

整合态射(crepant morphism)　代数簇之间的一类特殊的态射. 即指两个只有典范奇点的正规簇间的态射 $f:X\to Y$，它满足 $rK_X = f^*(rK_Y)$，其中 r 是 Y 的指数(使 rK_Y 是卡蒂埃除子的最小整数).

端射线(extremal ray)　代数簇锥理论里的一个基本概念. 若 X 是仅具有典范奇点的复射影簇，则 X 的 1 闭链群模数值等价关系是一个有限生成阿贝尔群，它到实数域上的扩张 $N(X)$ 是内隆-塞维里群 $NS(X)$ 的实扩张 $NS(X)\otimes\mathbb{R}$ 的对偶，其维数 $\rho(X)(<\infty)$，称为 X 的皮卡数. 在有限维向量空间 $N(X)$ 中，$NE(X)=\{\sum a_i[C_i]\mid C_i$ 是不可约曲线，$a_i\in\mathbb{R}$，$a_i\geqslant 0\}$ 是一个锥，它在 $N(X)$ 的度量拓扑下的闭包 $\overline{NE}(X)$ 称为 X 的曲线闭锥，而 $NE(X)$ 称为曲线锥. 曲线闭锥是凸锥. 设 $R=\mathbb{R}_+[Z]=\{rZ\mid r\in\mathbb{R},r>0\}$ 为 $Z\in\overline{NE}(X)$ 生成的半直线，称 R 是一条端射线，若 R 满足：

1. Z 与 X 的典范除子 K_X 的相交数 $ZK_X<0$.

2. 若 $Z_1+Z_2\in R$，$Z_1,Z_2\in\overline{NE}(X)$，则 Z_1，$Z_2\in R$.

端射线是研究高维射影簇态射的有效工具(参见"锥定理").

皮卡数(Picard number)　见"端射线".

锥定理(cone theorem)　高维射影簇双有理分类理论中的一个重要定理. 设 X 是仅具有典范奇点的复射影簇. D 是 X 上的一个除子. 记

$$D_{>0}=\{Z\mid Z\cdot D>0\}\subset\overline{NE}(X).$$

类似地，可定义 $D_{\geqslant 0}$，$D_{<0}$，$D_{\leqslant 0}$，$D_{=0}$. 锥定理包括以下两条结论：

1. $\overline{NE}(X)=\overline{NE}(X)\cap(K_X)_{\geqslant 0}+\sum\mathbb{R}_+[C_j]$，这里 C_j 满足 $C_j\cdot K_X<0$，这个和式具有这样的性质：集合 $\{C_j\}$ 是极小的，它与 $\overline{NE}(X)\cap(K_X)_{\geqslant 0}$ 构成了 $\overline{NE}(X)$ 的一组极小生成元，这里 $\mathbb{R}_+[C_j]$ 实际上就是端射线.

2. 对任意 $\varepsilon>0$ 和丰富除子 H，由结论 1 得出以下等式

$$\overline{NE}(X)\cap(K_X+\varepsilon H)_{\leqslant 0} = \overline{NE}(X)\cap(K_X+\varepsilon H)_{=0}+\sum_{\text{有限和}}\mathbb{R}_+[C_j].$$

实际上，锥定理还包括无基点定理、不消失定理、有理性定理和收缩定理.

无基点定理(base point free theorem)　有关高维射影簇双有理分类的一个定理. 设 D 是半正卡蒂埃除子，若某个正整数 a，使 $aD-K_X$ 是大的(即自交数 >0)，则当 $m\gg 0$ 时，$|mD|$ 没有基点.

不消失定理(nonvanishing theorem)　有关高维射影簇双有理分类的一个定理. 设 D 是半正卡蒂埃除子，若有某个正整数 a，使 $aD-K_X$ 是大的(即自交数 >0)，则当 $m\gg 0$ 时，$|mD|\neq\varnothing$.

有理性定理(rationality theorem)　有关高维射影簇双有理分类的一个定理. 若 K_X 不是半正的，则存在一个自然数 d，使得对任何丰富除子 H，当 $t(H)=\max\{t\mid H+tK_X$ 半正$\}$ 时，$dt(H)$ 是整数.

收缩定理(contraction theorem)　有关高维射影簇双有理分类的一个定理. 对任何端射线 R，存在一个到正规簇 Y 上的态射 $f:X\to Y$，它具有连通纤维，并且使得：不可约曲线 C 被 f 收缩，当且仅当 $[C]\in R$.

典范模型(canonical model)　一类特殊的代数簇. 设 X 是仅具有典范(相应地，末端)奇点的复射影簇，若典范除子 K_X 是一个丰富(相应地，半正)Q 除子，则称 X 是典范(相应地，极小)模型. 若簇 Y 双有理等价于一个典范(或极小)模型，则称簇 Y 有典范(或极小)模型. 典范模型和极小模型的存在性问题是代数几何的一个基本问题. 若 V 是一般型光滑复射影簇，则 V 有典范模型 X 的充分必要条件是 V 的典范环 $R(V)$ 是有限生成的，这时 $X=\mathrm{Proj}\,R(V)$. 著名的极小模型猜想是：任何小平维数 $\geqslant 0$ 的光滑射影簇有一个极小模型. 在 3 维的情形这个猜想已被森重文证明.

极小模型(minimal model)　见"典范模型".

饭高纤维化(Iitaka fibration)　高维代数簇分类理论中用到的一类特殊的纤维化. 若 V 是小平维数非负的复光滑簇，则存在一个整数 r 和一个纤维化 $f:\tilde{V}\to W$，使得 $\tilde{V}$ 双有理等价于 V，W 双有理等价于 $\varphi_{mrK_V}(V)$，这里 $m\geqslant 0$. 这个纤维化满足：$\dim W=\kappa(V)$，$\kappa(\tilde{V}_w)=0$，$\tilde{V}_w=\varphi^{-1}(w)$ 是 f 的一般纤维.

饭高纤维化使得代数簇的分类问题可归结为对小平维数 $\kappa(V)=-\infty,0,\dim V$ 的代数簇 V 的分类.

数值小平维数(numerical Kodaira dimension) 高维代数簇分类理论中用到的一个数值不变量.若代数簇 X 是一个 n 维的极小模型,则可定义 $\upsilon(X)$ 为使得 $(n-\upsilon)$ 闭链 κ_x^{υ} 不能数值等价于零的最大整数,称 $\upsilon(X)$ 为 X 的数值小平维数,有时也记为 $\kappa_{num}(X)$. 显然 $0\leqslant\upsilon(X)\leqslant n$. 对于极小模型 X,有 $\kappa(X)\leqslant\upsilon(X)$. 而当 $\upsilon(X)=n$ 时,说明 $K_x^n>0$,这时必定有 $\kappa(X)=\upsilon(X)$.

法诺簇(Fano variety) 一种特殊的代数簇.若 X 是域 k 上的光滑、完备、不可约代数簇,它的逆典范层 K_X^{-1} 是丰富层,则称 X 为法诺簇.因意大利数学家法诺(Fano,G.)于 1931 年首先研究三维的情形而得名.一维法诺簇就是射影直线.二维法诺簇称为德尔佩佐曲面.德尔佩佐曲面可以通过爆发射影平面 P^2 上的 d 个 $(0\leqslant d\leqslant 6)$ 适当选取的点而得到,因而它是有理曲面.维数超过 2 的法诺簇不一定是有理的,但一定是单直纹的.法诺簇的小平维数等于 $-\infty$,因而它是相当特殊的代数簇,比较易于着手研究.近 20 年来,复数域上三维法诺簇的研究已有很大的进展,但三维以上的法诺簇仍然只有一些零星的结果.

德尔佩佐曲面(Del Pezzo surface) 见"法诺簇".

饭高猜想(Iitaka conjecture) 亦称 $C_{n,m}$ 猜想,高维代数簇分类理论中的一个重要猜想.具体地,若对一个代数簇的纤维化 $f:V\to W$,$\dim W=m$,$\dim V=n$,F 为一般纤维,则它们的小平维数满足 $\kappa(V)\geqslant\kappa(F)+\kappa(W)$. 这个猜想在非一般型射影簇的分类中起着很重要的作用.当 $\kappa(V)\geqslant 0$ 且 W 是一般型时,此猜想已被证明. W 为曲线时也已被证明.

$C_{n,m}$ 猜想($C_{n,m}$ conjecture) 即"饭高猜想".

翻转猜想(flip conjecture) 对坏的收缩进行修正的一个猜想.在代数簇的极小模型理论中起着重要作用.设 $f:X\to Z$ 是正规簇之间的非平凡双有理态射,X 仅具有末端奇点,f 是不收缩除子,而且 $-K_X$ 是 f 相对丰富的(这种态射 f 称为坏的收缩),翻转猜想称:存在一个双有理态射 $f^+:X^+\to Z$,使得 X^+ 与 X 除去一个余维数大于 1 的子集后同构,X^+ 上只有末端奇点,f^+ 是不收缩除子,K_{X^+} 是 f^+ 相对丰富的. X^+ 通常称为 X 的翻转.

良性猜想(goodness conjecture) 关于代数簇的极小模型 X 的一个猜想.它提出 X 的小平维数应等于它的数值小平维数.现已知道当 $\upsilon(X)=0$ 或 $\dim X$ 时,良性猜想成立.当 $\dim X=3$ 时,对于 $\upsilon(X)=1$ 的极小模型,良性猜想也成立.

阿贝尔簇(Abelian variety) 域上的几何整的完备群概形.它一定是射影、光滑、交换的.椭圆曲线(P^2 中的非奇异三次曲线)是阿贝尔簇的一个例子.当基域为复数域 $\mathbf{C}$ 时,阿贝尔簇可以如下定义. $\mathbf{C}^n$ 中的一个格指的是 $\mathbf{C}^n$ 的一个有限生成的加法子群 Λ,使得 $\Lambda\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}\cong\mathbf{C}^n$. $\mathbf{C}^n/\Lambda$ 称为一个复环面.一个阿贝尔簇是一个具有代数结构的复环面 $\mathbf{C}^n/\Lambda$,这等价于 $\mathbf{C}^n/\Lambda$ 可以解析地嵌入射影空间;也等价于存在一个黎曼形式,即一个 $\mathbf{C}^n$ 上的非退化 $\mathbf{R}$ 交错二次型 E,满足下述的莱夫谢茨(Lefschetz,S.)条件:

1. $E(\Lambda,\Lambda)\subset\mathbf{Z}$.
2. $E(x,\mathrm{i}y)$ 为正定对称.

$\mathbf{C}^n/\Lambda$ 上的半纯(代数)函数可以看做是 $\mathbf{C}^n$ 上的以 Λ 为周期的半纯函数,这样的函数称为 $\mathbf{C}^n$ 上的 θ 函数.

复环面(complex torus) 见"阿贝尔簇".

θ 函数(theta function) 见"阿贝尔簇".

同源(isogeny) 阿贝尔簇间的有限满同态.对任意两个阿贝尔簇 X,Y,若存在同源 $X\to Y$,则称 X 与 Y 是同源的.同源是一个等价关系.任意阿贝尔簇 X 与自己的对偶 $\hat{X}$ 都是同源的. X 上的任一丰富层诱导一个同源 $X\to\hat{X}$,这样一个同源称为 X 的一个极化.若这个同源是一个同构,则称它为一个主极化.当基域为 $\mathbf{C}$ 时,一个阿贝尔簇 $\mathbf{C}^n/\Lambda$ 的极化可以刻画为 Λ 上的一个整值二次型,即黎曼形式(参见"阿贝尔簇").一个阿贝尔簇连同它的一个极化(主极化)称为一个极化阿贝尔簇(主极化阿贝尔簇).

极化(polarization) 见"同源".

主极化(principal polarization) 见"同源".

极化阿贝尔簇(polarized Abelian variety) 见"同源".

主极化阿贝尔簇(principally polarized Abelian variety) 见"同源".

周期矩阵(period matrix) 刻画阿贝尔簇结构的一种特殊矩阵.设 $M=V/\Lambda$ 为 g 维复环面,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{2g}$ 是格 Λ 的整基,$e_1,e_2,\cdots,e_g$ 是 V 的复基,从而

$$\lambda_i=\sum_{\alpha}\omega_{\alpha i}e_{\alpha},$$

称 $\Omega=(\omega_{\alpha i})$ 为 Λ 在 V 内的周期矩阵.复环面 $M=V/\Lambda$ 成为阿贝尔簇,当且仅当其周期矩阵 Ω 满足以下的黎曼条件:存在 Λ 的适当的整基 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{2g}$ 和 V 的复基 $e_1,e_2,\cdots,e_g$,使得周期矩阵 $\Omega=(\Delta_\delta Z)$,其中,Z 是对称方阵,其虚部 $\mathrm{Im}\,Z$ 正定,Δ_δ 为整系数非异对角阵,即

$$\Delta_\delta=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_g),\quad d_1|d_2|\cdots|d_g.$$

上述条件又可等价地表述成以下条件:存在一个整数反对称矩阵 Q,使得

$$\Omega Q^{-1}\Omega^t=0,\quad -\sqrt{-1}\,\Omega Q\bar{\Omega}^t>0.$$

前一个等式称为黎曼关系式，后一个不等式称为黎曼周期不等式. 上述条件也等价于莱夫谢茨条件（参见“阿贝尔簇”）.

黎曼关系式（Riemann's relation） 见“周期矩阵”.

黎曼周期不等式（Riemann's period inequality） 见“周期矩阵”.

阿贝尔定理（Abel theorem） 揭示代数曲线的除子群与雅可比簇间的关系的重要定理. 设 C 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的亏格 $g>0$ 的光滑射影曲线（即紧黎曼面）. 可以构造 C 的雅可比簇 $J(C)=\mathbb{C}^g/\Lambda$. 对于 C 上任意一个次数为 0 的除子 $A=\sum Q_j-\sum P_j$，可以定义$u(A)$为

$$\left(\sum\int_{P_j}^{Q_j}\omega_1,\sum\int_{P_j}^{Q_j}\omega_2,\cdots,\sum\int_{P_j}^{Q_j}\omega_g\right)$$

在 $J(C)$中的等价类，这里的 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_g$ 是 C 上整体全纯微分形式的基. 记 $\mathrm{Div}^0(C)$为 C 中零次除子所生成的子群，就有群的同态 $u:\mathrm{Div}^0(C)\to J(C)$. 阿贝尔定理断言：$u$ 的核就是 C 上的主除子群，即由 C 上的非零有理函数所确定的除子群，并且 u 是满射. 上面提到的 u 的满射性就是所谓的雅可比反演问题，它也可表述为：给定 $\mathbb{C}^g$ 中任一向量$(u_1,u_2,\cdots,u_g)$以及 g 个点 $P_1,P_2,\cdots,P_g\in C$，求 C 中 g 个点 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_g$，使得

$$\left(\sum\int_{P_j}^{Q_j}\omega_1,\cdots,\sum\int_{P_j}^{Q_j}W_g\right)=(u_1,u_2,\cdots,u_g)\ \mathrm{mod}\Lambda.$$

雅可比反演问题（Jacobi's inverse problem） 见“阿贝尔定理”.

阿贝尔簇的对偶（dual of an Abelian variety） 一类与阿贝尔簇相关联的概形，即阿贝尔簇的皮卡簇. 阿贝尔簇 X 的对偶一般记为 $\hat{X}$. $\hat{X}$ 的对偶同构于 X. $\hat{X}$ 的闭点组成的群可以看做 X 上所有在平移之下不变的可逆层的同构类的集合. 当基域为 $\mathbb{C}$ 时，一个阿贝尔簇 $\mathbb{C}^n/\Lambda$ 的对偶也可以定义为 Λ 的对偶格所决定的阿贝尔簇.

卡蒂埃对偶（Cartier dual） 群概形的一个对偶群概形. 若 $G=\mathrm{Spec}\,R$ 是域 k 上的有限交换群概形，记 $\hat{R}=\mathrm{Hom}_K(R,K)$，则 G 的群概形结构给出 $\hat{R}$ 的一个 k 交换代数结构，而 R 的 k 交换代数结构又给出 $\hat{G}=\mathrm{Spec}\,\hat{R}$ 的一个有限交换群概形结构. 这个群概形 $\hat{G}$ 称为 G 的卡蒂埃对偶. $\hat{G}$ 的卡蒂埃对偶同构于 G. 这个定义不难推广到任意诺特概形 S 上的有限平坦交换群概形. 当 K 为特征零的代数闭域时，G 的卡蒂埃对偶就是它的对偶群，即 G 上的所有 $\mathbb{C}$ 特征标组成的乘法群. 卡蒂埃对偶在阿贝尔簇理论中的作用是：若 $f:X\to Y$ 是阿贝尔簇的同源，则 $\ker(f)\cong\ker(\hat{f})$，这里 $\hat{f}:\hat{Y}\to\hat{X}$ 是 f 的对偶同源，而 $\ker(\hat{f})$是 $\ker(f)$的卡蒂埃对偶.

弗罗贝尼乌斯态射（Frobenius morphism） 特征 p 的概形上特有的态射. 设 k 是一个特征 $p>0$ 的域. 对任意一个 k 上的概形 X，可以定义一个 X 到自身的态射 $F_X:X\to X$，它把每个点映到自身，而把每个（定义在开子集上的）函数映成自身的 p 次幂. F_X 称为 X 的绝对弗罗贝尼乌斯态射. 设 S 是 K 概形，而 X 是 S 概形. 做纤维积，于是存在惟一的 S 态射 $F_{X/S}:X\to X^{(p)}$，使得 $\sigma\circ F_{X/S}=F_X$. $F_{X/S}$，称 $F_{X/S}$为 X 在 S 上的相对弗罗贝尼乌斯态射. 绝对弗罗贝尼乌斯态射和相对弗罗贝尼乌斯态射统称弗罗贝尼乌斯态射. 弗罗贝尼乌斯态射是典范的，即对任何 K 概形的态射 $f:X\to Y$，有右面的图交换.

$$\begin{array}{ccc} X^{(p)} & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{F_S} & S \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F_X} & X \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{F_Y} & Y \end{array}$$

莫德尔-韦伊定理（Mordell-Weil theorem） 关于数域上阿贝尔簇的有理点群的定理. 设 k 是数域，A 是 k 上阿贝尔簇，

$$A(k)=\mathrm{Mor}_K(\mathrm{Spec}(k),A),$$

即 A 上的 k 有理点组成的群. 莫德尔-韦伊定理断言：$A(k)$是有限生成的.

塔特群（Tate group） 与阿贝尔簇相关联的群. 设 k 为域，$\bar{k}$ 为 k 的代数闭包，$G=\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. 对 k 上的任一阿贝尔簇 X，记

$$X[n]=\ker(X\xrightarrow{\cdot n}X)_0,$$

对任一素数 p，记

$$T_p(X)=\varprojlim_n X[p^n]\cong\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,X(\bar{k})),$$

称为 X 在 p 的塔特群. 当 $p\neq\mathrm{ch}(k)$时，

$$T_p(X)\cong\mathbb{Z}_p^{2g},$$

其中 $g=\dim(X)$. G 作用在 $T_p(X)$上. 若 $f:X\to Y$ 是 k 阿贝尔簇同态，则 f 诱导一个同态

$$T_p(X)\to T_p(Y),$$

它与 G 的作用相容. 若 $\mathrm{Hom}_G(T_p(X),T_p(Y))$为所有 G 相容同态的集合，则有同态

$$\mathrm{Hom}_K(X,Y)\otimes\mathbb{Z}_p\to\mathrm{Hom}_G(T_p(X),T_p(Y))\quad(*)$$

塔特猜想：当 k 为数域（即有理数域的有限扩张）时，（*）是同构. 这个猜想已被法尔廷斯（Faltings，G.）于 1984 年证明.

塔特猜想（Tate's conjecture） 见“塔特群”.

塔特模（Tate module） 塔特群可以看做 $\mathbb{Z}_p$ 上的模，称为塔特模.

阿贝尔 S 概形（Abelian S scheme） 纤维都是阿贝尔簇的光滑 S 群概形. 一个光滑的 S 群概形，它的纤维都是阿贝尔簇. 阿贝尔 S 概形也可以等价地定义为具有几何连通纤维的正常光滑 S 概形. 阿

贝尔 S 概形 A 是交换的 S 群概形，当 S 是正规概形时，A 是射影 S 概形．从直观来看，阿贝尔 S 概形就是以概形 S 作为参量的一族阿贝尔簇．因此，它主要应用于研究阿贝尔簇的参量概形 以及阿贝尔簇的约化．

皮卡概形(Picard scheme)　与射影光滑代数簇相关联的一个群概形．对一个代数闭域 k 上的任意射影光滑代数簇 X，存在一个 k 上的群概形 $\mathrm{Pic}(X)$，以及 $X\times\mathrm{Pic}(X)$上的可逆层(庞加莱层)$\mathscr{P}$，具有如下性质：若 T 是任意 k 概形，$\mathscr{L}$ 是 $X\times Y$ 上任意可逆层，则存在惟一的态射 $\varphi:T\to\mathrm{Pic}(X)$，使得

$$\mathscr{L}\cong(\mathrm{id}_X\times\varphi)^*\mathscr{P}\otimes\mathrm{pr}_2^*\mathscr{M},$$

其中 $\mathscr{M}$ 是 T 上的可逆层．$\mathscr{P}$ 所对应的直线丛称为庞加莱丛．$\mathrm{Pic}(X)$称为 X 的皮卡概形，它是一个群概形．它的闭点组成的集合，可以看做 X 上的可逆层的同构类组成的以张量积为乘法的群，即 X 的皮卡群．$\mathrm{Pic}(X)$的包含 0 的分支是一个射影概形，它的既约结构是一个阿贝尔簇，称为 X 的皮卡簇，记为 $\mathrm{Pic}^0(X)$．$\mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}^0(X)$的群结构称为 X 的内隆-塞维里群，记为 $NS(X)$．它是一个有限生成的阿贝尔群．若 $K=\mathbf{C}$，则 $\mathrm{Pic}^0(X)$也可以定义为 $H^1(X,O_X)/H^1(X,\mathbf{Z})$，而内隆-塞维里群可以定义为 coker $(H^1(X,O_X)\xrightarrow{\varepsilon}H^1(X,O_X^*))$，其中 ε 由指数映射诱导．

庞加莱丛(Poincaré bundle)　见"皮卡概形"．

皮卡簇(Picard variety)　见"皮卡概形"．

内隆-塞维里群(Néron-Severi group)　见"皮卡概形"．

希尔伯特概形(Hilbert scheme)　一种特殊概形．设 T 是一个诺特概形，X 是 T 上的射影概形，C_T 是所有局部诺特 T 概形的范畴．定义一个从 C_T 到集合范畴的函子 $\mathrm{Hilb}_{X/T}$如下：$\mathrm{Hilb}_{X/T}(S)=\{$在 S 上平坦的闭子概形 $Z\subset X\times_T S\}$．$\mathrm{Hilb}_{X/T}$由一个局部诺特概形 $\mathrm{Hilb}_{X/T}$表示，换言之，存在一个闭子概形 $W\subset X\times_T\mathrm{Hilb}_{X/T}$，它在 $\mathrm{Hilb}_{X/T}$上平坦，且对任意 $S\in C_T$ 及任意在 S 上平坦的闭子概形 $Z\subset X\times_T S$，存在惟一的 T 态射 $f:S\to\mathrm{Hilb}_{X/T}$，使得 $Z=(\mathrm{id}_X\times_T f)^*W$．$\mathrm{Hilb}_{X/T}$称为 X 在 T 上的希尔伯特概形．

阿尔班尼斯簇(Albanese variety)　与射影光滑代数簇相关联的一个簇．一个射影光滑代数簇 X 的阿尔班尼斯簇指的是它的皮卡簇的对偶阿贝尔簇，记为 $\mathrm{Alb}(X)$．$X\times\mathrm{Pic}^0(X)$上的庞加莱层诱导一个典范态射 $\mu:X\to\mathrm{Alb}(X)$，具有如下性质：若 A 是任意阿贝尔簇，$f:X\to A$ 是任意态射，则存在惟一态射 $\varphi:\mathrm{Alb}(X)\to A$，使得 $f=\varphi\circ\mu$．这一定义可以推广到任意代数簇．若基域为 $\mathbf{C}$，则 $\mathrm{Alb}(X)$也可以定义为 $H^0(X,\Omega_X^1)^\vee/H_1(X,\mathbf{Z})$．

格拉斯曼簇(Grassmannian variety)　亦称格拉斯曼空间．线性空间的同维子空间构成的簇．一个 n 维线性空间的所有 m 维线性子空间的集合，记为 $G_{n,m}$．格拉斯曼簇具有如下的代数几何结构：若所给 n 维线性空间为 V，具有基 $v_1,v_2,\cdots,v_n$，则 $\wedge^m V$ 的维数为 $N=C_n^m$．一个 V 的 m 维线性子空间 W 相当于 $\wedge^m V$ 的一个 1 维线性子空间 $\wedge^m W$，或相当于 P^{N-1}中的一个点．对任意一个 $\wedge^m W$ 的生成元

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}a_{i_1,i_2,\cdots,i_m}v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_m},$$

系数 $a_{i_1\cdots i_m}(1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n)$称为 $\wedge^m W$ 的普吕克坐标．它们满足关系式

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k a_{i_1i_2\cdots i_{m-1}j_k}a_{j_1j_2\cdots j_{k-1}j_{k+1}\cdots j_{m+1}}=0,\ (*)$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_{m-1},j_1,j_2,\cdots,j_{m+1}$为任意不大于 n 的正整数，且规定当有两个 i_k 相等时，$a_{i_1,i_2,\cdots,i_m}=0$；对 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 的任一置换 σ，$a_{\sigma(i_1),\sigma(i_2),\cdots,\sigma(i_m)}=(-1)^\sigma a_{i_1,i_2,\cdots,i_m}$，其中$(-1)^\sigma$ 当 σ 为偶置换时等于 1，而当 σ 为奇置换时等于 -1．对任意一组 $1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n$，$G_{n,m}$中满足 $a_{i_1,i_2,\cdots i_m}\neq0$ 的点组成的子集同构于一个 $m(n-m)$维线性空间．因此，$G_{n,m}$可以刻画成 P^{N-1}中由$(*)$定义的 $m(n-m)$维射影光滑代数簇，而且可以定义在 $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$ 上．$G_{n,m}$的定义给出 $G_{n,m}\times V$ 的典范 m 秩子向量丛 B(在对应于 $\wedge^m W$ 的点上，B 的纤维为 W)．它具有下述性质：若 T 是任意概形，B'是 $T\times V$ 的任意 m 秩子向量丛，则存在惟一态射 $\varphi:T\to G_{n,m}$，使得 $B'=(\varphi\times\mathrm{id}_V)^*B$(作为 $T\times V$ 的子丛)．换言之，$G_{n,m}$是 V 的 m 秩子向量丛的精细参量空间．

格拉斯曼空间(Grassmannian space)　即"格拉斯曼簇"．

普吕克坐标(Plücker coordinates)　见"格拉斯曼簇"．

周炜良簇(Chow variety)　一个特殊的代数簇．用来刻画域上射影空间中具有固定的次数和维数的所有代数子簇的集合的代数簇．利用周炜良坐标，P_k^n 中的每个 d 次 r 维子簇 V 都可对应于射影空间 P_k^ν 中的一个点，这个映射是单的，得到的像集 $C_{n,r,d}$是 P_k^ν 中的一个拟射影簇，称为周炜良簇．若把映射扩大到所有的 d 次 r 维正代数 r 闭链，则得到的像集 $\overline{C}_{n,r,d}$成为一个射影簇，仍称周炜良簇．若 $X\subset P_k^n$ 是一个子簇，则包含在 X 中的所有 d 次 r 维正代数 r 闭链在上述映射下的像也构成一个子簇

$$\overline{C}_{r,d}(X)\subset\overline{C}_{n,r,d}.$$

舒伯特簇(Schubert variety)　亦称舒伯特空间．一个特殊的代数簇．给定一个 n 维线性空间 V

及其 r 维子空间 V_0，以及正整数 $m<n$ 和 $s\leqslant\min(r,m)$，V 中所有与 V_0 的交的维数 $\geqslant S$ 的 m 维子空间的集合称为舒伯特簇，记为 $\mathfrak{S}_{n,m,r,s}$. 它可以刻画成格拉斯曼簇 $G_{n,m}$的一个闭代数子集. 与格拉斯曼簇相似，舒伯特簇也可以用线性空间覆盖，因而是光滑射影簇. 它可以定义在 Spec $\mathbf{Z}$ 上. 当 $n+s\geqslant m+r$ 时，$\mathfrak{S}_{n,m,r,s}$的维数是 $(n-m)(m-s)+s(r-s)$. $G_{n,m}\times V$ 上的典范 m 秩子向量丛 B 在 $\mathfrak{S}_{n,m,r,s}$上的限制给出 $\mathfrak{S}_{n,m,r,s}$上的典范向量丛. 因此，舒伯特簇也是一个精细参量空间.

舒伯特空间(Schubert space)　即“舒伯特簇”.

旗簇(flag variety)　亦称旗空间. 一个特殊的代数簇. 一个旗指的是一个向量空间串 $V_1,V_2,\cdots,V_r$，它的指标为数组 $(\dim V_1,\dim V_2,\cdots,\dim V_r)$. 给定一个 n 维向量空间 V 及一串整数 $n=n_1>n_2\cdots>n_r>0$，V 中所有由子空间组成的指标为 $(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ 的旗的集合称为一个旗簇，记为 $\mathrm{Flag}_{(n_1,n_2,\cdots,n_r)}$. 它可以刻画成 $G_{n,n_2}\times\cdots\times G_{n,n_r}$ 的一个闭代数子集，其中 G_{n,n_i}为格拉斯曼簇. 与格拉斯曼簇相似，旗簇也可以用线性空间覆盖，因而是光滑射影簇. 它可以定义在 Spec $\mathbf{Z}$ 上. $\mathrm{Flag}_{(n_1,n_2,\cdots,n_r)}$的维数是 $n_2(n_1-n_2)+n_3(n_2-n_3)+\cdots+n_r(n_{r-1}-n_r)$. 在 $\mathrm{Flag}_{(n_1,n_2,\cdots,n_r)}$上有一个由 $\mathrm{Flag}_{(n_1,n_2,\cdots,n_r)}\times V$ 的子向量丛组成的旗称为典范旗. 它在 $\mathrm{Flag}_{(n_1,n_2,\cdots,n_r)}$ 的每一点上的纤维恰是该点所代表的旗. 换言之，$\mathrm{Flag}_{(n_1,n_2,\cdots,n_r)}$是 V 的子向量丛组成的指标为 $(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ 的旗的精细参量空间.

旗空间(flag space)　即“旗簇”.

旗(flag)　见“旗簇”.

典范旗(canonical flag)　见“旗簇”.

有理簇(rational variety)　双有理等价于代数闭域上的射影空间的代数簇. 它当然是最简单的代数簇. 它可以等价地定义为代数闭域 k 上的代数簇 X，X 的有理函数域 $k(X)$ 同构于域 k 的有限生成纯超越扩张. 完备光滑有理簇的小平维数必为 $-\infty$，但反之不对. 亏格等于 0(即小平维数是 $-\infty$)的完备光滑曲线一定是有理曲线. 当 X 是完备光滑曲面时，X 是有理曲面的充分必要条件是 $\chi(O_X)=1$，$P_2(X)=0$. 但是，对于维数超过 2 的情形，尚无一般的判别法则.

单有理簇(unirational variety)　一类特殊的代数簇. 若 X 是域 k 上代数簇，存在射影空间的支配有理映射 $P^n\to X$，使得有理函数域的扩张 $k(P^n)/k(\chi)$ 是可分扩张，则称 X 为单有理簇. 即 X 中的一般元可以用 $n+1$ 个变量的有理函数做参数化. 有理簇和单有理簇是两个非常接近的概念. 当 X 的维数 $\leqslant 2$ 时，这两个概念是一致的. 但高维的情形则不然. 这就是著名的吕罗特问题.

吕罗特问题(Lüroth problem)　见“单有理数簇”.

单直纹簇(uniruled variety)　一种特殊的代数簇. 若 X 是 n 维代数簇，存在一个 $n-1$ 维簇 W 以及在一般点有限的有理映射 $W\times P^1\to X$，则称 X 为单直纹簇.

参量空间(moduli space)　亦称参量概形，同构类的连续参数所构成的空间. 设 $\mathfrak{C}$ 是概形范畴的一个子范畴，F 是 $\mathfrak{C}$ 到集合范畴(或其子范畴)的一个(共变或反变)函子，若 F 由 $\mathfrak{C}$ 的一个对象 O 表示(例如，对于反变函子 F，存在 $\xi\in F(O)$，使得

$$\mathrm{Mor}(X,O)\tilde{\to}F(X),f\to F(f)(\xi)$$

对一切 $X\in\mathfrak{C}$ 成立)，则称 O 为 F 的一个精细参量空间(或精细参量概形). 设 $\mathfrak{C}$ 是域 K 上的概形范畴的一个子范畴. 称 S 是 F 的粗糙参量空间(或粗糙参量概形)，若存在 k 上的概形 S 及自然变换 $T:F\to\mathrm{Mor}(\cdot,S)$ 满足：

1. 该自然变换在 Spec k 上是一一对应.

2. 对任意 k 概形及任意满足 1 的自然变换 $T':F\to\mathrm{Mor}(\cdot,S')$，存在惟一的 k 态射 $\varphi:S\to S'$ 使得 $T'=\varphi\circ T$(即 $T'_X(\xi)=\varphi\circ T_X(\xi)$ 对一切 $X\in\mathfrak{C}$ 及 $\xi\in F(X)$ 成立).

精细参量空间和粗糙参量空间统称参量空间. 精细参量空间是粗糙参量空间. 格拉斯曼簇、皮卡概形都是精细参量空间的例子. 域 K 上的所有椭圆曲线的雅可比不变量组成的空间($\cong A_k^1-\{0,1\}$)是一个粗糙参量空间的例子.

参量概形(moduli scheme)　即“参量空间”.

精细参量空间(fine moduli space)　见“参量空间”.

精细参量概形(fine moduli scheme)　即“精细参量空间”.

粗糙参量空间(coarse moduli space)　见“参量空间”.

粗糙参量概形(coarse moduli scheme)　即“粗糙参量空间”.

实代数集(real algebraic set)　坐标域为实闭域的代数集. 设 R 是一个实闭域，$R[X_1,X_2,\cdots,X_n]$ 是 R 上的 n 元多项式环. 若 n 维仿射空间 R^n 的一个子集 S 是 $R[X_1,X_2,\cdots,X_n]$的某个子集的零点集，换言之，存在 $R[X_1,X_2,\cdots,X_n]$的一个子集 T，使得 $S=\{\alpha\in R^n\mid f(\alpha)=0,\forall f\in T\}$，则称 S 为 R 上的实代数集. R^n 中每个实代数集是 $R[X_1,X_2,\cdots,X_n]$中某个多项式的零点集. 仿射空间 R^n 同样具有所谓的扎里斯基拓扑，其闭子集恰为实代数集. 对于扎里斯基拓扑，不可约的实代数集称为 R 上

的实簇.

实簇(real variety) 见"实代数集".

半代数集(semialgebraic set) 实代数几何中特有的术语.它给出比实代数集更广泛的一类集合.设 R 是一个实闭域,$R[X_1,X_2,\cdots,X_n]$是 R 上 n 元多项式环.对于 $f_1,f_2,\cdots,f_r;g_1,g_2,\cdots,g_s;h_1,h_2,\cdots,h_t\in R[X_1,X_2,\cdots,X_n]$,其中 r,s,t 均为非负整数,可以如下定义 R^n 的一个子集:$\{\alpha\in R^n\mid f_i(\alpha)=0,i=1,2,\cdots r;g_j(\alpha)\geqslant 0,j=1,2,\cdots,s;h_k(\alpha)>0,k=1,2,\cdots,t\}$.若 R^n 的一个子集可以表为有限个如上所示子集的并,则称该子集为 R 上的一个半代数集.实代数集自然也是半代数集.由定义知,R^n 和空集$\varnothing$是半代数集.两个半代数集的并与交都是半代数集.此外,半代数集的补集仍是一个半代数集.因此,R^n 的所有半代数集组成一个布尔代数.

实理想(real ideal) 实交换代数所讨论的一类具有所谓实性的理想.设 A 是一个有单位元的交换环,J 是 A 的一个理想,若只要 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_s^2\in J$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_s\in A$,必有 $a_1\in J$,则称 J 为 A 的实理想.任意多个实理想的交集还是一个实理想.于是,对于 A 的任意一个理想 I,总有一个包含 I 的最小实理想(可能为 A 本身),这个最小实理想称为理想 I 的实根,且记为 $\sqrt[r]{I}$.实际上,实根 $\sqrt[r]{I}$ 有如下结构:$\sqrt[r]{I}=\{x\in A\mid$对于某个 $k\in\mathrm{N}$ 以及 $b_1,b_2,\cdots,b_s\in A,x^{2k}+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_s^2\in I\}$.于是,实理想可以刻画如下:环 A 的一个理想 I 是实的,当且仅当 $\sqrt[r]{I}=I$.

理想的实根(real radical of an ideal) 见"实理想".

实谱(real spectrum) 由交换环上的序组成的拓扑空间.它可以看做域的序空间在交换环上的推广.设 A 是一个有单位元 1 的环,P 为 A 的一个子集,若:

1. $P+P\subseteq P$;
2. $P\cdot P\subseteq P$;
3. $-P\cup P=A$;
4. $-P\cap P$ 是 A 的一个素理想;

则称 P 为 A 的一个序.若用 $\mathrm{Spec}_r A$ 表示环 A 的所有序组成的集合,则 $\mathrm{Spec}_r A=\varnothing$当且仅当$-1$不能表为 A 中元素的平方和.此时,同样可赋予集合 $\mathrm{Spec}_r A$ 一个所谓的哈里逊拓扑,它的子基由形如 $H(a)=\{P\in\mathrm{Spec}_r A\mid a\notin -P\}(a\in A)$的集组成.由上所得的拓扑空间 $\mathrm{Spec}_r A$ 称为环 A 的实谱,它是一个拟紧的拓扑空间.当 A 成为域 F 时,$\mathrm{Spec}_r F$ 与 X_F 是一致的.

点定理(point theorem) 关于实闭域上的一类多项式取值情况的定理.内容包括三个方面:实零点定理、非负点定理与正点定理.这三个定理分别刻画了这样的多项式函数,该函数在给定的实代数集或半代数集上所取的值恒是零、非负和正.若 R 是一个实闭域,I 是多项式环 $R[X_1,X_2,\cdots,X_n]$的一个理想,且 $Z(I)=\{\alpha\in R^n\mid g(\alpha)=0,\forall\ g\in I\}$,则对于 $f\in R[X_1,X_2,\cdots,X_n]$,有:

1.(实零点定理)f 在 $Z(I)$上恒为零,当且仅当

$$f\in\sqrt[r]{I}.$$

2.(非负点定理)f 在 $Z(I)$上恒为非负,当且仅当有同余式$(f^{2\lambda}+q)f\equiv q'\pmod I$.

3.(正点定理)f 在 $Z(I)$上恒为正,当且仅当有同余式 $qf\equiv 1+q'\pmod I$,其中,λ 表示某自然数,q 与 q' 表示 $R[X_1,X_2,\cdots,X_n]$中多项式的平方和.

上面的结论即是点定理.一个更为一般的结论是下面的所谓半代数点定理:若 $E=\{\alpha\in R^n\mid f_i(\alpha)=0,i=1,2,\cdots,r,g_j(\alpha)\geqslant 0,j=1,2,\cdots,s;h_k(\alpha)>0,k=1,2,\cdots,t\}$ 是 R^n 中的一个半代数集,其中 $f_i,g_j,h_k\in R[X_1,X_2,\cdots,X_n]$,则对于 $f\in R[X_1,X_2,\cdots,X_n]$,有:

1.(半代数实零点定理)f 在 E 上恒为零,当且仅当有

$$vf^{2\lambda}+\sum_e u_e\varphi_e^2\in I.$$

2.(半代数非负点定理)f 在 E 上恒为非负,当且仅当有

$$\left(vf^{2\lambda}+\sum_e u_e\varphi_e^2\right)f\equiv\sum_d u'_d\varphi'^2_d\pmod I.$$

3.(半代数正点定理)f 在 E 上恒为正,当且仅当有

$$\sum_e u_e\varphi_e^2 f\equiv v+\sum_d u'_d\varphi'^2_d\pmod I,$$

其中,λ 为某自然数,I 是由 $f_1,f_2,\cdots,f_r$ 生成的多项式理想,$\varphi_e,\varphi'_d\in R[X_1,X_2,\cdots,X_n],u_e,u'_d$ 是 $g_1,g_2,\cdots,g_s;h_1,h_2,\cdots,h_t$ 中若干个元素的乘积,v 是 $h_1,h_2,\cdots,h_t$ 中若干个元素的乘积.

实零点定理(real null point theorem) 见"点定理".

非负点定理(non-negative point theorem) 见"点定理".

正点定理(positive point theorem) 见"点定理".

半代数点定理(semialgebraic point theorem) 见"点定理".

撰 稿 李克正 陈志杰 谈胜利 曾广兴
审 阅 杨劲根 戴执中

微　分　几　何　学

微分几何学(differential geometry)　简称微分几何. 数学的一个重要分支,主要研究可微分的形体(曲线、曲面、微分流形等)的几何性质. 微分几何几乎与微积分同时产生和发展. 当初,牛顿(Newton,I.)和莱布尼茨(Leibniz,G. W.)创立微积分的动机之一,就是为了解决计算一般曲线的切线和长度、曲线所围区域的面积等几何问题. 微分几何的第一本著作当推蒙日(Monge,G.)的《分析对几何的应用》,他和欧拉(Euler,L.)及他们的学生们对微分几何的早期发展做出了重要贡献. 曲面论的真正基础是由高斯(Gauss,C. F.)奠定的,他于 1827 年出版了专著《关于弯曲曲面的一般研究》,书中证明:曲面的总曲率由它的第一基本形式完全确定. 这就是曲面论的高斯方程,被称为极妙定理. 从此以后,微分几何不再仅仅是微积分的一种应用,而成为数学的一个独立分支.

高斯建立的仅与曲面第一基本形式有关的内蕴几何是微分几何发展史上的一次关键性的突破,这一思想后来被黎曼(Riemann,(G. F.)B.)发扬光大. 黎曼于 1854 年在格丁根大学发表了题为"关于作为几何学基础的假设"的就职演说,奠定了黎曼几何的基础. 他发展了空间的概念,把后来称之为黎曼度量的对称正定二次微分形式赋予 n 维流形,并以此作为几何学的出发点. 这就包括了一大类非欧几何(如椭圆几何、双曲几何(又称罗巴切夫斯基几何)). 正是黎曼几何被爱因斯坦(Einstein,A.)用来建立广义相对论,并且相对论反过来促进了黎曼几何学的发展.

克莱因(Klein,(C.)F.)于 1870 年在他的《埃尔朗根纲领》(Erlanger program)中提出,几何学应是研究空间在变换群作用下不变的性质. 根据不同的变换群,就有欧氏几何、射影几何、仿射几何、共形几何等. 这种用群论观点统一几何学的思想,在《埃尔朗根纲领》发表后的半个世纪内,成了几何学的指导思想. 20 世纪初期,射影微分几何的研究相当活跃,产生了以威尔辛斯基(Wilczynski,E. J.)为代表的美国学派,以富比尼(Fubini,G.)为代表的意大利学派和以苏步青教授为代表的中国学派. 仿射微分几何和共形微分几何的决定性工作是由布拉施克(Blaschke,W. J. E.)所做的. 融黎曼和克莱因之思想于一体的是嘉当(Cartan,E.),他把李群和微分几何结合起来,视联络为广义空间(纤维丛的前身)的主要几何对象,成功地发展了外微分理论和活动标架法. 尤其是李群在流形上的作用,导致了齐性空间和对称空间的深入研究. 这些都为现代微分几何奠定了基础. 黎曼几何还有另外的推广,即把作为空间度量的正定二次型用更一般的正二次齐次函数来代替,其实这也是黎曼的本意. 这种度量空间被芬斯勒(Finsler,P.)、楞特(Rund,H.)等发展成芬斯勒几何.

20 世纪 40 年代以后,微分几何的一个发展趋势是研究空间或流形的整体性质,尤其是局部性质与整体性质的联系. 著名的高斯-博内公式即是一例,陈省身在高维黎曼流形上的推广方面做出了重要贡献. 霍奇(Hodge,W. V. D.)的调和积分理论和德·拉姆(de Rham,G.-W.)的上同调理论揭示了微分流形上微分结构、拓扑结构和黎曼结构之间的深刻联系,具有十分重要的意义. 在一定几何条件下,根据调和理论,可用博赫纳(Bochner,S.)方法得出各种消没定理. 这就是所谓博赫纳技巧. 黎曼流形上的测地线理论是整体黎曼几何学的核心之一. 从测地线的无限延伸要求引出黎曼流形的完备性概念,霍普夫(Hopf,H.)和里诺(Rinow,W.)对此作出了贡献. 完备性是整体微分几何研究中对流形所加的最起码和最自然的假设,它比紧致性更弱. 测地线的变分理论导致了黎曼流形上各种曲率与拓扑的深刻结果. 进一步的发展包括著名的球面定理,非负曲率的完备流形和非正曲率的紧致流形的结构等. 测地线理论也促进了流形上分析的发展.

微分几何的另一重要研究方向是等距浸入和子流形几何. 1926 年,雅内特(Janet,N.)和嘉当分别独立证明了任何 n 维解析黎曼流形均可局部等距嵌入到 $n(n+1)/2$ 维欧氏空间中,但是,若去掉流形的解析性要求,问题至今尚未完满解决. 尤其是高斯曲率变号的二维黎曼流形是否总可以局部等距嵌入三维欧氏空间中,仍是一个令人感兴趣的问题. 关于整体等距嵌入问题,纳什(Nash,J. F.)于 1954－1956 年给出了一般性结果:任何完备(紧致)黎曼流形均可整体等距嵌入到充分高维数的欧氏空间中作为子流形. 纳什的方法后来对非线性分析产生重要影响. 虽然有纳什的结果,但对于一个具体的黎曼流形,要确定它能等距嵌入进去的欧氏空间的最低维数,仍是一个相当困难的问题. 黎曼流形的子流形几何是古典曲面论的直接推广,子流形的第二基本形式起着十分重要的作用. 第二基本形式的迹称为子流形的平均曲率(向量). 如同曲面论一样,平均曲率为零

的子流形称为极小子流形.极小子流形具有明显的几何变分特征,它是体积泛函的临界点.极小子流形,特别是极小曲面,它们的整体存在性、惟一性和分类问题是子流形研究中最重要和最有吸引力的一个课题.

几何变分问题在现代微分几何中越来越占有重要的地位,这不仅在于它具有深刻的几何背景,而且还在于它和众多的其他数学分支相关联,如变分学、偏微分方程、近世代数、非线性分析、多复变函数论等.此外它还和理论物理、生物工程等相沟通.调和映射便是近年来发展十分迅速的一类几何变分问题.黎曼流形间的调和映射是其能量泛函的临界点.当起始流形为1维时便化为测地线.调和的等距浸入便是极小子流形.调和映射的第一个整体存在性定理是由伊尔斯(Eells,J.)和桑普森(Sampson,J. H.)于1964年共同给出的.从调和理论观点来看,调和映射是调和的1形式.其他重要的几何变分问题还有杨-米尔斯场、爱因斯坦度量、克勒-爱因斯坦度量等.它们不仅对现代微分几何学,而且对现代数学的发展都起了很大的促进作用.

微分几何是一门既古老又年轻的学科,它的新概念和新方法层出不穷.今天,无论在基础理论上还是在实际应用上,都日益显示出它的强大生命力.著名几何学大师陈省身教授说:"我希望它不要像其他一些数学分支那样被公理化.保持它跟数学中别的分支以及其他学科的许多领域的联系,保持着它把局部和整体相结合的精神.它在今后长时期中仍将是一片肥沃的疆域."

微分几何(differential geometry)　微分几何学的简称.

R^3 中的曲线和曲面

向量函数(vector function)　向量分析中的基本概念.给出一个点集 G,并在 G 上选定一个坐标系.若对于 G 中每一个点 p,总有三维欧氏空间 R^3 中的一个确定的向量 $\boldsymbol{r}$ 和它对应,则称 $\boldsymbol{r}$ 为定义在 G 上的一个向量函数,记为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(p)$,$p\in G$.若 G 是一个实数区间 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$,则得一元向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$. $\boldsymbol{r}(t)$在 R^3 的一个直角坐标系下的三个分量都是 t 的函数,即 $\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$.若 G 是一个平面区域,$(u,v)\in G$,则得二元向量函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$,$\boldsymbol{r}(u,v)$的三个分量都是 u 和 v 的二元函数,即 $\boldsymbol{r}=\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}$, $(u,v)\in G$.

向量函数的概念可直接推广到任意维数的欧氏空间 R^n 中去.像数学分析中讨论实函数那样,对向量函数也可以定义极限、连续、导数、微分、积分等概念.如设$\boldsymbol{r}(t)$是定义在区间 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 上的向量函数,若极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

存在,则称 $\boldsymbol{r}(t)$在 t 点是可微的,这个极限称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t 点的导向量,用 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ 或 $\boldsymbol{r}'(t)$表示. $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t$ 称为 $\boldsymbol{r}(t)$的微分.类似地可定义向量函数的高阶导数与高阶微分,以及偏导向量等.同样,也可以定义向量函数的积分,若向量函数 $\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$在区间$[a,b]$上连续,则积分

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t$$

存在,且

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\mathrm{d}t=\left\{\int_a^b x(t)\mathrm{d}t,\ \int_a^b y(t)\mathrm{d}t,\ \int_a^b z(t)\mathrm{d}t\right\}.$$

总之,向量函数的微分法和积分法都可以通过它的各分量的相应运算去进行.向量代数与向量分析在经典的曲线曲面理论中有着重要应用(参见"向量分析").

导向量(derivative vector)　见"向量函数".

空间曲线(space curves)　经典微分几何的主要研究对象之一.在直观上,曲线可看成空间一个自由度的质点运动的轨迹.在三维欧氏空间 R^3 的直角坐标系中,点的运动可表示为一组方程 $x=x(t)$,$y=y(t)$,$z=z(t)$,其中 t 为参数,这个点运动的轨迹就是满足上述方程的点的集合.所以,空间曲线就是 R^3 中的一个点集,这个点集可由上述参数方程来表示.空间曲线可定义为:数轴上的区间(a,b)到 R^3 中的一一连续的映射 $\boldsymbol{r}:(a,b)\to R^3$:$t\to\{x(t),y(t),z(t)\}$,$t\in(a,b)$,也把该映射的像称为曲线.在 R^3 的直角坐标系中,这个映射可表示为 $x=x(t)$,$y=y(t)$,$z=z(t)$, $a<t<b$,此方程称为曲线的参数方程,t 为参数.若 $\boldsymbol{r}$ 为曲线上点的向径,则此参数方程也可写为向量函数的形式:$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$, $t\in(a,b)$,曲线的方向依参数增加的方向确定正向.在曲线论中讨论的曲线,还要加上一些条件,如可微性和正则性等.

曲线的参数方程(parametric equation of a curve)　见"空间曲线".

C^k 阶曲线(C^k-curve)　一类重要的曲线.它是具有 k 阶可微性的曲线.若曲线的参数表达式 $x=x(t)$,$y=y(t)$,$z=z(t)$, $t\in(a,b)$,或 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$中的函数是 k 阶连续可微的函数,则称这曲线为 C^k 阶曲线.当 $k\to\infty$时,即 $\boldsymbol{r}(t)$中的函数具有任意阶的导数,则称为光滑曲线,或 C^∞阶曲线.

C^∞阶曲线(C^∞-curve)　见"C^k 阶曲线".

光滑曲线(smooth curve)　见"C^k 阶曲线".

正则曲线(regular curve)　一类重要的曲线.它是处处存在惟一切线的曲线.设曲线的参数方程

为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$，若在 $t=t_0$ 时，其切向量 $\boldsymbol{r}'(t_0)\neq 0$，则称 $t=t_0$ 处曲线上的点为正则点；若曲线的参数方程中的坐标函数都是 t 的连续可微函数，且曲线上的点都是正则点(即 $\boldsymbol{r}'(t)\neq 0$)，则称此曲线为正则曲线，称此参数方程为正则参数方程，称 t 为此曲线的一个正则参数.

正则参数方程(regular parametric equation) 见"正则曲线".

正则参数(regular parameter) 见"正则曲线".

曲线的弧长(arc length of a curve) 曲线段的长度. 曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 从点 $\boldsymbol{r}(t_0)$ 到 $\boldsymbol{r}(t)$ 的弧长为

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{r}'(t)|\mathrm{d}t.$$

从而 $s'(t)=|\boldsymbol{r}'(t)|>0$. 取曲线的弧长 s 为参数，称为曲线的自然参数，这时曲线方程可表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s),\quad |\boldsymbol{r}'(s)|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=1.$$

向量函数对自然参数的导数也可以表示为

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s},\quad \ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}$$

等. 弧长是曲线的运动不变量，以它作为参数，许多公式都大为简化.

自然参数(natural parameter) 见"曲线的弧长".

切向量(tangent vector) 与曲线相切的向量. 给定曲线 C 上一点 P，Q 是 C 上与 P 的邻近一点，当 Q 点沿曲线趋近于 P 时，割线 PQ 的极限位置称为曲线 C 在 P 点的切线，P 点称为切点. 若曲线 C 的参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，切点 P 对应的参数为 t_0，Q 点对应的参数为 $t_0+\Delta t$，则

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

就是 P 点的切向量. 若曲线 C 的参数方程取弧长为参数，即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，则它关于弧长 s 的导数是单位向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s=\dot{\boldsymbol{r}}$. 在曲线论中，记 $\boldsymbol{T}(s)=\dot{\boldsymbol{r}}(s)$，称 $\boldsymbol{T}(s)$ 为曲线 C 在一点的单位切向量，有些教科书中也记为 $\alpha(s)=\dot{\boldsymbol{r}}(s)$，切向量 $\boldsymbol{T}(s)$ 指向曲线的正方向.

单位切向量(unit tangent vector) 见"切向量".

主法向量(principal normal vector) 一种特殊向量. 它是指明曲线凹向的一个法向量. 设曲线 C 的参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，$s$ 为弧长参数，称 $\ddot{\boldsymbol{r}}(s)/|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|$ 为曲线 C 在一点的主法向量，记为

$$\boldsymbol{N}(s)=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|}$$

(设 $\ddot{\boldsymbol{r}}\neq 0$)，称 $\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)$ 为曲线 C 在一点的从法向量或副法向量，记为 $\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)$. $\boldsymbol{N}(s)$ 指向曲线 C 凹入的方向. $\boldsymbol{T}(s)$，$\boldsymbol{N}(s)$，$\boldsymbol{B}(s)$ 依顺序构成右手系，它们构成了一个标架，称为曲线 C 在一点处的弗雷内标架(参见"弗雷内标架").

从法向量(binormal vector) 见"主法向量".

副法向量(secondary vector) 即"从法向量".

密切平面(osculating plane) 一种切平面. 它是同曲线在该点最贴近的(即有最高阶切触的)切平面. 过空间曲线 C 上一点 P 的切线和 P 点的邻近一点 Q 可做一平面. 当 Q 点沿曲线 C 趋于 P 时，该平面的极限位置 π 称为曲线 C 在 P 点的密切平面. 它在 P 点的法线称为曲线 C 在 P 点的从法线. 若曲线 C 的自然参数表示为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，则曲线在 P 点的密切平面的方程为 $(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}})=0$，其中 $\boldsymbol{\rho}$ 为 P 点的密切平面上任一点的向径. 若曲线为一般参数表示 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，则在 $t=t_0$ 点的密切平面的方程为

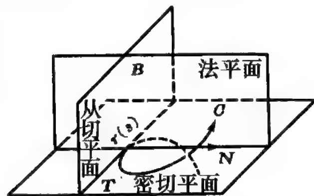
$$(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r}(t_0),\boldsymbol{r}'(t_0),\boldsymbol{r}''(t_0))=0\ (\boldsymbol{r}'(t_0)\times\boldsymbol{r}''(t_0)\neq 0).$$

从法线(binormal) 见"密切平面".

法平面(normal plane) 垂直于曲线的切线的平面. 由切线和从法线确定的平面称为曲线在该点的从切平面. 若曲线的参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，则法平面与从切平面的方程分别为 $(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r})\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0$ 及 $(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{r})\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=0$，其中 $\boldsymbol{\rho}$ 为该平面上任一点的向径.

从切平面(rectifying plane) 见"法平面".

弗雷内标架(Frenet frames) 一组单位向量. 它是伴随于曲线每点的三个特殊的相互正交的单位向量. 曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$(至少是 C^2 阶的)在点 P 的单位切向量 $\boldsymbol{T}=\dot{\boldsymbol{r}}$，主法向量 $\boldsymbol{N}=\ddot{\boldsymbol{r}}/|\ddot{\boldsymbol{r}}|$ 及从法向量 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$ 依右手系顺序构成的正交标架，记为 $\{\boldsymbol{r}(s);\boldsymbol{T}(s),\boldsymbol{N}(s),\boldsymbol{B}(s)\}$. $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 决定的平面就是曲线在 P 点的密切平面，$\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 决定的平面就是曲线在 P 点的法平面，$\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 决定的平面就是 P 点的从切平面. 由三个基本向量 $\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$ 和密切平面、法平面、从切平面所构成的三棱形也称为曲线在 P 点的基本三棱形. 用这种活动标架来研究曲线在一点邻近的性质正是经典曲线论的内容(见图).



基本三棱形(fundamental triangular prism) 见"弗雷内标架".

弗雷内公式(Frenet formula) 亦称经典曲线论的基本公式. 弗雷内标架的微分公式. 在光滑曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的每一点都有弗雷内标架. 曲线的弯曲性质反映为邻近点上弗雷内标架之间的相对位置关系. 为此要考虑 $\boldsymbol{T}(s)$，$\boldsymbol{N}(s)$，$\boldsymbol{B}(s)$ 关于弧长 s 的导向量 $\dot{\boldsymbol{T}}(s)$，$\dot{\boldsymbol{N}}(s)$，$\dot{\boldsymbol{B}}(s)$，而它们可由标架向量 $\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$ 线性表示，即弗雷内公式

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{T}}(s)=k(s)\boldsymbol{N}(s),\\ \dot{\boldsymbol{N}}(s)=-k(s)\boldsymbol{T}(s)+\tau(s)\boldsymbol{B}(s),\\ \dot{\boldsymbol{B}}(s)=-\tau(s)\boldsymbol{N}(s),\end{cases}$$

其中 $k(s)$，$\tau(s)$分别称为曲线 C 在一点的曲率和挠率，它们是曲线的两个基本运动不变量.

经典曲线论的基本公式(fundamental formula of classial theory of curves)　即"弗雷内公式".

曲率(curvature)　表示曲线弯曲程度的一个运动不变量.设曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$的单位切向量为 $\boldsymbol{T}(s)$，称

$$k=|\dot{\boldsymbol{T}}(s)|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$$

为曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$在 s 处的曲率，其中 $\Delta\theta$ 是切向量 $\boldsymbol{T}(s)$和 $\boldsymbol{T}(s+\Delta s)$之间的夹角.曲率度量了曲线上相邻两点的切向量的夹角关于弧长的变化率，它刻画了曲线弯曲程度.如曲率 k 恒为 0 的曲线是直线.称 $\dot{\boldsymbol{T}}(s)$为该曲线的曲率向量，当 $k\neq 0$ 时，曲率 k 的倒数 $1/k(s)$称为曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$在 s 处的曲率半径.当曲线用一般参数 t 表示，即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$时，曲率的计算公式为

$$k=\frac{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}.$$

曲率向量(curvature vector)　见"曲率".

曲率半径(curvature radius)　见"曲率".

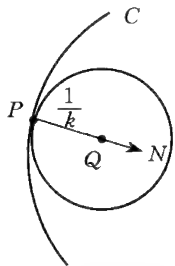
挠率(torsion)　表示曲线扭曲程度的一个运动不变量.若曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$的主法向量和次法向量分别为 $\boldsymbol{N}(s)$和 $\boldsymbol{B}(s)$，称 $\tau=-\dot{\boldsymbol{B}}\cdot\boldsymbol{N}(s)$为曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$在 s 处的挠率.它的绝对值$|\tau(s)|=|\dot{\boldsymbol{B}}(s)|$度量了曲线上相邻两点的从法向量间的夹角关于弧长的变化率，它刻画了曲线偏离平面曲线的程度(即曲线的扭曲程度).挠率 τ 恒为零的曲线是平面曲线.挠率计算公式为

$$\tau=\frac{(\dot{\boldsymbol{r}},\ddot{\boldsymbol{r}},\dddot{\boldsymbol{r}})}{|\ddot{\boldsymbol{r}}|^2}.$$

当曲线用一般参数 t 表示，即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$时，则

$$\tau=\frac{(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}'',\boldsymbol{r}''')}{|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''|^2}.$$

密切圆(osculating circle)　亦称曲率圆.与曲线在该点邻近最贴近的圆.沿空间曲线 C 上一点 P 的主法线的正侧取线段 PQ，使 PQ 的长等于该点曲率的倒数 $1/k$，以 Q 为圆心，以 $1/k$ 为半径在密切平面上确定一个圆，这个圆称为曲线 C 在点 P 的密切圆(或曲率圆).曲率圆的中心称为曲率中心，曲率圆的半径称为曲率半径.



密切圆是在 P 点和曲线 C 有至少二阶切触的圆.

曲率圆(curvature circle)　即"密切圆".

曲率中心(curvature center)　见"密切圆".

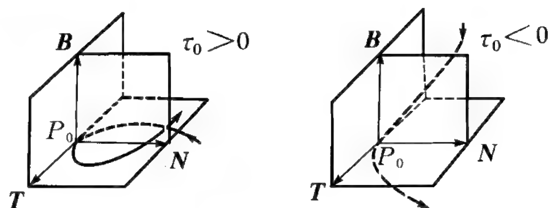
曲线在一点邻近的形状(form of a curve in a neighborhood of a point)　曲线的局部形态的描述.设曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$上的点 P_0 对应于参数 $s=0$，在 R^3 中取笛卡儿坐标系，使得 P_0 为坐标原点，并以在 P_0 点的弗雷内标架$\{P_0;\boldsymbol{T}(0),\boldsymbol{N}(0),\boldsymbol{B}(0)\}$为参考系，则曲线在 P_0 附近的部分可以表示为

$$\begin{cases}x=s-\dfrac{k_0^2}{6}s^3+R_x,\\ y=\dfrac{k_0}{2}s^2+\dfrac{k_0'}{6}s^3+R_y,\\ z=\dfrac{k_0\tau_0}{6}s^3+R_z,\end{cases}$$

其中 $k_0'=k'(0)$，R_x，R_y，R_z 均为高于 S^3 的无穷小量.上式称为曲线在 P_0 附近的标准表示.当 $k_0\tau_0\neq 0$ 时，曲线在 P_0 附近与下列曲线

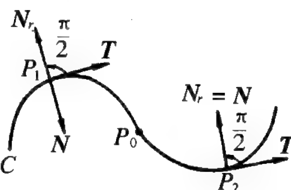
$$x_1=s,\quad y_1=\frac{k_0}{2}s^2,\quad z_1=\frac{k_0\tau_0}{6}s^3$$

近似，后者在点 P_0 与原曲线有相同的曲率和挠率，并且有相同的弗雷内标架.因此，这两条曲线在 P_0 点有相同的密切平面、法平面和从切平面，可以用近似曲线$(x_1(s),y_1(s),z_1(s))$来揣摸原曲线在 P_0 邻近的形状和性质.见下图.



曲线论的基本定理(fundamental theorem for the theory of curves)　曲线的局部存在性、惟一性定理.若给定了区间$[a,b]$上两个连续可微函数 $k(s)>0$ 及 $\tau(s)$，则在 R^3 中存在以 s 为弧长，以 $k(s)$和 $\tau(s)$分别为其曲率和挠率的曲线 $\boldsymbol{r}(s)$，$a\leqslant s\leqslant b$，并且任意两条这样的曲线经过空间的运动可以互相叠合.曲线论基本定理说明了曲线的曲率与挠率完全决定了曲线的形状.

平面曲线(plane curves)　挠率恒为零的曲线.在欧氏平面 R^2 的笛卡儿坐标系下，平面曲线的参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=\{x(s),y(s)\}$，$s$ 为弧长参数，它的单位切向量是 $\boldsymbol{T}(s)=\{\dot{x}(s),\dot{y}(s)\}$.



将$\boldsymbol{T}(s)$在有向平面 R^2 上沿正向旋转 $\pi/2$，得到与 $\boldsymbol{T}(s)$正交的单位向量 $\boldsymbol{N}_r(s)=\{-\dot{y}(s),\dot{x}(s)\}$，

则弗雷内公式为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{T}}(s)=k_r(s)\boldsymbol{N}_r(s),\\ \dot{\boldsymbol{N}}_r(s)=-k_r(s)\boldsymbol{T}(s),\end{cases}$$

称 $k_r(s)$ 为平面曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的相对曲率，$k_r>0$ 表示曲线朝 $\boldsymbol{N}_r$ 所指的一侧弯曲，$k_r<0$ 表示曲线朝 $-\boldsymbol{N}_r$ 所指一侧弯曲（见上图）. 相对曲率的计算公式是 $k_r=\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}$. 对一般参数 t，即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，则

$$k_r=\frac{x'y''-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

相对曲率（relative curvature） 见“平面曲线”.

平面曲线的基本定理（fundamental theorem for plane curves） 平面曲线的局部存在性、惟一性定理. 若给定区间 $[s_0,s_1]$ 上的连续函数 $k_r(s)$，则除了位置差别外，惟一地存在一条有向平面曲线，以 s 为弧长，以 $k_r(s)$ 为相对曲率. 基本定理说明有向平面曲线的形状由相对曲率 $k_r(s)$ 完全确定，因此，称 $k_r=k_r(s)$ 为有向平面曲线的自然方程.

平面曲线的自然方程（natural equation of plane curve） 见“平面曲线的基本定理”.

渐伸线（evolvent） 一类特殊的曲线. 若一条曲线 C_1 的切线是另一条曲线 C_2 的法线，则 C_1 称为 C_2 的渐缩线，C_2 称为 C_1 的渐伸线. 若曲线 C_1 的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1(s)$，$s$ 是弧长参数，则 C_1 的渐伸线 C_2 的方程为 $\boldsymbol{r}_2(s)=\boldsymbol{r}_1(s)+(c-s)\boldsymbol{T}_1(s)$，其中 c 为常数，$\boldsymbol{T}_1(s)$ 是 C_1 的单位切向量；若设 C_2 的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(s)$，则 C_2 的渐缩线 C_1 的方程为 $\boldsymbol{r}_1(s)=\boldsymbol{r}_2(s)+R(s)\boldsymbol{N}_2(s)+R(s)\tan\theta\cdot\boldsymbol{B}_2(s)$，其中 $R(s)$ 为 C_2 的曲率半径，

$$\theta=c-\int_{s_0}^{s}\tau(s)\mathrm{d}s\ (c\text{ 为常数},\tau\text{ 为 }C_2\text{ 的挠率}),$$

$\boldsymbol{B}_2(s)$ 是 C_2 的从法向量. 齿轮的齿廓曲线多采用圆的渐伸线，以使二齿面能很好地啮合，在传动中保持平稳. 机械设计关于啮合条件的研究中，曲线论的知识得到了具体的应用.

渐缩线（evolute） 见“渐伸线”.

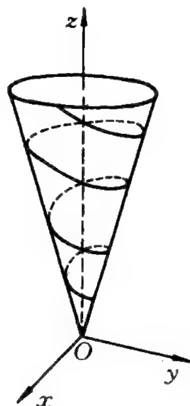
螺线（helix） 亦称定倾曲线. 一类特殊曲线. 它是切向量与一个固定的方向成定角的曲线. 曲线为一般螺线的充分必要条件是它的挠率与曲率之比为常数. 这类特殊曲线在工程技术中有着广泛的应用.

定倾曲线（curve of constant inclination） 即“螺线”.

圆柱螺线（circular helix） 一类特殊曲线. 它是曲率和挠率分别是常数 $k_0,\tau_0(k_0>0,\tau_0\neq0)$ 的曲线. 它位于圆柱面上且与直母线成定角，也可看成一动点一边绕一直线做匀速旋转，一边沿这直线方向做匀速移动时的轨迹. 它的参数方程可表为 $\boldsymbol{r}=\{a\cos t,a\sin t,bt\}(a>0)$，此时它的曲率和挠率分别为

$$k=\frac{a}{a^2+b^2},\quad \tau=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

圆锥螺线（circular conical helix） 亦称圆锥对数螺线. 一类特殊曲线. 它是切线与圆锥面的直母线成固定角的曲线（如图）. 它的方程为



$$\begin{cases}x=\rho\sin\alpha\cos\theta,\\ y=\rho\sin\alpha\sin\theta,\\ z=\rho\cos\alpha,\end{cases}$$

其中

$$\rho=\rho_0\exp\left(\frac{\sin\alpha}{\tan\beta}\theta\right),$$

式中 α 为圆锥面的半顶角，β 为螺旋角，ρ_0,α,β 都是常数. 把该曲线投影到 xOy 平面上是对数螺线，因此又称它为圆锥对数螺线.

贝特朗曲线（Bertrand curves） 一对特殊曲线. 它们是具有公共主法向量的曲线. 若两曲线 C 与 $\bar{C}$ 的点之间可以建立一一对应，使得在对应点的主法线重合，则这样的曲线称为贝特朗曲线，其中一条称为另一条的侣线. 一条挠曲线为贝特朗曲线的充分必要条件是它的曲率 $k(s)$ 与挠率 $\tau(s)$ 适合 $\lambda k+\mu\tau=1$，其中 λ,μ 为常数，且 $\lambda\neq0$. 两条贝特朗侣线之间沿它们的公共主法线的距离是固定的，而且它们在对应点的切线夹成固定角.

侣线（companion line） 见“贝特朗曲线”.

平面曲线族的包络（the envelope of the family of plane curves） 由平面曲线族确定的一条特殊曲线. 在 xy 平面上给定依赖于一个参数 λ 的曲线族

$$F(x,y,\lambda)=0 \qquad (*)$$

（对 λ 的每一个固定值，方程（*）表示一条平面曲线），而且，假设 $F(x,y,\lambda)$ 是三个变数的连续可微函数. 所谓曲线族的包络是指这样一条曲线，在它的每一点都与族中一条曲线相切. 包络与族中曲线的切点称为曲线族的特征点. 若曲线族（*）的包络存在，则它由方程组

$$\begin{cases}F(x,y,\lambda)=0,\\ F_\lambda(x,y,\lambda)=0\end{cases}$$

消去 λ 而得. 对 λ 的每一个固定值，则上述方程组确定一个特征点. 包络是由特征点构成的. 例如：曲线在每一点都和它的渐伸线的一条法线相切，因此，该曲线是它的渐伸线的法线族的包络.

平面曲线族的特征点（characteristic point of the family of plane curves） 见“平面曲线族

的包络”.

闭曲线的全曲率(total curvature of a closed curve)　研究曲线整体性质的一个基本概念. 它是闭曲线的切线像的长度. 若曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)(0\leqslant s\leqslant l)$ 是一条连续可微曲线,其中 s 为曲线的弧长参数,l 为曲线的长度. 若 $\boldsymbol{r}(s)$ 及其各阶导数在 $s=0,s=l$ 处相同,则称曲线 C 为闭曲线. 若曲线 C 自身不相交,即当 $s_1\neq s_2$ 时,有 $\boldsymbol{r}(s_1)\neq\boldsymbol{r}(s_2)$,则称曲线 C 为简单曲线. 对于闭曲线 C,积分

$$\int_0^l k(s)\mathrm{d}s$$

称为曲线 C 的全曲率,记为 K. 这里 $k(s)$ 是曲线 C 的曲率. 利用弗雷内(Frenet,J. F.)公式,

$$K=\int_0^l k(s)\mathrm{d}s=\int_0^l|\dot{\boldsymbol{T}}(s)|\mathrm{d}s.$$

式中 $\boldsymbol{T}$ 是曲线 C 的单位切向量,“·”表示对 s 的求导,因此,闭曲线的全曲率是曲线的切线像 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{T}(s)$ 的全长. 对于平面闭曲线,积分

$$\int_0^l k_r(s)\mathrm{d}s$$

称为相对全曲率,记为 K_r. 式中 $k_r(s)$ 是平面曲线的相对曲率.

相对全曲率(relative total curvature)　见“闭曲线的全曲率”.

切线旋转指标定理(the rotation index theorem of the tangent lines for a curve)　平面简单闭曲线的一个重要性质. 平面闭曲线 C 的切线像在单位圆周上环绕的圈数 i_r 称为 C 的旋转指标,亦称旋转数(按逆时针旋转时,$i_r>0$;按顺时针旋转时,$i_r<0$. 具体例子见图).

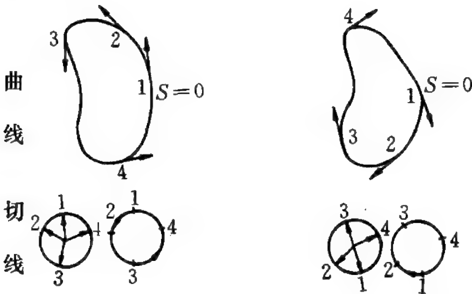


图 1　正向绕一周 $i_r=1$　图 2　反向绕一周 $i_r=-1$

若平面闭曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的长度为 $l,\theta(s)$ 是从 x 轴正向到 s 处切向量 $\boldsymbol{T}(s)$ 的交角,则

$$i_r=\frac{\theta(l)-\theta(0)}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^l\theta'(s)\mathrm{d}s$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^l k_r(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi}K_r,$$

式中 $k_r(s)$ 是曲线 C 的相对曲率,K_r 是曲线 C 的相对全曲率. 对于平面简单闭曲线,旋转指标等于 ±1,

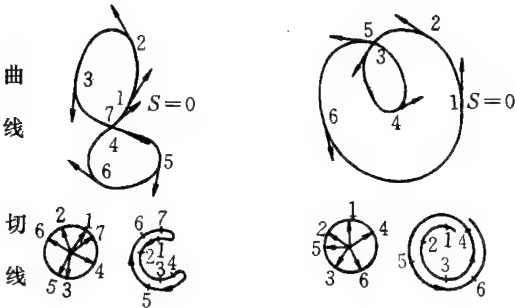


图 3　正、反方向旋转相同角度,绕了零周 $i_r=0$　图 4　反向绕两周 $i_r=2$

这就是切线旋转指标定理.

等周不等式(isoperimetric inequality)　关于平面闭曲线的一个重要不等式. 若曲线 C 是平面简单闭曲线,它的长度为 l,曲线 C 所围区域的面积为 A,则有不等式 $l^2-4\pi A\geqslant0$. 这就是著名的等周不等式,式中等号当且仅当曲线 C 是圆时成立. 由等周不等式可知,平面上周长固定的一切简单闭曲线中,以圆周所围成的区域面积最大. 这个事实,古希腊人早已知晓;但是,等周不等式的第一个严格证明,直至 1870 年才由外尔斯特拉斯(Weierstrass,(K. T.) W.)给出.

凸闭曲线(convex closed curves)　一类具有鲜明几何特征的平面闭曲线. 若一平面曲线总是位于它的每一点切线的同一侧,则此曲线称为凸曲线. 闭的凸曲线称为凸闭曲线. 平面简单闭曲线是凸闭曲线的充分必要条件是它的相对曲率 $k_r(s)$ 不变号,即 $k_r(s)\geqslant0$ 或 $k_r(s)\leqslant0$. 若平面凸闭曲线的相对曲率 k_r 处处不为零,则称为卵形线.

凸曲线(convex curve)　见“凸闭曲线”.

卵形线(oval)　见“凸闭曲线”.

四顶点定理(four-vertex theorem)　凸闭曲线的一个重要性质. 平面曲线的顶点是指使相对曲率的导数为零的点. 平面上一条凸闭曲线至少有四个顶点,这就是四顶点定理. 此定理最早由印度的慕克赫帕沙亚(Mukhopadhyaya)于 1909 年发现. 它不能进一步改进,因为当椭圆有不等的长短轴时,恰好有四个顶点,即椭圆和两主轴的交点. 此外,这个定理对某些非凸曲线也成立,但证明比较困难.

舒尔定理(Schur theorem)　关于平面曲线的一个定理. 它是描述平面曲线在无伸缩的弯曲下性态变化的. 设 C 是曲率 $k(s)=|k_r(s)|$ 的平面曲线弧段(其中 $k_r(s)$ 为相对曲率),且它和连接两端点的弦形成一条凸曲线;又 C^* 是和 C 有相同弧长参数 s,又有相同长度 l 的一条平面曲线弧段,它的曲率 $k^*(s)\leqslant k(s)$ $(k^*(s)=|k_r^*(s)|)$. 若 d,d^* 分别表示连接曲线 C,C^* 两端点的弦长,则 $d\leqslant d^*$,其中等号

当且仅当 C 和 C^* 合同时成立. 直观地说,若把一条平面凸曲线弧弯曲得厉害些,则它的两端点之间的距离就会变短些. 舒尔定理也可以推广到逐段光滑的曲线弧.

施瓦茨定理(Schwarz theorem) 关于某些平面曲线弧长度问题的一个定理. 设平面上两定点 A, B 的距离为 d, C 是连接 A, B 的平面曲线弧,它的长度为 l,它的曲率 $k(s)\leqslant 1/R$(R 为常数,且 $R\geqslant 1/2d$). 若 S 是通过 A, B 两点、半径为 R 的圆,则 l 或者不小于 S 上的优弧 $\overset{\frown}{AB}$,或者不大小 S 上的劣弧 $\overset{\frown}{AB}$. 这个定理的证明要应用平面曲线弧形变的舒尔定理.

柯西-克罗夫顿公式(Cauchy-Crofton formula) 计算平面曲线长度的一个公式. 设 C 为平面上一曲线,它的长度为 L. 对于平面上任意一条直线 l,记 $n(l)$ 为直线 l 与曲线 C 的交点数. 由于在直角坐标系下,每条直线能用一对数 (θ,p) 完全确定,其中 θ 表示 x 轴与直线 l 的交角, p 表示原点到直线的距离,因此 $n(l)$ 可看做 θ, p 的二元函数 $n(\theta,p)$. 柯西-克罗夫顿公式是

$$\iint_D n(\theta,p)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}p = 2L.$$

式中 D 表示与曲线 C 相交的直线 l 所对应的点 (θ,p) 在 (θ,p) 平面上的变动区域. 利用柯西-克罗夫顿公式,能够对可求长曲线的长度进行近似计算. 例如,取一族平行线,设它们之间的间距为 r,然后将它们依次旋转 $\pi/4$, $2\pi/4$, $3\pi/4$,共得四族平行线,若曲线 C 与这些直线共有 n 个交点,则 C 的长度为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\iint_D n(\theta,p)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}p \\ &\approx \frac{1}{2}\sum_i n(\theta,p)\Delta\theta_i\Delta p_i \\ &\approx \frac{1}{2}nr\cdot\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

球面曲线的克罗夫顿公式(Crofton formula for curves on a sphere) 计算单位球面上曲线长度的一个公式. 设 $W^{\perp}$ 表示单位球面 S^2 上的一个规定方向的大圆, $W^{\perp}$ 所在平面的单位法向量为 $\boldsymbol{W}$(选取 $\boldsymbol{W}$ 的方向与大圆的定向构成右手系). 将 $\boldsymbol{W}$ 的起点放在大圆的中心, $\boldsymbol{W}$ 的末端用 W 表示,它是单位球面上的点,称为大圆 $W^{\perp}$ 的极点. 若 C 是单位球面 S^2 上的一条曲线,大圆 $W^{\perp}$ 与曲线 C 的交点数记为 $n(W)$,则有

$$\iint_D n(W)\mathrm{d}W = 4L,$$

式中 L 是曲线 C 的长度, $\mathrm{d}W$ 是单位球面 S^2 上的面积元素, D 是 S^2 上与 C 相交的大圆所对应的极点全体构成的区域. 这就是球面曲线的克罗夫顿公式.

芬格尔定理(Fenchel theorem) 空间曲线论中著名的整体性定理. 若 C 是一条空间简单正则闭曲线,长度为 l,则它的全曲率

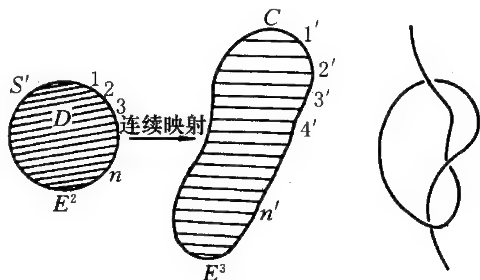
$$K = \int_0^l k(s)\mathrm{d}s \geqslant 2\pi,$$

这里 $k(s)$ 是曲线的曲率,式中等号当且仅当 C 是平面凸闭曲线时成立. 从而,对于一条曲率 $k(s)\leqslant 1/R$(R 为正常数)的空间简单闭曲线,它的长度 $l\geqslant 2\pi R$. 因此,曲率 $k(s)\leqslant 1/R$(R 为正常数)的最短简单闭曲线是半径为 R 的圆. 该定理由芬格尔(Fenchel, W.)于 1928 年获得. 芬格尔定理对于分段光滑曲线也成立.

法里-米尔诺定理(Farey-Milnor theorem) 关于空间打结曲线的全曲率的一个定理. 对于一条空间闭曲线 C,若存在一个平面中的单位圆盘 D 到三维欧氏空间的连续映射,使得曲线 C 正好是 D 的边界 S'(单位圆)在此映射下的像,则称 C 是一条不打结曲线,亦称非扭结曲线;否则,称 C 为打结曲线,亦称 C 为扭结曲线(如图). 法里-米尔诺定理断言:对于打结的简单正则空间闭曲线,它的全曲率不小于 4π,即

$$K = \int_0^l k(s)\mathrm{d}s \geqslant 4\pi,$$

式中 l 为闭曲线的长度, $k(s)$ 为曲线的曲率. 这个定理可看做芬格尔定理的推广,它是由法里(Farey, J.)和米尔诺(Milnor, J. W.)分别独立得到的.



扭结曲线(knot curves) 见"法里-米尔诺定理".

闭曲线的全挠率(total torsion of a closed curve) 研究空间曲线整体性质的重要概念之一. 设曲线 C: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ $(0\leqslant s\leqslant l)$ 是一条连续可微闭曲线,其中 s 为曲线的弧长参数, l 为曲线的长度. 若 $\tau(s)$ 是曲线的挠率,则

$$\int_0^l \tau(s)\mathrm{d}s \pmod{2\pi}$$

称为曲线 C 的全挠率. 球面上闭曲线的全挠率等于零;反之,若曲面 S 上的任何闭曲线的全挠率均为零,则 S 必为平面或球面的一部分. 因此,若 S 是紧致连通闭曲面,其上任何闭曲线的全挠率均为零,则

S 必是整个球面.

曲面(surfaces)　经典微分几何的主要研究对象之一. 设 $\{O;x,y,z\}$ 是 R^3 中的笛卡儿直角坐标系，而

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (*)$$

都是 u,v 的单值连续函数. 设这些函数的定义域是 uv 平面 R^2 中的一个单连通区域 D. (*)式给出从 D 到 R^3 中的一个映射：

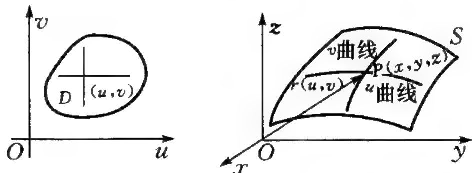
$$(u,v) \to \{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}.$$

若这个映射是一一双方连续的，则在这个映射下，称 D 的像为 R^3 中的一个简单曲面，简称曲面. (*)式的矢量形式为

$$\boldsymbol{r} = \{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}$$

或 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$. 此式或(*)式称为曲面的参数表示或参数方程，u,v 称为曲面的参数.

在曲面的参数方程中，若固定 v 值 $v=v_1$，则 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v_1)$ 一般是曲面上的一条曲线，称为 u 线，其切线沿着 $\boldsymbol{r}_u$ 的方向. 当 v_1 值变动时，可得不同的 u 线. 若固定 u 值 $u=u_1$，则得 v 线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_1,v)$，其切线沿着 $\boldsymbol{r}_v$ 的方向. 当 u_1 值改变时，可得不同的 v 线. 这两族曲线 u 线和 v 线，在曲面上构成曲线网，称为坐标曲线或坐标网. 在曲面上一点 $P_0(u_0,v_0)$，若 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq\boldsymbol{0}$，则称 P_0 点为曲面的正则点；否则，就称为奇点. 在曲面的正则点，只有一条 u 线和一条 v 线，而且这两条曲线不相切. 参数 u,v 可作为曲面上点



的坐标，称为曲线坐标或曲纹坐标(如图). 例如，球面 $\boldsymbol{r}=\{R\cos\theta\cos\varphi,R\cos\theta\sin\varphi,R\sin\theta\}$，当 $\varphi=$ 常数时，给出 θ 线(子午线或经线)；当 $\theta=$ 常数时，给出 φ 线(球面的纬线).

简单曲面(simple surfaces)　见“曲面”.

曲面的参数方程(parametric equation of surfaces)　见“曲面”.

坐标曲线(coordinate curves)　见“曲面”.

坐标网(coordinate net)　见“曲面”.

曲面的正则点(regular point of surfaces)　见“曲面”.

曲面的奇点(singular point of surfaces)　见“曲面”.

曲纹坐标(curve coordinate)　见“曲面”.

正则曲面(regular surface)　一类重要的曲面. 指处处都是正则点的曲面. 若曲面的参数方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 或 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ 中的坐标函数是 u,v 的连续可微函数，且雅可比矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

的秩处处为 2(即处处为正则点，$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq\boldsymbol{0}$)，则称此曲面为正则曲面.

C^k 阶曲面(C^k-surface)　具有 k 阶可微性的曲面. 若正则曲面的参数方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 中的函数有直到 k 阶的连续偏导数，则称此曲面为 C^k 阶正则曲面，也简称 C^k 阶曲面. 曲面论中讨论的至少是 C^2 阶曲面.

切平面(tangent plane)　与曲面相切的平面. 曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上一条曲线可用曲线坐标表示为 $u=u(t)$, $v=v(t)$ $(t\in I)$ 或 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(t),v(t))$. 它的切向量是

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{r}_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

曲面上过一点 P_0 的任意曲线在这点的切向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ 都位于在该点的切向量 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 所决定的平面上(如图). 称这个平面为曲面在 P_0 点的切平面. 过点 P_0 垂直于切平面的直线称为曲面在 P_0 点的法线. 若 P_0 点的曲线坐标为 (u_0,v_0)，切平面上任意点 R 的向径为 $\boldsymbol{R}$，由于 $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{r}_{u_0}$, $\boldsymbol{r}_{v_0}$ 共面($\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_{u_0}$ 和 $\boldsymbol{r}_{v_0}$ 分别为 $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 在 P_0 点的值)，则曲面上过 P_0 点的切平面方程为

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}_{u_0},\boldsymbol{r}_{v_0})=0.$$

若过 P_0 点的法线上任意点的向径为 $\boldsymbol{P}$，λ 为参数，则过 P_0 点的法线方程为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{r}_0+\lambda(\boldsymbol{r}_{u_0}\times\boldsymbol{r}_{v_0})$. $(\boldsymbol{r}_{u_0}\times\boldsymbol{r}_{v_0})$ 称为曲面的法向量. 曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 在一点 P 的单位法向量定义为

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|},$$

其中 $\boldsymbol{r}_u$ 与 $\boldsymbol{r}_v$ 分别是曲面在 P 点的坐标曲线的切向量. 规定 $\boldsymbol{n}$ 的正向所指的一侧是曲面的正侧，另一侧为负侧. $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{n}$ 依序构成右手系. 曲面正侧的确定与参数选取有关.

法向量(normal vector)　见“切平面”.

曲面的第一基本形式(first fundamental form of a surface)　表示曲面度量的一个二次微分形式. 若以 s 表示曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上曲线的弧长，则

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}s^2 = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2$$

称为曲面的第一基本形式或曲线的线素，其中系数

$$E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,\ F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,\ G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v$$

称为曲面的第一类基本量. 对于曲面的特殊参数表示

$$z=z(x,y),$$

$$E=\boldsymbol{r}_x\cdot\boldsymbol{r}_x=1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2,$$

$$F=\boldsymbol{r}_x\cdot\boldsymbol{r}_y=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$G=\boldsymbol{r}_y\cdot\boldsymbol{r}_y=1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

曲面的第一基本形式为

$$\mathrm{I}=\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}y^2.$$

第一类基本量满足 $E>0,G>0,EG-F^2>0$,即第一基本形式是正定的. 它在曲面论中占有非常重要的地位,它决定曲面的内蕴性质.

曲面的第一类基本量(fundamental quantities of first kind for surfaces) 见"曲面的第一基本形式".

面积元(area element) 曲面面积的微分. 若曲面 S 的参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$,则 S 的面积为

$$\sigma=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中,E,F,G 是曲面 S 的第一类基本量,$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 称为面积元.

等距对应(isometric correspondence) 保持长度不变的一种对应. 若两个曲面的点之间存在一一对应,使它们上面的对应曲线有相同的弧长,则称这两个曲面是等距的,或称两曲面等距等价,这样的对应称为等距对应,而一个曲面到另一个曲面的这样的映射称为等距映射. 特别地,将一个曲面到自身的等距映射称为等距变换. 曲面在等距映射下不变的几何量称为曲面的等距不变量或内蕴量. 在等距映射下,不变的几何性质称为曲面的等距性质或内蕴性质(也称内在性质). 等距映射的一种具体刻画是把一个曲面经过保持曲面上所有曲线长度不变的变形变成另外一个曲面. 因此,一般地也把这类等距称为弯曲形变,而把等距的曲面称为可以贴合的曲面.

等距等价(isometric equivalence) 见"等距对应".

等距变换(isometric transformation) 见"等距对应".

等距不变量(isometric invariant) 见"等距对应".

曲面的内蕴几何学(intrinsic geometry for surfaces) 研究曲面上仅依赖于它的第一基本形式的量、图形及其性质的几何学. 高斯(Gauss,C. F.)发现高斯曲率 K 仅依赖曲面的第一基本形式(参见"高斯绝妙定理"),开创了曲面的内蕴几何学的研究. 曲面的内蕴几何学的主要内容还包括曲面上曲线的测地曲率、测地线,以及曲面上沿曲线定义的切向量场的列维-齐维塔平行性等. 曲面的内蕴几何学在高维的推广就是黎曼几何学.

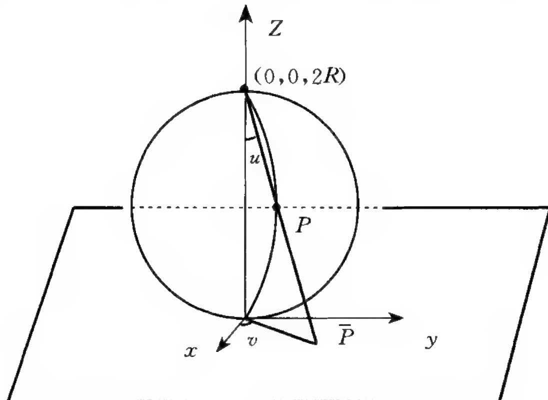
保角对应(conformal correspondence) 保持角度不变的一种对应. 若在两个曲面的点之间建立一一对应,使任意两条曲线的交角在对应下保持不变,则此种对应称为保角对应,而一个曲面到另一个曲面的映射称为保角映射,或共形(保形)映射. 特别地,将一个曲面到自身的保角映射称为保角变换. 若在两曲面 S 和 S^* 的点之间存在一一对应,且对应点取相同的参数,则该对应为保角对应的充分必要条件是这两个曲面的第一类基本量成比例,即

$$E:F:G=E^*:F^*:G^*.$$

保角映射(conformal mapping) 见"保角对应".

共形映射(conformal mapping) 见"保角对应".

球极投影(stereographic projection) 一种特殊的投影. 指以北极为心从球面上的点(除北极点)



到在南极的切平面(或赤道平面上)的投影(如图). 球极投影建立了球面与平面的保角对应. 如图所示建立直角坐标系,则对应点 P 和 $\overline{P}$ 的坐标(即球面和平面参数表示)分别为

$$x=2R\sin u\cos u\cos v,$$
$$y=2R\sin u\cos u\sin v,$$
$$z=2R\sin^2 u;$$
$$\overline{x}=2R\tan u\cos v,$$
$$\overline{y}=2R\tan u\sin v,$$
$$\overline{z}=0.$$

在球极投影下,它们的第一基本形式成比例. 在地图学中常用保角对应来绘制地图.

等温坐标系(isothermal coordinate system)　曲面上的一种特殊坐标系. 若曲面的第一基本形式 Ⅰ 在坐标系(u,v)下可以写成

$$\text{Ⅰ} = \lambda^2(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2),$$

其中 $\lambda=\lambda(u,v)$，则称(u,v)为曲面的等温坐标系. 当曲面的第一类基本量 E,F,G 是 u,v 的解析函数时，存在容许的参数变换将(u,v)变为等温坐标系. u 和 v 分别称为曲面的等温参数. 关于 E,F,G 的解析性要求可以减弱到一次以上连续可微，并且高斯曲率 K 是(u,v)的连续函数的情形(当 E,F,G 是两次以上连续可微时，上述要求都能满足). 当曲面上选择等温坐标系(u,v)时，它建立了从曲面到平面的保角对应. 前面提到的结果说明：正则曲面在局部上总是可以与平面建立保角对应的. 在等温坐标系下，若引入复坐标 $z=u+\sqrt{-1}v$，则 $\mathrm{d}s^2=\lambda^2\,|\mathrm{d}z|^2$，从而确定了一个复结构. 这表明曲面在局部上总可以看成黎曼面.

等温参数(isothermal parametric)　见“等温坐标系”.

曲面的第二基本形式(second fundamental form of a surface)　刻画曲面的局部弯曲性质的一个二次微分形式. 设曲面方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$.

$$\text{Ⅱ} = L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2$$

称为曲面的第二基本形式，L,M,N 称为曲面的第二类基本量. 这里

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n},\ M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n},\quad N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n},$$

$\boldsymbol{n}$ 是曲面的单位法向量. 第二基本形式 Ⅱ 的直接的几何意义是：它等于曲面上的点(u,v)的邻近点$(u+\mathrm{d}u,v+\mathrm{d}v)$到点$(u,v)$处的切平面的有向距离(看做 $\sqrt{\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2}$的无穷小量)的主要部分的两倍. 借助于曲面的第一基本形式和第二基本形式可以定义曲面上的各种曲率(如法曲率、主曲率、平均曲率和高斯曲率).

曲面的第二类基本量(fundamental quantities of second kind for surfaces)　见“曲面的第二基本形式”.

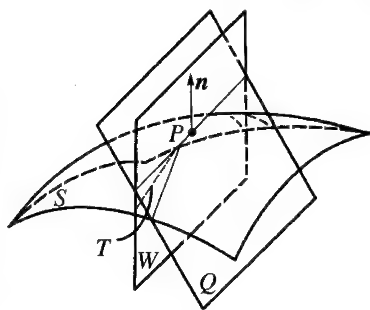
法曲率(normal curvature)　刻画曲面在某一方向的弯曲程度的量. 设曲面 S 的第一基本形式和第二基本形式分别是

$$\text{Ⅰ} = E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2,$$

$$\text{Ⅱ} = L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2,$$

则
$$k_n=\frac{\text{Ⅱ}}{\text{Ⅰ}}=\frac{L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2}{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}$$

是曲面 S 在点(u,v)的切方向 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 的函数，即它仅依赖 u,v 和 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}v$. 称 k_n 为曲面 S 在点(u,v)处沿切方向 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 的法曲率. 法曲率是描述曲面在局部上的弯曲情形的最基本的量，它的直观几何意义是：设曲面 S 的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v/|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|$ 是曲面的单位法向量场. 在点 $P(u,v)$ 的切方向 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 与点 P 处的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 确定的平面称为沿方向 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 的法截面，而法截面与 S 的交线称为曲面在点 P 的一条法截线. 那么法截线在点 P 的曲率恰好等于曲面在该点沿切方向 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$ 的法曲率的绝对值 $|k_n|$，并且当 $k_n>0$ 时，法截线向 $\boldsymbol{n}$ 所指的一侧弯曲，当 $k_n<0$ 时，法截线向 $\boldsymbol{n}$ 的相反指向一侧弯曲.



法截线(normal section)　见“法曲率”.

法截面(normal section)　见“法曲率”.

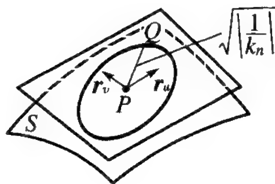
迪潘标线(Dupin indicatrix)　表示曲面在一点的法曲率随着切方向的变化规律. 在曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$上取一点 P 为原点，取曲面 S 的坐标曲线在 P 点的切向量 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 为基向量，则它们构成曲面 S 在 P 点的切平面上的坐标系. 设 k_n 是曲面 S 在 P 点沿一个切方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的法曲率，若 $k_n\neq0$，在 P 点的切平面上过 P 点沿方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 画一线段 PQ，使其长为

$$\sqrt{\frac{1}{|k_n|}},$$

则 Q 点的轨迹称为曲面 S 在 P 点的迪潘标线(如图). 在上述坐标系下，若 Q 点坐标为(x,y)，则迪潘标线的方程可化为

$$Lx^2+2Mxy+Ny^2=\pm1.$$

根据这个二次曲线方程可以对曲面上的点进行分类：



1. 若 $LN-M^2>0$，则 P 点称为曲面的椭圆点，这时迪潘标线是椭圆.

2. 若 $LN-M^2<0$，则 P 点称为曲面的双曲点，这时迪潘标线是一对共轭双曲线.

3. 若 $LN-M^2=0$，则点 P 称为曲面的抛物点，这时迪潘标线是一对平行直线. 其中，若 $L=M=N=0$，则 P 点称为曲面的平点，这时迪潘标线不存在.

曲面上的点的类型也可以按高斯曲率 K 的符号分类.

曲面的椭圆点(elliptic point of surfaces)　见“迪潘标线”.

曲面的双曲点(hyperbolic point of surfaces) 见"迪潘标线".

曲面的抛物点(parabolic point of surfaces) 见"迪潘标线".

脐点(umbilical point) 曲面上的一类特殊点,它是第一基本形式与第二基本形式成比例的点.若曲面在某一点处的第一、二类基本量适合

$$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G},$$

则称该点为曲面的脐点.曲面在脐点处的每一个切方向都是主方向,沿各方向的法曲率都相等.$L=M=N=0$ 的脐点称为平点,L,M,N 不全为零的脐点称为圆点.平面上的点都是平点.球面上的点都是圆点.

平点(flat point) 见"脐点".

圆点(circular point) 见"脐点".

渐近曲线(asymptotic curves) 曲面上的一类特殊曲线.曲面上在点 P 处使法曲率 $K_n=0$ 的切方向称为曲面在 P 点的渐近方向.曲面的渐近方向 $\mathrm{d}u:\mathrm{d}v$适合微分方程

$$L_0\mathrm{d}u^2+2M_0\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N_0\mathrm{d}v^2=0,$$

其中 L_0,M_0,N_0 是曲面的第二类基本量在 P 点的值.曲面上的一条曲线,若它在每一点的切方向都是曲面在该点的渐近方向,则称这条曲线为曲面上的一条渐近曲线.渐近曲线的微分方程是

$$L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2=0.$$

若曲面上有直线,则它必是曲面的渐近曲线.曲面上的参数曲线网由渐近曲线构成的充分必要条件是 $L=N=0$.

渐近方向(asymptotic direction) 见"渐近曲线".

主曲率(principal curvature) 一类特殊的法曲率.它是法曲率的极值.对于曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$上的非脐点 P,法曲率在两个互相垂直的切方向上分别达到最大值 k_1 和最小值 k_2,称为曲面在该点的主曲率,与主曲率相应的这两个切方向称为曲面在该点的主方向.若在 P 的一个切方向与该点相应于 k_1 的主方向的夹角为 θ,则曲面沿这个给定方向的法曲率 k_n 为

$$k_n(\theta)=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta,$$

此公式称为欧拉公式.若曲面上一条曲线在每一点的切方向都是曲面在该点的主方向,则称此曲线为曲率线.确定曲率线的微分方程是

$$(EM-FL)\mathrm{d}u^2+(EN-GL)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+(FN-GM)\mathrm{d}v^2=0.$$

曲率线(curvature lines) 见"主曲率".

主方向(principal direction) 见"主曲率".

高斯曲率(Gauss curvature) 亦称总曲率.曲面论中十分重要的不变量.两主曲率之积.曲面在一点的两个主曲率 k_1 和 k_2 的乘积称为曲面在该点的高斯曲率,记为 K.主曲率 k_1 和 k_2 的平均值$(k_1+k_2)/2$ 称为曲面在该点的平均曲率(中曲率),记为 H.若曲面方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$,则

$$K=k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},$$

$$H=\frac{k_1+k_2}{2}=\frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)}.$$

曲面上的点可以按高斯曲率的符号进行分类:$K>0$ 的点是椭圆点,$K<0$ 的点是双曲点,$K=0$ 的点是抛物点(包括平点).

总曲率(total curvature) 即"高斯曲率".

平均曲率(mean curvature) 见"高斯曲率".

中曲率(mean curvature) 即"平均曲率".

曲面在一点邻近的形状(form of a surface in a neighborhood of a point) 曲面的局部形态的描述.曲面在椭圆点($K>0$)两个主曲率同号,沿任意方向的法曲率都与主曲率同号.因此曲面沿所有方向的法截线朝切平面的同一侧弯曲.曲面在椭圆点邻近的形状近似于椭圆抛物面或碗形(如图1).曲面在双曲点($K<0$)两个主曲率异号,曲面在渐近方向的两对对顶角中分别朝切平面的两侧弯曲.曲面的形状近似于双曲抛物面或马鞍面(如图2).曲面在抛物点($K=0$)至少有一个主曲率为零.若另一个主曲率不为零,则除渐近方向外,一切法截线朝切平面同一侧弯曲.曲面在抛物点的形状像半马鞍面(如图3).

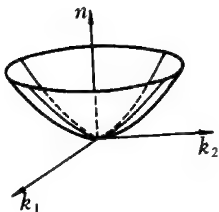


图 1

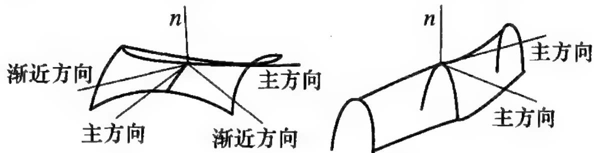


图 2

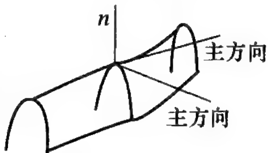


图 3

高斯映射(Gauss map) 曲面到单位球面的一种映射.曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$上每一点 P 对应一个单位法向量 $\boldsymbol{n}$,把 $\boldsymbol{n}$ 平移到坐标原点,$\boldsymbol{n}$ 的终点就是单位球面上一点 $\overline{P}$.曲面 S 上的点 P 与单位球面上的点 $\overline{P}$ 的这种对应称为曲面 S 的球面表示或高斯映射.曲面的球面表示的第一基本形式称为原曲面的第三基本形式:

$$\mathrm{III}=|\mathrm{d}\boldsymbol{n}|^2=e\mathrm{d}u^2+2f\mathrm{d}u\mathrm{d}v+g\mathrm{d}v^2,$$

其中 $e=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_u,f=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_v,g=\boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{n}_v$,$e,f,g$ 称为曲面的第三类基本量.曲面的三种基本形式之间有如下的线性关系:

$$\mathrm{III}-2H\,\mathrm{II}+K\,\mathrm{I}=0,$$

即

$$e=-KE+2HL,$$
$$f=-KF+2HM,$$
$$g=-KG+2HN.$$

曲面的球面表示(spherical representation of surfaces) 见“高斯映射”.

曲面的第三基本形式(third fundamental form of a surface) 见“高斯映射”.

曲面的第三类基本量(fundamental quantities of third kind of surfaces) 见“高斯映射”.

曲面的基本公式(fundamental formulas for surfaces) 曲面上标架场的运动公式. 设曲面的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$. 在每点 $P(u^i)$ 处有自然标架 $\{P;\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n}\}$, 其中 $\boldsymbol{r}_i=\partial\boldsymbol{r}/\partial u^i$, $\boldsymbol{n}$ 是单位法向量. $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{n}$ 关于 u^1,u^2 的偏导向量公式为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u^i}=\boldsymbol{r}_i,\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial u^j}=\sum\limits_k\Gamma_{ij}^k\boldsymbol{r}_k+b_{ij}\boldsymbol{n}\quad(i,j=1,2,),\quad(*)\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial u^i}=-\sum\limits_j\omega_i^j\boldsymbol{r}_j,\end{cases}$$

其中

$$b_{ij}=\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{n},\ \omega_i^j=\sum_k b_{ik}g^{kj},$$

$$g_{ij}=\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j\Big(\sum_j g^{ij}g_{jk}=\delta_k^i\Big),$$

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\sum_m g^{km}\Big(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\Big)$$
$$(i,j,m=1,2).$$

公式(*)称为曲面的基本公式.(*)中的第二组公式称为高斯公式,第三组公式称为外恩加滕公式,Γ_{ij}^k称为联络系数. 这些公式在曲面论中占有极重要地位,它的作用相当于弗雷内公式在曲线论中的作用.

曲面的外恩加滕公式(Weingarten formula of surfaces) 见“曲面的基本公式”.

联络系数(coefficient of connection) 见“曲面的基本公式”.

曲面的高斯公式(Gauss formula of surfaces) 见“曲面的基本公式”.

外恩加滕变换(Weingarten transformation) 曲面论的一种重要变换. 指曲面 S 在每点切空间 $T_P(S)$ 中的线性变换 $W:T_P(S)\to T_P(S)$, 它将切空间 $T_P(S)$ 中的基向量 $\boldsymbol{r}_i$ 变为 $\omega_i^j\boldsymbol{r}_j$, 其中 (ω_i^j) 为外恩加滕公式中的系数矩阵. 用外恩加滕变换 W, 第二基本形式可写为

$$\mathrm{II}=-\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=W(\mathrm{d}\boldsymbol{r}),$$

外恩加滕公式可写为 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}=-W(\mathrm{d}\boldsymbol{r})$. 在此变换 W 下,对曲面上点 P 的任意两个切方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{r},\delta\boldsymbol{r}$, 有

$$W(\mathrm{d}\boldsymbol{r})\cdot\delta\boldsymbol{r}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot W(\delta\boldsymbol{r}),$$

即 W 是自共轭线性变换,因此它有两个实特征值 k_1,k_2, 就是曲面在该点的主曲率.

梅斯尼埃定理(Meusnier theorem) 曲面论的一个重要定理. 关于曲面上曲线的曲率中心的定理. 曲面上的曲线 C 在给定点 P 的曲率中心就是,和 C 有共同切线的法截线 $\bar{C}$ 在 P 点的曲率中心在曲线 C(在该点)的密切平面上的投影.

罗德里克公式(Rodriques formula) 刻画曲面上曲率线的特征的公式. 曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 为曲面 S 的曲率线的充分必要条件是存在函数 $\lambda(s)$, 使得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s}=-\lambda(s)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s},$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 沿曲线 C 的法向量场,这时,$\lambda(s)$ 正是曲面沿方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的主曲率. 上述命题称为罗德里克定理.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s}=-\lambda(s)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\quad\text{或}\quad\mathrm{d}\boldsymbol{n}=-\lambda(s)\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

称为罗德里克公式,其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{n}$ 是曲面的单位法向量场 $\boldsymbol{n}$ 沿切方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的微分.

罗德里克定理(Rodriques theorem) 见“罗德里克公式”.

高斯-科达齐方程(Gauss-Codazzi equations) 亦称曲面的基本方程或曲面的结构方程. 刻画曲面结构的重要等式. 曲面的第一类基本量 g_{ij}和第二类基本量 L_{ij}必须满足的条件. 高斯方程是

$$\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma_{ik}^l}{\partial u^j}+\sum_p(\Gamma_{ij}^p\Gamma_{pk}^l-\Gamma_{ik}^p\Gamma_{pj}^l)$$
$$=\sum g^{lm}(L_{ij}L_{mk}-L_{ik}L_{mj}),$$

其中 $i,j,k,l=1,2$; 科达齐(或称科达齐-迈因纳尔迪)方程是

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k}-\frac{\partial L_{ik}}{\partial u^j}=\sum_l(\Gamma_{ik}^lL_{lj}-\Gamma_{ij}^lL_{lk}),$$

其中 $i,j,k=1,2$. 从高斯方程可以得到高斯定理(参见“高斯绝妙定理”).

曲面的基本方程(fundamental equation of surfaces) 即“高斯-科达齐方程”.

曲面的结构方程(structural equation of surfaces) 即“高斯-科达齐方程”.

高斯绝妙定理(Gauss theorem egregium) 表达高斯曲率的一个定理. 曲面的高斯曲率 K 可以用曲面的第一类基本量及它们的一阶、二阶偏导数来表示,因此,高斯曲率是曲面的内蕴几何量. 该定理是高斯方程的直接推论. 它的发现是微分几何学发展史上的一个里程碑,由此产生了曲面的内蕴几何.

曲面论的基本定理(fundamental theorem for

surface theory） 关于曲面局部存在性、惟一性的定理. 设

$$\mathrm{I} = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j,\quad \mathrm{II} = \sum_{i,j=1}^{2} L_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$$

是任意给定的两个二次微分形式，其中 I 是正定的. 若 I 与 II 的系数 g_{ij} 和 L_{ij} 关于 i,j 是对称的且满足高斯方程和科达齐-迈因纳尔迪方程，则除了在空间中的位置差别外，存在惟一的一个曲面，以 I 和 II 分别为此曲面的第一和第二基本形式. 这就是曲面论的基本定理. 这说明曲面的第一、第二基本形式完全确定了曲面的形状.

测地曲率(geodesic curvature) 用于刻画曲面上曲线的内蕴弯曲程度的几何量. 若曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 上一曲线 $C:u^i=u^i(s)$ 作为 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线，其参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1(s),u^2(s))$，则 $k_g=(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{r}})\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{T})\cdot\dot{\boldsymbol{T}}$ 称为曲线 C 的测地曲率. 当曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 上的参数曲线网彼此正交时，计算 k_g 的公式为

$$k_g = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial u^2}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u^1}\sin\theta,$$

此公式称为刘维尔公式. 当曲面做等距变形时，它上面的曲线的测地曲率是不变的. 曲线 C 在 P 点的曲率 k，测地曲率 k_g 和沿其切方向的法曲率 k_n 之间有关系式 $k^2=k_g^2+k_n^2$.

刘维尔公式(Liouville formula) 见“测地曲率”.

测地线(geodesic) 平面上直线概念的推广. 若曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 上一条曲线 C 在每点的测地曲率都等于零，则称曲线 C 为曲面上的一条测地线. 球面上的大圆和圆柱面上的直母线和螺旋线都是相应曲面上的测地线. 测地线的微分方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2u^k}{\mathrm{d}s^2} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s} = 0.$$

在局部范围内，测地线是曲面上连结两点的曲线中弧长最短的曲线，因此，也称为短程线.

短程线(geodesic) 即“测地线”.

指数映射(exponential map) 切平面到曲面的一种映射. 设 T_P 是曲面 S 在 P 点的切平面，指数映射是从切平面 T_P 到曲面 S 上的一个对应关系，记成 $\exp:T_P\to S$，定义如下：设 $\boldsymbol{v}$ 是曲面 S 在 P 点的一个切向量，过 P 作 S 上切于 $\boldsymbol{v}$ 的测地线，在此测地线上取一点 M 使得从 P 到 M 的弧长正好等于 $\boldsymbol{v}$ 的长度 $|\boldsymbol{v}|$，则定义 $\exp\boldsymbol{v}=M$.

法坐标系(normal coordinate system) 曲面 S 上的一种特殊坐标系. 设 $\exp:T_PS\to S$ 是曲面 S 在 P 点的切平面 T_PS 到 S 上的指数映射，并且 U_P 是 S 上 P 点的一个邻域，使得 $\exp:V\subset T_PS\to U_P$ 是一一的、双向连续的映射. 设 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ 是 T_PS 上的一个单位正交标架，V 中任一向量 $\boldsymbol{v}$ 可以写成 $v^1\boldsymbol{e}_1+v^2\boldsymbol{e}_2$，再设 $\exp\boldsymbol{v}=M\subset U_P$，则定义 M 点的坐标是 (v^1,v^2). 这种坐标系就称为曲面 S 上 P 点邻域 U_P 中的法坐标系. 在这种坐标系下，S 上过 P 点切于 $\boldsymbol{v}$ 的测地线的方程简化为 $x^i=v^is$ $(i=1,2)$，其中 s 是从 P 点出发的测地弧长的 $1/|\boldsymbol{v}|$ 倍. 曲面的第一类基本量 E,F,G 在 P 点的值分别为 1,0,1，并且它们的一阶导数在 P 点的值均为 0.

测地坐标系(geodesic coordinate system) 曲面上的一种特殊坐标系. 在曲面上取一族测地线为 u 曲线，取这族测地线的正交轨线为 v 曲线(称为测地平行线). 这种坐标系称为测地坐标系. 例如，平面极坐标系，一族坐标曲线是由极点出发的射线，这是平面上的测地线，另一族坐标曲线是以极点为中心的同心圆，它们是上述测地线的正交轨线. 因此平面极坐标系是一种测地坐标系. 测地坐标系可由下面两种方法建立：在曲面上任取一曲线 C 为一条 v 曲线，再取与 C 正交的测地线族为 u 曲线，另取这测地线族的正交轨线为 v 曲线，从而得到的测地坐标网；由曲面上一个定点引各个方向的测地线为 u 曲线，再取这族测地线的正交轨线为 v 曲线，由此得到的测地坐标系也称为测地极坐标系. 在测地坐标系中，曲面的第一基本形式可化为

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + G(u,v)\mathrm{d}v^2.$$

测地平行线(geodesic parallel) 见“测地坐标系”.

测地极坐标系(system of geodesic polar coordinates) 见“测地坐标系”.

测地挠率(geodesic torsion) 曲面上测地线的挠率. 在曲面 S 上过一点 P 做以单位切向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 为初始方向的测地线 $C:u=u(s),v=v(s)$，C 在 P 点的挠率称为曲面 S 在 P 点关于 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向的测地挠率. 用 τ_g 表示，它可表示为

$$\tau_g = \left(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{n},\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s}\right)$$

或

$$\tau_g = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2 & -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} & \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix},$$

其中 s 为曲线 C 的弧长参数，$\boldsymbol{n}$ 为曲面在 P 点的法向量. 曲面上一条曲线 C 为曲率线的充分必要条件是在曲线 C 的每点处，关于曲线的切线方向的测地挠率为 0.

曲面上向量的平行移动(parallel translation of a vector on a surface) 曲面内蕴几何学的一个重

要概念.设在曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 上给定一条曲线 $C:u^1=u^1(t),u^2=u^2(t),a\leqslant t\leqslant b$,$\boldsymbol{w}(t)$ 是曲面沿曲线 C 定义的切向量场.设

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{w}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}(t)}{\mathrm{d}t}-\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n},$$

即 $\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{w}(t)}{\mathrm{d}t}$ 是 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t}$ 在曲面的切平面上的投影.于是 $\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{w}(t)}{\mathrm{d}t}$ 仍然是曲面沿曲线 C 定义的切向量场,称为向量场 $\boldsymbol{w}(t)$ 沿曲线 C 的绝对微商,或协变微商.$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}$ 作为微分算子有以下的性质:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{w}_1(t)+\boldsymbol{w}_2(t))=\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{w}_1(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{w}_2(t)}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}(f(t)\cdot\boldsymbol{w}(t))=f'(t)\boldsymbol{w}(t)+f(t)\cdot\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{w}(t)}{\mathrm{d}t}.$$

若切向量场 $\boldsymbol{w}(t)$ 满足条件 $\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{w}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{0}$,则称切向量场 $\boldsymbol{w}(t)$ 沿曲线 C 是平行的.若在点 $u_0^1=u^1(t_0),u_0^2=u^2(t_0)$ 任意给定曲面的一个切向量 $\boldsymbol{w}_0$,则存在惟一的一个沿曲线 C 平行的切向量场 $\boldsymbol{w}(t)$,使得 $\boldsymbol{w}(t_0)=\boldsymbol{w}_0$,此时称 $\boldsymbol{w}(t)$ 为 $\boldsymbol{w}_0$ 沿曲线 C 平行移动产生的切向量场.上述平行移动的概念是列维-齐维塔(Levi-Civita,T.)建立的,它只与曲面的第一基本形式有关,而与曲面在 R^3 中的等距变形无关.在列维-齐维塔平行移动的意义下,曲面上一条曲线是测地线的充分必要条件是该曲线的切向量场沿曲线本身是平行的.

常高斯曲率的曲面(surfaces with constant Gauss curvature) 一类重要的曲面.它是高斯曲率 K 为常数的曲面.在曲面上选择适当的参数系(u,v),可以使:

当 $K=\frac{1}{a^2}>0$ 时,$I=\mathrm{d}u^2+\cos^2\frac{u}{a}\mathrm{d}v^2$;

当 $K=-\frac{1}{a^2}<0$ 时,$I=\mathrm{d}u^2+\cos h^2\frac{u}{a}\mathrm{d}v^2$;

当 $K=0$ 时,$I=\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2$.

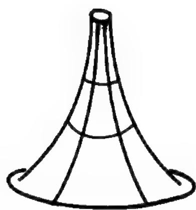
因为有相同常高斯曲率的曲面在局部上总是等距等价的,所以,$K=0$ 的曲面在局部上都与平面等距等价的;$K=1/a^2$ 的曲面在局部上都与半径为 a 的球面等距等价;$K=-1/a^2$ 的曲面在局部上都与伪球面等距等价.

伪球面(pseudo-sphere) 一类重要的曲面.它是高斯曲率为负常数的曲面.它是 xOz 平面上的曳物线

$$x=a\sin u,$$
$$z=\pm a\left(\ln\tan\frac{u}{2})\cos u\right)$$

绕 z 轴旋转而成的曲面:

$$x=a\sin u\cos v,$$
$$y=a\sin u\sin v,$$
$$z=\pm a\left(\ln\tan\frac{u}{2}+\cos u\right).$$



它在 $u=0$ 的点处是不光滑的,因而是非正则的.在正则点,其高斯曲率为 $K=-1/a^2$.它可以作为罗氏几何的一个模型.

常平均曲率曲面(surfaces with constant mean curvature) 一类重要的曲面.它是平均曲率 H 为常数的曲面.例如,球面是常平均曲率曲面.此外,将一椭圆在其平面内一条定直线 l 上滚动,其焦点所画出的平面曲面 C 绕直线 l 旋转所生成的旋转曲面也是常平均曲率曲面.上述命题称为德洛内定理.若曲线 C 的曲率半径为 R,C 的法线被曲线 C 与定直线所截的长为 N,则有关系式

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{N}=\text{常数}.$$

德洛内定理(Delaunay theorem) 见"常平均曲率曲面".

极小曲面(minimal surface) 一类重要的曲面.它是平均曲率 H 为零的曲面.若一条封闭曲线所围的曲面 S 具有极小面积,则 S 就是极小曲面.极小曲面的问题早在 18 世纪就已提出并有了例子(悬链面).后来的研究一直围绕着普拉托问题:给定空间中一条可求长的若尔当闭曲线 C,能否找到一个以 C 为其边界的极小曲面?直到 1931 年才由拉多(Radó,T.)和道格拉斯(Douglas,R.)在广义解的范围内证明了以 C 为边界的圆盘型极小曲面的存在性.到 1970 年,奥斯曼(Osserman,R.)才证得上述解在内部是处处正则的.关于极小曲面的研究中还有许多属于惟一性的问题,伯恩施坦定理就是最著名的结果.极小曲面的例子可参见"舍尔克曲面"和"恩内佩尔曲面"等.总之,这是一个十分活跃的研究领域.

极小曲面的外尔斯特拉斯公式(Weierstrass formula for minimal surfaces) 极小曲面的一种解析表示式.R^3 中的极小曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 的坐标分量 $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ 是等温参数的调和函数,它们是实解析的,所以任一单连通的极小曲面可表示为

$$x=\mathrm{Re}\int_0^{\xi}\frac{1}{2}f(1-g^2)\mathrm{d}\xi,$$

$$y=\mathrm{Re}\int_0^{\xi}\frac{\mathrm{i}}{2}f(1-g^2)\mathrm{d}\xi,$$

$$z=\mathrm{Re}\int_0^{\xi}fg\mathrm{d}\xi,$$

其中,$\xi\in D$,而 D 是单位开圆盘或全平面,$g(\xi)$ 是 D

上的亚纯函数，$f(\xi)$是 D 上的复解析函数，$f(\xi)$只在 $g(\xi)$的极点处为 0，且 $f(\xi)$的零点的阶数等于 $g(\xi)$的极点阶数的 2 倍．此表达式称为极小曲面的外尔斯特拉斯公式．

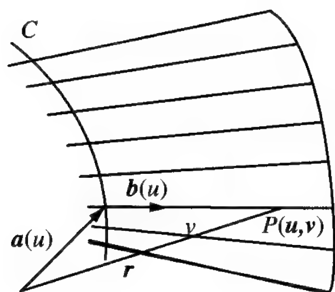
旋转曲面(rotation surface)　一类特殊的曲面．它是一条平面曲线绕着它所在的平面上一条固定直线旋转所生成的曲面．该直线称为旋转轴，曲面和过旋转轴的平面的交线称为经线或子午线，曲面和垂直于旋转轴的平面的交线称为纬线或平行圆．取旋转轴为 z 轴，若 yz 平面上的曲线的方程为

$$y=\varphi(t)>0,\ z=\psi(t)\ (a<t<b),$$

则它绕 z 轴旋转所得到的旋转曲面的参数方程为

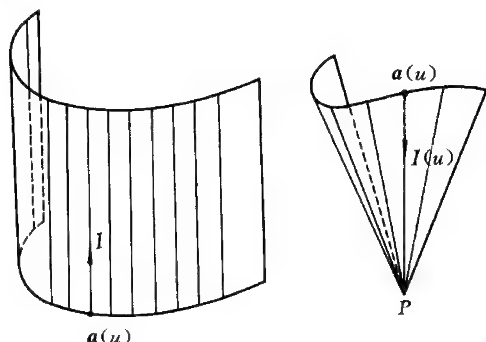
$$\boldsymbol{r}=\{\varphi(t)\cos\theta,\ \varphi(t)\sin\theta,\ \psi(t)\}$$
$$(0\leqslant\theta<2\pi,\ a<t<b).$$

直纹面(ruled surface)　一类特殊的曲面．它是由一条直线在空间 R^3 中移动所形成的曲面，这些直线称为直纹面的直母线．柱面、锥面、单叶双曲面、双曲抛物面(马鞍面)、空间曲线的切线曲面等都是直纹面．直纹面上和每一条直母线都相交的曲线称为直纹面的准线．若一条准线的参数表示为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u)$，通过点 $\boldsymbol{a}(u)$的直母线的方向矢量(或取成单

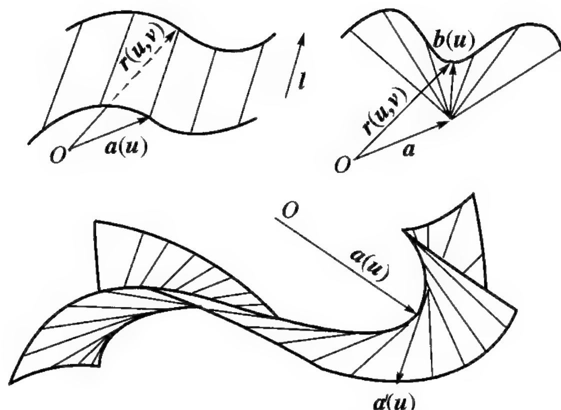


位矢量)为 $\boldsymbol{b}(u)$，则直纹面上的点 P 的矢径可以表示成 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$．这是直纹面的参数方程．

可展曲面(developable surface)　一类结构简单而又非常重要的直纹曲面．可展曲面是沿着每一条直母线有同一个切平面的直纹面．可展曲面分为柱面、锥面和切线曲面(一条曲线的切线形成的曲



面)(如图)．直纹面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u)$为可展曲面的条件是$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}')\equiv0$．可展曲面的主要特征为：它是



单参数平面族的包络面，其高斯曲率恒等于零，并且它在局部上可以与平面建立等距对应(即展为平面)．

悬链面(catenoid)　一种特殊的曲面．它是旋转极小曲面．在笛卡儿直角坐标系中，将 yz 面上的悬链线 $y=a\mathrm{ch}(z/a)$绕 z 轴旋转生成的曲面，其参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\left\{a\ \mathrm{ch}\ \frac{t}{a}\cos\ \theta,a\ \mathrm{ch}\ \frac{t}{a}\sin\ \theta,t\right\}$$
$$(-\infty<t<+\infty,0\leqslant\theta<2\pi).$$

悬链面是极小曲面；非平面的旋转极小曲面只有悬链面．悬链面与正螺面成等距对应．

正螺面(circular helicoid)　一种特殊的曲面．它是直纹极小曲面．一曲线 C 绕直线 l 以定角速度旋转，同时沿直线 l 的方向等速移动所生成的曲面．若取直线 l 为 z 轴，曲线 C 为与 z 垂直相交的直线时，产生的螺旋面称为正螺面．正螺面的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\{u\ \cos\ \theta,u\ \sin\ \theta,a\theta\}\ (-\infty<u,\theta<+\infty).$$

正螺面是惟一的直纹极小曲面．

外恩加滕曲面(Weingarten surface)　一类特殊的曲面．它是在两个主曲率 k_1,k_2 之间存在着函数关系 $f(k_1,k_2)=0$ 的曲面，简称 W 曲面．例如：常平均曲率曲面的主曲率满足关系式 $k_1+k_2=c$；常高斯曲率曲面的主曲率满足关系式 $k_1k_2=c$，所以它们都是外恩加滕曲面．

共焦二次曲面(the confocal quadrics)　一类特殊的二次曲面．以原点为中心的一族二次曲面：

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1\ (a^2<b^2<c^2),$$

其中 λ 为参数．这样的一族曲面称为共焦二次曲面．当 $-\infty<\lambda<a^2$ 时得到一族椭圆面；当 $a^2<\lambda<b^2$ 时得到一族单叶双曲面；当 $b^2<\lambda<c^2$ 时得到一族双叶双曲面．这三族曲面构成三重正交曲面系．迪潘定理：在一个三重正交曲面系中，每两个不同族的曲面的交线在这两个曲面上都是曲率线．

迪潘定理(Dupin theorem)　见“共焦二次曲面”．

舍尔克曲面(Scherk surface) 一种特殊的曲面. 它是平移极小曲面. 方程为

$$z=\frac{1}{a}\ln\frac{\cos ay}{\cos ax}\quad (a\neq 0)$$

的曲面. 它是完备极小曲面的一个例子.

平移曲面(translate surface) 方程为 $z=f(x)+g(y)$ 的曲面, 极小的平移曲面是舍尔克曲面.

恩内佩尔曲面(Enneper's surface) 一种重要的极小曲面. 在外尔斯特拉斯公式中, 令 $f=2, g=\zeta=u+\mathrm{i}v, D=\mathbb{R}$, 得

$$\begin{cases} x=u+uv^2-\dfrac{1}{3}u^3, \\ y=-v-u^2v+\dfrac{1}{3}v^3, \\ z=u^2-v^2 \end{cases}$$
$$((u,v)\in\mathbb{R}^2).$$

该曲面称为恩内佩尔曲面. 它是代数曲面, 其高斯映射是一对一的(球面上一点除外). 它是完备极小曲面.

曲面的定向(orientation of a surface) 研究曲面整体性质的一个重要概念. 所谓曲面 S 是可定向的, 是指 S 能被一族坐标邻域所覆盖, 使得: 若点 $P\in S$ 属于族中两个坐标邻域, 它们的参数表示分别为 $\boldsymbol{r}(u,v), \boldsymbol{r}(\bar{u},\bar{v})$, 其中 $\bar{u}=\bar{u}(u,v), \bar{v}=\bar{v}(u,v)$, 则坐标变换的雅可比行列式

$$\det\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial u} & \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial u} & \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial v}\end{vmatrix}>0.$$

这样一族坐标邻域的选取称为曲面的一个定向, 给定定向的曲面 S 称为定向曲面. 否则, 曲面称为是不可定向的. 从直观上讲, 定向曲面有连续变化的、确定的法向量场; 也就是说, 当法向量沿着曲面上任一连续闭曲线变动一周时, 它回到出发点位置且不改变正向. 许多常见的曲面, 如平面、球面、环面等都是可定向的, 不可定向曲面的最著名例子是默比乌斯带.

定向曲面(orientable surface) 见"曲面的定向".

曲面族的包络(envelope of the family of surfaces) 以某种方式与一族曲面相切的曲面. 设有曲面族 $\{S_\lambda\}$, 若有一个曲面 Σ, 在 Σ 的每一点上均与曲面族 $\{S_\lambda\}$ 中的一个曲面 S_λ 相切, 则称 Σ 为曲面族 $\{S_\lambda\}$ 的包络面. 若单参数曲面族 $\{S_\lambda\}$ 的方程是 $F(x,y,\lambda)=0$, 则 Σ 的方程可由

$$F(x,y,\lambda)=0 \quad 与 \quad \frac{\partial}{\partial\lambda}F(x,y,\lambda)=0$$

消去 λ 而得到(不含 S_λ 的奇点时). 曲面族 $\{S_\lambda\}$ 中邻近二曲面 S_λ 与 $S_{\lambda+\Delta\lambda}$ 的交线, 当 $\Delta\lambda\to 0$ 时的极限位置称为曲面 S_λ 的特征线. $\{S_\lambda\}$ 的包络面可以看成 S_λ 的特征线生成的. 特征线族若有包络, 则称为曲面族 $\{S_\lambda\}$ 的脊线. 脊线的参数方程可由

$$F=0,\quad \frac{\partial F}{\partial\lambda}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2}=0$$

解出 x,y,z 得到. 特别地, 单参数平面族的包络面是可展曲面, 它的特征线是直线. 若这族特征线(单参数直线族)有包络线 C, 即该族平面有脊线 C, 则其包络面就是曲线 C 的切线曲面. 包络理论在机械、工程技术等领域中有广泛的应用.

曲面族的包络面(envelope of a family of surfaces) 见"曲面族的包络".

曲面的特征线(characteristic line of surfaces) 见"曲面族的包络".

脊线(edge of regression) 见"曲面族的包络".

高斯-博内公式(Gauss-Bonnet formula) 整体微分几何的一个重要公式. 它将曲面的几何量和曲面的拓扑量联系起来. 若 D 为定向曲面 S 上由若干条简单闭曲线 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 围成的区域, 每一条 C_i 是分段正则且正定向的, 并且 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p$ 是曲线 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的外角全体, 则有下列高斯-博内公式

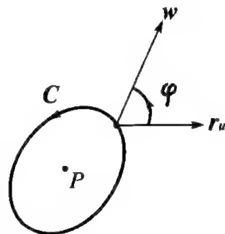
$$\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i}k_g(s)\mathrm{d}s+\iint_D K\mathrm{d}\sigma+\sum_{i=1}^{p}\theta_i=2\pi\chi(D),$$

式中 K 为曲面的高斯曲率, $\mathrm{d}\sigma$ 为面积元素, k_g 为 C_i 的测地曲率, s 表示 C_i 的弧长, C_i 上的积分是指在 C_i 的每一正则弧上的积分之和, $\chi(D)$ 表示区域 D 的欧拉-庞加莱示性数. 特别地, 对于可定向的紧致(无边)曲面 S, 有

$$\iint_S K\mathrm{d}\sigma=2\pi\chi(S),$$

其中 $\chi(S)$ 是紧致曲面 S 的欧拉-庞加莱示性数, 它完全给出了紧致定向曲面的拓扑分类. 由上式可见, 正曲率的紧致闭曲面必同胚于标准球面. 高斯-博内公式在高维流形上的推广是由艾伦多弗(Allendoerfer, C. B.)、陈省身完成的.

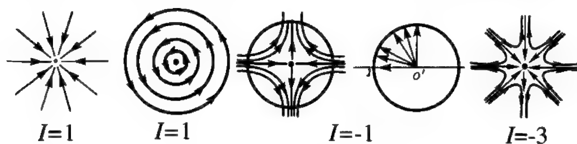
向量场奇点的指标(index of a vector field at a singular point) 曲面上向量场的一个重要概念. 若在曲面上每一点指定一个该点的切向量与之对应, 则称在曲面上给定了一个向量场. 若这种对应是可微分的, 则称为可微向量场. 使向量场中的向量成为零向量的点称为向量场的奇点. 对于向量场的一个奇点, 若存在包含该点的一个邻域, 使其中没有其他奇点, 则称此奇点为向量场的



孤立奇点. 设点 P 是曲面 $S:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上向量场 $\boldsymbol{w}$ 的孤立奇点，在 P 的一个适当的邻域中做一条长度为 l 的闭曲线 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，$s$ 为弧长参数，$0\leqslant s\leqslant l$. 沿曲线 C，设 $\boldsymbol{w}$ 与 $\boldsymbol{r}_u\left(=\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right)\right)$ 的交角为 φ，则

$$I=\frac{1}{2\pi}[\varphi(l)-\varphi(0)],$$

称为孤立奇点 P 的指标. 它表示当点绕 C 运动一周时，$\boldsymbol{w}$ 上的单位向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕 O 点所转的圈数，这是一个与曲线 C 及曲面的坐标系的选取无关的量，下图表示在 xOy 平面上以(0,0)为奇点的向量场指标，



图中的曲线是向量场的积分曲线族. 注意，当点 P 不是向量场 $\boldsymbol{w}$ 的奇点时，上述指标的定义仍然有效，它的指标为零.

可微向量场(a differentiable vector field)　见"向量场奇点的指标".

向量场的奇点(singular point of a vector field)　见"向量场奇点的指标".

向量场的孤立奇点(isolated singular point of a vector field)　见"向量场奇点的指标".

庞加莱定理(Poincaré theorem)　关于紧致曲面上向量场奇点指标的一个定理. 若 V 是紧致可定向曲面上仅有孤立奇点的向量场，则 V 的指标之和等于曲面的欧拉-庞加莱示性数，即

$$\sum_i I_i=\chi,$$

式中 I_i 表示 V 在孤立点 P_i 处的指标，i 是一个有限数，χ 是曲面的欧拉-庞加莱示性数. 这个结果表明，对于紧致可定向曲面，$\sum_i I_i$ 不依赖于向量场 V 而只与曲面的拓扑有关. 例如，在任何同胚于球面的曲面上，任何只有孤立奇点的向量场，其指标和必为 2，也就是说，在这种曲面上不存在无奇点的向量场. 这个定理是由庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)所发现，由此得名.

球面的刚性(rigidity of sphere)　球面的一种不可变形性质. 与球面成等距对应的紧致闭曲面必是球面. 直观地，要将由可弯曲、但无弹性的物质做成的球面进行变形是不可能的. 球面的这个性质建立在下列李卜曼定理的基础上：R^3 中高斯曲率为常数的紧致连通闭曲面必为球面. 由于高斯曲率是一个等距不变量，因此立刻得到球面的刚性. 有关球面刚性的结果还有：

1. R^3 中平均曲率为常数，且高斯曲率大于零的紧致连通闭曲面必为球面.

2. 对于 R^3 中高斯曲率大于零的紧致连通闭曲面，若一个主曲率是另一个主曲率的递减函数，则此曲面必为球面.

卵形面(ovaloid)　一类有显明几何特征的紧致闭曲面. 高斯曲率处处为正的曲面称为凸曲面. 紧致的凸闭曲面称为卵形面. 对于卵形面有著名的阿达马定理：卵形面 S 的高斯映射 $N:S\to S^2$(S^2 为单位球面)是微分同胚. 因此，卵形面微分同胚于球面，且位于其上每点的切平面的一侧.

凸曲面(convex surface)　见"卵形面".

科恩-福森定理(Cohen-Vossen theorem)　卵形面的一个刚性定理，由德国数学家科恩(Cohen)和福森(Vossen)于 1927 年得到. R^3 中两个等距对应的卵形面是合同的，即它们最多只差 R^3 中的一个运动或一个运动和一个反射的复合. 此定理也解决了著名的外尔问题的惟一性. 所谓外尔问题是：已给定义在单位球面上的一个具有正高斯曲率度量二次微分形式 $\mathrm{d}s^2$，在 R^3 中是否存在一张卵形面，使它的第一基本形式就是给定的 $\mathrm{d}s^2$.

闵科夫斯基问题的惟一性(uniqueness of the Minkowski problem)　卵形面的一种刚性. 所谓闵科夫斯基问题是：已给定义在具有单位内法向量场 $\boldsymbol{e}_3$ 的单位球面 S^2 上的一个正函数 $K(\boldsymbol{e}_3)$，在 R^3 中是否存在一张卵形面，使它在单位内法向量为 $\boldsymbol{e}_3$ 的点，其高斯曲率为 $K(\boldsymbol{e}_3)$. 这个问题的惟一性可由下述卵形面的性质确定：若 $S,\bar{S}$ 是 R^3 中两张卵形面，$f:S\to\bar{S}$ 是微分同胚，并使得 $S,\bar{S}$ 的对应点有相同的单位内法向量和相等的高斯曲率，则 f 是一个平移. 上述结果还可推广如下：设 $S,\bar{S}$ 是 R^3 中分别具有闭边界 C 和 $\bar{C}$ 的定向紧致凸曲面，$f:S\to\bar{S}$ 是微分问题，使得在对应点具有相同的单位内法向量和相等的高斯曲率，若 f 在 C 上的限制是 C 到 $\bar{C}$ 上的平移，则 f 对于整个 S 和 $\bar{S}$ 是一个平移.

克里斯托费尔问题的惟一性(uniqueness of the Christoffel problem)　卵形面的一种刚性. 所谓克里斯托费尔问题是：已给定义在具有单位内法向量 $\boldsymbol{e}_3$ 的单位球面 S^2 上的一个正函数 $f(\boldsymbol{e}_3)$，在 R^3 中是否存在一张卵形面，使它在单位内法向量为 $\boldsymbol{e}_3$ 的点的主曲率半径之和为 $f(\boldsymbol{e}_3)$. 这个问题的惟一性可由下述卵形面的性质确定：若 $S,\bar{S}$ 是 R^3 中两张卵形面，$f:S\to\bar{S}$ 是微分同胚，使得 S 和 $\bar{S}$ 在对应点有相同的单位内法向量及相等的主曲率半径之和，则 f 是一个平移. 上述性质还可推广如下：若 $S,\bar{S}$ 是 R^3 中分别具有闭边界 C 和 $\bar{C}$ 的可定向紧致凸曲面，$f:S\to\bar{S}$ 是可微同胚，使得 S 和 $\bar{S}$ 的每对对应点有相同的单位法向量和相等的主曲率半径之和，并且使两边界 C 和 $\bar{C}$ 在对应点有相同的切向量及相等的

弧长元素，则 f 是一个平移.

完备曲面(complete surface)　亦称测地完备曲面. 一种重要的曲面. 它是二维完备黎曼流形(参见“霍普夫-雷诺定理”).

测地完备曲面(geodesically complete surface)　即“完备曲面”.

完备的负曲率曲面(complete surfaces with negative curvature)　一类完备曲面. 指高斯曲率为负的完备曲面. 在欧氏空间 R^3 中不存在紧致连通的负常曲率曲面. 对于完备的负常曲率曲面，希尔伯特(Hilbert, D.)于 1901 年证得：在 R^3 中不存在 C^2 阶完备连通的负常曲率曲面. 这里，曲面为 C^2 阶的条件是必要的，因为欠伯(Kuiper, N. H.)于 1955 年给出了具有度量

$$ds^2 = \frac{1}{v}(du^2 + dv^2)$$

的上半平面(即 $v>0$)到 R^3 中的一个 C^1 阶等距嵌入，而此时的高斯曲率 $K=-1<0$.

苏联数学家叶菲莫夫(Ефимов, Н. В.)于 1964 年解决了科恩-福森的一个猜想，把上述希尔伯特定理推广为：在 R^3 中不存高斯曲率 $K\leqslant\delta<0$ 的 C^2 阶完备曲面. 米尔诺(Milnor, T. K.)于 1972 年给出了叶菲莫夫定理的更清晰证明，其中也包含了希尔伯特定理的一个证明.

完备的平坦曲面(complete flat surfaces)　一类完备曲面. 高斯曲率恒等于零的完备曲面. 从局部微分几何可知，R^3 中平坦曲面是可展曲面，即局部地是柱面，或锥面，或切线曲面(参见“可展曲面”). 从整体观点来考虑，R^3 中一张完备的平坦曲面必是平面或柱面(柱面 S 的定义如下：过每一点 $p\in S$ 都有惟一的直线 $l(p)\subset S$，使得 $q\neq p$ 时，$l(p)$ 和 $l(q)$ 或者平行，或者重合). 这个结果最早是由哈特曼(Hartman, P.)和尼伦伯格(Nirenberg, L.)于 1959 年作为一个定理的推论而得出的. 后来，马西(Massey, W. S.)和司督克(Stoker, J.)分别给出了这个定理的直接而初等的证明.

极小曲面的伯恩施坦定理(Bernstein theorem for minimal surfaces)　关于极小曲面整体惟一性的定理. R^3 中不存在紧致的极小曲面. 对于完备的极小曲面，伯恩施坦(Bernstein, S.)于 1915 年证明：在全平面上定义的极小曲面 $z=f(x,y)$ 必是平面. 这是一个极小曲面惟一性方面的经典定理. 作为伯恩施坦定理的推广，人们很早就提出这样的问题：若 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 R^{n+1} 中的一个极小超曲面，它对于所有的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都有定义，则 f 是否必为线性函数？迪乔吉(de Giorgi, E.)于 1965 年证明：当 $n=3$ 时是对的；阿姆格伦(Almgren, F. J.)于 1966 年证明：当 $n=4$ 时是对的；西蒙斯(Simons, J.)于 1967 年证明：当 $n\leqslant7$ 时都是对的. 但是，邦别里(Bombieri, E.)、迪乔吉和朱斯蒂(Giusti, E.)于 1969 年联合证明：当 $n\geqslant8$ 时是不对的. 因此，这是极小曲面研究中很有趣的一个结果.

另一方面，对于非参数化曲面 $z=f(x,y)$，其上每点的法向量与某一固定方向所成的角不大于 $\pi/2$，即曲面的高斯映射的像落在单位球面 S^2 的某个闭半球面中. 因此，伯恩施坦定理的另一种推广是下列尼伦伯格猜想：设 M 是 R^3 中完备正则的极小曲面，若它的高斯映射的像缺少 S^2 上的一个开邻域，则 M 必是平面. 这个猜想被奥斯曼(Osserman, R.)于 1959 年证实. 后来人们又做了许多改进. 夏维尔(Xiavier, F.)于 1981 年证得如下结果：R^3 中非平坦的完备极小曲面的高斯像至多缺少 S^2 上 6 个点. 这是一个重大的改进，但没有达到最佳，因为舍尔克极小曲面的高斯像缺少 S^2 上 4 个点. 直到 1988 年，藤本才得到这方面的最佳结果：R^3 中非平坦的完备极小曲面的高斯像至多缺少 S^2 上 4 个点.

霍普夫猜想(Hopf conjecture)　关于常平均曲率曲面的一个猜想. 具有常平均曲率的凸闭曲面必是球面(参见“球面的刚性”). 霍普夫(Hopf, H.)证明：亏格为零的常平均曲率闭曲面必是球面. 他于 1950 年提出以下猜想：R^3 中常平均曲率的紧致闭曲面必是球面. 这个问题直至 1985 年怀特(Wente, H. C.)构造出了 R^3 中亏格为 1 的常平均曲率紧致闭曲面，给出了明确的否定回答. 此后，人们又构造出具有任意亏格的常平均曲率紧致曲面.

全平均曲率(total mean curvature)　表征曲面整体性质的一个重要外在概念. 设 S 是 R^3 中的紧致连通闭曲面，它的平均曲率为 H，积分

$$\iint_S H^2 dA$$

称为曲面 S 的全平均曲率，这里 dA 是曲面 S 的面积元素. 它是由威尔莫(Willmore, T. J.)于 1965 年首先提出的. 对于全平均曲率，有不等式

$$\iint_S H^2 dA \geqslant 4\pi,$$

式中等号当且仅当 S 为 R^3 中的球面时成立. 对于空间闭曲线 Γ 所形成的管状曲面 M^2(由曲线 Γ 上每点的法平面上以此点为中心、半径为常数 C 的圆所构成的曲面)，则有

$$\iint_{M^2} M^2 dA \geqslant 2\pi^2,$$

式中等号成立当且仅当 Γ 为圆周，M^2 为圆环面，且法平面上的圆半径与 Γ 的半径之比为 $1/\sqrt{2}$. 由此不等式，威尔莫提出以下猜想：对于 R^3 中任何亏格为 1 的紧致闭曲面 T^2，恒有

$$\iint_{T^2} H^2 \mathrm{d}A \geqslant 2\pi^2.$$

这个猜想至今尚未解决. 关于全平均曲率的概念,已被陈邦炎等推广到高维子流形上去.

威尔莫猜想(Willmore's conjecture) 见"全平均曲率".

绝对全曲率(total absolute curvature) 表征曲面整体性质的一个重要内蕴概念. 设 S 是 R^3 中的紧致连通闭曲面,K 是它的高斯曲率,积分

$$\iint_S |K| \mathrm{d}A$$

称为曲面 S 的绝对全曲率,这里 $\mathrm{d}A$ 是曲面 S 的面积元素. 曲面的绝对全曲率满足不等式

$$\iint_S |K| \mathrm{d}A \geqslant 2\pi(4-\chi),$$

这里 χ 是曲面欧拉-庞加莱示性数,式中等号当且仅当 S 是卵形面时成立. 绝对全曲率的概念已被陈省身、拉肖夫(Lashof,R. K.)等推广到高维子流形上去.

直线汇(linear congruence) 含有两个参数的直线族. 一个直线汇可用下面方程给定

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}(u^1,u^2) + v\boldsymbol{R}(u^1,u^2),$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 是线汇中直线的单位方向向量,$\boldsymbol{\rho}$ 是线汇的支持曲面上点的向径. 支持曲面的选取是任意的. 线汇中的直线称为射线. 把线汇中每一条射线换成单位球面上向径为 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(u^1,u^2)$ 的一点,则得到直线汇的球面像. 其球面像退化成一条曲线的线汇,称为柱形线汇. 线汇理论开始于 1828—1830 年哈密顿(Hamilton,W. R.)的研究. 哈密顿于 1860 年在其经典论文《llgemeine Thoerie der Geradlinigen strahlensysteme》中对直线汇做了系统讨论. 后来桑纳(Sannia)于 1908 年又做了进一步研究. 线汇论是微分几何、代数几何中的有趣内容. 线汇中两条无限接近的射线交角的平方:

$$\Delta\varphi^2 \approx \mathrm{d}\boldsymbol{R}^2 = \gamma_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j = \mathrm{I}\ ,$$

其中 $\gamma_{ij}=\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{R}_j=\partial_i\boldsymbol{R}\partial_j\boldsymbol{R}$ 是球面映像的基本度量张量. 线汇中两条无限接近的射线(其方向分别是 $\boldsymbol{R}$,$\boldsymbol{R}+\mathrm{d}\boldsymbol{R}$)间的最短距离的主要部分

$$\Delta l \approx \frac{(\boldsymbol{R},\mathrm{d}\boldsymbol{R},\mathrm{d}\boldsymbol{\rho})}{|\boldsymbol{R}\times\mathrm{d}\boldsymbol{R}|},$$

其中 $(\boldsymbol{R}\times\mathrm{d}\boldsymbol{R})^2=\mathrm{d}\boldsymbol{R}^2\approx\Delta\varphi^2$. 因此

$$p = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta\varphi} = \frac{(\boldsymbol{R},\mathrm{d}\boldsymbol{R},\mathrm{d}\boldsymbol{\rho})}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}^2}.$$

引进系数

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}_i,\boldsymbol{R}_j)+(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}_j,\boldsymbol{R}_i)\},$$

则称 $\mathrm{II}=\mu_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$ 为直线汇的第二基本形式. Ⅰ,Ⅱ都是坐标变换下的不变量. μ_{ij} 是给定的单位球面上的张量系数. 直线汇中任意抽出单参数直线族,构成直纹面,称为属于线汇的直纹面. 其内蕴方程为:$u^i=u^i(t)$ $(i=1,2)$. 属于线汇的直纹面的分布参数

$$p = \frac{(\boldsymbol{R},\mathrm{d}\boldsymbol{R},\mathrm{d}\boldsymbol{\rho})}{\mathrm{d}\boldsymbol{R}^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}.$$

因此,p 仅仅依赖于这个直纹面的球面像(为一条曲线)的切线方向.

柱形线汇(cylindroid linear congruence) 见"直线汇".

线汇的射线(ray of a congruence) 见"直线汇".

线汇的平均参数(mean parameter of a linear congruence) 线汇的一种特殊参数. 张量 μ_{ij} 的主方向及主值称为线汇的主方向及主值. 设 a^i,$\tilde{a}^i$ 为线汇的两单位主方向,p_1,p_2 为对应的主值. $v^i=a^i\cos\varphi+\tilde{a}^i\sin\varphi$ 为单位球面上的任意单位向量. 则

$$\mu_{ij}v^iv^j = \mu_{ij}a^ia^j\cos^2\varphi + \mu_{ij}\tilde{a}^i\tilde{a}^j\sin^2\varphi,$$

$$p = \mu_{ij}v^iv^j,\quad p_1 = \mu_{ij}a_ia_j,\quad p_2 = \mu_{ij}\tilde{a}^i\tilde{a}^j$$

分别表示沿方向 v^i 及主方向 a^i,$\tilde{a}^i$ 的分布参数. p_1,p_2 称为线汇的两个主参数. 因此

$$p = p_1\cos^2\varphi + p_2\sin^2\varphi.$$

设 $2h=p_1+p_2$,$K=p_1p_2$,分别称为线汇的平均参数及全参数. 依据张量 μ_{ij} 是属于椭圆型、双曲型或抛物型,线汇里的对应射线分别称为椭圆射线、双曲射线和抛物射线. 全参数等于正数、负数或零就表示这几种射线的特征.

线汇的主参数(principal parameter) 见"线汇的平均参数".

线汇的全参数(total parameter of a linear congruence) 见"线汇的平均参数".

椭圆射线(elliptic ray) 见"线汇的平均参数".

双曲射线(hyperbolic ray) 见"线汇的平均参数".

抛物射线(parabolic ray) 见"线汇的平均参数".

迷向线汇(isotropic congruence) 一类直线汇. 指两个主参数相等的直线汇. 其特征是基本形式的系数成比例:

$$\mu_{ij} = \lambda\gamma_{ij}.$$

线汇的可展曲面(developable surface of a linear congruence) 一类直纹面. 指分布参数等于零的属于线汇的直纹面. 在单位球面上,微分方程 $\mu_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j=0$ 的积分曲线就对应线汇的可展曲面,按照张量 μ_{ij} 的不同类型,这些积分曲线包含不重合的两组实曲线、虚曲线和重合的两组曲线的曲线网. 在双曲射线区域内,线汇包含两族可展曲面;在抛物线区域内这两族可展曲面重合;而在椭圆射线区域内,实

可展曲面不存在.

焦曲面(focal surface) 由线汇确定的一种特殊曲面.经过线汇的任何一条射线,一般可引两个可展曲面.各射线与各可展曲面的脊线有一个切点,称为该射线的焦点.每条射线上有两个焦点,它们的轨迹称为双叶焦曲面.线汇中射线 l 上的两焦点的中点,称为射线 l 的中点,中点的轨迹称为线汇的中点曲面.

射线的焦点(focal point of ray) 见"焦曲面".

双叶焦曲面(focal surface of two sheets) 见"焦曲面".

线汇的中点曲面(middle point surface) 见"焦曲面".

焦平面(focal plane) 属于线汇的可展曲面的切平面.经过一条双曲型射线有两个焦平面.线汇的焦平面的交角等于向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{R}$ 和 $\delta\boldsymbol{R}$ 的交角.其中 d 和 δ 是沿线汇的支持曲面上两不同曲线(它们对应两个不同的可展曲面)方向的微分记号.

极小线汇(minimal congruence) 一类特殊的线汇.双叶焦曲面都是可展曲面,且它们的脊线都是极小曲线的直线汇.对应的焦曲面称为极小可展曲面.直线汇为极小的充分必要条件是任何线汇中的直纹面的缔括线(直纹面的母线中心的轨迹)总是落在它的中点曲面上.

法线汇(normal linear congruence) 一类特殊的线汇.线汇中每条射线都是某曲面的法线.一个线汇关于曲面 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}(u^1,u^2)$ 是法线汇,则它关于由方程

$$\boldsymbol{\rho}_1=\boldsymbol{\rho}(u^1,u^2)+C\boldsymbol{R}(u^1,u_2)$$

所决定的整个曲面族也是法线汇.该族中任意两曲面称为平行曲面.任意常数 C 表示两平行曲面对应点间的距离.直线汇为法线汇的充分必要条件是其平均参数为零,亦即 $2h=\gamma^{ij}\mu_{ij}=0$.法线汇的另一特征是它的焦平面互相垂直.

平行曲面(parallel surfaces) 见"法线汇".

***W* 线汇**(*W*-linear congruence) 一类特殊的线汇.设线汇中射线在两个焦曲面上决定一种对应,在这种对应下焦曲面的渐近线相互对应.这时就说线汇属于 W 类.一个外恩加滕曲面的法线汇具有上述性质,这便是 W 线汇名称的由来.若直线汇的两焦曲面方程分别为:

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}+\rho\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}-\rho\boldsymbol{R},$$

K_1,K_2 是它们各自的全曲率,两焦点间的距离为 2ρ,两焦平面的夹角为 θ,则线汇为 W 线汇的充分必要条件为

$$K_1K_2=\left(\frac{\sin\theta}{2\rho}\right)^4.$$

伪球线汇(pseudo-spherical congruence) 一种重要而特殊的线汇.设线汇的两个焦曲面(假设存在,例如在双曲型线汇情形)分别记为 M,M^*,线汇是 M,M^* 的公共切线族.$\varphi:M\to M^*$ 是自然映射,它使 M 上的焦点 x 映成 M^* 上的对应焦点 $x^*=\varphi(x)$.称这样的线汇为伪球线汇,如果它满足:

1. $|x-x^*|=r, r=\text{const}$.

2. 对应点 x,x^* 处 M,M^* 的单位法向量 $\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3^*$ 交成定角 τ,亦即 $\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3^*=\cos\tau,\tau=\text{const}$.

伪球线汇的两个焦曲面 M,M^* 具有相等的负常数高斯曲率

$$K=-\left(\frac{\sin\tau}{r}\right)^2,$$

这一结果通常称之为白克龙定理.由上述结果,若线汇的一个焦曲面具有常负高斯曲率 $K=-1$,则另一个焦曲面亦然.于是,它们分别为 SG(Sine-Gordon)方程的解.因此,从 SG 方程的已知解构造新解的问题归结为如何从常负曲率曲面 M 构造一个伪球线汇的问题.这就是白克龙变换的几何表述.

白克龙变换(Backlund transformation) 见"伪球线汇".

撰　稿　王新民　吕德正　刘继志　吴国强　邹文斌
张宗芳　郭孝英　沈一兵　雒　斌
审　阅　白正国　吴祖基　梅向明

微分流形与黎曼几何

黎曼几何(Riemannian geometry) 微分几何的一个重要分支,由德国数学家黎曼(Riemann,(G.F.)B.)于 19 世纪中期所开创.他于 1854 年在哥丁根大学所做的就职演说"关于几何学基础的假设"是黎曼几何的发端.后经克里斯托费尔(Christoffel,E.B.)、里奇(Ricci,C.G.)、列维-齐维塔(Levi-Civita,T.)等人进一步完善和发展,成为爱因斯坦(Einstein,A.)于 1905 年创立广义相对论的有力数学工具,也使黎曼几何得以蓬勃发展.嘉当(Cartan,E.)建立的外微分形式和活动标架法,使李群与黎曼几何沟通起来,为黎曼几何的发展开辟了广阔的前途,影响极为深远.近半个世纪以来,黎曼几何的研究从"局部"发展到"整体",产生了许多深刻的并在其他数学分支(如拓扑学、偏微分方程论、多复变函数论等)及理论物理中有重要影响的结果.现在,黎曼几何已成了现代数学的重要内容之一.

黎曼几何是黎曼流形上的几何学,黎曼流形是局部欧氏化的微分流形.设 M 是 n 维微分流形,若在每点 $p\in M$ 的切空间中给定一个光滑依赖于 p 的欧氏度量 g_p(即正定数积),则(M,g)就成为黎曼流形,g 称为黎曼度量.当 g 与点 p 无关时,就得到通常的欧氏空间.黎曼的杰出创造之处就在于把度

量看成是附加到流形上去的一个结构，一个流形可赋予众多的黎曼度量.

微分流形上的另一重要结构是一个向量场 Y 沿另一向量 X 方向的共变导数 $\nabla_X Y$，即流形上的仿射联络. 黎曼几何的基本定理称：一个黎曼流形 (M, g) 上存在惟一的与黎曼内积相容的无挠仿射联络 ∇，称为黎曼联络，或列维-齐维塔联络. 由此产生张量场沿曲线的平行移动. 作为欧氏空间中直线的推广，黎曼流形上的测地线便是曲线的切向量场沿曲线自身平行的曲线. 黎曼流形上测地线的性态在很大程度上与它的黎曼曲率张量有关，后者使黎曼流形在每点有三种曲率：由两个独立方向确定的截面曲率；关于一个方向的里奇曲率；作为点函数的数量曲率，它们都是经典曲面论中高斯曲率的推广，以不同方式反映黎曼流形在一点附近的"弯曲"程度. 由黎曼联络可导出黎曼流形上的各种微分算子，如外微分算子、拉普拉斯算子等. 霍奇理论揭示了紧致流形上调和形式空间与流形拓扑的关系. 尤其是反映黎曼流形整体性质的基本群、贝蒂(Betti, E.)数、陈省身示性类等都蕴含着与黎曼曲率张量有关的丰富几何信息. 黎曼流形上分析与拓扑的发展最终导致阿蒂亚-辛格指标定理的产生，这是 20 世纪最重大的数学成果之一.

在测地线理论中，霍普夫-雷诺定理刻画了完备黎曼流形的几何特征. 莫尔斯理论、闭测地线、各种比较定理等把整体黎曼几何的研究推向新的阶段，新概念新成果层出不穷. 此外，等距对应、共形变换、调和映射、子流形几何等也都是黎曼几何研究的重要课题，有的还与物理学相沟通. 凡此种种，都显示了黎曼几何的强大活力，可以相信，在 21 世纪中，黎曼几何必将有更大的发展和变化.

向量场(vector field)　黎曼几何的重要概念. 微分流形到其切丛的映射，它在 M 的每点 x 指定一个 M 在 x 点的切向量 X_x，即 $X: M\to TM, x\to X_x\in T_xM$. M 上的向量场就是 M 的切丛上的截面. 对于 $f\in C^k(M)$，设 $(Xf)(x)=X_xf$. 若对任意的 $f\in C^k(M)$，Xf 都是 C^r 函数，则称 X 是 C^r 向量场. 若 (U,φ,x^i) 是 M 的任一个坐标图，则

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}\ (1\leqslant i\leqslant n)$$

是 U 上的 n 个 C^{k-1} 向量场，它们称为(局部)自然标架场. M 上 C^r 向量场的全体一般构成一个无限维的向量空间 $\mathscr{X}^r(M)$. 向量场 X 的局部坐标表示为

$$X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

$X^i(1\leqslant i\leqslant n)$ 称为 X 关于坐标系 x^i 的分量. 在不同的坐标系中，分量之间有变换公式

$$\widetilde{X}^i = X^j\frac{\partial\widetilde{x}^i}{\partial x^j}\quad (i\leqslant 1\leqslant n).$$

从而 X 为 C^r 向量场的充分必要条件是它在任何坐标图中的分量都是 C^r 函数. 设 $C:(a,b)\to M$ 是 M 上的一条参数曲线，若

$$C_*\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{c(t)} = X_{c(t)},$$

则称 C 为向量场 X 的积分曲线. 根据常微分方程理论，过 M 的每一个点，都有一条 X 的积分曲线. 若 $X_x=0$，则点 x 是向量场 X 的奇点. 向量场 X 在其奇点邻近的性状十分复杂(参见"微分拓扑"). 但是，对非奇点，可选取包含它的坐标图 (U,φ,x^i)，使得限制在 U 上时有

$$X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

C^r 向量场(C^r vector field)　见"向量场".

自然标架场(natural frame field)　见"向量场".

李括号(Lie bracket)　亦称换位子. 黎曼几何中的一种运算. 即从两个 C^r 向量场得出一个新的 C^{r-1} 向量场的一种运算. 它可看成 $\mathscr{X}^r(M)\times\mathscr{X}^r(M)$ 到 $\mathscr{X}^{r-1}(M)$ 的一个映射：$(X,Y)\to[X,Y]$. 使用局部坐标表示：若

$$X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y=Y^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad X_i,Y_i\in C^r(U),$$

则

$$[X,Y] = \left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial X^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

从而，$[X,Y]$ 是 C^{r-1} 向量场. $[X,Y]$ 称为向量场 X 和 Y 的李括号，也称为泊松括号. 李括号具有以下性质：

1. 满足反交换律 $[X,Y]=-[Y,X]$.
2. R 双线性.
3. 满足雅可比恒等式

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$
$$(\forall\ X,Y,Z\in\mathscr{X}^r(M), 2\leqslant r).$$

因此，以[,]作为乘法，$\mathscr{X}^\infty(M)$ 成为一个李代数. 李括号由此得名.

泊松括号(Poisson bracket)　见"李括号".

单参数变换群(one-parameter group of transformations)　亦称 R 在流形上的(左)作用. 黎曼几何的一个概念. 流形上的一族微分同胚. C^k 流形 M 上的单参数变换群是 M 的一族 C^k 微分同胚 $\{\varphi_t\}$ $(t\in R)$，它具有以下性质：

1. $\varphi: R\times M\to M$，$(t,p)\to\varphi_t(p)$ 是 C^k 映射.
2. $\varphi_0: M\to M$ 是恒同映射.
3. $\varphi_s\circ\varphi_t=\varphi_{s+t}$.

若 U 是 M 的一个开邻域，$I_\varepsilon=(-\varepsilon,\varepsilon)$，以 $I_\varepsilon\times$

U 来替代 $R\times M$ 且使 $t,s,t+s\in I_\varepsilon$，则 $\{\varphi_t\}$ 称为作用在 U 上的局部单参数变换群. 这时 $\varphi_t:U\to\varphi_t(U)$ 是 C^k 微分同胚.

对于局部单参数变换群 $\{\varphi_t\}$ 及 U 中的任一点 p，由 $t\to\varphi_t(p)$ 定义的映射 $\gamma_p:I_\varepsilon\to M$ 是 M 中过 p 的一条参数曲线. 它称为群 $\{\varphi_t\}$ 过 p 点的轨线，以 X_p 表示轨线 $\gamma_p(t)=\varphi_t(p)$ 在 p 点的切向量，即

$$X_pf=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}(f(\varphi_t(p))-f(p)),$$

这样就在 U 上给定了一个 C^{k-1} 向量场 X，它称为由 $\{\varphi_t\}$ 诱导的向量场. 因为 $(\varphi_t)_*X_p=X_{\gamma_p(t)}=X_{\varphi_t(p)}$，即 $(\varphi_t)_*X=X$，所以 $\{\varphi_t\}$ 的轨线都是其诱导的向量场的积分曲线，并且诱导向量场 X 在每个微分同胚 φ_t 下是不变的. 对于 M 上的单参数变换群有相同的结论. 反之，若给定一个 M 上的 C^{k-1} 向量场 Y，则有：对 M 的任一点 p，必存在含 p 的一个邻域 U 及作用在 U 上的局部单参数群 $\{\varphi_t\}$，使得在 U 上 $Y|U$ 是由 $\{\varphi_t\}$ 诱导的向量场. 因此，也称 Y 是局部单参数变换群 $\{\varphi_t\}$ 的无穷小生成元，或简单地说 Y 生成 $\{\varphi_t\}$. 当 M 是紧致连通流形时 $U=M$，从而紧致 C^k 流形 M 上的 C^{k-1} 向量场是一个单参数变换群的无穷小生成元.

局部单参数变换群(local one-parameter group of transformations)　见“单参数变换群”.

诱导向量场(induced vector field)　见“单参数变换群”.

无穷小生成元(infinitesimal generator)　见“单参数变换群”.

李导数(Lie derivative)　张量场关于向量场的一种导数. 设 X 是 C^k 流形 M 上的 C^{k-1} 向量场，$\{\varphi_t\}$ 是由 X 生成的局部单参数变换群. M 上的 C^s 向量场 Y 关于 X 的李导数 L_XY 定义为

$$(L_XY)_p=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}((\varphi_{-t})_*Y_{\varphi_t(p)}-Y_p)$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_{-t})_*Y_{\varphi_t(p)}|_{t=0},$$

它正是 $T_p(M)$ 中曲线 $(\varphi_{-t})_*Y_{\varphi_t(p)}(t\in I_\varepsilon)$ 在 $t=0$ 处的切向量，且有 $(L_XY)_p=[X,Y]_p$. r 次外微分形式 ω 关于 X 的李导数 $L_X\omega$ 定义为

$$(L_X\omega)_p=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}((\varphi_t)^*\omega_{\varphi_t(p)}-\omega_p)$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t)^*\omega_{\varphi_t(p)}|_{t=0},$$

且对于 M 上 r 个向量场 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_r$ 有

$$L_X\omega(Y_1,Y_2,\cdots,Y_r)=X(\omega(Y_1,Y_2,\cdots,Y_r))$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\omega(Y_1,\cdots,Y_{i-1},L_XY_i,Y_{i+1},\cdots,Y_r).$$

类似地，可对任意张量场求关于 X 的李导数 L_X，它是局部的算子且有以下公式：

$$L_X(T_1+T_2)=L_XT_1+L_XT_2,$$
$$L_X(T\otimes S)=L_XT\otimes S+T\otimes L_XS,$$

式中 T,S,T_1,T_2 都是张量场且 T_1,T_2 是同类型. 使用局部坐标，设 $X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，则自然标架场 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 及其对偶标架场 $\{\mathrm{d}x^i\}$ $(1\leqslant i\leqslant n=\dim M)$ 关于 X 的李导数为

$$L_X\frac{\partial}{\partial x^i}=-\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j},$$
$$L_X\mathrm{d}x^i=\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j.$$

据此可求得张量场关于 X 的李导数的局部表示. 例如，对于(1,1)型张量场

$$T=T^i_j\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\mathrm{d}x^j,$$

可有

$$L_XT=X(T^i_j)\frac{\partial}{\partial X^i}\otimes\mathrm{d}x^j-T^i_j\frac{\partial X^h}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^h}\otimes\mathrm{d}x^j$$
$$+T^i_j\frac{\partial X^j}{\partial x^h}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\mathrm{d}x^h.$$

分布(distribution)　黎曼几何的重要概念. 指微分流形切丛的一个子丛. 流形 M 上的 l 维分布 $\mathscr{D}^l$ 是对 M 的每点指定其切空间中一个 l 维子空间，即 $\mathscr{D}^l:M\to TM,p\to D^l(p)\subset T_p(M)$，其中 $D^l(p)$ 是 $T_p(M)$ 的 l 维子空间. 记

$$D^l=\bigcup_{p\in M}D^l(p),$$

D^l 称为 M 上的 l 维切子丛. 若 M 的每一个点都有一个邻域 U 及 U 上 l 个 C^r 向量场 $X_1,X_2,\cdots,X_l$，使得对于 U 中的任意点 q，$X_1(q),X_2(q),\cdots,X_l(q)$ 是 $D^l(q)$ 的一组基，则称 D^l 是 C^r 的，而称 $X_1,X_2,\cdots,X_l$ 是 D^l 的局部基(向量场)，或说它们在 U 上张成 D^l.

对合分布(involutive distribution)　一类特殊的分布. C^k 流形 M 上 l 维对合分布 D^l 具有下述的特征性质：对于 M 的每一个点，都有一个邻域 U 及 D^l 在 U 上的一组 C^{k-1} 局部基向量场 $X_1,X_2,\cdots,X_l$，使得 $[X_i,X_j]$ $(1\leqslant i,j\leqslant l)$ 在 U 上都属于 D^l. 这时也称分布 D^l 是对合的. $[X_i,X_j]$ 属于 D^l 等价于它们都是 $X_1,X_2,\cdots,X_l$ 的线性组合，即 $[X_i,X_j]=\mu^h_{ij}X_h$，$\mu^h_{ij}\in C(U)$ $(i,j,h=1,2,\cdots,l)$. 能选到一组局部基向量场使得 $\mu^h_{ij}\equiv0$. 分布是对合的也意味着对于任意两个属于 D^l 的 C^r 向量场 X,Y，其李括号 $[X,Y]$ 也属于 D^l.

积分流形(integral manifold)　一类子流形. 它是由对合分布确定的子流形. 设 D^l 是 C^k 流形 M 上的 l 维分布，包含映射 $i:W\to M$ 为浸入. 若对于每一点 $p\in W$ 都有 $i_*(T_p(W))\subset D^l(p)$，即 i 的切映射

将子流形(W,i)在p点的切空间$T_p(W)$映入$D^l(p)$中，则称(W,i)或$i(W)$是D^l的积分流形. 当一个积分流形不能成为其他的积分流形的真子集时，称它为极大积分流形. 在坐标邻域U上任取属于D^l的一个向量场，则它的任一条积分曲线都是D^l的1维积分流形. 特别地，设D^l为C^{k-1}分布且对每个点p都存在p点的坐标图(U,φ,x^i)，使得

$$U_c=\{q\in U \mid x^\alpha(q)=c^\alpha, c^\alpha \text{ 为常数}, l+1\leqslant\alpha\leqslant n\}$$

都是D^l的积分流形，即D^l在U上由

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}\right\}\ (1\leqslant k\leqslant l)$$

所生成时，称D^l是完全可积的.

极大积分流形(maximum integral manifold)　见"积分流形".

弗罗贝尼乌斯定理(Frobenius' theorem)　特征对合分布的一个著名定理. 该定理断言：C^k流形上的C^{k-1}分布D^l为对合的充分必要条件为它是完全可积的. 在任一坐标图(U,φ,x)上，l维分布D^l等价于普法夫方程组$\varphi_t=0$，其中$t=l+1,l+2,\cdots,n(=\dim M)$，$D^l$为对合等价于外微分方程组

$$\mathrm{d}\varphi_t=0 \bmod(\varphi_{l+1},\varphi_{l+2},\cdots,\varphi_n);$$

而D^l为完全可积则等价于子流形

$$\{x\in U \mid x^6=\text{const},\ l+1\leqslant t\leqslant n\}$$

适合普法夫方程组$\varphi_t=0$. 这样的普法夫方程组也称为是完全可积的. 因此，弗罗贝尼乌斯定理也可以叙述为：普法夫方程组$\omega_\alpha=0\ (1\leqslant\alpha\leqslant m)$完全可积的充分必要条件是$\mathrm{d}\omega_\alpha=0 \bmod(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)$.

叶状结构(foliation)　流形的一种特殊结构. n维流形M的$l(<n)$维叶状结构，是指M的一个l维弧连通子流形的集合$\mathscr{F}=\{\mathscr{F}_\alpha \mid \alpha\in A\}$，它满足以下三个条件：

1. $\bigcup\limits_{\alpha\in A}\mathscr{F}_\alpha=M$.
2. $\alpha\neq\beta$时$\mathscr{F}_\alpha\cap\mathscr{F}_\beta=\varnothing$.
3. M的每一点都有一个坐标图(U,φ,x)，使得对每一个$\mathscr{F}_\alpha$，$\mathscr{F}_\alpha\cap U$的弧连通分支可以表示成

$$\{q\in U \mid x^s(q)=\text{const},\ l+1\leqslant s\leqslant n(=\dim M)\}.$$

此时，称$\mathscr{F}_\alpha$为叶，$\mathscr{F}_\alpha\cap U$为叶片. 当M上的l维分布D^l完全可积时，极大积分流形的全体确定了一个l维叶状结构，这就是弗罗贝尼乌斯定理的整体性描述.

叶片(leaf)　见"叶状结构".

张量场(tensor field)　向量场的推广. 它是张量丛上的截面. C^k流形M上的r阶反变、s阶协变张量场Φ称为(r,s)型张量场，它是M到C^{k-1}张量丛$T^r_s(M)$的映射，它与$T^r_s(M)$的自然投影π的复合$\pi\circ\Phi$是M的恒同映射. 即$\Phi: M\to T^r_s(M)$，

$$x\to\Phi_x\in T^r_{s,x}M$$

$$\equiv\overbrace{T_xM\otimes\cdots\otimes T_xM}^{r}\otimes\overbrace{T_x^*M\otimes\cdots\otimes T_x^*M}^{s},$$

即Φ_x是(r,s)型张量. $(1,0)$型张量场正是M上的向量场. 当Φ是C^t映射时，称Φ是C^t张量场. 对坐标图(U,φ,x^i)内任一点x，$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right\}_x$和$\{\mathrm{d}x^i\}_x(1\leqslant i\leqslant n=\dim M)$分别是$T_xM$和$T_x^*M$的一组基. 而$(r,s)$型张量场$\Phi$的局部坐标表示为

$$\Phi=\Phi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}$$

$$\otimes\,\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\mathrm{d}x^{j_2}\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_s}$$

$$(1\leqslant i_1,\cdots i_r,j_1,\cdots,j_s\leqslant n)$$

式中

$$\Phi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}(x)=\Phi_x\left((\mathrm{d}x^{i_1})_x,\cdots,(\mathrm{d}x^{i_r})_x,\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\right)_x,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right)_x\right)$$

称为Φ在自然标架下的分量. 在不同的坐标系x^i和$\tilde{x}^i$中，分量有以下变换公式

$$\tilde{\Phi}^{i_1\cdots i_r}_{k_1\cdots k_s}=\Phi^{h_1\cdots h_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial\tilde{x}^{i_1}}{\partial x^{h_1}}\cdots\frac{\partial\tilde{x}^{i_r}}{\partial x^{h_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial\tilde{x}^{k_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial\tilde{x}^{k_s}}.$$

因此，Φ为C^t张量场的充分必要条件是在任一坐标图上它的分量都是C^t函数. 同类型张量的加法运算、两个张量的张量积运算、混合型张量的缩并运算都可以推广到张量场上，即，有以下定义：

$$(\Phi_1+\Phi_2)(x)=\Phi_1(x)+\Phi_2(x),$$

$$(\Phi\otimes\Psi)(x)=\Phi(x)\otimes\Psi(x),$$

$$(ct_{(i,j)}\Phi)(x)=ct_{(i,j)}\Phi(x)$$

式中Φ_1和Φ_2是同类型的.

外微分形式(exterior differential form)　黎曼几何的重要概念. 指反对称协变张量场. C^k流形上的p次C^r外微分形式是M上C^r的p阶反对称协变张量场，也简称C^r的p形式. 1次形式就是普法夫形式. 设(U,φ,x^i)是M的任一个坐标图. p形式的局部坐标表示为

$$\omega(x)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}$$

$$=\frac{1}{p!}a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p},$$

式中$a_{i_1\cdots i_p}$关于下指标是反对称的. 当$a_{i_1\cdots i_p}$都为$C^r(r\leqslant k-1)$时，ω是C^r的p形式. 可自然地引进p形式之间的加法运算和函数与p形式的乘法运算，使得M上C^r的p形式的全体构成实数域上无限维向量空间——C^r的p形式空间$A^p(M)$. 设$A^0(M)=C^r(M)$，$A^p(M)\ (p=0,1,\cdots,n)$的直和$A(M)=\bigoplus_{p=0}^n A^p(M)$称为$C^r$外微分形式空间，其元素称为$M$上$C^r$外微分形式. 外形式的外积运算$\wedge$可推广到外微分形式空间$A(M)$中，两个外微分形式$\theta$与$\alpha$的外积$\theta\wedge\alpha$给定为$(\theta\wedge\alpha)(x)=\theta(x)\wedge\alpha(x)$. 此外，在$A(M)$中还可引进外微分运算d.

***p*形式**(p-form)　见"外微分形式".

外微分形式空间(space of exterior differential forms)　见"外微分形式".

外微分(exterior differential)　一种映射.指外微分形式空间上的一个微分算子.设 $A(M)$ 是 n 维光滑流形 M 上的光滑外微分形式空间.外微分(算子)d 是一个映射 $\mathrm{d}: A(M) \to A(M)$,使得 $\mathrm{d}(A^p(M)) \subset A^{p+1}(M)$,并且满足以下条件:

1. d 是 R 线性的.

2. 若 $f \in A^0(M) \equiv C^\infty(M)$,则 $\mathrm{d}f$ 是 f 的微分且 $\mathrm{d}(\mathrm{d}f)=0$.

3. 若 $\omega \in A^p(M)$,即 ω 是 p 形式,σ 是(外)微分形式,则 $\mathrm{d}(\omega \wedge \sigma)=\mathrm{d}\omega \wedge \sigma+(-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}\sigma$.

外微分算子 d 有以下性质:

1. d 是局部算子,即,若两个微分形式 ω_1 和 ω_2 在 M 的一个开集 U 上相等时,则它们的外微分 $\mathrm{d}\omega_1$ 和 $\mathrm{d}\omega_2$ 在 U 上也相等,换言之,若 $\omega_1|_U=\omega_2|_U$,则 $\mathrm{d}\omega_1|_U=\mathrm{d}\omega_2|_U$.

2. 对于任意的微分形式 ω,有 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0$,或简单地表为 $\mathrm{d}^2=0$,这就是庞加莱引理.

3. 拉回映射 f^* 与外微分 d 是可交换的,即若 $f: M \to N$ 是光滑微分流形间的光滑映射,则有 $f^* \circ \mathrm{d}=\mathrm{d} \circ f^*$.

4. 设 ω 是 p 形式,$X_1, X_2, \cdots, X_{p+1}$ 是 M 的任意 $p+1$ 个向量场,则 ω 的外微分 $\mathrm{d}\omega$ 为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\omega(X_1, X_2, \cdots, X_{p+1}) \\
=&\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_{p+1})) \\
&+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}(\omega([X_i, X_j], \\
&X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_{p+1})).
\end{aligned}
$$

式中 $\hat{X}$ 意味着 X 被删去.

形式与向量场的内乘(interior multiplication of forms by vector fieds)　外微分形式空间上的一个算子.设 ω 是微分流形 M 上的 p 次形式,$\omega \in A^p(M)$,X 是 M 上向量场.ω 与 X 的内积用 $i_X\omega$ 表示.它是一个 $p-1$ 次形式,即 $i_X\omega \in A^{p-1}(M)$,其定义如下:$p=0$ 时 $i_X\omega=0$,$p \geqslant 1$ 时对于任意的 $p-1$ 个向量场 $X_1, X_2, \cdots, X_{p-1}$ 有 $i_X\omega(X_1, X_2, \cdots, X_{p-1})=\omega(X, X_1, X_2, \cdots, X_{p-1})$.$i_X: A^p(M) \to A^{p-1}(M)$ 为同态,做线性扩张,i_X 是 M 的外微分形式空间 $A(M)$ 的一个自同态.i_X 具有以下性质:

1. $i_X(\omega \wedge \theta)=i_X\omega \wedge \theta+(-1)^p \omega \wedge i_X\theta$.

2. $i_X^2=0$.

3. 若 η 是 M 的体积元,则 $(\mathrm{div}X)\eta=\mathrm{d}(i_X\eta)$,式中 $\mathrm{div}X$ 是向量场 X 的散度.

闭形式(closed differential form)　一类外微分形式.外微分为零的外微分形式,即,满足 $\mathrm{d}\omega=0$ 的外微分形式 ω 称为闭形式.因为 $\mathrm{d}^2=0$,所以任何微分形式 θ 的外微分 $\mathrm{d}\theta$ 是闭形式.因为外微分算子 d 是 R 线性的,所以光滑流形 M 上的光滑 p 次闭形式的全体构成光滑 p 次形式空间 $A^p(M,R)$ 的一个子空间——光滑 p 次闭形式空间 $Z^p(M,R)$.

恰当形式(exact differential form)　一类微分形式.可成为另一个外微分形式的外微分的微分形式.设 ω 是微分流形 M 上的 p 次形式.若有一个 $p-1$ 次形式 θ 使得 $\omega=\mathrm{d}\theta$,则说 ω 是 p 次恰当形式.1 次恰当形式是函数的微分.恰当形式是闭形式.但闭形式未必是恰当形式.闭形式 σ 必是局部恰当的,即,对 M 的任一点,都有一个邻域 U 及一个形式 α 使得限制在 U 上时 $\sigma|_U=\mathrm{d}\alpha|_U$.光滑流形 M 上光滑 p 次恰当形式的全体组成光滑 p 次闭形式空间 $Z^p(M,R)$ 的一个子空间——光滑 p 次恰当形式空间 $B^p(M,R)$,且

$$B^p(M,R) \subset Z^p(M,R) \subset A^p(M,R).$$

德·拉姆上同调群(de Rham cohomology group)　一类上同调群.由光滑微分流形 M 上的外微分形式所给出的上同调群.设 $A^p(M,R)$,$Z^p(M,R)$ 和 $B^p(M,R)$ 分别是 M 上光滑的 p 次形式、p 次闭形式和 p 次恰当形式空间.d 是外微分算子,则 $Z^p(M,R)$ 是同态 $\mathrm{d}: A^p(M,R) \to A^{p+1}(M,R)$ 的核,$B^p(M,R)$ 是同态 $\mathrm{d}: A^{p-1}(M,R) \to A^p(M,R)$ 的像.$\mathrm{d}^2=0$,将 $A^p(M,R)$ 看成上链群,$\mathrm{d}: A^p(M,R) \to A^{p+1}(M,R)$ 是上边缘算子.

$$H^p(M,R)=\frac{Z^p(M,R)}{B^p(M,R)}$$

称为 M 的第 p 个德·拉姆上同调群,$H^p(M,R)$ 的元素作为 $Z^p(M,R)$ 中的等价类称为同调类.因此,$H^p(M,R)$ 作为商空间也称为第 p 个德·拉姆上同调空间.

德·拉姆上同调空间(de Rham cohomology space)　见"德·拉姆上同调群".

德·拉姆定理(de Rham theorem)　光滑流形的微分结构与拓扑结构之间的一个重要关系,由德·拉姆(de Rham G.-W.)于 1931 年所证明.该定理断言:若 M 是 n 维紧致的光滑流形,则 M 的第 p $(0 \leqslant p \leqslant n)$ 个德·拉姆上同调群 $H^p(M,R)$ 与 M 的第 p 个上同调群 $H^p(M)$ 是同构的.由德·拉姆定理,第 p 个德·拉姆上同调空间 $H^p(M,R)$ 的维数是有限的且等于 M 的第 p 个贝蒂数,即

$$\dim H^p(M,R)=\beta_p.$$

贝蒂数纯粹是流形的拓扑不变量,而德·拉姆上同调群是由流形的微分结构产生的,所以德·拉姆定理建立了流形的局部性质和整体性质之间的联系.

单位分解(partition of unity)　一种特殊的开覆盖.指微分流形上的一种开覆盖.C^k 流形 M 上的 C^k 单位分解是 M 上一族 C^k 函数 $\{f_i | i \in \mathbf{Z}\}$,它具有

以下性质：

1. 对 M 的每一点 p，$f_i(p)\geqslant 0$ 且

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(p) = 1.$$

2. 函数 f_i 的支集 $\mathrm{supp} f_i=\overline{\{p\in M \mid f_i(p)\neq 0\}}$ 组成的集族 $\{\mathrm{supp} f_i\}$ 是 M 的局部有限的覆盖，C^k 流形 M 为仿紧时，对于 M 的任一开覆盖 $\{U_\alpha\}$，必存在从属于 $\{U_\alpha\}$ 的 C^k 单位分解 $\{f_i\}$，即 $\{f_i\}$ 还有下述性质：对每个 i，f_i 的支集 $\mathrm{supp} f_i$ 是紧致的，并且有开集 U_α 使得 $\mathrm{supp} f_i \subset U_\alpha$.

这就是单位分解定理，它是流形的局部性质过渡到整体性质的桥梁之一.

形式的积分(integral of forms)　$\mathbb{R}^n$ 中 n 重黎曼积分的推广. 设 ω 是 n 维 C^k 流形 M 上的 n 次连续外微分形式. $\{(W_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 是与 M 的定向相符的坐标邻域覆盖. $\{f_i \mid i\in \mathbb{Z}\}$ 是从属于 $\{W_\alpha\}$ 的 C^k 单位分解，所以 $\mathrm{supp} f_i$ 含在某一个 W_α 中，使用 W_α 上的局部坐标 $\omega=g_\alpha \mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x^n$，$g_\alpha\in C(W_\alpha)$. $f_k\circ\omega$ 在 M 上的积分定义为

$$\int_M f_k\circ\omega=\int_{W_\alpha} f_k\circ\omega$$
$$=\int_{\varphi_\alpha(W_\alpha)} f_k g_\alpha\circ\varphi_\alpha^{-1}\mathrm{d}x^1,\mathrm{d}x^2,\cdots,\mathrm{d}x^n,$$

最后一个积分是 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 重积分，它与含有 $\mathrm{supp} f_k\circ\omega$ 的 W_α 的选取无关. 当 ω 具有紧致支集时，$\mathrm{supp}\,\omega$ 为有限个 $\mathrm{supp} f_i$ 所覆盖，ω 在 M 上的积分定义为

$$\int_M \omega = \sum_i \int_M f_i\circ\omega.$$

右端和式中只有有限项. 它与坐标邻域覆盖 $\{W_\alpha\}$ 以及从属于 $\{W_\alpha\}$ 的单位分解的选取都是无关的. 此外，由积分的定义，$\int_M$ 是 M 上具有紧致支集的 n 次外微分形式空间上的线性泛函.

体积元(volume element)　一种外微分形式. 微分流形上与定向相符的外微分形式. 设 M 是 n 维 C^k 定向流形，(U,φ,x^i) 是与定向相符的，则体积元素 η 的局部坐标表示为 $\eta=a\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$，$a\in C^{k-1}(U)$ 且处处为正. 对于 M 上具有紧致支集的连续函数 f，$f\eta$ 是具有紧致支集的 n 次外微分形式，所以，有积分 $\int_M f\eta$，它称为 f 关于体积元素 η 的积分. 对于 M 上的向量场 X，则有 $L_X\eta=(\mathrm{div}\,X)\eta$，数量场 $\mathrm{div}\,X$ 称为向量场关于体积元素 η 的散度. M 上具有黎曼度量 g 时，伴随 g 的体积元素在 U 上的局部坐标表示为 $\eta=\sqrt{G}\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$. 其中

$$G=\det(g_{ij}),\quad g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\ (1\leqslant i,j\leqslant n).$$

设 $\{e_i\}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 U 上的规范正交标架(场)，$\{\omega^i\}$ 是其对偶标架，当 $\omega^1\wedge\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^n$ 与定向相符时，体积元素可简单地表成 $\eta=\omega^1\wedge\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^n$.

斯托克斯定理(Stokes theorem)　形式积分理论中的一个重要结果. 它推广了 $\mathbb{R}^3$ 中的格林定理、高斯定理和斯托克斯定理：

1. 若 C 是 C^k 流形 M 中的 $p(\geqslant 1)$ 链

$$C=\sum_i \lambda_i(s_i^p,\sigma_i),$$

∂C 是链 C 的边界，ω 是定义在 $\bigcup_i \sigma_i(s_i^p)$ 的邻域上的 $p-1$ 次 C^1 外微分形式，则

$$\int_C \mathrm{d}\omega=\int_{\partial C}\omega.$$

2. 若 M 是 n 维定向 C^k 流形，∂M 是 M 的边界且它的定向是由 M 的定向所诱导的，ω 是 M 上具有紧致支集的 $n-1$ 次 C^1 外微分形式，则

$$\int_M \mathrm{d}\omega=\int_{\partial M}\omega.$$

公式

$$\int_C \mathrm{d}\omega=\int_{\partial C}\omega \quad 和 \quad \int_M \mathrm{d}\omega=\int_{\partial M}\omega$$

均称为斯托克斯公式.

黎曼度量(Riemannian metric)　黎曼几何的重要概念. 黎曼流形 (M,g) 的基本张量 g. 事实上，g 是 M 上的光滑的对称、正定的二阶协变张量场，在每一点 $p\in M$，g 给出了切空间 T_pM 上的正定内积，常记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，即

$$\langle X,Y\rangle=g(X,Y),\quad \forall\ X,Y\in T_pM.$$

因此，在点 p 的切向量长度及切向量之间的夹角都能依据该内积计算出来，即

$$|X|=\sqrt{\langle X,X\rangle},\quad \cos\angle(X,Y)=\frac{\langle X,Y\rangle}{|X|\,|Y|}.$$

在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，若记

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle,$$

则无穷小位移 $(\mathrm{d}x^1,\mathrm{d}x^2,\cdots,\mathrm{d}x^n)$ 的长度平方为 $\mathrm{d}s^2=g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$，这是黎曼度量的经典表达式，它是微分 $\mathrm{d}x^i$ 的二次齐式. 通常称 $\mathrm{d}s$ 为黎曼流形 (M,g) 的弧长元素，简称线素. 若在坐标域 U 上取幺正标架场 $\{e_i\}$，其对偶的余标架场为 $\{\omega^i\}$，则 M 上的无穷小位移能表成 $\mathrm{d}p=\omega^i e_i$，而黎曼度量能表成

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{i=1}^n(\omega^i)^2.$$

若曲线 $C:\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 是黎曼流形 M 上落在坐标域 U 内的可微曲线，其参数方程为 $x^i=x^i(t)$，则 C 的长度定义为

$$L(C)=\int_a^b\sqrt{g_{ij}(r(t))\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t.$$

此外，记

$$d\sigma_M = \sqrt{\det(g_{ij})}\ dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

当 M 是可定向流形时，$d\sigma_M$ 是定义在整个流形 M 上的 n 次外微分式，称为 M 的体积元. 若 D 是 M 中的一个紧缩区域，不妨设 D 包含在坐标区域 U 内，则 D 的体积定义为

$$V(D) = \int_D \sqrt{\det(g_{ij})}\ dx^1 dx^2 \cdots dx^n.$$

若 M 是不可定向流形，则在 M 的可定向二重覆盖流形上同样可以定义体积元.

黎曼流形的弧长元素(element of arc length of Riemannian manifold)　见“黎曼度量”.

黎曼流形(Riemannian manifold)　一黎曼度量的微分流形. 设 M 是 n 维光滑流形，若在 M 上给定一个光滑的二阶协变张量场 g，称 (M,g) 为一个 n 维黎曼流形，g 称为该黎曼流形的基本张量或黎曼度量，如果满足：

1. g 是对称的，即
$g(X,Y)=g(Y,X)\ (\forall\ X,Y\in T_pM, \forall\ p\in M)$.
2. g 是正定的，即
$g(X,X)\geqslant 0\ \ (\forall\ X\in T_pM, \forall\ p\in M)$,

且等号仅在 $X=0$ 时成立.

简单地说，黎曼流形就是给定了一个光滑的对称、正定的二阶张量场的光滑流形.

黎曼流形的基本张量(fundamental tensor of Riemannian manifold)　见“黎曼流形”.

等距映射(isometry)　黎曼流形间保持弧长的映射. 设 (M,g) 和 (N,h) 是两个黎曼流形，$\varphi: M\to N$ 是光滑映射，若 $\varphi_* h=g$，即对任意的 $p\in M$ 及 $X,Y\in T_pM$，都有 $g(X,Y)=h(\varphi_* X,\varphi_* Y)$，则称 φ 是局部等距映射. 对于局部等距映射 $\varphi: M\to N$，必定有 $\dim M\leqslant \dim N$. 当 $\dim M<\dim N$ 时，则称 (φ, M) 是 N 的等距浸入子流形. 若 $\varphi: M\to N$ 是可微同胚，且 φ 是局部等距映射，则称 φ 是从 (M,g) 到 (N,h) 的等距或等距映射. 黎曼流形之间的等距是一种等价关系. 两个黎曼流形彼此等距的条件见“嘉当-阿姆勃罗斯-希克斯定理”. 黎曼流形 (M,g) 到自身的等距映射又称为等距变换. 黎曼流形 (M,g) 到自身的等距变换全体构成一个群，称为等距变换群(参见“黎曼流形的变换群”).

等距浸入(isometric immersion)　见“等距映射”.

等距变换群(group of isometric transformations)　见“等距映射”.

共形映射(conformal mapping)　黎曼流形间保持角度不变的映射. 设 (M,g) 和 (N,h) 是两个黎曼流形，$f: M\to N$ 是光滑映射. 若存在 M 上的光滑函数 σ，使得 $f^* h=e^{2\sigma}g$，则称 f 是局部共形映射. 若 f 本身是可微同胚，则称 f 是共形映射，并且称 (M,g) 和 (N,h) 是共形等价的. 两个切向量之间的夹角在局部共形映射下保持不变；在任意一点 $p\in M$，切向量 $v\in T_pM$ 在局部共形映射 f 的切映射下的伸缩系数 $|f^* v|/|v|$ 是常数. 黎曼流形 (M,g) 到自身的共形映射又称为共形变换. 黎曼流形在共形等价下的不变量是外尔(Weyl, (C. H.) H.)的共形曲率张量(参见“共形曲率张量”).

共形等价(conformal equivalence)　见“共形映射”.

共形变换(conformal transformation)　见“共形映射”.

基灵向量场(Killing vector field)　黎曼流形 (M,g) 上一个单参数等距变换群所诱导的切向量场(参见“单参数变换群”). 基灵向量场也称为黎曼流形 M 上的一个无穷小等距变换. 设 X 是黎曼流形 (M,g) 上的基灵向量场，用 φ_t 表示 X 所生成的局部单参数变换群，则 $(\varphi_t)^* g=g$. 因此，基灵向量场 X 满足的条件是 $L_X g=0$，其中 L_X 表示关于向量场 X 的李导数，称 $L_X g=0$ 为基灵方程. 设 (U,x^i) 是流形 M 上的局部坐标系，若

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial X^i},$$

则基灵方程变为 $X_{i,j}+X_{j,i}=0$，其中 $X_i=g_{ij}X^j$.

无穷小等距变换(infinitely small isometry)　即“基灵向量场”.

基灵方程(Killing equations)　见“基灵向量场”.

仿射联络(affine connection)　简称联络. 主丛上的一种微分几何结构. 所谓仿射联络应该是以仿射变换群为结构群的主丛上的联络，在以一般线性群为结构群的主丛上的联络称为线性联络. 应用比较广泛的是线性联络，特别是在与一般线性群的主丛相配的向量丛上的联络；而且，在历史上长期把现在所称的线性联络称为仿射联络. 因此，本条目的仿射联络按习惯的定义，指的是线性联络. 设 M 是 n 维光滑流形，$\Gamma(TM)$ 表示切丛 TM 的全体光滑截面(即 C^∞ 向量场)组成的空间. 流形 M 上的一个仿射联络是指映射

$$\nabla: \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM),$$

它对任意两个光滑切向量场 X,Y，指定了一个光滑的切向量场 $\nabla_X Y$，满足以下条件：

1. $\nabla_{X+Y}Z=\nabla_X Z+\nabla_Y Z$.
2. $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$.
3. $\nabla_{f\cdot X}Y=f\cdot\nabla_X Y$.
4. $\nabla_X(f\cdot Y)=X(f)\cdot Y+f\cdot\nabla_X Y$,

其中 $f\in C^\infty(M)$，$X,Y,Z\in\Gamma(TM)$. 注意：$\nabla_X Y$ 关于自变量 X 是 $C^\infty(M)$ 线性的，因此，对于光滑的切

向量场 Y 以及 $X_p \in T_pM$，能够定义 $\nabla_{X_p}Y$ 为 T_pM 中一个确定的元素.

联络是加在微分流形 M 上，使得对于 M 上的光滑的向量场能够进行微分的一种结构. 通常，把 $\nabla_{X_p}Y$ 称为切向量场 Y 关于点 p 处的切向量 X_p 的协变微商，也称共度导数. 在仿紧光滑流形上，联络总是存在的. 若在光滑流形 M 上指定了一个联络 ∇，则称 (M,∇) 为仿射联络空间. 设 (M,∇) 是一个仿射联络空间，在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，若

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

则称 Γ_{ij}^k 为联络 ∇ 在该坐标系下的系数. 在局部坐标变换下，联络系数 Γ_{ij}^k 不遵循张量的坐标变换规律，即联络不是张量. 它的坐标变换规律为：设 (V,y^i) 是另一个局部坐标系，$U\cap V\neq\varnothing$. 记

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = \widetilde{\Gamma}_{ij}^k \cdot \frac{\partial}{\partial y^k},$$

则在 $U\cap V$ 上有

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^k = \sum_{p,q,r} \Gamma_{pq}^r \frac{\partial x^p}{\partial y^i} \frac{\partial x^q}{\partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^r} + \sum_r \frac{\partial^2 x^r}{\partial y^i \partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^r}.$$

一般地，若在 M 上取定一个局部标架场 $\{e_i\}$，其对偶的余标场为 $\{\omega^i\}$，记 $\nabla_{e_i}e_j=\Gamma_{ij}^k e_k$，$\omega_j^k=\Gamma_{ij}^k\omega^i$，则称 Γ_{ij}^k 为联络 ∇ 关于局部标架场 $\{e_i\}$ 的系数，ω_j^k 为联络形式. 在仿射联络空间 (M,∇) 上，最重要的不变量为挠率张量和曲率张量. 联络可以用来定义微分流形上的切向量场沿一条曲线的平行性；反过来，利用切向量沿曲线平行移动的概念可以给出协变微商的几何意义. 在仿射联络空间 (M,∇) 上，对任意的张量场也能定义它们的协变微商.

微分流形 M 上的仿射联络的概念可以直接推广为微分流形 M 上任意一个向量丛上的联络.

联络概念的产生是微分几何发展史中的一件大事. 克里斯托费尔(Christoffel, E. B.)于 1869 年创立了用度量张量 g_{ij} 的微商构造的克里斯托费尔符号. 后来，里奇(Ricci, C. G.)将克里斯托费尔的方法做了系统的阐述和发展，创立了他所称的绝对微分学，使得对张量的分量求绝对微商之后仍是一个张量. 列维-齐维塔(Levi-Civita, T.)于 1917 年引进向量平行移动的概念，革新了里奇的张量分析，赋予绝对微分以鲜明的几何意义. 这些工作实际上是从黎曼度量出发定义了一种特定的联络，而黎曼流形的曲率恰好是切向量绕一点做平行移动一周所出现的差别. 外尔(Weyl, (C. H.) H.)观察到满足一定的坐标变换规律的量 Γ_{ij}^k 比度量张量 g_{ij} 更为基本，他把给定了 Γ_{ij}^k 的空间称为仿射联络空间，其中切向量沿曲线的平行移动、测地线、曲率张量等都是有意义的. 从名称来看，仿射联络空间与黎曼空间的关系，就像是仿射空间与欧氏空间的关系. 现在所通用的联络的定义是科斯居尔(Koszul, J. L.)给出的.

联络(connection)　仿射联络的简称.

线性联络(linear connection)　见"仿射联络".

协变微商(covariant derivative)　见"仿射联络".

仿射联络空间(affine connection space)　见"仿射联络".

联络系数(coefficient of connection)　见"仿射联络".

共变导数(covariant derivative)　见"仿射联络".

黎曼联络(Riemannian connection)　亦称列维-齐维塔联络. 黎曼流形上的一种特殊联络. 若 (M,g) 是 n 维黎曼流形，则在 M 上存在惟一的一个联络 ∇，满足以下两个条件：

1. ∇ 的挠率张量为零，即
$\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]\ (\forall\ X,Y\in\Gamma(TM))$.

2. g 关于联络 ∇ 是平行的，$\nabla g=0$，即

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z),$$
$$(\forall\ X,Y,Z \in \Gamma(TM)).$$

这个联络称为黎曼流形 (M,g) 的黎曼联络. 黎曼联络 ∇ 的表达式为

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y,Z) = \frac{1}{2}\{&X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) \\ &- Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) \\ &- g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X)\}. \end{aligned}$$

若 $(U;x^i)$ 是 M 的局部坐标系，

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

则黎曼联络的条件变为

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \Gamma_{ik}^l g_{jl}.$$

因此

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right),$$

其中 (g^{ij}) 是 (g_{ij}) 的逆矩阵.

列维-齐维塔联络(Levi-Civita connection)　即"黎曼联络".

挠率张量(torsion tensor)　刻画联络对称性的一个张量. 设 (M,∇) 是一个仿射联络空间，对于任意的 $X,Y\in\Gamma(TM)$，若

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y],$$

则 $T(X,Y)$ 关于自变量 X,Y 是 $C^\infty(M)$ 线性的. 因此，它在每一点 $p\in M$ 给出了从 $T_pM\times T_pM$ 到 T_pM 的多线性映射，即它是一个 $(1,2)$ 型张量，称为 (M,∇) 上的挠率张量. 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，若

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

则 $T^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}$. 黎曼流形$(M,g)$的黎曼联络是无挠的.

曲率张量(curvature tensor) 由联络确定的一个重要张量. 设(M,∇)是仿射联络空间,$R(X,Y)$是曲率算子,其中 $X,Y\in\Gamma(TM)$. 映射 $X,Y,Z\to R(X,Y)Z$ 给出了从 $\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)$ 到 $\Gamma(TM)$的 $C^\infty(M)$线性映射,因此,它在每一点 $p\in M$ 给出了从 $T_pM\times T_pM\times T_pM$ 到 T_pM 的多线性映射,即它是一个(1,3)型张量场,称为(M,∇)上的曲率张量. 在局部坐标系$(U;x^i)$下,记

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}=R^l_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l},$$

R^l_{ijk}就是曲率张量的分量. 由定义得到

$$R^l_{ijk}=\frac{\partial\Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}+\Gamma^l_{ih}\Gamma^h_{jk}-\Gamma^l_{jh}\Gamma^h_{ik},$$

其中 Γ^k_{ij}是联络∇的系数. 若(M,g)是黎曼流形,∇是其黎曼联络,则能够定义(M,g)上的 4 阶协变的曲率张量 $R(X,Y,Z,W)=g(R(X,Y)Z,W)$. 记

$$R_{ijkl}=R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right),$$

$$R_{ijkl}=R^h_{ijk}g_{hl}.$$

(0,4)型曲率张量有下列性质:

1. $R(X,Y,Z,W)=-R(Y,X,Z,W)$
$=-R(X,Y,W,Z)$.
2. $R(X,Y,Z,W)=R(Z,W,X,Y)$.
3. $R(X,Y,Z,W)+R(X,Z,W,Y)$
$+R(X,W,Y,Z)=0$.

共形曲率张量(conformal curvature tensor) 一个重要张量. 指在度量共形变换下不变的一个四阶张量. 设(M,g)是 n 维黎曼流形,所谓 M 的共形曲率张量 C 是如下定义的四阶协变张量:

$$\begin{aligned}&C(X,Y,Z,W)\\&=R(X,Y,Z,W)-\frac{1}{n-2}\{\mathrm{Ric}(X,Z)g(Y,W)\\&\quad-\mathrm{Ric}(X,W)g(Y,Z)+\mathrm{Ric}(Y,W)g(X,Z)\\&\quad-\mathrm{Ric}(Y,Z)g(X,W)\}\\&\quad+\frac{S}{(n-1)(n-2)}(g(X,Z)g(Y,W)\\&\quad-g(X,W)g(Y,Z)),\end{aligned}$$

其中 Ric 是里奇曲率张量,S 是数量曲率. 用局部坐标系下的分量表示,即为

$$\begin{aligned}&C_{ijkl}\\&=R_{ijkl}-\frac{1}{n-2}\{R_{ik}g_{jl}-R_{il}g_{jk}+R_{jl}g_{ik}-R_{jk}g_{il}\}\\&\quad+\frac{S}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk}).\end{aligned}$$

共形曲率张量是黎曼流形(M,g)在共形变换下的不变量,它是被外尔(Weyl,(C. H.)H.)发现的. 当 $n=3$ 时,共形曲率张量总是为零. 另外,考虑三阶协变张量

$$R_{ijk}=R_{ij,k}-R_{ik,j}+\frac{1}{2(n-1)}(g_{ik}S_{,j}-g_{ij}S_{,k}),$$

其中 $R_{ij,k}$,$S_{,j}$分别表示里奇张量和数量曲率的协变微分. 则当 $n=3$ 时,张量 R_{ijk}是共形不变量,并且当 $n\geqslant3$ 时有

$$C^h_{ijk,h}=\frac{n-3}{n-2}R_{kij}.$$

比安基恒等式(Bianchi Identity) 一个重要的恒等式. 关于曲率张量协变微商的恒等式. 设(M,g)是 n 维黎曼流形,R_{ijkl}是曲率张量在局部坐标系下的分量,比安基恒等式是指

$$R_{ijkl,h}+R_{ijlh,k}+R_{ijhk,l}=0,$$

其中 $R_{ijkl,h}$是曲率张量 R_{ijkl}的协变微商. 同时也有

$$R_{ijk}{}^l{}_{,h}+R_{jhk}{}^l{}_{,i}+R_{hik}{}^l{}_{,j}=0.$$

协变微分(covariant differentiation) 亦称共变微分或绝对微分. 保持张量特性的一种特殊微分. 设(M,∇)是仿射联络空间,其中联络∇是对于 M 上的切向量场能够进行微分的结构,而且借助于∇能够定义 M 上的任意的光滑张量场 A 的协变微分 ∇A:若 Z 是 M 上的光滑切向量场,则∇Z 是 M 上的(1,1)型张量场,对于任意的 $\alpha\in T^*_pM,X\in T_pM$,有$\nabla Z(\alpha,X)=\alpha(\nabla_XZ)$. 若 α 是 M 上的光滑的一次微分式,则$\nabla\alpha$ 是 M 上的 2 阶协变张量场,对于任意的 $X,Y\in T_pM$,有

$$\nabla\alpha(X,Y)=(\nabla_Y\alpha)(X)=Y(\alpha(\widetilde{X}))-\alpha(\nabla_Y\widetilde{X}),$$

其中 $\widetilde{X}$ 是 $X\in T_pM$ 的任意一个光滑的扩张. 若 $f\in C^\infty(M)$,则 f 的协变微分就是它的通常的微分$\nabla f=\mathrm{d}f$. 若 A 是 M 上的光滑的(r,s)型张量场,则∇A 是$(r,s+1)$型张量场,对于任意的 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in T^*_pM,Z_1,Z_2,\cdots,Z_s,X\in T_pM$,有

$$\begin{aligned}&\nabla A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,Z_1,Z_2,\cdots,Z_s,X)\\&=\nabla_XA(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,Z_1,Z_2,\cdots,Z_s)\\&=X(A(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_r,\widetilde{Z}_1,\widetilde{Z}_2,\cdots,\widetilde{Z}_s))\\&\quad-\sum_{\beta=1}^{r}A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\nabla_X\tilde{\alpha}_\beta,\cdots,\alpha_r,Z_1,Z_2,\cdots,Z_s)\\&\quad-\sum_{\gamma=1}^{s}A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,Z_1,\cdots,\nabla_X\widetilde{Z}_\gamma,\cdots,Z_s),\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\cdots,\tilde{\alpha}_r,\widetilde{Z}_1,\widetilde{Z}_2,\cdots,\widetilde{Z}_r$ 分别是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,Z_1,Z_2,\cdots,Z_r$ 的光滑扩张. 用局部坐标系$(U;x^i)$下的分量表示:若 $Z=Z^i\frac{\partial}{\partial x^i}$,则$\nabla Z$ 的分量是

$$Z^i_j\equiv\frac{\partial Z^i}{\partial x^j}+\Gamma^i_{jk}Z^k.$$

若 $\alpha=\alpha_i\mathrm{d}x^i$,则$\nabla\alpha$ 的分量是

$$\alpha_{i,j}\equiv\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j}-\Gamma^k_{ji}\alpha_k.$$

一般地,若

$$A = A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s},$$

则∇A的分量是

$$A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,k}\equiv\frac{\partial A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}}{\partial x^k}+\sum_{\beta=1}^{r}A^{i_1\cdots i_{\beta-1}li_{\beta+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\Gamma^{i_\beta}_{kl}$$
$$-\sum_{\gamma=1}^{s}A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{\gamma-1}lj_{\gamma+1}\cdots j_s}\Gamma^{l}_{kj_\gamma}.$$

对于(r,s)型光滑张量场A及$X\in T_pM$,则如仿射联络中所定义的∇_XA是在p点的(r,s)型张量,称为张量场A关于切向量X的协变微商.事实上,张量∇_XA的分量是

$$(\nabla_XA)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=X^kA^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,k}(p).$$

共度微分(covariant differential)　即"协变微分".

绝对微分(absolute differential)　即"协变微分".

里奇恒等式(Ricci identity)　关于交换两次协变微分顺序的一个关系式.若(M,g)是黎曼流形,∇是其黎曼联络,$R(X,Y)$是曲率算子,则里奇恒等式是:对于M上的任意一个r阶协变张量场A,成立$\nabla^2A(Z_1,Z_2,\cdots,Z_r,Y,X)-\nabla^2A(Z_1,Z_2,\cdots,Z_r,X,Y)=(R(X,Y)A)(Z_1,Z_2,\cdots,Z_r)$,其中$Z_1,Z_2,\cdots,Z_r\in\Gamma(TM)$.当$A$是混合型张量场时,上式仍然成立,只是自变量$Z_1,Z_2,\cdots,Z_r$分别在$\Gamma(TM)$或$\Gamma(T^*M)$中取值.用局部坐标系$(U;x^i)$下的分量表示,则对于$(r,s)$型张量场$A$有下面的恒等式:

$$A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,kl}-A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,lk}$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{s}A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{\alpha-1}hj_{\alpha+1}\cdots j_s}R^h_{klj_\alpha}-\sum_{\beta=1}^{r}A^{i_1\cdots i_{\beta-1}hi_{\beta+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}R^{i_\beta}_{klh}.$$

里奇恒等式反映了张量场的两次协变微商因微商的先后次序不同而出现的差异.若(M,∇)是仿射联络空间,也有对应的里奇恒等式:

$$A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r,kl}-A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r,lk}$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{s}A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{\alpha-1}hj_{\alpha+1}\cdots j_s}R^h_{klj_\alpha}$$
$$-\sum_{\beta=1}^{r}A^{i_1\cdots i_{\beta-1}hi_{\beta+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}R^{i_\beta}_{klh}-A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,h}T^h_{kl},$$

其中T^h_{kl}是∇的挠率张量.

平行移动(parallel displacement)　欧氏空间中平移概念的推广.设(M,∇)是仿射联络空间,C:$\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$是$M$中的一条光滑曲线,$v(t)$是沿曲线$C$定义的$M$的切向量场.若向量场$v(t)$满足方程$\nabla_{\gamma'(t)}v(t)=0$,则称$v(t)$沿曲线$C$是平行的.在局部坐标系$(U;x^i)$下,若曲线$C$的参数方程为$x^i=x^i(t)$,切向量场$v(t)$可以表示为

$$v(t)=v^i(t)\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\gamma(t)},$$

则上述方程化为一阶常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}v^i(t)}{\mathrm{d}t}+\Gamma^i_{jk}(r(t))\frac{\mathrm{d}x^j(t)}{\mathrm{d}t}v^k(t)=0.$$

因此,任意一个切向量$X\in T_{\gamma(a)}M$惟一地确定了一个沿曲线C平行的切向量$\tilde{X}(t)$,使得$\tilde{X}(a)=X$.人们称$\tilde{X}(t)$为切向量X沿曲线C平行移动产生的切向量场.特别地,映射$X\to\tilde{X}(b)$给出了从$T_{\gamma(a)}M$到$T_{\gamma(b)}M$的线性同构,称为沿曲线C的平行移动.在仿射联络空间(M,∇)中,对于任意两点$x,y\in(M,\nabla)$,连接x,y的任意一条光滑曲线γ决定了一个从T_xM到T_yM的、沿曲线γ的平行移动,记为P_γ.注意:γ可以换成分段光滑曲线.从直观上讲,所谓联络就是在邻近点的切空间之间建立特定的线性同构.切向量场的协变微商可以用平行移动来描述:若$Y\in\Gamma(TM)$,$X\in T_pM$,取光滑曲线$\gamma(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$,使得$\gamma(0)=p$,$\gamma'(0)=X$,用$P_\gamma|^{t_2}_{t_1}$表示沿曲线$\gamma$从$\gamma(t_1)$到$\gamma(t_2)$的平行移动,则

$$\nabla_XY=\lim_{t\to 0}\frac{P_\gamma|^0_t(Y(\gamma(t))-Y(\gamma(0)))}{t}.$$

若(M,g)是黎曼流形,∇是其黎曼联络,则沿曲线$\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$的平行移动$P_\gamma|^b_a$是从切空间$T_{\gamma(a)}M$到$T_{\gamma(b)}M$的等距线性同构.

测地线(geodesics)　欧氏空间的直线概念的推广.设(M,∇)是仿射联络空间.若曲线$\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$的切向量场沿该曲线自身是平行的,则称该曲线为测地线.在局部坐标系$(U;x^i)$下,测地线$x^i=x^i(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$满足二阶常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^i_{jk}(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}=0.$$

若(M,g)是黎曼流形,∇是其黎曼联络,则M上的测地线是它在有固定端点的变分下弧长泛函的临界点.对于黎曼流形上的测地线$\gamma(t)$,参数t必是弧长参数的一次函数.

指数映射(exponential map)　流形的切空间到流形的一种重要映射.若M是一个完备黎曼流形,则对任意的$x\in M$,及$v\in T_xM$,存在惟一的一条测地线γ_v:$(-\infty,\infty)\to M$,使得$\gamma_v(0)=x$,$\gamma_v'(0)=v$.取定一点$x\in M$,可以定义映射$\exp_x:T_xM\to M$,使得对于任意的$v\in T_xM$有$\exp_x(v)=\gamma_v(1)$.称$\exp_x$为黎曼流形M在点x的指数映射.若不假定黎曼流形M的完备性,则在点x的指数映射$\exp_x$在T_xM中围绕原点的某个邻域U内总是有定义的,并且$\exp_x$把U可微同胚地映到$\exp_xU$上.由定义

$$(\exp_x)_{*0}=\mathrm{id}.$$

法坐标系(normal coordinate system)　黎曼流形上的一种特殊坐标系.若M是一个n维黎曼流

形，对于 $x\in M$，在 T_xM 中选取一个幺正基底 $\{e_i\}$，则在点 x 的某个邻域内能够定义局部坐标系 $(x^1,x^2,\cdots,x^n)$，使得点

$$\exp_x\left(\sum_{j=1}^{n}x^je_j\right)$$

的第 i 个坐标即为 x^i. 这样的坐标系称为在点 x 的法坐标系. 对于在点 x 的法坐标系，有

$$\nabla_v\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\bigg|_x=0,\quad \forall\, v\in T_xM,\forall\, i.$$

在点 x 的任意两个法坐标系只差一个常系数的正交变换，即：若 (x^i) 和 (y^i) 是黎曼流形 M 在点 x 的两个法坐标系，则存在正交矩阵 (a^i_j)，使得

$$y^i=\sum_{j=1}^{n}a^i_jx^j.$$

高斯引理(Gauss Lemma)　指数映射的一个重要性质. 设 M 是一个黎曼流形，$x\in M,v\in T_xM$，若 $\rho(t)=tv$ 是 T_xM 中通过原点的一条射线，且 $\omega\in T_{\rho(t)}(T_xM)$ 是垂直于射线 $\rho(t)$ 的任意一个向量，则 $(\exp_x)_{*\rho(t)}(\omega)$ 与 $(\exp_x)_{*\rho(t)}(\rho'(t))$ 是正交的. 简言之，高斯引理断言：指数映射保持与径向测地线的正交性不变. 这是指数映射的一个基本性质.

里奇张量(Ricci tensor)　黎曼流形的一个重要二阶对称张量. 设 (M,g) 是一个黎曼流形，$R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ 是它的曲率张量. 对于 $X,Y\in\Gamma(TM)$，若

$$\mathrm{Ric}(X,Y)=\sum_i R(e_i,X,Y,e_i),$$

其中 $\{e_i\}$ 称为 M 上的局部标准正交标架场，则 Ric 在每一点 $p\in M$ 给出了 $T_pM\times T_pM$ 上的多线性函数，即它是一个 $(0,2)$ 型张量场，称为里奇张量. 里奇张量是对称的，即 $\mathrm{Ric}(X,Y)=\mathrm{Ric}(Y,X)$. 在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，记

$$\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=R_{ij},$$

则

$$R_{ij}=\sum_k R^k_{kij}.$$

克里斯托费尔符号(Christoffel symbols)　黎曼联络的联络系数. 设 (M,g) 是 n 维黎曼流形，在局部坐标系 $(U;x^i)$ 下，度量张量 g 的分量为 g_{ij}. 记

$$\Gamma_{ijk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right),\quad \Gamma^k_{ij}=g^{kl}\Gamma_{ijl},$$

分别称 $\Gamma_{ijk},\Gamma^k_{ij}$ 为第一类和第二类克里斯托费尔符号. 克里斯托费尔原来把它们分别记为

$$\begin{bmatrix} ij \\ k \end{bmatrix}\quad 和\quad \begin{Bmatrix} ij \\ k \end{Bmatrix};$$

为了使和式约定得以保持，后来人们把它们分别记为

$$[ij,k],\quad \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}.$$

现在，人们通常把它们记成有三个指标的量 Γ_{ijk} 和 Γ^k_{ij}. 克里斯托费尔符号 Γ^k_{ij} 恰好是黎曼联络 ∇ 的系数(参见“黎曼联络”).

第一类克里斯托费尔符号(Christoffel symbols of the first kind)　见“克里斯托费尔符号”.

第二类克里斯托费尔符号(Christoffel symbols of the second kind)　见“克里斯托费尔符号”.

曲率算子(curvature operator)　由联络确定的一个二阶算子. 设 (M,∇) 是仿射联络空间. 对于任意的 $X,Y\in\Gamma(TM)$，若

$$R(X,Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]},$$

则 $R(X,Y):\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$ 是一个 $C^\infty(M)$ 线性映射，即

$$R(X,Y)(Z+W)=R(X,Y)Z+R(X,Y)W,$$
$$R(X,Y)(f\cdot Z)=f\cdot R(X,Y)Z,$$
$$(\forall\, Z,W\in\Gamma(TM),f\in C^\infty(M)).$$

因此，$R(X,Y)$ 在每一点 $p\in M$ 给出了切空间 T_pM 到自身的线性变换，$R(X,Y)$ 称为 M 上的曲率算子. $R(X,Y)$ 关于自变量 X,Y 也是 $C^\infty(M)$ 线性的.

截面曲率(sectional curvature)　亦称黎曼曲率，曲面高斯曲率的推广. 设 (M,g) 是黎曼流形，$R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ 是其曲率张量，对任意两个不共线的切向量 $X,Y\in T_pM$，若

$$K(X,Y)=-\frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y)-(g(X,Y))^2},$$

则它只依赖于 X,Y 所决定的二维切子空间，而与该子空间中的基底 X,Y 的选取无关. 称 $K(X,Y)$ 为 X,Y 所决定的二维切子空间上的截面曲率或黎曼曲率. 当 $\dim M=2$ 时，$K(X,Y)$ 恰好是 M 在点 p 的高斯曲率.

黎曼曲率(Riemannian curvature)　即“截面曲率”.

里奇曲率(Ricci curvature)　截面曲率的一种平均. 设 (M,g) 是黎曼流形，$\mathrm{Ric}(\cdot,\cdot)$ 是其里奇张量，对任意的非零切向量 $X\in T_pM$，若

$$\rho(X)=\frac{\mathrm{Ric}(X,X)}{|X|^2},$$

则称 $\rho(X)$ 为黎曼流形 M 在切向量 X 所决定的方向上的里奇曲率. 里奇曲率 $\rho(X)$ 恰好等于包含 X 在内的各个二维切子空间上的截面曲率(参见“截面曲率”)的平均值. 确切地说，若 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}\in T_pM$ 是与 X 正交的 $n-1$ 个彼此正交的单位切向量，则

$$\rho(X)=\sum_{i=1}^{n-1}K(e_i,X),$$

其中 $n=\dim M$.

数量曲率(scalar curvature)　里奇曲率的平均. 设 (M,g) 是 n 维黎曼流形，$R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ 是其曲率张量，对于 T_pM 中的单位正交基 $\{e_i\}$，若

$$S = -\sum_{i,j=1}^{n} R(e_i, e_j, e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_i, e_i),$$

则 S 与单位正交基 $\{e_i\}$ 的选取无关，称 S 为 M 在点 p 的数量曲率. 数量曲率 S 是在点 p 的各个切方向上的里奇曲率的平均值，即

$$S = \sum_{i=1}^{n} \rho(e_i).$$

若用里奇张量在局部坐标系 $(U; x^i)$ 下的分量来表示，则

$$S = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} R_{ij}.$$

幺正标架场(orthonormal frame field) 黎曼流形上的一类特殊标架场. 若 (M,g) 是 n 维黎曼流形，则在每一点 $p \in M$ 的一个邻域 U 内必存在单位正交标架场 $\{e_i\}$，使得 $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$，称 $\{e_i\}$ 为 M 上的局部幺正标架场. 若 $\{\omega^i\}$ 是 $\{e_i\}$ 的对偶余标架场，则黎曼度量张量 g 可表成

$$g = \sum_{i=1}^{n} \omega^i \otimes \omega^i.$$

简称 $\{\omega^i\}$ 为幺正余标架场.

幺正余标架场(orthonormal coframe field) 见"幺正标架场".

联络形式(connection forms) 特征联络的 1 次形式. 设 (M, ∇) 是仿射联络空间，$\{e_i\}$ 是 M 上的局部标架场，$\{\omega^i\}$ 是对偶的余标架场. 若 $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$，$\omega_j^k = \Gamma_{ij}^k \omega^i$，则称 ω_j^k 为联络形式，它们适合 $\nabla e_j = \omega_j^k e_k$. 若记 ω 为联络形式 ω_j^k 构成的矩阵，则当局部标架场 $\{e_i\}$ 变成 $\{\tilde{e}_i\}$ 时，联络形式的矩阵 ω 变为 $\tilde{\omega}$，它们之间的关系是

$$\tilde{\omega} = A \cdot \omega \cdot A^{-1} + \mathrm{d}A \cdot A^{-1},$$

其中 A 是过渡矩阵，即

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \vdots \\ \tilde{e}_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

若 (M,g) 是黎曼流形，$\{\omega^i\}$ 是定义在开邻域 U 上的幺正余标架场，则在 M 上存在惟一的黎曼联络等价于在 U 上存在惟一的一组微分形式 ω_i^j，满足下列条件：

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \\ \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \end{cases}$$

这恰好就是黎曼联络 ∇ 在幺正标架场下的联络形式 ω_i^j 所满足的条件.

挠率形式(torsion forms) 刻画联络对称性的二次形式. 设 (M, ∇) 是 n 维仿射联络空间，$\{\omega^i\}$ 是定义在开邻域 $U \subset M$ 上的局部余标架场，ω_i^j 是相应的联络形式. 若 $\Omega^i = \mathrm{d}\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i$，则 Ω^i 是定义在 U 上的二次外微分式，称为挠率形式. 直接计算可得

$$\Omega^i = \frac{1}{2} T^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k,$$

其中，T^i_{jk} 是挠率张量 T 在相应的局部标架场 $\{e_i\}$ 下的分量，即 $T(e_j, e_k) = T^i_{jk} e_i$.

曲率形式(curvature forms) 特征曲率张量的二次形式. 设 (M, ∇) 是 n 维仿射联络空间，$\{\omega_i\}$ 是定义在开邻域 $U \subset M$ 上的局部余标架场，ω_i^j 是相应的联络形式. 若 $\Omega_i^j = \mathrm{d}\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j$，则 Ω_i^j 是定义在 U 上的二次外微分式，称为曲率形式. 直接计算可得

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} R^j_{kli} \omega^k \wedge \omega^l,$$

其中，R^j_{kli} 是曲率张量 R 在相应的局部标架场 $\{e_i\}$ 下的分量，即 $R(e_k, e_l) e_i = R^j_{kli} e_j$. 若 (M,g) 是 n 维黎曼流形，∇ 是其黎曼联络，$\{\omega^i\}$ 是局部幺正余标架场，则 $\Omega_i^j + \Omega_j^i = 0$. 更一般地，若 $\{\omega^i\}$ 是局部余标架场，$\{e_i\}$ 是对偶的标架场，记 $g_{ij} = g(e_i, e_j)$，$\Omega_{ij} = \Omega_i^k g_{kj}$，则仍有

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{klij} \omega^k \wedge \omega^l, \Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0,$$

其中，$R_{klij} = g(R(e_k, e_l) e_i, e_j)$.

结构方程(structure equation) 余标架场和联络形式所满足的微分方程. 若 (M, ∇) 是 n 维仿射联络空间，$\{p, e_i\}$ 是 M 上的局部标架场，$\{\omega^i\}$ 是对偶的局部余标架场，则

$$\begin{cases} \mathrm{d}p = \omega^i e_i, \\ \nabla e_i = \omega_i^j e_j, \end{cases}$$

其中，ω_i^j 是联络形式. 联络的结构方程是指

$$\mathrm{d}\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i = \Omega^i,$$

$$\mathrm{d}\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = \Omega_i^j,$$

其中

$$\Omega^i = \frac{1}{2} T^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k, \quad \Omega_i^j = \frac{1}{2} R^j_{kli} \omega^k \wedge \omega^l$$

分别是联络的挠率形式和曲率形式. 结构方程的意义在 M 的标架丛 P 上才能说清楚. 微分流形 M 上全体标架的集合 P 称为 M 上的标架丛，它的丛空间 P 是 $n + n^2$ 维微分流形. 在 P 上存在 n 个一次微分形式 θ^i，使得 M 的任意一个定义在开邻域 U 上的局部标架场 $\{p, e_i\}$，也就是标架 P 在 U 上的一个截面 $\sigma: U \to P$，有 $\omega^i = \sigma^* \theta^i$，其中 $\{\omega^i\}$ 是 $\{p, e_i\}$ 的对偶余标架场. 于是，M 上的任意一个联络 ∇ 对应着标架丛 P 上 n^2 个一次微分式 θ_i^j，它们与 θ^i 是处处线性无关的，并且满足结构方程：

$$\mathrm{d}\theta^i - \theta^j \wedge \theta_j^i = \frac{1}{2} P^i_{jk} \theta^j \wedge \theta^k,$$

$$\mathrm{d}\theta_i^j - \theta_i^k \wedge \theta_k^j = \frac{1}{2} Q^j_{kli} \theta^k \wedge \theta^l,$$

其中，P^i_{jk}，Q^j_{kli} 都是定义在 P 上的函数. 反过来，从空

间 P 上任意一组 n^2 个满足上述条件的一次微分式在 M 上决定了一个联络 ∇. 对于 M 的局部标架场 $\{p,e_i\}$，即局部截面 $\sigma:U\to P$，联络 ∇ 的形式为 $\omega_i^j=\sigma^*\theta_i^j$.

标架丛(frame bundle)　见“结构方程”.

高斯-博内定理(Gauss-Bonnet theorem)　紧致曲面的高斯-博内定理的推广. 设 M 是偶数维有向紧致黎曼流形，$\dim M=2p$. 若黎曼流形 M 在定向相符的幺正局部标架场下的曲率形式为 Ω_i^j，则

$$\Omega=\frac{(-1)^p}{2^{2p}\pi^p p!}\sum_{i_1,\cdots,i_{2p}}\varepsilon_{i_1\cdots i_{2p}}\Omega_{i_1}^{i_2}\wedge\cdots\wedge\Omega_{i_{2p-1}}^{i_{2p}}$$

是在 M 上的 $2p$ 次外微分式，其中

$$\varepsilon_{i_1,i_2,\cdots,i_{2p}}=\begin{cases}1, & \text{当}(i_1,i_2,\cdots,i_{2p})\text{为}(1,2,\cdots,2p)\text{的偶排列},\\ -1, & \text{当}(i_1,i_2,\cdots,i_{2p})\text{为}(1,2,\cdots,2p)\text{的奇排列},\\ 0, & \text{其余情形}.\end{cases}$$

高斯-博内定理断言：

$$\int_M\Omega=\chi(M),$$

其中，$\chi(M)$是流形 M 的欧拉示性数. 外微分式 Ω 称为 M 的欧拉示性式. 当 $\dim M=2$ 时，高斯-博内定理成为

$$\int_D K\mathrm{d}\sigma_M=-\int_M\Omega_1^2=2\pi\chi(M),$$

其中 K 是 M 的高斯曲率. 这就是曲面论中经典的高斯-博内定理(参见“高斯-博内公式”). 高斯-博内定理建立了黎曼流形 M 的局部几何量(各点处的曲率张量的表达式)与 M 的大范围几何量(欧拉示性数，流形 M 的与黎曼度量无关的拓扑不变量)之间的联系. 如上所叙述的高斯-博内定理的形式是陈省身给出的，他所给出的内在证明是微分几何发展史上的里程碑. 从曲面论中经典的高斯-博内定理到黎曼流形的高斯-博内定理经历了一个逐步发展的过程，除陈省身以外，芬格尔(Fenchel, W.)、韦伊(Weil, A.)、艾伦多弗(Allendoerfer, C. B.)等人对于高维黎曼流形的高斯-博内定理都作出过重要贡献. 陈省身在他的内在证明中所表达的思想和方法使大范围黎曼几何进入了一个全新的发展阶段.

欧拉示性式(Euler characteristic form)　见“高斯-博内定理”.

常曲率空间(space of constant curvature)　欧氏空间的一种直接推广. 若一个黎曼流形在每一点沿每一个二维切子空间的截面曲率都是相同的，则称它为常曲率空间. 若(M,g)是有常截面曲率 c 的空间，则它的曲率张量为

$$R(X,Y)Z=-c\{g(X,Z)Y-g(Y,Z)X\},$$
$$R(X,Y,Z,W)=-c\{g(X,Z)g(Y,W)-g(X,W)g(Y,Z)\}.$$

若(M,g)是常截面曲率 c 的完备、单连通 n 维黎曼流形，则当 $c=0$ 时，(M,g)等距同构于 R^n；当 $c>0$ 时，(M,g)等距同构于 R^{n+1} 中半径为 $1/\sqrt{c}$ 的球面；当 $c<0$ 时，(M,g)等距同构于 R^n 中的开球

$$B=\left\{x\in\mathrm{R}^n:\sum_{i=1}^n(x^i)^2<-\frac{4}{c}\right\}$$

并带有黎曼度量

$$\mathrm{d}s^2=\frac{\sum_{i=1}^n(\mathrm{d}x^i)^2}{\left(1+\frac{c}{4}\sum_{i=1}^n(x^i)^2\right)^2}.$$

需要指出的是，无论 c 的符号如何，上述度量的截面曲率总为常数 c，这是黎曼于 1854 年在他的奠基性论文中已经阐述的事实. 对于 R^{n+1} 中半径为 $1/\sqrt{c}$ 的球面 S^n，当 $S^n-\{(0,\cdots,0,1)\}$在关于该点的球极投影下映为 R^n 时，球面 S^n 上的诱导度量便写成上面的表达式.

舒尔定理(Schur theorem)　特征常曲率空间的著名定理. 设(M,g)是 n 维黎曼流形，若 $n\geqslant3$，且 M 在每一点的截面曲率与在该点的二维切子空间的选取是无关的，则 M 必是常曲率空间.

爱因斯坦空间(Einstein space)　一类重要的黎曼空间. 若黎曼流形(M,g)的里奇张量 Ric 满足方程

$$R_{ij}=\frac{S}{n}g_{ij},$$

其中 $n=\dim M$，S 是 M 的数量曲率，则称 M 是爱因斯坦空间. 当 $n\geqslant3$ 时，爱因斯坦空间必定有常数量曲率. 3 维爱因斯坦空间是常曲率空间.

局部共形平坦流形(locally conformal flat manifold)　一类重要的流形. 指局部共形于欧氏空间的黎曼流形. 设(M,g)是 n 维黎曼流形. 若对于任一点 $p\in M$，都有 p 的一个邻域 U，它与 n 维欧氏空间 R^n 的一个区域可以建立共形映射，即基本张量 g 在局部坐标系(U,x^i)下可以表成 $g_{ij}=e^{2\sigma}\delta_{ij}$，其中 σ 是定义在 U 上的光滑函数，则称(M,g)是局部共形平坦流形. 二维黎曼流形总是局部共形平坦的. 当 $n>3$ 时，(M,g)是局部共形平坦的充分必要条件是其共形曲率张量为零. 当 $n=3$ 时，共形曲率张量恒为零，此时(M,g)为局部共形平坦的条件是三阶协变张量

$$R_{ijk}=R_{ij,k}-R_{ik,j}+\frac{1}{2(n-1)}(g_{ik}S_{,j}-g_{ij}S_{,k})$$

为零，其中 R_{ij}是里奇曲率张量，S 是数量曲率. 当 $n>3$ 时，n 维共形平坦的爱因斯坦空间是常曲率空间.

黎曼流形的度量空间结构(metric space struc-

ture of a Riemannian manifold) 一种距离函数. 指黎曼流形上的一种度量拓扑. 在连通黎曼流形 M 上可以定义函数

$$d(x,y)=\inf_{\gamma} L(\gamma)\ (\forall\ x,y\in M),$$

其中, inf 是在 M 中所有连接 x 和 y 的分段光滑曲线 γ 的集合上取的, $L(\gamma)$ 表示 γ 的长度. 函数 $d:M\times M\to[0,\infty)$ 满足距离函数的公理: $\forall\ x,y,z\in M$ 有:

1. $d(x,y)\geqslant 0$, 且等号仅在 $x=y$ 时成立.

2. $d(x,y)=d(y,x)$.

3. $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$.

因此, (M,d) 成为度量空间(或距离空间). 如上定义的距离函数 d 称为 M 的度量空间结构. 黎曼流形 M 作为度量空间 (M,d) 的拓扑与它原来所具有的流形的拓扑是一致的. 在黎曼流形 M 上引进度量空间结构之后, 可以引进完备黎曼流形的概念, 从而使流形 M 上的分析研究成为可能.

完备黎曼流形(complete Riemannian manifold) 作为度量空间是完备的黎曼流形. 黎曼流形的完备性是研究大范围黎曼几何最适宜的条件. 完备黎曼流形分为紧致黎曼流形和非紧完备黎曼流形两大类型. 在完备黎曼流形上, 任意两点都能够用最短测地线连结起来; 完备黎曼流形不能够作为另一个同维数的连通黎曼流形的真开子流形.

霍普夫-雷诺定理(Hopf-Rinow theorem) 刻画黎曼流形完备性的重要定理. 若连通黎曼流形 M 上的任意一条测地线可以无限地延伸, 则 M 上任意两点都可以用一条最短测地线连接起来. 霍普夫(Hopf, H.)和雷诺(Rinow, W.)原先是对连通曲面证明上述定理的. 在现行的教科书中把霍普夫-雷诺定理叙述成更便于应用的形式. 对于连通黎曼流形 M, 下列断言是彼此等价的:

1. M 是完备的.

2. 在 M 上任意一条测地线可以无限地延伸.

3. 在 M 上存在一点 p, 使得从 p 点出发的测地线可以无限地延伸.

4. M 中的有界闭子集是紧致的.

在建立上述断言的等价性时, 通常采取如下的步骤: $1\Rightarrow 2\Rightarrow 3\Rightarrow 4\Rightarrow 1$, 其中关键步骤是 $3\Rightarrow 4$, 霍普夫-雷诺定理的原本形式在这一环节中起实质性作用. 另外, 断言 2 和 3 还经常叙述成如下的等价形式:

2′. $\forall\ x\in M$, 指数映射 $\exp_x$ 在整个切空间 T_xM 上有定义.

3′. 在 M 中存在一点 x, 使得指数映射 $\exp_x$ 在整个切空间 T_xM 上有定义.

霍普夫-雷诺定理的作用是把黎曼流形作为度量空间的完备性用测地线的无限可延性来刻画, 从而使得黎曼流形的完备性假定成为研究大范围黎曼几何的最适宜的条件.

共轭点(conjugate point) 一类特殊的点. 指数映射的奇点的像. 设 M 是完备黎曼流形, $x\in M$. 指数映射 $\exp_x:T_xM\to M$ 的奇异点 $v\in T_xM$ 称为 x 的(切)共轭点. 奇异值 $p=\exp_x v$ 称为点 x 沿测地线 $\gamma(t)=\exp_x(tv)$ 的共轭点. 点 x 的共轭点的集合称为点 x 的共轭轨迹(相应地, 有点 x 的(切)共轭轨迹). 根据定义, $v\in T_xM$ 是点 x 的(切)共轭点, 当且仅当存在非零向量 $X\in T_v(T_xM)\cong T_xM$, 使得

$$(\exp)_x)_{*v}(X)=0.$$

若 $v\in T_xM$ 是点 x 的一个(切)共轭点, 则

$$\ker((\exp_x)_{*v})$$

是 $T_v(T_xM)\cong T_xM$ 的子空间, 其维数称为共轭点 $p=\exp_x(v)$ 的重数, 或称为(切)共轭点 v 的阶. 共轭点的判断准则是: 点 $p\in M$ 是点 $x\in M$ 沿着连接 x 和 p 的测地线 γ 的共轭点, 当且仅当存在沿 γ 定义的非零雅可比场 J, 使得 J 在两端 x,p 的值为零. 于是, 黎曼流形上两个点的共轭关系是对称的, 即: 若点 p 是 x 的共轭点, 则 x 也是 p 的共轭点. 在从 x 引出的测地线 γ 上存在点 x 的共轭点, 破坏了该测地线作为最短线的性质. 确切地说, 若在测地线段 $\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 的内部含有点 $x=\gamma(a)$ 沿 γ 的共轭点, 则该测地线段不是连结 x 和 $p=\gamma(b)$ 的最短测地线. 根据共轭点的判断准则, 共轭点的存在性与黎曼流形的截面曲率有关. 若 M 的截面曲率恒非正, 则 M 上任意一点都没有共轭点. 若完备黎曼流形 M 的里奇曲率有正的下界, 则 M 上任意一点 x 沿着从 x 出发的每一条测地线上都有共轭点. 若完备黎曼流形 M 在点 x 的共轭轨迹是空集, 则指数映射 $\exp_x:T_xM\to M$ 是覆盖映射. 特别地, 当 M 单连通时, $\exp_x:T_xM\to M$ 是可微同胚, 即 M 可微同胚于欧氏空间 T_xM.

共轭点轨迹(conjugate locus) 见"共轭点".

共轭点重数(multiplicity of a conjugate point) 见"共轭点".

共轭点的阶(order of a conjugate point) 见"共轭点".

割点(cut point) 一类特殊的点. 由一点出发的测地线上保持测地线最短性的极限点. 设 M 是完备黎曼流形, $x\in M$, $\gamma:[0,\infty)\to M$ 是从 $x=\gamma(0)$ 引出的、以弧长 t 为参数的测地线. 若存在 $0<t_0<\infty$, 使得对于任何 $t\leqslant t_0$, $\gamma|_{[0,t]}$ 是连接 x 和 $\gamma(t)$ 的最短测地线, 并且对于任何 $t>t_0$, $\gamma|_{[0,t]}$ 不再是最短测地线, 则称 $p=\gamma(t_0)$ 为测地线 γ 上关于点 x 的割点, 也称 $t_0\gamma'(0)\in T_xM$ 为 γ 上关于点 x 的(切)割点. 点 x 的割迹 $\mathscr{C}(x)$ 是指所有从 x 出发的测地线上关于点

x 的割点的集合. x 在 T_xM 中的(切)割点的集合称为点 x 的(切)割迹,记为 $C(x)$. 从而, $\exp_x C(x)=\mathscr{C}(x)$. 若 $\gamma:[0,\infty)\to M$ 是以弧长 t 为参数的测地线,则$\gamma(t_0)$是 γ 上关于点 $x=\gamma(0)$的割点,当且仅当以下断言之一成立:

1. $\gamma(t_0)$是点 x 沿测地线 γ 的第一个共轭点.

2. 存在另一条不同于 $\gamma|_{[0,t_0]}$的测地线段 σ 连接 x 和 $\gamma(t_0)$,使得 $L(\gamma|_{[0,t_0]})=L(\sigma)$,并且 t_0 是使这种情况发生的 t 的最小值.

完备黎曼流形 M 是紧致的,当且仅当对于任意的 $x\in M$,(切)割迹 $\mathscr{C}(x)$同胚于单位球面 $S^{n-1}\subset T_xM$, $n=\dim M$. 因此,在紧致黎曼流形上,每一条测地线上关于它的起点的割点总是存在的,并且每一个紧致黎曼流形都可以看做闭单位球体在其边界(单位球面)上通过一定的等同关系粘合而成的.

割迹(cut locus) 见"割点".

单射半径(injectivity radius) 对完备黎曼流形的一个刻画. 使指数映射为微分同胚的最大半径. 完备黎曼流形 M 的单射半径是

$$i(M)=\sup\{r\in(0,\infty)\,|\,\exp_x:B_r(0)\to M \text{ 是嵌入}, \forall\, x\in M, \text{其中 } B_r(0)\subset T_xM \text{ 是开球}\}.$$

它也可以定义为

$$i(M)=\min\{\|v\|\,|\,v\in C(x), x\in M\},$$

其中 $C(x)\subset T_xM$ 是关于点 x 的(切)割迹. 单射半径的下界估计是黎曼流形上大范围分析研究的重要内容. 例如,克林格贝格(Klingerberg, W.)得到下列结果:若 M 是偶数维可定向完备黎曼流形,其截面曲率 K_M 满足 $K\geqslant K_M>0$,则 $i(M)\geqslant\pi/\sqrt{K}$;若 M 是单连通完备黎曼流形, $\dim M\geqslant 3$,且 $K\geqslant K_M\geqslant K/4>0$,则 $i(M)\geqslant\pi/\sqrt{K}$.

雅可比向量场(Jacobi vector field) 简称雅可比场. 黎曼几何的一个基本概念. 一类重要的向量场. 它是沿测地线满足雅可比方程的向量场. 雅可比场是指黎曼流形 M 上沿一条测地线$\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$定义的切向量场$J(t)\in T_{\gamma(t)}M$,满足雅可比方程

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}J(t)=R(\gamma'(t),J(t))\gamma'(t),$$

其中 $R(X,Y)=\mathrm{D}_X\mathrm{D}_Y-\mathrm{D}_Y\mathrm{D}_X-\mathrm{D}_{[X,Y]}$是黎曼流形 M 上的曲率算子, $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}$是沿测地线 γ 的协变微商,即$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}=\mathrm{D}_{\gamma'(t)}$. 雅可比场的等价描述是:设 $\alpha:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是测地线段 $\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$的一个变分,若 $\gamma_s(t)=\alpha(t,s)$,则 $\gamma_0=\gamma$. 若对于任意固定的 $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, γ_s 是 M 中的测地线,则该变分 α 的变分向量场

$$J(t)=\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\alpha(t,s)$$

是沿测地线 γ 定义的雅可比场. 取一个沿测地线 γ 平行的单位正交标架场$\{E_i(t)\}$,使得 $E_n(t)=\gamma'(t)$,其中 $n=\dim M$,假定 t 是测地线 γ 的弧长参数. 若

$$J(t)=\sum_{i=1}^n v^i(t)E_i(t),$$

则雅可比方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2v^i(t)}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{j=1}^n K_{ij}(t)v^j(t)\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

其中 $K_{ij}(t)=\langle R(E_n(t),E_i(t))E_n(t),E_j(t)\rangle$. 这是二阶线性常微分方程组,因此,沿测地线 γ 的雅可比场的全体构成一个 $2n$ 维线性空间. 雅可比场是研究测地线的大范围性质的工具.

弧长第一变分公式(first variation formula of arc length) 曲线族弧长泛函的一阶导数公式. 设 $\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$是黎曼流形 M 中一条给定的光滑曲线, t 是弧长参数. 设 $\alpha:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是光滑映射,使得 $\alpha(t,0)=\gamma(t)$,称映射 α 为曲线 γ 的一个变分. 对任意固定的 $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$,若 $\gamma_s=\alpha(t,s)$, $a\leqslant t\leqslant b$,其长度记为 $L(s)$,则有

$$L'(0)=\langle\gamma'(t),U(t)\rangle|_a^b-\int_a^b\langle\gamma''(t),U(t)\rangle\mathrm{d}t,$$

其中

$$\gamma''(t)=\mathrm{D}_{\gamma'(t)}\gamma'(t),\ U(t)=\left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0}\alpha(t,s)$$

为 α 的变分向量场. 上述公式称为弧长第一变分公式. 若变分 α 有固定的端点,即 $\alpha(a,s)=\gamma(a)$, $\alpha(b,s)=\gamma(b)$, $\forall\, s$,则 $U(a)=U(b)=0$,所以弧长第一变分公式成为

$$L'(0)=-\int_a^b\langle\gamma''(t),U(t)\rangle\mathrm{d}t.$$

曲线 $\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$为测地线的充分必要条件是:它是曲线的弧长泛函在有固定端点的任意变分下的临界点.

变分向量场(variation vector field) 见"弧长第一变分公式".

弧长第二变分公式(second variation formula of arc length) 刻画弧长泛函在临界点附近性态的重要公式. 设 $\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$是黎曼流形 M 中的一条测地线, t 是弧长参数. 若 $\alpha:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是测地线 γ 的任意一个变分,则所谓弧长第二变分公式是指下列公式:

$$L''(0)=\langle\mathrm{D}_UU,\gamma'\rangle|_a^b+\int_a^b\{|\mathrm{D}_{\gamma'(t)}U^\perp(t)|^2+\langle R_{\gamma'U^\perp}\gamma',U^\perp\rangle\}\mathrm{d}t,$$

其中 $U(t)$是变分向量场, $U^\perp(t)$是变分向量场 $U(t)$与测地线 γ 正交的分量. 若变分 α 有固定的端点,即 $\alpha(a,s)=\gamma(a)$, $\alpha(b,s)=\gamma(b)$,则弧长第二变分公式成为

$$L''(0)=\int_a^b\{|\mathrm{D}_{\gamma'(t)}U^\perp(t)|^2$$

$$+\langle R_{\gamma' U^{\perp}}\gamma', U^{\perp}\rangle\}\mathrm{d}t.$$

若测地线 $\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 对于它的任意一个保持端点不动的变分 α 都有 $L''(0)>0$，则该测地线的长度比连接 $\gamma(a)$，$\gamma(b)$ 的邻近曲线的长度都要短，即在连接测地线 γ 的两端的邻近曲线的集合中该测地线的长度达到极小值. 弧长第二变分公式中出现与黎曼流形 M 的曲率有关的项，因此，在讨论测地线的最短性质时，流形的曲率性质担任重要的角色.

指标形式(index form) 由测地线第二变分确定的二次型. 设 $\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 是黎曼流形 M 中一条以弧长 t 为参数的测地线. 用 $\mathscr{B}(a,b)$ 表示沿着测地线 $\gamma|_{[a,b]}$ 定义的分段光滑切向量场的集合，则指标形式 $I(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $\mathscr{B}(a,b)$ 上的对称双线性形式

$$I(X,Y)=\int_a^b\{\langle X'(t),Y'(t)\rangle + \langle R(\gamma',X)\gamma',Y\rangle\}\mathrm{d}t,$$

其中 $X,Y\in\mathscr{B}(a,b)$，$X'(t)=\mathrm{D}_{\gamma'}X$，$Y'(t)=\mathrm{D}_{\gamma'}Y$. 若 $U\in\mathscr{B}(a,b)$ 且 $U(a)=U(b)=0$，则关于以 U 为变分向量场的变分 $\alpha:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$，弧长的第二变分恰好是 $L''(0)=I(U^{\perp},U^{\perp})$，其中 $U^{\perp}$ 表示向量场 U 与 γ 正交的分量. 指标形式是莫尔斯(Morse, H. M.)引进的. 若

$$\mathscr{B}_0(a,b)=\{X\in\mathscr{B}(a,b)\,|\,X(a)=X(b)=0\},$$

则著名的莫尔斯指标定理叙述为：对于黎曼流形 M 中以弧长 t 为参数的测地线 $\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$，空间 $\mathscr{B}_0(a,b)$ 的使指标形式 $I(\cdot,\cdot)$ 在其上的限制为负定的极大子空间的维数是有限的，称为测地线 $\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 的指数，它恰好等于端点 $x=\gamma(a)$ 在测地线 $\gamma(t)$ $(a\leqslant t<b)$ 上(不含端点 $\gamma(b)$)的共轭点的个数(按共轭点的重数计算)). 若 $\gamma(b)$ 不是 x 的共轭点，则 I 在 $\mathscr{B}_0(a,b)$ 中零化子空间为零；若 $\gamma(b)$ 是 x 的共轭点，则 I 在 $\mathscr{B}_0(a,b)$ 中的零化子空间的维数恰好是 $\gamma(b)$ 作为 x 的共轭点的重数，记为 $\upsilon(b)$. 这样，上述定理的前一部分可重新表述为：测地线 $\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 的指数

$$i(a,b)=\sum_{t<b}\upsilon(t)<+\infty.$$

沿测地线 γ 的雅可比场可以刻画成指标形式 $I(\cdot,\cdot)$ 在空间 $\mathscr{B}(a,b)$ 中的极小值点：若在测地线 $\gamma(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 上没有点 $x=\gamma(a)$ 的共轭点，则对于任意的 $W\in\mathscr{B}(a,b)$，存在惟一的雅可比场 $J(t)$，使得 $J(a)=W(a)$，$J(b)=W(b)$，满足不等式

$$I(J,J)\leqslant I(W,W),$$

而且等号仅当 $W=J$ 时成立. 上述命题称为基本指标引理，在大范围黎曼几何中有许多重要的应用.

基本指标引理(fundamental index lemma) 见“指标形式”.

球面定理(sphere theorem) 大范围黎曼几何的一个重要结果. 球面定理断言：若 M 是一个紧致单连通黎曼流形，其截面曲率 K 满足

$$0<\frac{1}{4}<K\leqslant 1,$$

则 M 同胚于球面. 定理中的曲率条件可以改写

$$0<\frac{k}{4}<K\leqslant k,$$

其中 k 是某正常数. 但是，该条件不能改为 $1/4\leqslant K\leqslant 1$，因为复射影空间的标准度量的截面曲率满足 $1/4\leqslant K\leqslant 1$；然而它不同胚于球面.

博内-迈尔斯定理(Bonnet-Myers theorem) 大范围正曲率流形的一个重要定理. 设 M 是 n 维完备黎曼流形. 若 M 的里奇曲率 $\geqslant(n-1)H>0$，则在 M 上长度 $\geqslant\pi/\sqrt{H}$ 的测地线必含有共轭点对. 因此，M 的直径 $\leqslant\pi/\sqrt{H}$. 作为推论，里奇曲率有正下界的完备黎曼流形必是紧致的，从而有有限基本群. 这是典型的大范围黎曼几何的定理，反映了黎曼流形的曲率性质对于流形拓扑的限制. 上述结果最早是博内(Bonnet, O.)在截面曲率 $K_M\geqslant H>0$ 的假定下得到的，后来迈尔斯(Myers, S. B.)把关于曲率的条件减弱为关于里奇曲率的假定.

嘉当-阿达马定理(Cartan-Hadamard theorem) 大范围非正曲率流形的一个重要定理. 若 M 是完备黎曼流形，并且它的截面曲率 $K_M\leqslant 0$，则对于 M 上任意一点 x，指数映射 $\exp_x:T_xM\to M$ 是覆盖映射，因此，M 的万有覆盖空间可微同胚于 $\mathbb{R}^n$. 特别地，M 的同伦群 $\pi_i(M)$ 在 $i>1$ 时消失. 嘉当-阿达马定理给出了非正曲率流形的拓扑限制，是大范围黎曼几何的重要定理. 该定理的实质是：在截面曲率非正的完备黎曼流形上不存在共轭点对.

洛赫比较定理(Rauch comparison theorem) 研究大范围黎曼几何的有力工具. 它是描述指数映射的伸缩率的一个结果. 设 $M,\widetilde{M}$ 是两个 n 维黎曼流形，$x\in M$，$\tilde{x}\in\widetilde{M}$，$\varphi:T_xM\to T_{\tilde{x}}\widetilde{M}$ 是线性等距变换. 取 $v\in T_xM$，记 $\tilde{v}=\varphi(v)\in T_{\tilde{x}}\widetilde{M}$，它们决定了测地线 $\gamma(t)=\exp_x(tv)$ 和 $\tilde{\gamma}(t)=\exp_{\tilde{x}}(t\tilde{v})$. 若在 $\gamma(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 内不含有 $x=\gamma(0)$ 的共轭点，并且 $\widetilde{K}(t)\leqslant K(t)$，$\forall\, t\in[0,1]$，其中：$\widetilde{K}(t)=\max\{T_{\tilde{\gamma}(t)}\widetilde{M}$ 中包含 $\tilde{\gamma}'(t)$ 的平面的截面曲率$\}$；$K(t)=\min\{T_{\gamma(t)}M$ 中包含 $\gamma'(t)$ 的平面的截面曲率$\}$，则对任意的 $X\in T_v(T_xM)$，$\widetilde{X}=(\varphi)_{*\tilde{v}}(X)$，有

$$|(\exp_{\tilde{x}})_{*\tilde{v}}(\widetilde{X})|\geqslant|(\exp_x)_{*v}(X)|.$$

它的一个等价叙述是：设 $M,\widetilde{M}$ 是两个 n 维黎曼流形，$\gamma:[0,l]\to M$，$\tilde{\gamma}:[0,l]\to\widetilde{M}$ 分别是 $M,\widetilde{M}$ 中以弧长为参数的测地线，若在 $\gamma(t)$ $(0\leqslant t\leqslant l)$ 内不含有 $x=\gamma(0)$ 的共轭点，并且 $\widetilde{K}(t)\leqslant K(t)$，$\forall\, t\in[0,l]$，则对于沿测地线 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 的满足下列初始条件的雅可比

场 $V(t)$ 和 $\widetilde{V}(t)$：$V(0)\parallel\gamma'(0)$，$\widetilde{V}(0)\parallel\widetilde{\gamma}'(0)$，$|V(0)|=|\widetilde{V}(0)|$，$\langle\gamma'(0),V'(0)\rangle=\langle\widetilde{\gamma}'(0),\widetilde{V}'(0)\rangle$，$|V'(0)|=|\widetilde{V}'(0)|$，成立不等式

$$|\widetilde{V}(t)|\geqslant|V(t)|,\quad\forall\, t\in[0,l].$$

洛赫(Rauch,H. E.)比较定理的基本思想是：截面曲率的大小直接影响到指数映射的切映射的伸缩率. 根据高斯引理，$(\exp_x)_*$沿着从 x 出发的测地线方向是保长的，所以，实际上只需考虑$(\exp_x)_*$在与测地线正交方向的伸缩率. 对于 $\mathbb{R}^n$，S^n，H^n 这些常曲率空间模型，沿测地线的雅可比场可以用显式表示，因此，可以把 M 或 $\widetilde{M}$ 取成这三种空间之一，从而由洛赫比较定理得到另一个空间中雅可比场的长度的估计式. 洛赫比较定理的一个直接推论是：设 $M,\widetilde{M}$ 是 n 维黎曼流形，它们的截面曲率满足 $K_{\widetilde{M}}\leqslant K_M$；取 $r>0$，使得 $\exp_x$ 限制在 $B_r(0)\subset T_xM$ 上无奇异点，若 $\varphi:T_xM\to T_{\widetilde{x}}\widetilde{M}$ 是线性等距变换，则对于 T_xM 中任意一条包含在 $B_r(0)$内的可求长曲线 $c:[0,1]\to B_r(0)$有

$$L[\exp_{\widetilde{x}}(\varphi(c(t)))]\geqslant L[\exp_x(c(t))].$$

托波诺戈夫比较定理(Toponogov comparison theorem)　洛赫定理在大范围情形的推广，有广泛的应用. 为了叙述确切起见，先介绍几个概念. 黎曼流形 M 上的一个测地三角形$(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$是指三条首尾相接的测地线段 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$，满足以下条件：设它们的长度分别为 l_1,l_2,l_3，则 $\gamma_i(l_i)=\gamma_{i+1}(0)$，并且 $l_i+l_{i+1}\geqslant l_{i+2}$，其中指标 i 取 mod3 的等价类. 三角形的内角是 $\alpha_i=\angle(-\gamma'_{i+1}(l_{i+1}),\ \gamma'_{i+2}(0))\in[0,\pi]$. 设 γ_1,γ_2 是 M 中两段测地线，使得 $\gamma_1(l_1)=\gamma_2(0)$，若 $\alpha=\angle(-\gamma'_1(l_1),\gamma'_2(0))$，则把这样的构图称为一个铰接形，记为$(\gamma_1,\gamma_2,\alpha)$. 托波诺戈夫(Toponogov,V. A.)比较定理有两个等价的叙述：设 M 是完备黎曼流形，其截面曲率满足 $K_M\geqslant H$，用 M^H 表示有常截面曲率 H 的完备、单连通二维黎曼流形.

1. 若$(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$是 M 中的一个测地三角形，假定 γ_1,γ_3 是最短测地线，在 $H>0$ 时还假定 $L[\gamma_2]\leqslant\pi/\sqrt{H}$，则在 M^H 中存在测地三角形$(\widetilde{\gamma}_1,\widetilde{\gamma}_2,\widetilde{\gamma}_3)$，使得 $L[\widetilde{\gamma}_i]=L[\gamma_i]$ $(i=1,2,3)$，并且有 $\widetilde{\alpha}\leqslant\alpha_1,\widetilde{\alpha}_3\leqslant\alpha_3$. 除了在 $H>0$ 且对某个 i 成立 $L[\gamma_i]=\pi/\sqrt{H}$ 的情形，M^H 中的测地三角形$(\widetilde{\gamma}_1,\widetilde{\gamma}_2,\widetilde{\gamma}_3)$除了差 M^H 中的运动之外是惟一确定的.

2. 若$(\gamma_1,\gamma_2,\alpha)$是 M 中的一个铰接形，其中 γ_1 是最短测地线，且当 $H>0$ 时有 $L[\gamma_2]\leqslant\pi/\sqrt{H}$，则在 M^H 中可以作铰接形$(\widetilde{\gamma}_1,\widetilde{\gamma}_2,\alpha)$，其中 $L[\widetilde{\gamma}_i]=L[\gamma_i]=l_i$ $(i=1,2)$，并且

$$\mathrm{d}(\gamma_1(0),\gamma_2(l_2))\leqslant\mathrm{d}(\widetilde{\gamma}_1(0),\widetilde{\gamma}_2(l_2)).$$

黑塞形式(Hessian form)　函数的二阶协变微分. 若(M,g)是一个黎曼流形，则 M 上的任意一个光滑函数 f 确定了 M 上的一个对称的二阶协变张量场 $\mathrm{Hess}(f)$：

$$\mathrm{Hess}(f)(X,Y)=Y(Xf)-(\nabla_YX)f,$$

$\forall\, X,Y\in\Gamma(TM)$. 上面定义的 $\mathrm{Hess}(f)$对于自变量 X,Y 都是 $C^\infty(M)$线性的. 人们把张量场 $\mathrm{Hess}(f)$称为 f 的黑塞形式. 在局部坐标系$(U;x^i)$下，黑塞形式 $\mathrm{Hess}(f)$的分量为

$$(\mathrm{Hess}(f))_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}-\Gamma_{ij}^k\frac{\partial f}{\partial x^k},$$

其中 Γ_{ij}^k是黎曼联络∇的系数.

黑塞比较定理(Hessian comparison theorem)　研究流形上分析的工具. 它描述曲率对黑塞形式的影响. 设 $M,\widetilde{M}$ 是两个 n 维黎曼流形，$\gamma:[0,b]\to M$，$\widetilde{\gamma}:[0,b]\to\widetilde{M}$ 分别是 $M,\widetilde{M}$ 上以弧长为参数的测地线，$x=\gamma(0)$，$\widetilde{x}=\widetilde{\gamma}(0)$，且 $\rho,\widetilde{\rho}$ 分别为 $M,\widetilde{M}$ 上至 x，$\widetilde{x}$ 的距离函数. 记 $\widetilde{K}(t)=\max\{T_{\widetilde{\gamma}(t)}\widetilde{M}$ 中包含 $\widetilde{\gamma}'(t)$ 的平面的截面曲率$\}$；$K(t)=\min\{T_{\gamma(t)}M$ 中包含 $\gamma'(t)$ 的平面的截面曲率$\}$. 若 $\gamma,\widetilde{\gamma}$ 都是最短测地线，并且 $\widetilde{K}(t)\leqslant K(t)$，$\forall\, t\in[0,b]$，则函数 $\rho,\widetilde{\rho}$ 分别在 $\gamma,\widetilde{\gamma}$ 的附近是 C^∞ 的，并且对任意的 $t\in[0,b]$及 $X\in T_{\gamma(t)}M$，$\widetilde{X}\in T_{\widetilde{\gamma}(t)}\widetilde{M}$，只要 $|X|=|\widetilde{X}|$，且$\langle X,\gamma'(t)\rangle=\langle\widetilde{X},\widetilde{\gamma}'(t)\rangle$，就有

$$\mathrm{Hess}(\widetilde{\rho})\ (\widetilde{X},\widetilde{X})\geqslant\mathrm{Hess}(\rho)(X,X).$$

黑塞比较定理在研究黎曼流形上的函数论性质时起重要作用. 作为推论，对于任意的 $t\in(0,b]$，有

$$\widetilde{\Delta}\widetilde{\rho}(\widetilde{\gamma}(t))\geqslant\Delta\rho(\gamma(t)).$$

若取 M 或 $\widetilde{M}$ 为常曲率空间，则上面的不等式将给出 $\widetilde{\Delta}\widetilde{\rho}$ 或 $\Delta\rho$ 的估计式，这里 $\Delta,\widetilde{\Delta}$ 分别表示 $M,\widetilde{M}$ 中的拉普拉斯算子.

拉普拉斯比较定理(Laplacian comparison theorem)　研究流形上分析的工具. 关于黎曼流形上拉普拉斯算子对距离函数的作用的分析. 设 $M,\widetilde{M}$ 是 n 维黎曼流形，$\gamma:[0,b]\to M$，$\widetilde{\gamma}:[0,b]\to\widetilde{M}$ 分别是 $M,\widetilde{M}$ 上以弧长为参数的测地线，$x=\gamma(0)$，$\widetilde{x}=\widetilde{\gamma}(0)$，且 $\rho,\widetilde{\rho}$ 分别为 $M,\widetilde{M}$ 上至 $x,\widetilde{x}$ 的距离函数. 用 $\mathrm{Ric},\widetilde{\mathrm{Ric}}$分别表示 $M,\widetilde{M}$ 中的里奇曲率张量，用 $\Delta,\widetilde{\Delta}$ 分别表示 $M,\widetilde{M}$ 中的拉普拉斯算子. 若 $\gamma,\widetilde{\gamma}$ 都是最短测地线，且对任意的 $t\in[0,b]$，有

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}(\widetilde{\gamma}',\widetilde{\gamma}')(t)\leqslant\mathrm{Ric}(\gamma',\gamma')(t),$$

而 $\widetilde{M}$ 是常曲率空间，则

$$\widetilde{\Delta}\widetilde{\rho}(\widetilde{\gamma}(t))\geqslant\Delta\rho(\gamma(t)),\qquad\forall\, t\in(0,b].$$

此外，$\widetilde{\Delta}\widetilde{\rho}(\widetilde{\gamma}(b))=\Delta\rho(\gamma(b))$成立的充分必要条件是对于任意的 $t\in[0,b]$，$T_{\gamma(t)}M$ 中包含 $\gamma'(t)$的平面的截面曲率为常数，该常数就是常曲率空间 $\widetilde{M}$ 的截面曲率. 与黑塞比较定理的推论对照，关于曲率的条件减弱了，但对于流形 $\widetilde{M}$ 的条件加强了.

体积比较定理(volume comparison theorem)

研究大范围黎曼几何的有力工具. 描述曲率对测地球体积大小的影响. 设 M 是 n 维完备黎曼流形，其里奇曲率$\geqslant(n-1)H$；对于任意固定的一点 $x\in M$，用 $V(x,t)$表示以 x 为中心、以 t 为半径的测地球 $B_t(x)$的体积. 若用 $V_H(t)$表示截面曲率为 H 的 n 维单连通、完备黎曼流形 M^H 中半径为 t 的测地球的体积，则 $V(x,t)/V_H(t)$是 t 的单调下降函数，特别地有 $V(x,t)\leqslant V_H(t)$. 当 $H>0$ 时，有

$$V(M)\leqslant V(S^n(1/\sqrt{H})),$$

其中 $S^n\left(1/\sqrt{H}\right)$是半径为 $1/\sqrt{H}$的 n 维标准球面，而且等号只在 M 与 $S^n\left(1/\sqrt{H}\right)$等距时成立. 该定理最早是由毕肖普(Bishop,R.)给出的，后来格罗莫夫(Gromov,M.)证明定理对于任意的 t 是成立的，大大地加强了定理的结论，从而有更广的应用.

最大直径定理(maximal diameter theorem) 关于正曲率流形与同维球面等距的定理. 设 M 是 n 维完备黎曼流形，其里奇曲率$\geqslant(n-1)H>0$，其中 H 是常数. 若它的直径等于 $\pi/\sqrt{H}$，则 M 必与 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中半径为 $1/\sqrt{H}$的球面 $S^n\left(1/\sqrt{H}\right)$等距. 上述定理是郑绍远证明的，后来盐浜胜博(Shiohama,K.)利用体积比较定理给出该定理的一个比较初等的证明. 在此之前，托波诺戈夫(Toponogov,V.A.)曾经在 M 的截面曲率$\geqslant H>0$ 的条件下，证明了上述定理. 博内-迈尔斯定理断言：若 M 的里奇曲率$\geqslant(n-1)H>0$，则它的直径必$\leqslant\pi/\sqrt{H}$. 因此，最大直径定理是博内-迈尔斯定理的补充.

嘉当-阿姆勃罗斯-希克斯定理(Cartan-Ambrose-Hicks theorem) 黎曼几何的基本定理之一. 关于两个同维黎曼流形间等距对应存在性的定理. 在两个同维黎曼流形之间何时能够建立等距对应是黎曼几何的基本问题之一. 在局部上这就是所谓的二次微分型的等价问题. 嘉当(Cartan,E.)给出了上述问题在局部情形的答案，主要结果如下：

1. 设 $M,\widetilde{M}$ 是两个 n 维黎曼流形，分别考虑在点 $x\in M,\widetilde{x}\in\widetilde{M}$ 的附近由初始正交标架(R_0)，$(\widetilde{R}_0)$决定的法坐标系，若 M 和 $\widetilde{M}$ 的曲率张量关于由初始标架沿着从法坐标原点引出的测地线平行移动所得标架的分量是对应的法坐标的同一个函数，则在 M 和 $\widetilde{M}$ 的这两个法坐标域之间能建立等距对应.

2. 在解析黎曼流形中，考虑点 $x\in M$ 的法坐标系，若已知曲率张量的分量及其所有协变微商在点 x 的数值，则黎曼度量在点 x 的法坐标系下的表达式是由之惟一确定的.

若引进指数映射、平行移动的记号，则定理 1 可以叙述成更为确切、便于推广到大范围情形的形式. 设 $x\in M,\widetilde{x}\in\widetilde{M},F:T_xM\to T_{\widetilde{x}}\widetilde{M}$ 是等距线性同构，记 $\varphi=\exp_{\widetilde{x}}\circ F\circ\exp_x^{-1}:B_r(x)\to B_r(\widetilde{x})$，其中 r 是充分小的正数，使得 φ 是半径为 r 的法坐标球形邻域 $B_r(x)$，$B_r(\widetilde{x})$之间的可微同胚. 对于从 x 引出的测地线 γ，用 P_γ 记沿 γ 的平行移动，$\widetilde{\gamma}=\varphi(r)$. 记 $F_\gamma=P_{\widetilde{\gamma}}\circ F\circ(P_\gamma)^{-1}$. R 和 $\widetilde{R}$ 分别表示 M 和 $\widetilde{M}$ 上的曲率算子. 这样，定理 1 可以改述如下：

1′. 若对于任意一点 $y\in B_r(x)$以及连接 x 和 y 的最短测地线 γ 有

$$F_\gamma(R(X,Y)Z)=\widetilde{R}(F_\gamma(X),F_\gamma(Y))F_\gamma(Z)\quad(\forall\ X,Y,Z\in T_yM),$$

则映射 φ 是等距对应，并且$(\varphi)_{*y}=F_\gamma$.

嘉当-阿姆勃罗斯-希克斯定理是定理 1′在大范围情形的推广. 为叙述清楚，首先必须给出 M 上的从 x 引出的分段光滑测地线段与 $\widetilde{M}$ 上的从 $\widetilde{x}$ 引出的分段光滑测地线段之间的对应. 作法如下：设 $\gamma:[0,l]\to M$ 是以弧长 t 为参数的分段光滑测地线段，所以有分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_m=l$，使得 $\gamma|_{t_i,t_{i+1}}$是光滑测地线段. 记

$$_i\gamma=\gamma|_{[0,t_i]}\ (1\leqslant i\leqslant m),$$

则 $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$可表示成

$$\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}(t)=\exp_{r(t_i)}(t-t_i)v_i,$$

其中 $v_i=\lim\limits_{t\to t_i+0}\gamma'(t)$. 在 $\widetilde{M}$ 上的对应测地线 $\widetilde{\gamma}$ 定义为

$$_1\widetilde{\gamma}(t)=\exp_{\widetilde{x}}t\cdot F(v_0),$$

$$_{i+1}\widetilde{\gamma}(t)=\begin{cases}i^{\widetilde{\gamma}(t)} & (0\leqslant t\leqslant t_i),\\ \exp_{i\widetilde{\gamma}(t_i)}(t-t_i)\cdot F_{ir}(v_i), & \\ t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1}, & \end{cases}$$

其中 $F_{i\gamma}=P_{i\widetilde{\gamma}}\circ F\circ(P_{i\gamma})^{-1}$.

3. 设 $M,\widetilde{M}$ 是 n 维完备黎曼流形，且 M 是单连通的，$x\in M,\widetilde{x}\in\widetilde{M},F:T_xM\to T_{\widetilde{x}}\widetilde{M}$ 是等距线性同构，若对于任意的 $y\in M$ 以及连接 x,y 的分段光滑测地线段 γ 有

$$F_\gamma(R(X,Y)Z)=\widetilde{R}(F_\gamma(X),F_\gamma(Y))F_\gamma(Z)\quad(\forall\ X,Y,Z\in T_yM),$$

则对于从 x 出发的任意两条分段光滑测地线段 $\gamma_0|_{[0,l_0]},\gamma_1|_{[0,l_1]}$，只要 $\gamma_0(\mathscr{L}_0)=\gamma_1(l_1)$，就有 $\widetilde{\gamma}_0(\mathscr{L}_0)=\widetilde{\gamma}_1(\mathscr{L}_1)$. 从而 $\gamma(l)\to\widetilde{\gamma}(\mathscr{L})$给出了光滑映射 $\varphi:M\to\widetilde{M}$，并且 $\varphi_{*y}:T_yM\to T_{\varphi(y)}\widetilde{M},\forall\ y\in M$ 是等距线性同构，因此，$\varphi:M\to\widetilde{M}$ 是等距覆盖映射. 若 $\widetilde{M}$ 是单连通完备黎曼流形，则 $\varphi:M\to\widetilde{M}$ 是等距映射.

最小直径定理(minimal diameter theorem) 刻画流形曲率与流形直径的关系. 若 M 是完备单连通黎曼流形，其截面曲率 K_M 满足 $1/4\leqslant K_M\leqslant1$，则 M 的直径满足不等式 $\pi\leqslant\mathrm{d}(M)\leqslant2\pi$，并且：

1. 当 $\mathrm{d}(M)>\pi$ 时，M 同胚于单位球面 S^n.

2. 当 $d(M)=\pi$ 时，M 与单位球面 $S^n(1)$、复射

影空间 CP^n、四元数射影空间 QP^n，Cayley 射影平面这四种秩 1 的对称空间之一等距.

这是伯热(Berger, M.)关于曲率拼挤问题得到的惊人的结果，把球面定理中的条件 $1/4<K_M\leqslant 1$ 做了实质性的推进，并且说明在左边的不等号是否容许等号出现对于定理的结论如何起着关键的作用.

欣奇定理(Synge theorem)　关于紧致黎曼流形的单连通性的一个重要定理. 若 M 是偶数维紧致可定向黎曼流形，并且它的截面曲率 $K_M>0$，则 M 必是单连通的. 若 M 是不可定向的，则 M 的基本群为 Z_2. 利用欣奇定理的论证方法还可以证明：若 M 是具有正截面曲率的奇数维紧致黎曼流形，则 M 必是可定向的. 但是，关于 M 的基本群得不出更多的结论. 欣奇定理是大范围黎曼几何的一条十分美妙的定理，反映了黎曼流形的曲率与拓扑的相互制约.

德·拉姆分解定理(de Rham decomposition theorem)　关于黎曼流形结构的基本定理之一. 设 M 是单连通、完备黎曼流形，M 的切丛 TM 能够分解成两个在平行移动下不变的分布 T_1M, T_2M 的直和. 若任意取定一点 $x\in M$，用 M_i 表示分布 T_iM 的通过点 x 的极大积分子流形($i=1,2$)，则 M 与积流形 $M_1\times M_2$ 是等距的，而且每一个 M_i 是 M 的完备的全测地子流形. 德拉姆分解定理给出了黎曼流形 M 可以表成积流形的条件.

齐格-格罗莫尔分裂定理(Cheeger-Gromoll splitting theorem)　关于完备非负曲率流形结构的一个定理. 设 M 是 n 维完备黎曼流形，它的里奇曲率 $\geqslant 0$. 若 M 包含一条测地线 $\gamma:(-\infty,\infty)\to M$，使得对于任意的 $-\infty<a<b<+\infty$，$\gamma|_{[a,b]}$ 是连接 $\gamma(a),\gamma(b)$ 的最短线，则 M 与 $\widetilde{M}\times\mathbb{R}$ 等距，其中 $\widetilde{M}$ 是 $n-1$ 维具有非负里奇曲率的完备黎曼流形. 因此，里奇曲率非负的完备黎曼流形 M 可以惟一地表成与之等距的积流形 $\widetilde{M}\times\mathbb{R}^k$，其中 $\widetilde{M}$ 的里奇曲率 $\geqslant 0$，但是 $\widetilde{M}$ 中不再包含具有如上性质的测地线. 上述定理在截面曲率 $K_M\geqslant 0$ 的假定下是由托波诺戈夫(Toponogov, V. A.)得到的.

全凸集(totally convex set)　普通凸体的推广. 设 C 是黎曼流形 M 的一个子集. 若对于 C 内的任意两点 p,q，连接 p,q 的测地线段 γ 必定包含在 C 内，则称 C 是全凸集. 对于许多黎曼流形，全凸的真子集是不存在的. 例如，在通常的球面上，全凸集只能是该球面本身. 若 M 是单连通完备黎曼流形，且 $K_M\leqslant 0$，则 M 中的测地球(开的，或闭的)都是全凸集. 若 M 是非紧完备黎曼流形，且 $K_M\geqslant 0$，则在 M 上存在全凸真子集. 这时，过每一点 $x\in M$，至少存在一条测地射线 $\gamma:[0,\infty)\to M$，若

$$H_r=M-\bigcup_{t>0}B_t(\gamma(t)),$$

则 H_γ 是全凸集. 例如，若 Z 是 $\mathbb{R}^3$ 中的圆柱面

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2=1\},$$

$\gamma=\{(1,0,z): z\geqslant a\}$ 是 Z 中的一条射线，则

$$H_\gamma=\{(x,y,z)\in Z: z\leqslant a\}$$

是 Z 中的全凸集. 但是 Z 中半径 $\leqslant\pi/2$ 的开测地球是凸集，而不是全凸集.

怀特海凸邻域定理(Whitehead theorem on convex neighborhood)　一种重要的特殊邻域的存在性定理. 设 A 是黎曼流形 M 的子集. 若对于属于闭包 $\overline{A}$ 的任意两点 p,q，存在惟一的一条连接 p,q 的最短测地线 γ，并且 γ 除两端之外全部落在子集 A 内，则称 A 是 M 的一个凸子集. 怀特海定理断言：在黎曼流形上，每一点必具有一个凸邻域. 上述定理原来是对具有线性联络的流形证明的. 凸邻域的存在性使得许多局部性命题的论证变得容易了. 另外，对于球形凸邻域半径的估计是大范围黎曼几何的重要内容. 例如，设 $B_r(p)$ 包含在紧致集 C 内，用 $\tau(q)$ 记 q 到它的割迹 $C(q)$ 的距离，记

$$T=\inf_{q\in C}\tau(q).$$

用 K 表示 C 内各点的截面曲率的上界. 则当

$$r<\frac{1}{2}\min\left\{\frac{\pi}{\sqrt{K}},T\right\}$$

时，$B_r(q)$ ($\forall\ p\in C$) 是 p 的凸邻域，这里当 $K\leqslant 0$ 时，把 $\pi/\sqrt{K}$ 理解为 ∞.

布斯曼函数(Buseman function)　研究大范围黎曼几何的重要工具. 完备非紧流形上利用测地线来定义的一种重要函数. 设 M 是非紧完备黎曼流形，$\gamma:[0,\infty)\to M$ 是一条以 t 为弧长参数的测地线，使得对于任意的 $t\in(0,\infty)$，$\eta|_{[0,t]}$ 是连接 $x=\gamma(0)$ 和 $\gamma(t)$ 的最短测地线，即 $d(\gamma(0),\gamma(t))=t$. 这样的测地线称为测地射线. 设 $\gamma:[0,\infty)\to M$ 是 M 上的一条测地射线，对于 $y\in M$，记

$$B_\gamma(y)=\lim_{t\to\infty}(d(y,\gamma(t))-t).$$

对于任意固定的 y，$d(y,\gamma(t))-t$ 是自变量 t 的单调下降的有界函数，所以上式右边的极限是存在的. 称 B_γ 为关于测地射线 γ 的布斯曼函数. 在非紧完备黎曼流形上，测地射线总是存在的，因而相应的布斯曼函数是有定义的. 布斯曼函数 B_γ 是李普希茨常数为 1 的李普希茨函数，因此函数 B_γ 是几乎处处可微的，并且在 B_γ 可微的点处有 $|\operatorname{grad}B_\gamma|=1$. 布斯曼函数的性质与黎曼流形的曲率的符号有密切的关系. 例如，当黎曼流形的截面曲率 $\geqslant 0$ 时，布斯曼函数是凸函数；当它的里奇曲率 $\geqslant 0$ 时，布斯曼函数是上调和的.

测地射线(geodesic ray)　见"布斯曼函数".

黎曼流形上的变换群(transformation groups

in Riemannian manifolds） 黎曼流形到自身的变换群. 主要是指黎曼流形的等距变换群、共形变换群和射影变换群. 一个微分流形到它自身的可微同胚的全体构成一个群，称为该流形的可微变换群. 这个群是非常大的，一般说来，它不是李群. 若在微分流形上加一定的结构，则该微分流形到自身的、保持该结构不变的可微同胚构成的群往往可能是一个李群. 例如，n 维连通黎曼流形 M 到自身的等距变换构成的群称为 M 的等距变换群，它是一个李群，其维数至多是 $n(n+1)/2$. 若 M 的等距变换群恰好是 $n(n+1)/2$ 维李群，则 M 必是常曲率空间，且它与下列空间之一等距：R^n，球面 S^n，实射影空间 $\mathrm{R}P^n$，n 维单连通双曲空间. n 维连通黎曼流形 M 到自身的共形变换构成的群称为 M 的共形变换群，当 $n\geqslant 3$ 时它是维数至多为 $(n+1)(n+2)/2$ 的李群. n 维球面的共形变换群达到了这个最大维数. 若黎曼流形 M 到自身的可微同胚把测地线变为测地线，则称它为 M 的一个射影变换. M 的所有射影变换构成的群称为 M 的射影变换群.

可微变换群（differentiable transformation group） 见“黎曼流形上的变换群”.

等距变换群（isometric transformation group） 见“黎曼流形上的变换群”.

共形变换群（conformal transformation group） 见“黎曼流形上的变换群”.

射影变换群（projected transformation group） 见“黎曼流形上的变换群”.

拉普拉斯算子（Laplace operator） 亦称拉普拉斯-贝尔脱拉米算子. 一种二阶椭圆型算子. 指微分几何中最基本的二阶线性微分算子，在微分几何、整体分析和偏微分方程理论中有重要的应用. 若 f 是紧致连通可定向的黎曼流形 M 上一个 $C^k(k\geqslant 2)$ 函数，在 M 的局部坐标系 $(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 下度量为

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}dx^i dx^j.$$

记 $g=\det(g_{ij})$，(g^{ij}) 是 (g_{ij}) 的逆矩阵，则 f 的拉普拉斯算子为

$$\Delta f=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right).$$

它还可表示为

$$\Delta f=-(d\delta+\delta d)f,$$

利用 M 的列维-齐维塔联络 ∇，在局部切标架 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 下又可表示为

$$\Delta f=\sum_{i=1}^{n}\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}f.$$

拉普拉斯算子的特征方程为 $\Delta u=-\lambda u$，式中 λ 是常数，称为拉普拉斯方程的特征值；函数 u 称为对应于特征值 λ 的特征函数. 特征方程的解 $u\equiv 0$ 称为平凡解. 仅对于某些特殊区域，如球、圆柱体等，特征函数才可以用特殊函数显式地表出.

拉普拉斯-贝尔脱拉米算子（Laplace-Bertrami operator） 即“拉普拉斯算子”.

拉普拉斯特征值问题（Laplace eigenvalue problem） 关于拉普拉斯算子的一类重要问题. 为了使得拉普拉斯算子是自伴的，常讨论如下三种类型特征值问题：

1. 闭特征值问题. 在紧致无边界的黎曼流形（简称闭流形）M 上，求所有满足特征方程 $\Delta u=-\lambda u$ 的实数 λ，对应于 λ 特征方程存在非平凡解 $u\in C^2(M)$，且满足 $\int_M u\,dv=0$.

2. 狄利克雷特征问题. 假设黎曼流形 M 的闭包 $\overline{M}$ 是紧致的，M 具有非空集的边界 ∂M，求所有满足特征方程 $\Delta u=-\lambda u$ 的实数 λ，对应于 λ 特征方程存在满足边界条件 $u|_{\partial M}=0$ 的非平凡解

$$u\in C^2(M)\cap C^0(\overline{M}).$$

3. 诺伊曼特征值问题. 假设黎曼流形 M 的闭包 $\overline{M}$ 是紧致的，M 具有非空集的边界 ∂M，求所有满足特征方程 $\Delta u=-\lambda u$ 的实数 λ，对应于 λ 特征方程存在满足边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial M}=0\quad\left(\text{式中}\frac{\partial}{\partial n}\text{是}\,\partial M\,\text{的单位外法向量}\right)$$

的非平凡解 $u\in C^2(M)\cap C^1(M)$.

黎曼流形的谱（spectrum of Riemannian manifold） 关于拉普拉斯算子的一类重要问题. 黎曼流形的拉普拉斯特征方程的特征值的全体. 紧致流形的谱是一个趋近于正无穷大的无穷数列 $0\leqslant\bar{\lambda}_1<\bar{\lambda}_2<\cdots\leqslant+\infty$. 对应于每个特征值 $\bar{\lambda}_i$ $(i=1,2,\cdots)$，特征函数的全体形成一个有限维向量空间，它的维数称为特征值的重数. 根据重数常将特征值排列成 $0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant+\infty$，式中每个特征值的重复次数为该特征值的重数. 完备黎曼流形的谱不一定是离散的，例如在整个欧氏平面上，若无穷远处具有有界的边界条件，则特征方程 $\Delta u=-\lambda u$ 的谱为连续谱，特征值由所有非负实数组成.

特征值的重数（number of replication of eigenvalue） 见“黎曼流形的谱”.

霍奇定理（Hodge theorem） 关于调和形式的重要定理. 设 M 是紧致定向的 n 维黎曼流形，$H^p(M)$ 表示 M 的 p 次调和形式的空间. 霍奇定理断言：M 的 p 次微分形式的空间 $\wedge^p(M)$ 可以分解为如下正交直和：

$$\begin{aligned}\wedge^p(M)&=\Delta(\wedge^p(M))\oplus H^p(M)\\&=d(\wedge^{p-1}(M))\oplus\delta(\wedge^{p+1}(M))\oplus H^p(M),\end{aligned}$$

即：若 $\alpha\in\wedge^p(M)$，则 $\alpha=d\lambda+\delta u+H\alpha$，其中 $H\alpha$ 是

调和形式. 因此方程 $\Delta w=\alpha$ 有解 $w\in\wedge^p(M)$，当且仅当在 $\wedge^p(M)$ 的内积下 α 正交于调和 p 形式空间 $H^p(M)$. $H^p(M)$ 是有限维向量空间，它的维数称为 M 的第 p 个贝蒂数，记为 b_p. 从 $*\Delta=\Delta *$ 知 $H^p(M)\cong H^{n-p}(M)$，因此 $b_p=b_{n-p}$. M 的欧拉示性数为

$$\chi(M)=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p b_p.$$

从霍奇定理可知，M 的每个德·拉姆上同调类中存在惟一调和微分形式，所以，M 的实系数的 p 阶奇异上同调群与 p 次调和形式空间同构.

黎曼流形的贝蒂数(Betti number of Riemannian manifold)　见"霍奇定理".

结点状区域(nodel domain)　使拉普拉斯算子的特征函数为零的点集. 黎曼流形上使得拉普拉斯算子的特征函数消失的点称为结点，结点的全体称为结点状区域，它具有重要的研究价值. 库朗(Courant, R.)证明的结点状区域定理断言：设 $0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant+\infty$，式中每个特征值的重复次数为该特征值的重数，若 φ_j 是对应于特征值 λ_j 的特征函数，$j=1,2,\cdots$，$\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots\}$ 是 M 上平方可积函数空间 $L^2(M)$ 的一个完备正交基，则 φ_j 的结点状区域数目不大于 j.

结点(nodel)　见"结点状区域".

外尔渐近公式(Weyl asymptotic formula)　关于拉普拉斯特征值的一类问题. 表明在拉普拉斯特征值问题中当特征值趋近于正无穷大时特征值的序号(包括特征值的重数)的状态. 它表述为

$$N(\lambda)\sim\frac{\omega_n(V(M)\lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n},$$

特别当 $k\to+\infty$ 时

$$(\lambda_k)^{\frac{n}{2}}\sim\frac{(2\pi)^n k}{\omega_n V(M)},$$

式中

$$\omega_n=2\pi^{\frac{n}{2}}/n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

是 R^n 中单位球的体积，$V(M)$ 是紧致定向黎曼流形 M 的体积. 例如，在 M 为开区间 $(0,a)$ 的简单情形，其狄利克雷特征值问题的特征值 $\lambda_k=k^2\pi^2/a^2$ 恰为外尔渐近公式的精确情形.

余面积公式(co-area formula)　黎曼流形的区域上的某类体积积分公式. 设 M 是 n 维黎曼流形，Ω 是 M 中具有紧致闭包 $\overline{\Omega}$ 的区域，f 是 Ω 上光滑函数，且 $f|_{\partial\Omega}=0$，$f\in C^0(\overline{\Omega})$. 设 $|f|$ 的正则值域为 $R_{|f|}$，$\Omega(t)=\{p\in\Omega: |f(p)|>t\}$，$\Gamma(t)=\{p\in\Omega: |f(p)|=t\}$. $\Omega(t)$ 的体积和 $\Gamma(t)$ 的 $n-1$ 维体积分别为 $V(t)$ 和 $A(t)$. 函数 $V(t)$ 是 $R_{|f|}$ 上光滑函数. 余面积公式表示为

$$V'(t)=-\int_{\Gamma(t)}|\nabla f|^{-1}\mathrm{d}A(t),$$

且对于任意 Ω 上绝对可积函数 h 成立

$$\iint_{\Omega}h|\nabla f|\mathrm{d}v=\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\int_{\Gamma(t)}h\mathrm{d}A(t).$$

特别地

$$\iint_{\Omega}|\nabla f|\mathrm{d}v=\int_0^{\infty}A(t)\mathrm{d}t.$$

极大-极小原理(max-min principle)　拉普拉斯特征值问题. 是进行特征值估计的工具. 假设 $H_1^2(M)$ 是 M 上平方可积函数 f 形成的希尔伯特空间，其中 f 的梯度平方是可积的，且满足所讨论的特征值问题的边界条件或限制条件，即对于狄利克雷特征值问题满足 $f|_{\partial M}=0$，对于闭特征值问题和诺伊曼特征值问题满足 $\int_M f\mathrm{d}v=0$. 若 $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots\}$ 是 $H_1^2(M)$ 中由特征函数组成的正交基，

$$\Delta\varphi_k=-\lambda_k\varphi_k\quad(0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant+\infty, k=1,2,\cdots),$$

则

$$\lambda_1=\inf\left\{\frac{\int_M|\nabla f|^2\mathrm{d}v}{\int_M f^2\mathrm{d}v}\,\middle|\, f\in H_1^2(M)\right\},$$

$$\lambda_i=\inf\left\{\frac{\int_M|\nabla f|^2\mathrm{d}v}{\int_M f^2\mathrm{d}v}\,\middle|\,\int_M f\varphi_j\mathrm{d}v=0,\right\}$$

$$(f\in H_1^2(M), j=1,2,\cdots).$$

第一特征值的下界估计(estimate of the lower bound for the first eigenvalue)　关于拉普拉斯特征值的一类问题. 估计拉普拉斯第一特征值的非零下界. 第一特征值是与黎曼流形的曲率密切相关的拉普拉斯特征值问题中的最小非零特征值，其下界估计在数学、物理中有广泛应用. 利什内罗维奇(Lichnérowicz, A.)证明：若 n 维紧致无边界的黎曼流形 M 的里奇曲率具有正常数下界 $(n-1)k$，则 M 的第一特征值 $\lambda_1(M)\geqslant nk$. 在此条件下，沃白塔(Obata, M.)证明：$\lambda_1(M)=nk$ 当且仅当 M 等距对应于具有常数截面曲率 k 的 n 维球面 $S^n(1/\sqrt{k})$；托波诺戈夫(Toponogov, V. A.)证明：M 有最大直径，即 M 的直径 $d=\pi/\sqrt{k}$ 当且仅当 M 等距对应于 $S^n(1/\sqrt{k})$. 由于 $\lambda_1(S^n(1/\sqrt{k}))=nk$，所以，沃白塔结论表明：某类流形中，若其第一特征值与某球面的第一特征值相等，则这类流形和球面等距对应；托波洛戈夫结论表明：从直径的长度可以推断某类流形和球面等距对应. 对于具有非负里奇曲率的紧致无边界的黎曼流形 M，李伟才(Li, P.)和丘成桐发展了对第一特征函数进行梯度估计的方法，证明了：

$$\lambda_1(M) \geqslant \frac{\pi^2}{2d^2},$$

其中 d 为 M 的直径. 钟家庆和杨洪苍改进了此结果，得到了最佳的下界估计

$$\lambda_1(M) \geqslant \frac{\pi^2}{d^2}.$$

此估计也适用于诺伊曼特征值问题的第一特征值.

极小子流形的特征值(eigenvalues for minimal submanifolds) 极小子流形上拉普拉斯算子的特征值. 一个等距浸入子流形，若它的平均曲率法向量处处消失，则称为极小子流形. 欧氏空间的浸入子流形是极小子流形的充分必要条件为浸入的坐标函数是调和函数. 高桥证明：m 维黎曼流形 M 到球面 $S^n(r)$ 的等距浸入是极小浸入当且仅当浸入的坐标函数是具有特征值 m/r^2 的 M 的拉普拉斯特征函数. 对于第一特征值，有乔依(Choi, H. I.)和王霭民结果：若 N 是一个 n 维紧致黎曼流形，N 的里奇曲率具有正常数下界 $(n-1)k$，M 是 N 的极小嵌入超曲面，则 M 的拉普拉斯闭特征值问题的第一特征值

$$\lambda_1(M) \geqslant \frac{(n-1)k}{2}.$$

因此 n 维单位球面 S^n 中极小嵌入超曲面 M 的第一特征值

$$\lambda_1(M) \geqslant \frac{n-1}{2}$$

(丘成桐猜想应该成立 $\lambda_1(M)=n-1$). 通过极小子流形的热核比较定理，麦尔克福尔生(Markvorsen, S.)建立了如下特征值的比较定理：设 N 是截面曲率小于或等于 k 的 n 维黎曼流形，M 是 N 的 m 维极小浸入子流形，若 D 是 N 的圆盘 $B(x;\delta)$ 中包含 x 的 M 的紧致区域，$B_k(\delta)$ 是具有常数截面曲率 k 的 n 维单连通空间形式 M_k 的半径为 δ 的圆盘，以 $\lambda_i(D)$ 和 $\lambda_i(B_k(\delta))$ 分别表示 D 和 $B_k(\delta)$ 上第 i 个狄利克雷特征值 $(i=1,2,\cdots)$，则

$$\lambda_1(D) \geqslant \lambda_1(B_k(\delta)) \geqslant m\pi^2/4\delta^2.$$

若 $\lambda_1(0)=\lambda_1(B_k(\delta))$，则 D 是 M 中以 x 为中心，δ 为半径的测地圆盘. 而且，若 $k\leqslant 0$，$V(D)$ 是 D 的体积，则

$$(\lambda_i(D))^{\frac{m}{2}} \geqslant \frac{k(4\pi)^{\frac{m}{2}}}{\mathrm{e}\cdot V(D)}.$$

博赫纳技巧(Bochner technique) 大范围微分几何研究中的一种特殊技巧. 利用紧致黎曼流形上非常值的下调和函数没有相对极大值的性质，证明一类消失定理的基本方法. 它通过计算某些微分形式或张量的长度的拉普拉斯算子的表示式，以及对流形曲率的限制，引出流形的拓扑或刚性性质，推断上同调群的平凡性和建立某些偏微分方程的存在性定理，从而展现拉普拉斯算子的谱、流形的拓扑和几何性质的内在联系. 博赫纳方法也适用于函数的拉普拉斯算子、克勒几何的 δ 的拉普拉斯算子及关于旋量的狄喇克算子的研究.

庞加莱不等式(Poincaré inequality) 拉普拉斯特征值的一个不等式. 即关于最小非零的拉普拉斯特征值的极大-极小原理，在整体分析和偏微分方程中有重要应用. 若 λ_1 是第一非零特征值，则对于任意 $f\in H_1^2(M)$，有

$$\lambda_1\int_M f^2\mathrm{d}V \leqslant \int_M |\nabla f|^2\mathrm{d}V,$$

等式成立当且仅当 f 是第一特征函数.

索伯列夫不等式(Sobolev inequality) 整体分析和偏微分方程的重要不等式. 假设 M 是 n 维紧致黎曼流形，则存在正常数 C，使得对于任意 $f\in H_1^2(M)$，有

$$C\left(\int_M |f|^{\frac{n}{n-1}}\mathrm{d}V\right)^{n-1} \leqslant \left(\int_M |\nabla f|\mathrm{d}V\right)^n.$$

$$S(M)=\inf\left\{\frac{\left(\int_M |\nabla f|\mathrm{d}V\right)^n}{\left(\int_M |f|^{\frac{n}{n-1}}\mathrm{d}V\right)^{n-1}}\,\middle|\, f\not\equiv 0,\right\}$$

$$(f\in H_1^2(M))$$

称为索伯列夫常数. 索伯列夫不等式等价于等周不等式.

索伯列夫常数(Sobolev constant) 见“索伯列夫不等式”.

齐格等周不等式(Cheeger isoperimetric inequality) 拉普拉斯特征值的一个不等式. 若 M 是 n 维完备的黎曼流形，则存在正常数 C，使得对于 M 的任意紧致子区域 Ω 均成立 $CV(\Omega)\leqslant V(\partial\Omega)$，式中 $V(\Omega)$ 和 $V(\partial\Omega)$ 分别表示 Ω 和其边界 $\partial\Omega$ 的体积.

$$h_D = \inf\left\{\frac{V(\partial\Omega)}{V(\Omega)}: \Omega \text{ 是 } M \text{ 的紧致子区域}\right\}$$

称为齐格常数. 若 M 是紧致无边界的黎曼流形，则存在正常数 C' 使得对于 M 的任意紧致超曲面 S，S 将 M 分为两个开子流形 M_1 和 M_2，满足 $\partial M_1=\partial M_2=S$，有 $C'\min\{V(M_1),V(M_2)\}\leqslant V(S)$，式中 $V(M_i)$，$i=1,2$ 和 $V(S)$ 分别是 M_i 和 S 的体积.

$$h_C(M)=\inf\left\{\frac{(V(\partial\Omega))^n}{(V(\Omega))^{n-1}}: \Omega \text{ 是 } M \text{ 的紧致区域}\right\}$$

称为齐格常数. 对于拉普拉斯特征值问题，齐格(Cheeger, J.)为第一非零特征值的下界建立了估计：

$$\lambda_1 \geqslant \frac{1}{4}(h_D(M))^2;\quad \lambda_1 \geqslant \frac{1}{4}(h_C(M))^2.$$

齐格等周不等式也可表示为

$$C(V(\Omega))^n \leqslant (V(\partial\Omega))^{n-1}.$$

$$I_D(M)=\inf\left\{\frac{(V(\partial\Omega))^n}{(V(\Omega))^{n-1}}: \Omega \text{ 是 } M \text{ 的紧致区域}\right\}$$

称为 M 的等周常数,它与 M 的索伯列夫常数相等.对于紧致无边界的黎曼流形,齐格等周不等式可表为 $C'(\min\{V(M_1),V(M_2)\})^{n-1}\leqslant V(S))^n$.

$$I_C(M)=\inf\left\{\frac{(V(S))^n}{(\min\{V(M_1),V(M_2)\})^{n-1}}\middle|\right\}$$

(S 为 M 的紧致超曲面)

称为紧致流形 M 的等周常数. M 的索伯列夫常数记为 $S(M)$,则成立 $I_C(M)\leqslant S(M)\leqslant 2I_C(M)$.

齐格常数(Cheeger constant) 见"齐格等周不等式".

等周常数(isoperimetric constant) 见"齐格等周不等式".

几何等周不等式(geometric isoperimetric inequality) 黎曼流形上的一类重要不等式. 设 Ω 是 n 维完备的黎曼流形 M 的具有紧致闭包的开区域,几何等周不等式是指当 Ω 的体积给定时,对于边界 $\partial\Omega$ 的 $n-1$ 维体积的一个不等式. 物理等周不等式是指当 Ω 的体积给定时,对于 $\partial\Omega$ 的拉普拉斯特征值问题的第一非零特征值的一个不等式. 费伯(Faber, G.)和克朗(Krahn, E.)证明:当几何等周不等式成立时,物理等周不等式也成立. 它叙述为:设 M_k 是具有常数截面曲率 k 的 n 维单连通的空间形式,D 是 M_k 中的测地圆盘,若对于 M 中所有体积与 D 的体积 $V(D)$ 相等的区域 Ω(当 $k>0$,假设 $V(\Omega)<V(M_k)$)成立 $V(\partial\Omega)\geqslant V(\partial D)$,则 $\lambda(\Omega)\geqslant\lambda(D)$,等式成立当且仅当 Ω 和 D 等距对应,式中 $\lambda(\Omega)$ 和 $\lambda(D)$ 分别表示 Ω 和 D 上狄利克雷特征值问题的第一非零特征值.

列维-格罗莫夫等周不等式(Levy-Gromov isoperimetric inequality) 流形上分析中的一个著名不等式. 设 M 是里奇曲率具有正常数下界 $(n-1)k$ 的 n 维紧致黎曼流形,M_k 是具有常数截面曲率 k 的 n 维球面,$V(M)=\beta V(M_k)(\beta\leqslant 1)$,式中 $V(M)$ 和 $V(M_k)$ 分别为 M 和 M_k 的体积,若 M 中具有光滑边界的区域 Ω 和 M_k 中测地圆盘 D 的体积满足 $V(\Omega)=\beta V(D)$,则边界 $\partial\Omega$ 和 ∂D 的 $n-1$ 维体积 $A(\partial\Omega)$ 和 $A(\partial D)$ 满足 $A(\partial\Omega)\geqslant\beta A(\partial D)$;等式成立当且仅当 M 和 M_k 等距对应,Ω 和 D 等距对应. 从 $V(\Omega)=\beta V(D)$ 可推得区域 Ω 和 D 上狄利克雷特征值问题的第一非零特征值 $\lambda(\Omega)\geqslant\lambda(D)$;等式成立当且仅当 M 和 M_k 等距对应,Ω 和 D 等距对应.

特征值比较定理(eigenvalue comparison theorems) 关于拉普拉斯算子的特征值的一种估计. 在一般黎曼流形的截面曲率或里奇曲率的适当假定下,确立黎曼流形的特征值和常曲率的单连通空间形式的特征值的比较关系:

1. 设 M 是 n 维完备的黎曼流形,M 的截面曲率小于或等于常数 k. 对于任何 $x\in M$,$\delta>0$,记 $B(x;\delta)=\{y\in M;d(x,y)<\delta\}$,$D_x=M\backslash C(x)$,$C(x)$ 是 M 中点 x 的割迹,$V(B(x;\delta))$ 和 $V(D_x)$ 分别是 $B(x;\delta)$ 和 D_x 的体积,$V(B_k(\delta))$ 是具有常数截面曲率 k 的 n 维单连通空间形式 M_k 的半径为 δ 的圆盘 $B_k(\delta)$ 的体积,若成立 $B(x;\delta)\subset D_x$,则:

1) $V(B(x;\delta))\geqslant V(B_k(\delta))$,等式成立当且仅当 $B(x;\delta)$ 等距对应于 $B_k(\delta)$.

2) $\lambda(B(x;\delta))\geqslant\lambda_k(\delta)$, $\lambda(B(x;\delta))$ 和 $\lambda_k(\delta)$ 分别为 $B(x;\delta)$ 和 $B_k(\delta)$ 的最小狄利克雷特征值.

3) 若 $k<0$,则 $\lambda(B(x;\delta))\geqslant-(n-1)^2k/4$,特别地,若 M 是单连通的黎曼流形,则对于 M 中任何正规区域 Ω(闭包是紧致的,边界是逐段光滑的区域),Ω 的最小狄利克雷特征值满足

$$\lambda(\Omega)\geqslant-\frac{(n-1)^2k}{4}.$$

以上结论分别由毕肖普(Bishop, R.)、郑绍远和麦基恩(Mckean, H. P.)获得.

2. 若 M_n 是 n 维完备的黎曼流形,M 的里奇曲率大于或等于常数 $(n-1)k$,则:

1) $V(B(x;\delta))\leqslant V(B_k(\delta))$,等式成立当且仅当 $B(x;\delta)$ 等距对应于 $B_k(\delta)$. 若 $k>0$,则 $V(M)\leqslant V(S^n)/k^{\frac{n}{2}}$,等式成立当且仅当 M 等距对应于具有常数截面曲率 k 的 n 维球面.

2) $\lambda^*(B(x;\delta))\leqslant\lambda_k(\delta)$,其中

$$\lambda^*(B(x;\delta))=\inf\left\{\frac{\|\nabla f\|^2}{\|f\|^2}:f\in H_1^2(B(x;\delta))\right\},$$

等式成立当且仅当 $B(x;\delta)$ 等距对应于 $B_k(\delta)$.

以上结论分别由毕肖普和郑绍远获得.

伯热等径不等式(Berger isoembolic inequality) 紧致黎曼流形体积的一个普遍适用的下界估计. 该不等式断言:若 M 是一个 n 维紧致黎曼流形,$V(M)$ 和 $\text{inj}(M)$ 分别为 M 的体积和内射半径,以 C_n 表示 n 维单位欧氏球面的体积,则

$$V(M)\geqslant C_n(\text{inj}(M)/\pi)^n,$$

等式成立当且仅当 M 等距对应于具有常数截面曲率 $(\pi/\text{inj}(M))^2$ 的 n 维球面.

热核(heat kernel) 抛物型方程的基本解. 设 Δ 是黎曼流形 M 的拉普拉斯算子,作用在 $C(M\times R^+)$ 上的微分算子

$$L=\Delta-\frac{\partial}{\partial t}$$

称为 M 的热算子. $Lu=0$ 称为(齐次)热方程,其中 u 关于 M 的变量(空间变量)是 C^2 的函数,关于时间变量 t 是 C^1 的函数. 设 $F(x,t)\in C(M\times\mathbb{R}^+)$,$Lu=-F$ 称为非齐次热方程. M 的热核(也称 M 的热方程的基本解)是一个定义在 $M\times M\times\mathbb{R}^+$ 上,关于 x 是 C^2 关于 t 是 C^1 的连续函数 $q=q(x,y,t)$,满足

$L_x q=0$ 并对于 M 上所有有界连续函数 f 成立

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_M q(x,y,t)f(y)\mathrm{d}v(y) = f(x).$$

热算子(heat operator) 见"热核".

(齐次)热方程(homogeneous heat equation) 见"热核".

非齐次热方程(nonhomogeneous heat equation) 见"热核".

热方程的基本解(fundamental solution of heat equation) 即"热核".

热核比较定理(comparison theorems for heat kernels) 关于黎曼流形上热核的一种估计.在对于一般黎曼流形的截面曲率或里奇曲率的适当假定下,建立黎曼流形和具有常曲率的单连通空间形式的热核之间的比较性质.设 M 是非紧致的 n 维黎曼流形,对任何 $x\in M,\delta>0$,记 $B(x;\delta)=\{y\in M:d(x,y)<\delta\}$,$q(x,y,t)$是 $B(x;\delta)$的狄利克雷热核.若 M_k 是具有常数截面曲率 k 的 n 维单连通空间形式,$\bar{x}\in M_k,\delta<\pi/\sqrt{k}$,$q_k(\bar{x},\bar{y},t)$是 M_k 中半径为 δ 的测地圆盘 $B_k(\bar{x};\delta)$的狄利克雷热核函数

$$\varepsilon_k:(0,\delta)\times\mathrm{R}^+\to\mathrm{R}$$

定义为 $\varepsilon_k(d_k(\bar{x},\bar{y}),t)=q(\bar{x},\bar{y},t)$;函数

$$Q:B(x;\delta)\times\mathrm{R}^+\to\mathrm{R}$$

定义为 $Q(y,t)=\varepsilon_k(d(x,y),t)$,则:

1. 若 $B(x;\delta)$的所有截面曲率小于或等于 k,且 $\overline{B(x;\delta)}\subset D_x$,其中 $D_x=M\setminus C(x)$,$C(x)$是 M 中点 x 的割迹,则对于任意$(y,t)\in B(x;\delta)\times\mathrm{R}^+$成立 $q(x,y,t)\leqslant Q(y,t)$,于某点$(y_0,t_0)\in B(x;\delta)\times\mathrm{R}^+$等式成立当且仅当 $B(x;\delta)$等距对应于 M_k 中半径为 δ 的测地圆盘.

2. 若 $B(x;\delta)$的所有里奇曲率大于或等于 k,则对于任意$(y,t)\in B(x;\delta)\times\mathrm{R}^+$成立 $q(x,y,t)\geqslant Q(y,t)$,于某点$(y_0,t_0)\in B(x;\delta)\times\mathrm{R}^+$等式成立当且仅当 $B(x;\delta)$等距对应于 M_k 中半径为 δ 的测地圆盘.

以上结论由台比阿特(Debiard,A.)、盖维欧(Gaveau,B.)、马采(Mazet,E.)、齐格(Cheeger,J.)和丘成桐所获得.

撰 稿 水乃翔 陈维桓 蔡开仁
审 阅 潘养廉

黎曼对称空间

黎曼对称空间(Rimannian symmetric space) 常曲率黎曼流形的一种直接推广.对于黎曼流形 M 的一点 x,可以定义 M 的以 x 为中心的测地对称 σ_x 如下:对任一点 p,使 $\sigma_x(p)$,p 与 x 在同一测地线上,p 与 $\sigma_x(p)$分居 x 两侧,且到 x 的距离相等.若对于 M 的任何点 x,σ_x 都是 M 的等距变换,则称 M 为黎曼对称空间.n 维欧氏空间 E^n 与欧氏球面 S^n 的测地线分别为 E^n 中的直线与 S^n 中的大圆,从而它们的任一点的测地对称都是等距变换,所以它们都是黎曼对称空间.除了古典几何学研究的对象外,诸如常曲率的黎曼流形、半单李群等也是黎曼对称空间.由于保持了对称性,自然就保持了空间每点都处于平等地位的匀齐性,也就是说黎曼对称空间 M 是齐性空间,即 M 的等距变换群是可递地作用于 M 上的李变换群.这种观点给出了刻画黎曼对称空间的一种方法.若 σ 是李群 G 的一个对合自同构,即 $\sigma\neq\mathrm{id},\sigma^2=\mathrm{id}$,则 σ 的不动点集 $G_\sigma=\{g\in G|\sigma(g)=g\}$ 是 G 的闭子群.以$(G_\sigma)_0$ 表示 G_σ 的单位连通分支.若 G 的闭子群 H 满足:$(G_\sigma)_0\subseteq H\subseteq G_\sigma$,$G/H$有 G 不变黎曼度量,则 G/H 为黎曼对称空间.反之,任何黎曼对称空间都可以这种方式来表示.于是,黎曼对称空间的研究转化为对李群及其对合自同构的研究,最终归结为实单李代数的研究.单连通的完备黎曼流形为黎曼对称空间的充分必要条件为其曲率张量的协变导数为零,即曲率张量在平行移动下不变.一般地,若一个黎曼流形有此性质,则称之为局部黎曼对称空间.

嘉当(Cartan,E.)于 1926 年开始研究的黎曼对称空间理论,大大丰富了克莱因(Klein,(C.)F.)于 1872 年在埃尔朗根纲领中提出的思想——用群的概念统一几何学的思想,即几何学是流形关于其变换群的不变性理论.到 1927 年,嘉当已经完成了黎曼对称空间的分类问题.保留了欧氏空间与欧氏球面的度量性质与对称性质的空间就是黎曼对称空间.嘉当解决黎曼对称空间分类问题的另一种方法是以完整群为基础的.若 x 为黎曼流形 M 上的一点,沿着以 x 为起点的闭曲线的平行移动诱导出 x 的切空间上保持黎曼结构不变的线性变换.由这些线性变换生成的群,称为 x 的完整群.流形上不同点的完整群是同构的.从 x 的完整群的一个元素,可以导出保持 x 不动的局部等距变换,由此建立完整群的李代数、黎曼结构与曲率张量间的关系,从而解决黎曼对称空间的分类问题.

黎曼对称空间可以推广为准黎曼对称空间.其局部问题由伯热(Berger,M.)和严志达解决.整体问题在非紧群流形情况下由后藤以纪、小林昭七和西罗塔(Sirota,A.I.)、索罗多夫尼科夫(Solodovnikov,A.S.)等人解决.更一般的对称空间是一个齐性空间 G/H,H 是李群 G 的一个对合自同构 σ 的不动点子群的单位连通分支.嘉当对于一般对称空间的贡献是关于它们的贝蒂(Betti,E.)数,并说明了它们的贝蒂数和紧李群贝蒂数的关系.

它们的贝蒂数的确定简化为一个纯代数问题.不仅黎曼对称空间的几何性质与拓扑性质是重要的,而且黎曼对称空间对分析学也有深刻的影响.古典分析学是以空间 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 为基础的.现代的以黎曼流形为基础的分析学有了极大的扩张.黎曼对称空间上的分析学已有了许多深刻的结果与应用.例如容许复结构的黎曼对称空间——埃尔米特对称空间上的函数的研究,成为多元复变函数论中的重要内容.

局部黎曼对称空间(local Riemannian symmetric space) 见"黎曼对称空间".

中心对称(central symmetry) 黎曼流形上的一类特殊等距变换.若 x 是黎曼流形 M 的一点.M 的一个等距对合变换(即2阶等距变换)σ_x 使 x 为其孤立不动点,即有 x 的邻域 U,使得 $\sigma_x(p)=p$,$p\in U$ 当且仅当 $p=x$,则称 σ_x 为关于 x 的中心对称,并称 x 为 M 的对称中心.M 的任何一点均为 M 的对称中心当且仅当 M 为黎曼对称空间.此时,关于 x 的中心对称就是关于 x 的测地对称,从而是惟一的.中心对称 σ_x 诱导出的 M 在 x 处的切空间 T_xM 的线性变换 $d\sigma_x=-\mathrm{id}_{T_xM}$,即为负恒等变换.

黎曼流形的对称中心(center of symmetry of Rimannian manifolds) 见"中心对称".

李变换群(Lie transformation group) 李群在流形上的作用所构成的群.若李群 G 可微地作用在微分流形 M 上,即有 $G\times M$ 到 M 的可微映射 $(g,p)\to gp$,使得 $ep=p$,$\forall\ p\in M$,e 为 G 的单位元,

$$(g_1g_2)p=g_1(g_2p),\quad \forall\ p\in M,\ g_1,g_2\in G,$$

则称 G 是 M 的李变换群.固定一个 $g\in G$,映射 $p\to gp$ 是 M 到自身的微分同胚.换言之,G 的每个元素都是 M 的微分同胚,若 G 中不同元素是 M 不同的微分同胚,即等式 $gx=x$,$\forall\ x\in M$ 仅当 $g=e$ 时成立,则称 G 在 M 上的作用有效.一般

$$G_1=\{g\in G\mid gx=x,\forall\ x\in M\}$$

是 G 的闭正规子群.商群 G/G_1 仍为 M 的李变换群,且在 M 上的作用有效.迈尔斯(Myers,S.B.)与斯廷罗德(Steenrod,N.E.)证明:黎曼流形 M 的等距变换群 $I(M)$ 是 M 的李变换群.特别地,黎曼对称空间的等距变换群为其李变换群.如果黎曼流形 M 的李变换群 G 是 $I(M)$ 的子群,则称 M 的黎曼度量(或黎曼结构)是 G 不变的.

迷向子群(isotropy subgroup) 保持一点不动的李子群.设 G 是流形 M 的李变换群.$x\in M$,G 中保持 x 不动的元素集 $F_x=\{g\in G\mid gx=x\}$ 是 G 的闭子群,从而是 G 的李子群,称为 x 的迷向子群.特别地,商空间 G/F_x 有微分结构,并使 G 为其李变换群.对于 $g\in G$,$x\in M$,则 $F_{gx}=g^{-1}F_xg$,且 G 在 G/F_x,G/F_{gx} 上的作用是等价的.对于 $g\in F_x$,dg 是切空间 T_xM 的可逆线性变换,且 $d(g_1g_2)=dg_1\cdot dg_2$.于是,$g\to dg$ 为 F_x 的以 T_xM 为表示空间的线性表示,称为 F_x 的迷向线性表示.

迷向线性表示(isotropic linear representation) 见"迷向子群".

轨道(orbit) 李变换群作用于一点的结果.设 G 是微分流形 M 的李变换群.$x\in M$,称 M 的子集 $Gx=O_x=\{gx\mid g\in G\}$ 为 x 在 G 作用下的轨道.M 中两点的轨道或者重合或者不相交,且 M 为所有轨道的并.x 的轨道 O_x 是 M 的子流形.G 在 O_x 上的作用与 G 在 G/F_x 上的作用等价.可将 gF_x 与 gx 等同.以 π 表示 G 到 G/F_x 上的自然映射:$\pi(g)=gF_x=gx$,则 π 是可微的.$d\pi$ 是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 到 T_xM 的线性同态.

齐性空间(homogeneous space) 亦称齐性流形.具有可递李变换群作用的流形.若微分流形 M 的李变换群 G 可递地作用于 M 上,即对任何 $x,y\in M$,存在 $g\in G$,使 $y=gx$,则称 M 为齐性空间(或齐性流形).对任何 $x\in M$,均有 $O_x=M$,从而 G 在 M 上的作用与 G 在 G/F_x 上的作用等价.若黎曼流形 M 的等距变换群 $I(M)$ 可递地作用于 M 上,则称 M 为齐性黎曼空间(或齐性黎曼流形).对于 $g\in F_x$,dg 是 T_xM 的正交变换.$\{dg\mid g\in F_x\}$ 生成的群 F_x^* 称为 x 的线性迷向群.设 p,q 为黎曼对称空间 M 的两点,x 是连接 p,q 的测地线段的中点,σ_x 为关于 x 的中心对称,于是 $\sigma_xp=q$.因此,黎曼对称空间是齐性黎曼空间.

齐性流形(homogeneous manifolds) 即"齐性空间".

齐性黎曼空间(homogeneous Rimannian space) 见"齐性空间".

齐性黎曼流形(homogeneous Rimannian manifolds) 即"齐性黎曼空间".

线性迷向群(linear isotropy group) 见"齐性空间".

对合自同构(involutive automorphism) 联系李群与黎曼对称空间的纽带.李群 G 的二阶自同构 τ.τ 诱导了 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构 $d\tau$,即 $d\tau$ 为 $\mathfrak{g}$ 的二阶自同构.若 g 是 G 的非中心二阶元素,则由 g 确定的 G 的内自同构 $\mathrm{ad}g:h\to g^{-1}hg$ 是 G 的对合自同构.若 σ_x 是黎曼对称空间 M 关于 x 的中心对称,则 $\mathrm{ad}\sigma_x$ 是 M 的等距变换群 $I(M)$ 及其单位连通分支的对合自同构,且 $\mathrm{ad}\sigma_{gx}=\mathrm{ad}g\cdot\mathrm{ad}\sigma_x\cdot\mathrm{ad}g^{-1}$.

对合自同构的特征子群(characteristic subgroup of involutive automorphism) 研究黎曼对称空间时一类重要子群.李群 G 的对合自同构 τ 的不动点集 $G_\tau=\{g\in G\mid\tau g=g\}$.$G_\tau$ 是 G 的闭子群,其单位连通分支 $(G_\tau)_0$ 也是 G 的闭子群,G_τ 及 $(G_\tau)_0$ 均为

李子群. 设 σ_x, F_x 是黎曼对称空间 M 中关于点 x 的中心对称及 x 的迷向子群. $\tau=\mathrm{ad}\sigma_x$ 是 $I(M)$ 与 $G=I(M)_0$ 的对合自同构,则 $(G_\tau)_0\subseteq F_x\subseteq G_\tau$;且 G 的伴随表示 $(\mathrm{Ad}_G,\mathfrak{g})$ 在 F_x 上的限制 $\mathrm{Ad}_G F_x$ 是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 中的紧子群.

黎曼对称对(Riemannian symmetric pair) 一种特殊的对称结构. 设 K 是连通李群 G 的闭子群. 若有 G 的对合自同构 τ,使得 $(G_\tau)_0\subseteq K\subseteq G_\tau$,则称 (G,K,τ) 为一个对称对. 又若 $\mathrm{Ad}_G K$ 是紧致的,则称 (G,K,τ) 为黎曼对称对. 若 x 是黎曼对称空间 M 中一点,$G=I(M)_0$,则 $(G,F_x,\mathrm{ad}\sigma_x)$ 是一个黎曼对称对;反之,若 (G,K,τ) 是一个黎曼对称对,则在 G/K 上有黎曼结构使 G/K 为黎曼对称空间. 若以 π 表示 G 到 G/K 的自然映射,则关于 $\pi(g)$ 的中心对称 $\sigma_{\pi(g)}$ 由公式

$$\sigma_{\pi(g)}\pi(h)=\pi(g\tau(g^{-1}h))\quad(h\in G)$$

确定.

对称对(symmetric pair) 见"黎曼对称对".

正交对称李代数(orthogonal symmetric Lie algebra) 实李代数的一种特征子代数. 实李代数 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构 σ 的不动点集 $\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}\mid\sigma(X)=X\}$ 称为 σ 的特征子代数. $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数,又称 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$ 为对称李代数. 若由 $\mathrm{ad}_F\mathfrak{k}$ 生成 $\mathfrak{g}$ 的线性变换的连通李群是紧致的,则称 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$ 为正交对称李代数. 若 $C(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{k}=(0)$,则称 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$ 是有效的. 若 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$ 是正交对称李代数,则 $\mathfrak{g}$ 的基灵型在 $\mathfrak{k}$ 上的限制是半负定的;而 σ 的属 -1 的特征子空间 $E_{-1}(\sigma)=\mathfrak{p}=\{X\in\mathfrak{g}\mid\sigma(X)=-X\}$ 有 $\mathfrak{k}$ 不变内积. 若 (G,K,τ) 是黎曼对称对,则 $\sigma=\mathrm{d}\tau$ 是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的对合自同构,其特征子代数 $\mathfrak{k}$ 是 K 的李代数. 黎曼对称空间 G/K 在 $\pi(e)$(e 为 G 的单位元素)处的切空间 $T_{\pi(e)}G/K$ 与 $\mathfrak{p}$ 同构. G/K 的黎曼结构诱导的 $\mathfrak{p}$ 的内积是 $\mathfrak{k}$ 不变的. 反之,从正交对称李代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$ 用指数映射可以构造黎曼对称对 (G,K,τ),从而构造黎曼对称空间. 但是,如此得到的黎曼对称空间可能差一个覆盖映射.

对合自同构的特征子代数(characteristic subalgebra of involutive automorphism) 见"正交对称李代数".

对称李代数(symmetric Lie algebra) 见"正交对称李代数".

有效正交对称李代数(efficiency orthogonal symmetric Lie algebra) 见"正交对称李代数".

正交对称李代数的型(type of orthogonal symmetric Lie algebra) 正交对称李代数的类型. 一个有效正交对称李代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$ 对 σ 的特征子空间分解为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dotplus\mathfrak{p}$. $\mathfrak{g}$ 的基灵型 $\mathscr{B}$ 在 $\mathfrak{p}$ 上的限制为 $\mathfrak{p}$ 上的对称双线性函数,记为 $\mathscr{B}_\mathfrak{p}$. 若 $\mathscr{B}_\mathfrak{p}$ 为零,则此时 $\mathfrak{p}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的阿贝尔(Abel)理想,$\mathfrak{g}$ 不是半单的,称 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$ 为欧几里得((Euclid)型. 若 $\mathscr{B}_\mathfrak{p}$ 为负定,则此时 $\mathfrak{g}$ 为紧半单李代数,称 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$ 为紧型. 若 $\mathscr{B}_\mathfrak{p}$ 为正定,则此时 $\mathfrak{g}$ 为非紧半单李代数,且不含任何紧半单理想,称 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$ 为非紧型.

欧几里得型对称李代数(symmetric Lie algebra of Euclidean type) 见"正交对称李代数的型".

紧型对称李代数(symmetric Lie algebra of compact type) 见"正交对称李代数的型".

非紧型对称李代数(symmetric Lie algebra of noncompact type) 见"正交对称李代数的型".

正交对称李代数的分解(decomposition of orthogonal symmetric Lie algebra) 正交对称李代数的直和分解. 一个有效正交对称李代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$ 可惟一地分解为 σ 不变的欧几里得型、紧型、非紧型理想 $\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_-,\mathfrak{g}_+$ 的直和:$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_+\oplus\mathfrak{g}_-$. 事实上 $\mathfrak{g}$ 的基灵型 $\mathscr{B}$ 在 $\mathfrak{p}=E_{-1}(\sigma)$ 上的限制 $\mathscr{B}_\mathfrak{p}$ 是对称双线性的,从而可将 $\mathfrak{p}$ 做分解 $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_0\dotplus\mathfrak{p}_-\dotplus\mathfrak{p}_+$,使得 $\mathscr{B}_\mathfrak{p}$ 在 $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}_-$, $\mathfrak{p}_+$ 上的限制分别为零、负定、正定. 若 $\mathfrak{k}_-=[\mathfrak{p}_-,\mathfrak{p}_-]$, $\mathfrak{k}_+=[\mathfrak{p}_+,\mathfrak{p}_+]$, $\mathfrak{k}_0=\{X\in\mathfrak{k}\mid\mathscr{B}(X,\mathfrak{k}_++\mathfrak{k}_-)=0\}$,则

$$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0\dotplus\mathfrak{p}_0,\quad \mathfrak{g}_-=\mathfrak{k}_-\dotplus\mathfrak{p}_-,\quad \mathfrak{g}_+=\mathfrak{k}_+\dotplus\mathfrak{p}_+;$$
$$\mathfrak{k}_0=\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g}_0,\quad \mathfrak{k}_-=\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g}_-,\quad \mathfrak{k}_+=\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g}_+;$$
$$\mathfrak{p}_0=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{g}_0,\quad \mathfrak{p}_-=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{g}_-,\quad \mathfrak{p}_+=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{g}_+.$$

截面曲率(sectional curvature) 黎曼对称空间的截面曲率. 设 M 为黎曼对称空间. 于是 $M=G/K$,这里 (G,K) 为黎曼对称对. 相应的正交对称李代数有分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dotplus\mathfrak{p}$. 可视 $\mathfrak{p}=T_{\pi(e)}G/K$,以 Q,R 分别表示 M 的黎曼结构与曲率张量. S 为 $\mathfrak{p}$ 的一个二维子空间. X_1,X_2 为 S 的幺正基. 则 $M=G/K$ 在 $\pi(e)$ 处沿截面 S 的截面曲率为

$$K(S)=Q_{\pi(e)}(\mathrm{ad}[X_1,X_2]X_1,X_2).$$

从这个公式可导出黎曼对称空间 M 的曲率张量 R 的一个重要公式:

$$R_{\pi(e)}(X,Y)Z=-[[X,Y],Z]\quad(\forall\, X,Y,Z\in\mathfrak{p}).$$

这个公式说明曲率张量与 M 的黎曼结构无关.

紧型黎曼对称空间(Riemannian symmetric space of compact type) 一类黎曼对称空间. 对应的正交对称李代数是紧致的黎曼对称空间. 紧型黎曼对称空间一定是紧致的,且其截面曲率处处非负. 对应于一个紧型正交对称李代数,有惟一的单连通黎曼对称空间. 它是其他与这个正交对称李代数相对应的黎曼对称空间的泛复叠空间. 这样,紧型黎曼对称空间的分类问题归结为紧半单李代数及其对合自同构的分类与单连通紧半单李群的中心计算两个问题. 这两个问题最初均由嘉当(Cartan,E.)解决.

非紧致黎曼对称空间(Riemannian symmetric space of noncompact type)　一类黎曼对称空间.对应于非紧型正交对称李代数的黎曼对称空间.非紧型黎曼对称空间一定是非紧的,且其截面曲率处处非正.非紧型黎曼对称空间一定是单连通的.从而对应于一个非紧型正交对称李代数只有惟一的黎曼对称空间.非紧型正交对称李代数$(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$中之$\sigma$恰为$\mathfrak{g}$的嘉当对合,$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dotplus\mathfrak{p}$为嘉当分解.因此,非紧型黎曼对称空间的分类实际上就是非紧实半单李代数的分类,这也是嘉当(Cartan,E.)的重要成果之一.后来又有许多数学家整理简化发展这个工作,得到极简单优美的表达方式(如 Satake 图,严志达图等).

环面(torus)　一类特殊的对称空间.若G是一个连通李群,则$G\times G$也是连通李群,并有对合自同构$\sigma:\sigma(g_1,g_2)=(g_2,g_1)$, $\forall\ (g_1,g_2)\in G\times G$. σ的特征子群$\Delta G=\{(g,g)\in G\times G\mid g\in G\}$与$G$同构,称为对角子群.作为微分流形,$G\times G/\Delta G$与$G$是同胚的.特别地,$G$为连通紧李群时,$G\times G/\Delta G$是黎曼对称空间.$G$为连通紧交换李群时,$G\times G/\Delta G$(同胚于$G$)为环面,是黎曼对称空间,其对应的正交对称李代数是欧几里得型的.

欧氏型黎曼对称空间(Riemannian symmetric space of Euclidean type)　一类黎曼对称空间.对应于欧几里得型正交对称李代数的黎曼对称空间.例如,在n维欧几里得空间E^n中取定幺正标架后,其元素可表示为一个$n+1$个数的列向量

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}.$$

E^n的等距变换群,即欧几里得运动群可表示为

$$\left\{\begin{pmatrix} A & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,\middle|\, A\in O(n)\right\},$$

$O(n)$为n维正交群.E^n关于原点

$$O=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的中心对称

$$\sigma_0=\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

I为n阶单位矩阵.O的迷向子群

$$F_0=K=\left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,\middle|\, A\in O(n)\right\}.$$

E^n对应的正交对称李代数的分解$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dotplus\mathfrak{p}$中

$$\mathfrak{k}=\left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,\middle|\, A+A'=0\right\},$$

$$\mathfrak{p}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,\middle|\, Y\in \mathrm{R}^{n\times 1}\right\}.$$

$\mathfrak{p}$是$\mathfrak{g}$的交换理想.因此,E^n为欧几里得型黎曼对称空间.其实,欧几里得型黎曼对称空间一定是一个欧几里得空间与一个环面的乘积.

实李代数的复结构(complex structure of real Lie algebra)　实李代数上的一种特殊线性变换.实李代数$\mathfrak{g}$的线性变换J,若满足:

$J^2=-\mathrm{id}$; $[J(X),Y]=[X,J(Y)]=J([X,Y])$,

则称为$\mathfrak{g}$的复结构.若$\mathfrak{g}$存在复结构J,定义$(a+\sqrt{-1}b)X=aX+bJ(X)$, $\forall\ a,b\in\mathrm{R}$, $X\in\mathfrak{g}$,则$\mathfrak{g}$成为一个复李代数.反之,复李代数$\mathfrak{g}$可视为实李代数,记为$\mathfrak{g}_{\mathrm{R}}$. $\mathfrak{g}_{\mathrm{R}}$的线性变换$J:J(X)=\sqrt{-1}X$, $\forall\ X\in\mathfrak{g}_{\mathrm{R}}$为$\mathfrak{g}_{\mathrm{R}}$的一个复结构.此时,$\mathfrak{g}_{\mathrm{R}}$按$J$定义的复李代数恰为$\mathfrak{g}$.特别地,若$\mathfrak{g}_0$为复半单李代数$\mathfrak{g}$的紧致实形式,则

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{R}}=\mathfrak{g}_0\dotplus J\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_0\dotplus\sqrt{-1}\mathfrak{g}_0$$

为实李代数$\mathfrak{g}_{\mathrm{R}}$的嘉当分解.

对偶(dual)　正交对称李代数之间的一种特殊对应.$(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$与$(\mathfrak{g}^*,\mathfrak{k}^*,\sigma^*)$均为正交对称李代数.设$\mathfrak{p}=E_{-1}(\sigma)$, $\mathfrak{p}^*=E_{-1}(\sigma^*)$.若有$\mathfrak{g}$到$\mathfrak{g}^*$的线性同构映射$\varphi$,使得$\varphi\sigma=\sigma^*\varphi$; $\mathrm{ad}\varphi(X)=\varphi\mathrm{ad}X\varphi^{-1}$, $\forall\ X\in\mathfrak{k}$; $\mathrm{ad}\varphi(Y)=\varphi\mathrm{ad}Y\cdot\sigma\varphi^{-1}$, $\forall\ Y\in\mathfrak{p}$,则称$(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$与$(\mathfrak{g}^*,\mathfrak{k}^*,\sigma^*)$对偶.对偶关系是对称的,且在同构意义下是惟一的.若$(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$对$\sigma$的分解为$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dotplus\mathfrak{p}$,则$\mathfrak{g}$的复化$\mathfrak{g}^{\mathrm{C}}=\mathfrak{k}^{\mathrm{C}}\dotplus\mathfrak{p}^{\mathrm{C}}$的子集$\mathfrak{g}^*=\mathfrak{k}\dotplus\sqrt{-1}\mathfrak{p}$是一个实李代数.由公式

$$\varphi(X+Y)=X+\sqrt{-1}Y$$
$$(X\in\mathfrak{k},Y\in\mathfrak{p})$$

定义的φ是$\mathfrak{g}$到$\mathfrak{g}^*$的线性同构.由

$$\sigma^*(X+\sqrt{-1}Y)=X-\sqrt{-1}Y$$

定义了F^*的对合自同构σ^*. $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$与$(\mathfrak{g}^*,\mathfrak{k},\sigma^*)$对偶.若$(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$为紧型、非紧型或欧几里得型,则$(\mathfrak{g}^*,\mathfrak{k}^*,\mathfrak{p}^*)$为非紧型、紧型或欧几里得型.$\mathfrak{g}$为紧单李代数当且仅当$\mathfrak{g}^*$为非紧单李代数且无复结构.$\mathfrak{g}^*$为非紧单李代数并有复结构当且仅当$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$, $\sigma\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2$为紧单李代数.

不可约黎曼对称空间(irreducible Riemannian symmetric space)　最基本的黎曼对称空间.若黎曼对称空间M对应的正交对称李代数$(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\tau)$是半单的,即$\mathfrak{g}$为实半单李代数,则称$M$为半单型的.若将$\mathfrak{g}$的伴随模$y$限制于$\mathfrak{k}$上,则$\mathfrak{g}$为$\mathfrak{k}$模$(\mathrm{ad}_y\mathfrak{k},\mathfrak{g})$, $\mathfrak{p}$是$\mathfrak{k}$模$\mathfrak{g}$的子模.若$\mathfrak{p}$是不可约的,则称$(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\tau)$为不可约正交对称李代数,$M$为不可约黎曼对称空间.不可约正交对称李代数$(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\tau)$的对偶$(\mathfrak{g}^*,\mathfrak{k}^*,\tau^*)$也是不可约的.不可约正交对称李代数$(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\tau)$有以下四种情形:

1. $\mathfrak{g}$为紧单李代数,τ为其对合自同构,此时,对应的黎曼对称空间称为第一类紧型不可约黎曼对称空间.

2. 上述情形的对偶,此时$\mathfrak{g}$为非紧单李代数,无

复结构，τ 为其嘉当对合.

3. $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$，$\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2$ 是同构的 $\mathfrak{g}$ 的紧单理想，且 $\tau\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}_2$. $\mathfrak{g}$ 的分解为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$，其中 $\mathfrak{k}=\{X+\tau(X)\mid X\in\mathfrak{g}_1\}$，$\mathfrak{p}=\{X-\tau(X)\mid X\in\mathfrak{g}_1\}$，对应的黎曼对称空间可用下述办法来实现：设 G_1 是以 $\mathfrak{g}_1$ 为李代数的连通李群，在直积 $G=G_1\times G_1$ 中有对合自同构 $\sigma(g_1,g_2)=(g_2,g_1)$，于是，$\Delta G=\{(g,g)\mid g\in G_1\}$ 为 σ 的不动点集，且 $\Delta G\approx G_1$，所以 $G/\Delta G$ 是黎曼对称空间，而且映射 $\varphi:\varphi(g_1,g_2)\Delta G=g_1g_2^{-1}$ 是 $G/\Delta G$ 到 G_1 上的微分同胚，因此 G_1 是黎曼对称空间. $G/\Delta G$ 称为第二类紧型不可约黎曼对称空间.

4. 上述情形的对偶，这时 $\mathfrak{g}$ 为非紧单李代数，并有复结构.

不可约黎曼对称空间 G/K 的黎曼结构 Q 在 $\pi(e)$ 处可表示为

$$Q_{\pi(e)}(X,Y)=k\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}X\,\mathrm{ad}Y\quad(X,Y\in\mathfrak{p}),$$

G/K 为紧型时，$k<0$；G/K 为非紧型时，$k>0$.

半单型黎曼对称空间(Rimannian symmetric space of semisimple type)　见“不可约黎曼对称空间”.

不可约正交对称李代数(irreducible orthogonal symmetric Lie algebra)　见“不可约黎曼对称空间”.

第二类紧型不可约黎曼对称空间(irreducible Rimannian symmetric space of the second kind compact type)　见“不可约黎曼对称空间”.

对称空间的全测地子流形(totally geodesic submanifold of symmetric spaces)　对称空间的一类特殊子流形. 设 $I(M)$ 为黎曼对称空间 M 的等距变换群，$I(M)_x$ 是 $x\in M$ 的迷向子群，从而 $M=I(M)/I(M)_x$，对应的正交对称李代数有分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$. 所以 x 处 M 的切空间 $T_xM=\mathfrak{p}$. M 的子流形 S 在 x 处的切空间 $T_xS=\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{p}$ 的子空间. S 为 M 的全测地子流形当且仅当 $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的李三重系，即

$$[[\mathfrak{s},\mathfrak{s}],\mathfrak{s}]\subseteq\mathfrak{s}.$$

这时 $S=\exp\mathfrak{s}$，S 也是一个黎曼对称空间，而且 S 与 M 的截面曲率是一致的，即

$$K_S(X,Y)=K_M(X,Y)\quad(\forall\,X,Y\in\mathfrak{s}).$$

若 M 的全测地子流形 S 的曲率张量为零，即 $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]=0$，则称 S 为平坦的全测地子流形.

秩(rank)　黎曼对称空间的重要不变量. 黎曼对称空间 M 的极大平坦全测地子流形的维数，记为 $\mathrm{rank}M$ 或 $r(M)$. M 对应的正交对称李代数分解为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$，$M$ 的极大平坦全测地子流形所对应的切空间 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{p}$ 的极大阿贝尔子空间，即 $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]=0$. 又，若 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}_1\subseteq\mathfrak{p}$，则 $[\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_1]\neq0$. 极大平坦全测地子流形是闭子流形，且在 M 的等距变换群 $I_0(M)$ 下互变，即：若 A,A' 均为 M 的极大平坦全测地子流形，$x\in A$，$x'\in A'$，则有 $g\in I_0(M)$ 使得 $g(x)=x'$，$g(A)=A'$. 紧李群作为黎曼对称空间，其极大平坦全测地子流形都与其嘉当子群(极大环面子群)微分同胚. 用这种观点也可得到紧李群、紧李代数进而复约化李代数的嘉当子群、嘉当子代数的共轭性等许多重要性质.

两点齐性空间(two-point homogeneous space)　一类简单的齐性空间. 若对于黎曼流形 M 中任何两个距离相等的点对 p,q 与 p',q'(即 $d(q,p)=d(p',q')$)，存在等距变换 g 使得 $gp=p'$，$gq=q'$，则称 M 为两点齐性空间. 欧几里得空间、球面都是两点齐性空间. 其实，两点齐性空间或为欧几里得空间或为秩为 1 的黎曼对称空间，即

$$\mathbb{R}^n,\ SO(n+1)/SO(n),\ SO(n+1)/O(n),$$
$$SO_0(n,1)/SO(n)\times SO(1),$$
$$SU(p,q)/S(U_1\times U_q),$$
$$SU(1+q)/S(U_1\times U_q),$$
$$Sp(p,1)/Sp(1)\times Sp(p),$$
$$\frac{Sp(p+q)}{Sp(p)\times Sp(1)},\ \frac{F_4}{\mathrm{Spin}(8)}.$$

黎曼对称空间的分解定理(decomposition theorems of Riemannian symmetric spaces)　刻画黎曼对称空间的基本定理. 第一分解定理：单连通黎曼对称空间 M 可惟一地分解为一个欧几里得空间 M_0，一个紧型单连通黎曼对称空间 M_- 与一个非紧型黎曼对称空间 M_+ 的积，即 $M=M_0\times M_-\times M_+$. M 对应的有效正交对称李代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$ 有相应的分解 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)=(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{k}_0,\sigma_0)\oplus(\mathfrak{g}_-,\mathfrak{k}_-,\sigma_-)\oplus(\mathfrak{g}_+,\mathfrak{k}_+,\sigma_+)$，右边三项分别为 M_0,M_- 与 M_+ 对应的有效正交对称李代数. $M_-\times M_+$ 是半单型的单连通黎曼对称空间. 第二个分解定理：单连通半单型黎曼对称空间可惟一地分解为单连通不可约黎曼对称空间之积，即 $M=M_1\times M_2\times\cdots\times M_n$，式中 M_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 为单连通不可约黎曼对称空间. M 对应的有效正交对称李代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)$ 有相应的分解

$$(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\sigma)=\bigoplus_{i=1}^{n}(\mathfrak{g}_i,\mathfrak{k}_i,\sigma_i),$$

式中 σ_i 为 σ 在 $\mathfrak{g}_i$ 上的限制. $(\mathfrak{g}_i,\mathfrak{k}_i,\sigma_i)$ 是不可约正交对称李代数，且有分解 $\mathfrak{g}_i=\mathfrak{k}_i+\mathfrak{p}_i$，其中

$$\mathfrak{p}_i=\{X\in\mathfrak{g}_i\mid\sigma_i(X)=-X\},\quad\mathfrak{k}_i=[\mathfrak{p}_i,\mathfrak{p}_i].$$

$\mathfrak{p}_i$ 是 $\mathfrak{k}$ 模 $\mathfrak{p}$(对应表示为 $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{k},\mathfrak{p})$)的不可约子模.

不可约黎曼对称空间的分类(classification of irreducible Riemannian symmetric spaces)　对不可约黎曼对称空间的详细全面分类. 第一类紧型不可约黎曼对称空间即紧单李群 G 对一个对合自同构 τ 的特征子群及其单位连通分支间的一个中间群的陪集空间. 其对偶则为非紧实单李群对其极大紧

子群的陪集空间.它们的分类表如下：

嘉当符号	非紧型	紧型	秩	维数
A Ⅰ	$\frac{SL(n,R)}{SO(n)}$	$\frac{SU(n)}{SO(n)}$	$n-1$	$\frac{(n-1)(n+2)}{2}$
A Ⅱ	$\frac{SU^*(2n)}{Sp(n)}$	$\frac{SU(2n)}{Sp(n)}$	$n-1$	$(n-1)(2n+1)$
A Ⅲ	$\frac{SU(p,q)}{S(U_p\times U_q)}$	$\frac{SU(p+q)}{S(U_p\times U_q)}$	$\min(p,q)$	$2pq$
BD Ⅰ	$\frac{SO_0(p,q)}{SO(p)\times SO(q)}$	$\frac{SO(p+q)}{SO(p)\times SO(q)}$	$\min(p,q)$	pq
D Ⅲ	$\frac{SO^*(2n)}{U(n)}$	$\frac{SO(2n)}{U(n)}$	$\left[\frac{1}{2}n\right]$	$n(n-1)$
C Ⅰ	$\frac{Sp(n,R)}{U(n)}$	$\frac{Sp(n)}{U(n)}$	n	$n(n+1)$
C Ⅱ	$\frac{Sp(p,q)}{Sp(p)\times Sp(q)}$	$\frac{Sp(p+q)}{Sp(p)\times Sp(q)}$	$\min(p,q)$	$4pq$
E Ⅰ	$(\mathfrak{e}_{6(6)},\mathfrak{sp}(4))$	$(\mathfrak{e}_{6(-78)},\mathfrak{sp}(4))$	6	42
E Ⅱ	$(\mathfrak{e}_{6(2)},$ $su(6)+SU(2))$	$(\mathfrak{e}_{6(-78)},$ $su(6)+SU(2))$	4	40
E Ⅲ	$(\mathfrak{e}_{6(-14)},$ $\mathfrak{so}(10)+R)$	$(\mathfrak{e}_{6(-78)},$ $SO(10)+R)$	2	32
E Ⅳ	$(\mathfrak{e}_{6(-26)},\mathfrak{f}_4)$	$(\mathfrak{e}_{6(-78)},\mathfrak{f}_4)$	2	26
E Ⅴ	$(\mathfrak{e}_{7(7)},\mathfrak{su}(8))$	$(\mathfrak{e}_{7(-133)},\mathfrak{su}(8))$	7	70
E Ⅵ	$(\mathfrak{e}_{7(-5)},\mathfrak{so}(12)$ $+\mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{e}_{7(-133)},$ $\mathfrak{so}(12)+\mathfrak{su}(2))$	4	64
E Ⅶ	$(\mathfrak{e}_{7(-25)},\mathfrak{e}_6+R)$	$(\mathfrak{e}_{7(-133)},\mathfrak{e}_6+R)$	3	54
E Ⅷ	$(\mathfrak{e}_{8(8)},$ $\mathfrak{so}(16))$	$(\mathfrak{e}_{8(-248)},$ $\mathfrak{so}(16))$	8	128
E Ⅸ	$(\mathfrak{e}_{8(-24)},\mathfrak{e}_7$ $+su(2))$	$(\mathfrak{e}_{8(-248)},$ $\mathfrak{e}_7+su(2))$	4	112
F Ⅰ	$(\mathfrak{f}_{4(4)},\mathfrak{sp}(3)$ $+\mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{f}_{4(-52)},$ $\mathfrak{sp}(3)+\mathfrak{su}(2))$	4	28
F Ⅱ	$(\mathfrak{f}_{4(-20)},\mathfrak{so}(9))$	$(\mathfrak{f}_{4(-52)},\mathfrak{so}(9))$	1	16
G	$(\mathfrak{g}_{2(2)},\mathfrak{su}(2)$ $+\mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{g}_{2(-14)},$ $\mathfrak{su}(2)+\mathfrak{su}(2))$	2	8

注：在上述表中有几个是等价的，罗列如下：

1. A Ⅰ $(n=2)=A$ Ⅲ $(p=q=1)=BD$ Ⅰ $(p=2,q=1)$ $=C$ Ⅰ $(n=1)$.

对应群的同构：

$SU(2)\cong SO(3)=Sp(1)$,

$SL(2,R)\cong SU(1,1)\cong SO(2,1)\cong Sp(1,R)$.

2. BD Ⅰ $(p=3,q=2)=C$ Ⅰ $(n=2)$.

对应群的同构：

$SO(5)\cong SP(2)$, $SO(3,2)\cong SP(2,R)$.

3. BD Ⅰ $(p=4,q=1)=C$ Ⅱ $(p=q=1)$.

对应群的同构：

$SO(5)\cong Sp(2)$, $SO(4)\cong sp(1)\times Sp(1)$,

$SO(4,1)\cong Sp(1,1)$.

4. A Ⅰ $(n=4)=BD$ Ⅰ $(p=q=3)$.

对应群的同构：

$SO(4)\cong SO(6)$, $SO(4)\cong SO(3)\times SO(3)$,

$SL(4,R)\cong SO(3,3)$.

5. A Ⅱ $(n=2)=BD$ Ⅰ $(p=5,q=1)$.

对应群的同构：

$SU(4)\cong SO(6)$, $Sp(2)\cong SO(5)$,

$SU^*(4)\cong SO(5,1)$.

6. A Ⅲ $(p=q=2)=BD$ Ⅰ $(p=4,q=2)$.

对应群的同构：

$SU(4)\cong SO(6)$, $SU(2,2)=SO(4,2)$.

7. A Ⅲ $(p=3,q=1)=D$ Ⅲ $(n=3)$.

对应群的同构：

$SU(4)\cong SO(6)$, $SU(3,1)\cong SO^*(6)$.

8. BD Ⅰ $(p=6,q=2)=D$ Ⅲ $(n=4)$.

对应群的同构：

$SU(4)\cong SO(6)$, $SO^*(8)=SO(6,2)$.

9. BD Ⅰ $(p=3,q=1)=\mathfrak{a}_n(n=1)$.

对应群的同构：

$SO(4)\cong SU(2)\times SU(2)$, $SO(3,1)\cong SL(2,C)$.

10. BD Ⅰ $(p=q=2)=A$ Ⅰ $(n=2)\times A$ Ⅰ $(n=2)$.

对应群的同构：

$SO(4)\cong SU(2)\times SU(2)$,

$SO(2,2)\cong SL(2,R)\times SL(2,R)$.

11. D Ⅲ $(n=2)=A$ Ⅰ $(n=2)$.

对应群的同构：

$SO(4)\cong SU(2)\times SU(2)$,

$SO^*(4)\cong SU(2)\times SL(2,R)$.

第二类紧型不可约黎曼对称空间是紧单李群U，也就是单连通紧单李群$\tilde{U}$与中心$Z(\tilde{U})$的子群的商群，其对偶则为非紧不可约黎曼对称空间为对应的复单李群G与其极大紧子群U的商空间G/U.它们的分类表如下：

单李代数	复单李群	极大紧子群	单连通紧单李群中心	维数
$\mathfrak{g}$	G	U	$Z(\tilde{U})$	$\dim U$
$\mathfrak{a}_n(n\geqslant 1)$	$SL(n+1,C)$	$SU(n+1)$	Z_{n+1}	$n(n+2)$
$\mathfrak{b}_n(n\geqslant 2)$	$SO(2n+1,C)$	$SO(2n+1)$	Z_2	$n(2n+1)$
$\mathfrak{c}_n(n\geqslant 3)$	$Sp(n,C)$	$Sp(n)$	Z_2	$n(2n+1)$
$\mathfrak{d}_n(n\geqslant 4)$	$SO(2n,C)$	$SO(2n)$	Z_4($n=$奇数) Z_2+Z_2 ($n=$偶数)	$n(2n-1)$
$\mathfrak{e}_6$	E_6^C	E_6	Z_3	78
$\mathfrak{e}_7$	E_7^C	E_7	Z_2	133
$\mathfrak{e}_8$	E_8^C	E_8	Z_1	248
$\mathfrak{f}_4$	F_4^C	F_4	Z_1	52
$\mathfrak{g}_2$	G_2^C	G_2	Z_1	14

注：在完整的$\mathfrak{a}_n$，$\mathfrak{b}_n$与$\mathfrak{c}_n$系列中，有以下相同的情形：$\mathfrak{a}_1=\mathfrak{b}_1=\mathfrak{c}_1$，$\mathfrak{b}_2=\mathfrak{c}_2$，$\mathfrak{a}_3=\mathfrak{d}_3$，$\mathfrak{d}_2=\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_1$.

齐性复流形(homogeneous complex manifold) 复的齐性流形. 以 $H(M)$ 表示复流形 M 的全纯变换群. 若有实李群 $G \subseteq H(M)$ 可递地作用于 M 上,则称 M 为齐性复流形,并称 M 的典型殆复结构 J 是 G 不变的,即有

$$dh \cdot J_p = J_{hp} dh \quad (\forall\ h \in G,\ p \in M).$$

M 为齐性复流形的充分必要条件是 M 可表示为复旁集空间 G/H. 这里 G 是实李群,H 为其闭子群;在 G/H 上存在复结构,使 G 在 G/H 上的作用是全纯的. $\mathbb{C}^n$ 的有界连通开集 D(称为有界域)是齐性复流形,称为齐性有界域.

复齐性空间(complex homogeneous space) 即"齐性复流形".

齐性有界域(homogeneous bounded domain) 见"齐性复流形".

埃尔米特对称空间(Hermitian symmetric space) 一种复的对称空间. 每点 x 均有以 x 为孤立不动点的对合全纯等距变换 σ_x 的埃尔米特流形. 埃尔米特对称空间 M 一定是黎曼对称空间. σ_x 就是 x 的中心对称,M 的全纯变换群 $H(M)$ 与等距变换群 $I(M)$ 之交

$$A(M) = H(M) \cap I(M)$$

及其单位连通分支 $G = A_0(M)$ 是 M 的可递李变换群. 从而 M 是复齐性空间. 若 K 为 x 在 G 中的迷向子群,则 M 对应的黎曼对称对 (G,K) 的对合自同构 σ 为

$$\sigma(g) = \sigma_x g \sigma_x, \quad \forall\ g \in G.$$

设 $M = G/K$ 为一黎曼对称空间,Q 为 M 的黎曼结构,M 对应的有效正交对称李代数之分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dotplus \mathfrak{p}.$$

可将 $\mathfrak{p}$ 与 $T_{\pi(e)}M$ 等同(e 为 G 的单位元素). 若存在 $\mathfrak{p}$ 的线性变换 A 满足:

1. $A^2 = -\mathrm{id}_{\mathfrak{p}}$;
2. $\forall\ X, Y \in \mathfrak{p}$,
$$Q_{\pi(e)}(AX, AY) = Q_{\pi(e)}(X, Y);$$
3. A 与线性迷向群 K^* 中每个元素可换;

则 M 中有惟一的 G 不变殆复结构 J 使得 $J_{\pi(e)} = A$. Q 为埃尔米特结构. M 作为对应的复流形是埃尔米特对称空间. 任何埃尔米特对称空间也可以此办法得到. 一个埃尔米特对称空间称为紧型、非紧型、半单型或不可约的,若它作为黎曼对称空间是紧型、非紧型、半单型或不可约的. 埃尔米特对称空间 M 的等距变换群 $I(M)$ 的单位连通分支 $I_0(M)$ 是半单的当且仅当 $A_0(M)$ 半单,且此时

$$A_0(M) = I_0(M).$$

半单型埃尔米特对称空间一定是单连通的. 紧(非紧)型不可约埃尔米特对称空间恰可表示为一个有平凡中心的连通紧(非紧)单李群 U 与它一个有一维中心的极大连通真子群 K 的商空间 U/K. 不可约黎曼对称空间 M 为不可约埃尔米特对称空间当且仅当 M 对应的有效正交对称李代数 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \sigma)$ 满足

$$\dim C(\mathfrak{k}) = 1,$$

式中 $C(\mathfrak{k})$ 表示 $\mathfrak{k}$ 的中心. 埃尔米特对称空间的埃尔米特结构是克勒结构.

紧型埃米尔特对称空间(Hermitian symmetric space of compact type) 见"埃米尔特对称空间".

非紧型埃米尔特对称空间(Hermition symmetric space of noncompact type) 见"埃米尔特对称空间".

半单型埃米尔特对称空间(Hermition symmetric space of semisimple type) 见"埃米尔特对称空间".

不可约埃米尔特对称空间(irreducible Hermition symmetric space) 见"埃米尔特对称空间".

埃尔米特对称空间的分解定理(decomposition theorems of Hermitian symmetric spaces) 刻画埃尔米特对称空间的基本定理. 第一个分解定理:单连通埃尔米特对称空间可惟一地分解为一个 n 维复空间 $\mathbb{C}^n$、一个紧型埃尔米特对称空间 M_- 与一个非紧型埃尔米特对称空间 M_+ 之积,其对应的有效正交对称李代数有相应的分解. 第二个分解定理:半单型埃尔米特对称空间 M 可惟一地分解为不可约埃尔米特对称空间之积,即

$$M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n,$$

式中 M_i 是不可约埃尔米特对称空间. M 对应的有效正交对称李代数有相应的分解.

不可约埃尔米特对称空间的分类(classification of irreducible Hermitian symmetric spaces) 对不可约埃尔米特对称空间的完全分类. 不可约埃尔米特对称空间为第一类紧型不可约黎曼对称空间及其对偶分类表中以下几类:$A\,\mathrm{III}$, $D\,\mathrm{III}$, $BD\,\mathrm{I}\ (q=2)$, $C\,\mathrm{I}$, $E\,\mathrm{III}$ 与 $E\,\mathrm{VII}$. 其中有几个是相同的:

$$A\,\mathrm{III}\ (p=q=1) = C\,\mathrm{I}\ (n=1),$$
$$BD\,\mathrm{I}\ (p=3, q=2) = C\,\mathrm{I}\ (n=2),$$
$$A\,\mathrm{III}\ (p=q=2) = BD\,\mathrm{I}\ (p=4, q=2),$$
$$A\,\mathrm{III}\ (p=3, q=1) = D\,\mathrm{III}\ (n=3),$$
$$BD\,\mathrm{I}\ (p=6, q=2) = D\,\mathrm{III}\ (n=4).$$

格拉斯曼流形(Grassmann manifold) 一类重要的流形. 以 $\mathbb{R}^{p+q}$ 中 p 维子空间为元素所构成的流形. p 维子空间可用其标准正交基(幺正标架)来表示,不同的标准正交基之间由正交变换相联系. 格拉斯曼流形是黎曼对称空间,可用黎曼对称对来实现. 设 $SO(p+q)$ 是 $p+q$ 阶实特殊正交群.

$$J_{pq} = \mathrm{diag}(-I_p, I_q).$$

则由 $\sigma(A) = J_{pq} A J_{pq}, \forall\ A \in SO(p+q)$ 所定义的 σ 为

$SO(p+q)$ 的对合自同构，其不动点集 $K_\sigma=\{\mathrm{diag}(A_1,A_2)\mid A_1\in O(p),A_2\in O(q),\det A_1\cdot\det A_2=1\}\approx S(O(p)\times O(q))$. K_σ 的单位连通分支

$(K_\sigma)_0=\{\mathrm{diag}(A_1,A_2)\mid A_1\in SO(p),A_2\in SO(q)\}$.

如此可以得到两个黎曼对称空间：$SO(p+q)/K_\sigma$（此为格拉斯曼流形 $G_{p,q}(R)$），$SO(p+q)/(K_\sigma)_0$（此为定向格拉斯曼流形 $\widetilde{G}_{p,q}(R)$）. 以 π 表示 $SO(p+q)$ 到 $SO(p+q)/K_\sigma$（或 $SO(p+q)/(K_\sigma)_0$）的自然映射，则 $\pi(A)=\pi(B)$ 当且仅当 $C\in O(p)$（或 $SO(p)$）使得

$$(\mathrm{col}_1A,\mathrm{col}_2A,\cdots,\mathrm{col}_pA)=(\mathrm{col}_1B,\mathrm{col}_2B,\cdots,\mathrm{col}_pB)C,$$

式中 $\mathrm{col}_iA,\mathrm{col}_jB$ 表示 A,B 的第 i,j 列. $G_{1n}(R)$ 为实射影空间 $P_n(R)$，此时 $\pi(A)=\pi(B)$ 当且仅当 $\mathrm{col}_1A=\pm\mathrm{col}_1B$. $\widetilde{G}_{1,n}(R)$ 为球面 S^n，此时 $\pi(A)=\pi(B)$ 当且仅当 $\mathrm{col}_1A=\mathrm{col}_1B$. 若

$$x=\pi(A)=(\mathrm{col}_1A,\mathrm{col}_2A,\cdots,\mathrm{col}_pA),$$
$$y=\pi(B)=(\mathrm{col}_1B,\mathrm{col}_2B,\cdots,\mathrm{col}_pB)$$

为 $G_{p,q}(R)$（或 $\widetilde{G}_{p,q}(R)$）中两个元素，则关于 x 的中心对称 S_x 由下式给出：

$$S_xy=(2xx'-I)y.$$

$G_{p,q}(R)$ 与 $\widetilde{G}_{p,q}(R)$ 对应相同的有效正交对称李代数，其分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dotplus\mathfrak{p}$ 中

$$\mathfrak{k}=\{\mathrm{diag}(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathfrak{so}(p),x_2\in\mathfrak{so}(q)\}\approx\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(q).$$

$$\mathfrak{p}=\left\{\begin{pmatrix}0&-X'_{21}\\X_{21}&0\end{pmatrix},\ \middle|\ X_{21}\in R^{q\times p}\right\}.$$

$\mathfrak{p}$ 可等同于 $T_{\pi(I)}G_{p,q}(R)$（或 $T_{\pi(I)}\widetilde{G}_{p,q}(R)$）. 若

$$X=\begin{pmatrix}0&-X'_{21}\\X_{21}&0\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0&-Y'_{21}\\Y_{21}&0\end{pmatrix},$$

式中

$$X_{21}=\begin{pmatrix}x_{11}&\cdots&x_{1p}\\x_{21}&\cdots&x_{2p}\\\cdots&\cdots&\cdots\\x_{q1}&\cdots&x_{qp}\end{pmatrix},\quad Y_{21}=\begin{pmatrix}y_{11}&\cdots&y_{1p}\\y_{21}&\cdots&y_{2p}\\\cdots&\cdots&\cdots\\y_{q1}&\cdots&y_{qp}\end{pmatrix},$$

则 $G_{p,q}(R)$（或 $\widetilde{G}_{p,q}(R)$）的黎曼结构 Q 满足

$$Q_{\pi(I)}(X,Y)=\mathfrak{k}\sum_{i,j}x_{ij}y_{ij}=\mathfrak{k}\mathrm{tr}X'_{21}Y_{21},$$

式中 $\mathfrak{k}$ 是正常数. 曲率张量 R 满足

$$(R_{\pi(I)}(X,Y)Z)_{21}=(X_{21}Y'_{21}-Y_{21}X'_{21})Z_{21}-Z_{21}(X'_{21}Y_{21}-Y'_{21}X_{21}),$$

式中

$$Z=\begin{pmatrix}0&-Z'_{21}\\Z_{21}&0\end{pmatrix},$$

$$R_{\pi(I)}(X,Y)Z=\begin{pmatrix}0&-(R_{\pi(I)}(X,Y)Z)'_{21}\\(R_{\pi(I)}(X,Y)Z)_{21}&0\end{pmatrix}.$$

若 X,Y 为 $\mathfrak{p}$ 的两个单位正交向量，S 为 X,Y 生成的截面，则沿 S 的截面曲率为

$$K(S)=\mathfrak{k}\mathrm{tr}(X'_{21}X_{21}Y'_{21}Y_{21})+\mathfrak{k}\mathrm{tr}(X_{21}X'_{21}Y_{21}Y'_{21})-2\mathfrak{k}\mathrm{tr}(Y_{21}X'_{21})^2.$$

特别地，$p=1,q=n$ 时，有 $K(S)=1/k$. 即 S^n 与 $P_n(R)$ 为正常曲率空间.

复格拉斯曼流形（complex Grassmann manifold） 一类常见的埃尔米特对称空间. 以 C^{p+q} 中 p 维复子空间为元素所构成的流形 $G_{p,q}(C)$，它可以表示商空间 $SU(p+q)/S(U(p)\times U(q))$. 这是埃尔米特对称空间. 群 $SU(p+q)$ 的对合自同构 $\sigma:\sigma(A)=J_{pq}AJ_{pq},\forall A\in SU(p+q)$ 的不动点 $K_\sigma=S(U(p)\times U(q))=\{\mathrm{diag}(A_1,A_2)\mid A_1\in U(p),A_2\in U(q),\det A_1\det A_2=1\}$. 以 π 表示 $SU(p+q)$ 到商空间 $SU(p+q)/S(U(p)\times SU(q))$ 的自然映射，则 $\pi(A)=\pi(B)$ 当且仅当有 $C\in U(p)$ 使得

$$(\mathrm{col}_1A,\mathrm{col}_2A,\cdots,\mathrm{col}_pA)=(\mathrm{col}_1B,\mathrm{col}_2B,\cdots,\mathrm{col}_pB)C.$$

若 $x=\pi(A),y=\pi(B)$ 为 $G_{p,q}(C)$ 的元素，则关于 x 的中心对称 S_x 由下式决定：

$$S_xy=(2x\bar{x}'-I)y.$$

$G_{p,q}(C)$ 对应的有效正交对称李代数之分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dotplus\mathfrak{p}$ 中

$$\mathfrak{k}=\{\mathrm{diag}(X_1,X_2)\mid X_1\in\mathfrak{su}(p),X_2\in\mathfrak{su}(q)\},$$

$$\mathfrak{p}=\left\{\begin{pmatrix}0&-\overline{X}'_{21}\\X_{21}&0\end{pmatrix}\ \middle|\ X_{21}\in C^{q\times p}\right\}.$$

$G_{p,q}(C)$ 的黎曼结构 Q 在 $T_{\pi(I)}G_{p,q}(C)=p$ 处为 $Q_{\pi(I)}(X,Y)=\mathfrak{k}\mathrm{Re}\mathrm{tr}X'_{21}Y_{21}$，式中 $\mathfrak{k}$ 为正常数因子，且

$$X=\begin{pmatrix}0&-\overline{X}'_{21}\\X_{21}&0\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0&-\overline{Y}'_{21}\\Y_{21}&0\end{pmatrix},$$

$X_{21},Y_{21}\in C^{q\times p}$. 曲率张量 R 在 p 处为

$$(R(X,Y)Z)_{21}=(X_{21}\overline{Y}'_{21}-Y_{21}\overline{X}'_{21})Z_{21}-Z_{21}(\overline{X}'_{21}Y_{21}-\overline{Y}'_{21}X_{21}),$$

式中

$$R(X,Y)Z=\begin{pmatrix}0&-(\overline{R(X,Y)Z})'_{21}\\(R(X,Y)Z)_{21}&0\end{pmatrix},$$

$$Z=\begin{pmatrix}0&-\overline{Z}'_{21}\\Z_{21}&0\end{pmatrix}.$$

若 S 为单位正交向量 X,Y 生成的截面，则沿 S 的截面曲率

$$K(S)=k\mathrm{Re}\{\mathrm{tr}(\overline{X}'_{21}X_{21}\overline{Y}'_{21}Y_{21})+\mathrm{tr}(X_{21}\overline{X}'_{21}Y_{21}\overline{Y}'_{21})-2\mathrm{tr}(Y_{21}\overline{X}'_{21})^2\}.$$

$G_{p,q}(C)$ 的（殆）复结构 J 在 p 上的值为

$$J_{\pi(I)}X=\begin{pmatrix}0&-\sqrt{-1}\overline{X}'_{21}\\\sqrt{-1}X_{21}&0\end{pmatrix}.$$

当 $p=1, q=n$ 时，即 $G_{1,n}(C)$ 为复双曲空间.

有界对称域(bounded symmetric domain)　一类特殊的复有界域. 若有界域 D 中每点 x 均为 D 的一个对合全纯微分同胚的孤立不动点，则称 D 为有界对称域. 有界对称域对其上的伯格曼度量是非紧型的埃尔米特对称空间. 反之，一个非紧型埃尔米特对称空间一定全纯微分同胚于一个有界对称域. 以有界对称域表示非紧型埃尔米特对称空间，称为后者的哈瑞斯-祥德拉实现.

哈瑞斯-祥德拉实现(Harish-Chandra realization)　见“有界对称域”.

撰　稿　孟道骥　黄宣国

审　阅　严志达　骆家舜　梅向明

复几何与辛几何

复几何(complex geometry)　复流形上的几何学. 复流形是具有复结构的微分流形，即局部地它能与 n 维复数空间 C^n 的一个开邻域解析同胚. 因此，一个 n 维复流形自然也是 $2n$ 维实流形. 复流形是解析流形. 1 维复流形(黎曼面)的研究有着悠久的历史，而高维复流形的研究直到 20 世纪 40 年代才开始. 任何复流形上总存在埃尔米特度量，它是一种复形式的黎曼度量. 具有埃尔米特度量的复流形称为埃尔米特流形. 在埃尔米特流形上可构造一个 2 次外微分形式，称为克勒形式，它的系数由埃尔米特度量的系数确定. 若一个埃尔米特流形的克勒形式是闭形式，则称之为克勒流形，它是复几何的主要研究对象. 在克勒流形上，除了像黎曼流形那样可定义截面曲率、里奇曲率和数量曲率外，还可定义全纯截面曲率和双截面曲率，因而具有更多的几何信息.

复几何中一个著名的问题是卡拉比猜想：在任何紧致复流形上存在着克勒-爱因斯坦度量(即里奇曲率为常数的克勒度量). 对于具有非正第一陈氏类的紧致复流形，这个猜想在 1976 年被丘成桐解决了. 对于具有正第一陈氏类的紧致复流形，当维数为 2 时这个猜想在 1989 年被田刚完全解决. 但当维数较高时，这个猜想至今仍未解决. 复几何中还有不少尚待研究的课题，它将继续向前发展，并将取得更多的新成果.

辛几何(symplectic geometry)　辛流形上的几何学. 设 M 是微分流形，若在 M 上存在一个非蜕化的闭的 2 次外微分形式 ω，则 ω 称为 M 上一个辛结构. 具有辛结构的微分流形称为辛流形. 辛流形一定是偶数维的. 例如，若 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 $2n$ 维实数空间 R^{2n} 的自然坐标，则下列 2 次外微分形式

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

便是流形 R^{2n} 上一个辛结构，从而 (R^{2n}, σ) 成为辛流形. 两个同维数的辛流形是局部同构的. 因此，辛流形的局部几何是平凡的. 辛几何主要研究辛流形的整体几何性质，尤其是辛拓扑. 辛结构的概念起源于分析力学，近年来关于辛流形及其各种子流形的几何研究在其他数学分支中已有不少应用，也在物理问题的量子化中起着重要作用. 辛流形及其子流形的整体几何性质正日益受到重视，对它们的深入研究方兴未艾.

殆复结构(almost complex structure)　亦称近复结构. 流形上的一种特殊结构. 设 M 是 m 维光滑流形，若 J 是 M 上光滑的(1,1)型张量场，即对每点 $x \in M$，J_x 是切空间 $T_x(M)$ 到自身的线性变换. 若 J 满足 $J^2=-I$，这里 I 表示恒等变换，则称张量场 J 是 M 上的一个殆复结构. 给定一个殆复结构的光滑流形称为殆复流形. 殆复流形必是偶数维的可定向流形. 但是，偶数维和可定向的条件并不足以保证流形有殆复结构. 例如，埃雷斯曼(Ehresmann, C.)和霍普夫(Hopf, H.)证明了四维球 S^4 不能有殆复结构.

殆复流形(almost complex manifold)　见“殆复结构”.

可积性条件(integrability condition)　亦称牛朗特-尼伦伯格定理. 判断殆复流形是复流形的准则. 复流形自然是一个殆复流形，反之不然. 可积性条件是判断殆复流形上殆复结构是否可从复流形结构诱导的充分必要条件. 设殆复流形 M 的殆复结构在局部上由 n 个复线性无关的一次微分形式 θ^k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 所确定，使 θ^k 是相应的(1,0)型微分形式. $d\theta^k$ 是二次外微分形式，它可表示成

$$d\theta^k = \frac{1}{2}\sum_{j,l} A^k_{jl}\theta^j \wedge \theta^l + \sum_{j,l} B^k_{jl}\theta^j \wedge \bar{\theta}^l + \frac{1}{2}\sum_{j,l} C^k_{jl}\bar{\theta}^j \wedge \bar{\theta}^l,$$

其中 A^k_{jl} 和 C^k_{jl} 对下指标是反对称的. 条件

$$d\theta^k \equiv 0 \mod \theta^j,$$

即 $C^k_{jl}=0$ 就称为殆复流形 M 的可积性条件.

复流形(complex manifold)　局部复欧氏化的微分流形. 设 M 是有可数基的豪斯道夫空间. 设 M 上给定了一族坐标图 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$，使得 $\{U_\alpha\}$ 构成 M 的开覆盖，而每一个 φ_α 是从 U_α 到复 m 维向量空间 C^m 的一个开集上的同胚，并且满足以下条件：对于任意的 U_α, U_β，若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，则

$$\varphi_\beta \cdot \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

是 C^m 的两个开集间的全纯映射，此时，称 M 是 m

维复流形.

(p,q)型外微分形式(exterior differential form of type (p,q)) 复流形上的外微分形式. 设 V 是 m 维实矢量空间,具有复结构 J. 若 V^* 是 V 的对偶空间,则 V 上复结构 J 也在 V^* 上诱导一个复结构,仍记它为 J,其定义为

$$\langle x, J\alpha\rangle = \langle Jx, \alpha\rangle, \quad x \in V, \alpha \in V^*.$$

考虑 V^* 的复化空间 $V^*\otimes\mathbb{C}$,将 J 自然地扩展为 $V^*\otimes\mathbb{C}$ 的复结构 J,则 $V^*\otimes\mathbb{C}=V_{\mathbb{C}}\oplus\overline{V}_{\mathbb{C}}$,这里 $V_{\mathbb{C}}$ 和 $\overline{V}_{\mathbb{C}}$ 分别是 J 的特征根 i 和 $-$i 所对应的特征空间. 因此,V 上复值 r 重外形式空间 $\wedge^r(V^*\otimes\mathbb{C})$可分解为

$$\sum_{p+q=r}(\wedge^p V_{\mathbb{C}})\wedge(\wedge^q \overline{V}_{\mathbb{C}}),$$

其中$(\wedge^p V_{\mathbb{C}})\wedge(\wedge^q\overline{V}_{\mathbb{C}})$中的元素就称为$(p,q)$型外形式. 设 ω 是殆复流形 M 上复值外微分形式,若每点 $x\in M$,$\omega(x)$是切空间 T_xM 上(p,q)型外形式,则称 ω 是(p,q)型外微分形式.

(p,q)型外形式(form of type (p,q)) 见"(p,q)型外微分形式".

全纯形式(holomorphic form) 一类微分形式. 复流形上 $\bar\partial$ 闭的$(p,0)$次微分形式. 设 M 是 n 维复流形,$\{z^k, 1\leqslant k\leqslant n\}$是 M 上局部坐标系,记 $z^k=x^k+\mathrm{i}y^k$,则 $\mathrm{d}z^k=\mathrm{d}x^k+\mathrm{i}\mathrm{d}y^k$ 是 M 上关于典型殆复结构的$(1,0)$型微分形式. M 上任意$(p,0)$型微分形式 ω 在局部可以表示成

$$\omega=\sum\omega_{k_1,k_2,\cdots,k_p}\mathrm{d}z^{k_1}\wedge\mathrm{d}z^{k_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^{k_p}.$$

根据 $\bar\partial$ 的定义得

$$\bar\partial\omega=\sum\bar\partial\omega_{k_1,k_2,\cdots,k_p}\wedge\mathrm{d}z^{k_1}\wedge\mathrm{d}z^{k_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^{k_p},$$

这里

$$\bar\partial\omega_{k_1,k_2,\cdots,k_p}=\frac{\partial\omega_{k_1\cdots k_p}}{\partial\bar z^k}\mathrm{d}\bar z^k,$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar z^k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y^k}\right).$$

若 $\bar\partial\omega=0$,则 ω 称为全纯形式.

多尔别脱上同调群(Dolbeault cohomology group) 复流形上的一类重要同调群. 设 M 是复流形,$A_{p,q}$表示(p,q)型微分形式全体所成的空间. 记 $C_{p,q}=\{\alpha\mid\bar\partial\alpha=0,\alpha\in A_{p,q}\}$. 由于 $\bar\partial^2=0$,所以 $\bar\partial A_{p,q-1}\subset C_{p,q}$. 商群

$$D_{p,q}(M)=\frac{C_{p,q}}{\bar\partial A_{p,q-1}}$$

称为 M 的多尔别脱上同调群.

全纯映射(holomorphic mapping) 复流形之间的解析映射. 设 M,N 分别是复 m,n 维复流形,$f:M\to N$ 是连续映射. 若对每一点 $p\in M$,存在一个邻域 U,使得 f 在 U 内可用局部坐标函数表示成

$$\omega^k=\omega^k(z^1,z^2,\cdots,z^m)\ (1\leqslant k\leqslant n),$$

其中 ω^k 都是全纯函数,则称 f 是全纯映射.

埃尔米特度量(Hermite metric) 殆复流形上的一种度量. 设 M 是殆复流形,具有殆复结构 J. 若 M 上黎曼度量 g 满足 $g(JX,JY)=g(X,Y)$,这里 X,Y 是 M 上任意向量场,则 g 称为 M 上的埃尔米特度量.

克勒形式(Kähler form) 亦称基本 2 形式. 殆复流形上的一个特殊二次外形式. 若 M 是具有殆复结构 J 和埃尔米特度量 g 的殆复流形,可定义 2 次微分式 Φ:$\Phi(X,Y)=g(X,JY)$,这里 X,Y 是 M 上的向量场,则 Φ 称为克勒形式.

基本2形式(basic 2-form) 即"克勒形式".

克勒度量(Kähler metric) 特殊的埃尔米特度量. 设 M 是具有殆复结构 J 的殆复流形,g 为 M 上的埃尔米特度量,Φ 是相应的克勒形式,若 Φ 是闭的,即 $\mathrm{d}\Phi=0$,则称 g 为克勒度量. 给定克勒度量的复流形,就称为克勒流形.

克勒流形(Kähler manifold) 见"克勒度量".

全纯截曲率(holomorphic sectional curvature) 克勒流形上的一种重要的特殊截面曲率. 设 M 是具有殆复结构 J 的克勒流形,R 表示 M 的黎曼曲率张量,若 P 是切空间 T_xM $(x\in M)$中在 J 作用下不变的实 2 维子空间,则关于 P 的截曲率 $K(P)$称为全纯截曲率. 若任取单位向量 $X\in P$,则

$$K(P)=R(X,JX,X,JX).$$

双全纯截曲率(holomorphic bisectional curvature) 克勒流形上全纯截曲率概念的推广. 设 M 是具有殆复结构 J 的克勒流形,R 表示 M 的黎曼曲率张量. 如果 P 和 P' 都是切空间 T_xM $(x\in M)$中 J 作用下不变的实 2 维线性子空间,则称

$$H(P,P')=R(X,JX,Y,JY)$$

为由 P 和 P'决定的双全纯截曲率,这里 X 和 Y 分别是 P 和 P'中的单位向量. 若 $P=P'$,则$H(P,P)$就是关于 P 的全纯截曲率.

克勒-爱因斯坦度量(Kähler-Einstein metric) 一类特殊的克勒度量. 设(M,g)是克勒流形,S 为里奇曲率张量. 若 S 满足 $S=\rho g$,则称 g 为 M 上的克勒-爱因斯坦度量. 这时,(M,g)称为克勒-爱因斯坦流形.

克勒-爱因斯坦流形(Kähler-Einstein manifolds) 见"克勒-爱因斯坦度量".

伯格曼度量(Bergman metric) 一类特殊的克勒度量. 设 U 是 $\mathbb{C}^n$ 中任一有界域,用 H 表示 U 上所有满足

$$\int_U \mathrm{i}^{n^2}\varphi\wedge\bar\varphi<\infty$$

的全纯 n 形式 φ 的全体. 如下定义 H 上的内积:

$$(\varphi,\psi)=\int_M \mathrm{i}^{n^2}\varphi\wedge\overline{\psi}\quad(\varphi,\psi\in H),$$

则 H 成为可分的希尔伯特空间. 取 H 中任一标准正交基 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots$,若

$$K=\mathrm{i}^{n^2}\sum_{h=0}^{\infty}\varphi_h\wedge\overline{\varphi}_h,$$

则 K 是与 $\{\varphi_k,k=0,1,\cdots\}$ 选取无关的 (n,n) 型微分形式. 设在 U 中取复坐标系 $(z^1,z^2,\cdots,z^n)$,将 K 写成

$$K=\mathrm{i}^{n^2}k\mathrm{d}z^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}z^n\wedge\mathrm{d}\overline{z}^1\cdots\wedge\mathrm{d}\overline{z}^n,$$

这里 $k>0$. 于是

$$\mathrm{d}s^2=2\sum g_{\alpha\beta}\mathrm{d}z^\alpha\mathrm{d}\overline{z}^\beta,\quad g_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2\log k}{\partial z^\alpha\partial\overline{z}^\beta}$$

定义了 U 上一个克勒度量,称之为伯格曼度量.

复射影空间(complex projective space) 实射影空间概念的推广. 若 C^{m+1} 是 $m+1$ 维复矢量空间,在 $\mathrm{C}^{m+1}\backslash\{0\}$ 的元素间定义如下等价关系:$(z^0,z^1,\cdots,z^m)\sim(\omega^0,\omega^1,\cdots,\omega^m)$ 当且仅当存在非零复数 λ,使得 $(z^0,z^1,\cdots,z^m)=\lambda(\omega^0,\omega^1,\cdots,\omega^m)$,则商空间 $(\mathrm{C}^{m+1}\backslash\{0\})/\sim$ 上可引入自然的复流形结构成为 m 维复流形. 称此空间为 m 维复射影空间.

霍普夫纤维化(Hopf fibration) 一个基本概念. 来自复射影空间的构造. 设 $\pi:\mathrm{C}^{m+1}\backslash\{0\}\to\mathrm{C}P^m$ 是自然投影. 若把 C^{m+1} 看做实矢量空间 $\mathrm{R}^{2(m+1)}$,则方程

$$\sum_{k=0}^{m}z^k\cdot\overline{z}^k=1$$

在 $\mathrm{R}^{2(m+1)}$ 中定义了一个 $2m+1$ 维的单位球面 S^{2m+1}. 若将 π 限制在 S^{2m+1} 上,则得 $\pi:S^{2m+1}\to\mathrm{C}P^m$. 对于任意 $p\in\mathrm{C}P^m$,逆像 $\pi^{-1}(p)$ 是一个圆周,这称为 S^{2m+1} 的霍普夫纤维化.

复空间形式(complex space form) 实空间形式概念的推广. 具有常数全纯截曲率的克勒流形就称为复空间形式. 根据全纯截曲率是正、负或零有下列三种标准的复空间形式:

1. 复射影空间 $\mathrm{C}P^m$,赋予它规范的富比尼-施图迪度量,成为一个完备、单连通的复空间型(全纯截面曲率为 1).

2. 设 D^m 是复欧氏空间 C^m 中的开单位球,若赋予它伯格曼度量,则 D^m 成为全纯截曲率为 -1 的完备、单连通的复空间型.

3. 复欧氏空间 C^m,若赋予它通常的埃尔米特度量,则 C^m 成为一个全纯截曲率为 0 的完备、单连通复空间.

任何 m 维复空间形式(度量乘以适当的常数)必局部复解析等距于上述三种标准的复空间形式之一.

博赫纳-克勒流形(Bochner-Kähler manifold) 实共形平坦流形的推广. 设 M 是 n 维克勒流形,g_{ij},F_i^h,R_{kji}^h,R_{ij} 和 R 分别表示度量张量、复结构张量、曲率张量、里奇张量和数量曲率. 博赫纳(Bochner,S.)将外尔(Weyl,(C. H.)H.)共形曲率张量推广成复的形式,引入如下张量:

$$\begin{aligned}B_{kji}^h=&R_{kji}^h+\delta_k^hL_{ji}-\delta_j^hL_{ki}+L_k^hg_{ji}\\&-L_j^hg_{ki}+F_k^hM_{ji}-F_j^hM_{ki}\\&+M_k^hF_{ji}-M_j^hF_{ki}-2(M_{kj}F_i^h+F_{kj}M_i^h),\end{aligned}$$

这里

$$L_{ji}=-\frac{1}{n+4}R_{ji}+\frac{1}{2(n+2)(n+4)}Rg_{ji},$$

$$L_k^h=L_{kt}+g^{th},$$

$$M_{ji}=-L_{jt}F_i^t,\ M_k^h=M_{kt}g^{th},\ F_{ji}=F_j^tg_{ti}.$$

此张量称为博赫纳曲率张量. 若 M 的博赫纳曲率张量为零,则称 M 为博赫纳-克勒流形. 复空间形式是特殊的博赫纳-克勒流形.

博赫纳曲率张量(Bochner curvature tensor) 见"博赫纳-克勒流形".

复二次超曲面(complex quadric) 复射影空间中的特殊超曲面. 复射影空间 $\mathrm{C}P^m$ 中齐次坐标 z^0,$z^1,\cdots,z^m$ 满足方程

$$(z^0)^2+(z^1)^2+\cdots+(z^m)^2=0$$

的代数流形,称为复二次超曲面.

复环面(complex torus) 实环面的推广. 将复矢量空间 C^m 看做实 $2m$ 维矢量空间 R^{2m}. 在 R^{2m} 中取 $2m$ 个实线性无关的矢量 $\{V_\alpha\}$,它产生如下的格:

$$L=\Big\{\sum_{\alpha=1}^{2m}n_\alpha v_\alpha,\ n_\alpha\in\mathrm{Z}\Big\},$$

这里 Z 表示整数群. C^m 和 L 都是加群,商空间 C^m/L 成为一个 m 维的复流形,称为 m 维复环面. 若复环面可嵌入复射影空间中作为非奇异子流形,则称这个复环面为阿贝尔流形. 阿贝尔(Abel,N. H.)流形是代数几何和数论的一个重要对象.

卡拉比猜想(Calabi conjecture) 关于克勒度量的一个著名猜想. 卡拉比(Calabi,E.)于 1954 年在一篇关于"克勒度量的空间"的文章中提出如下猜测:设 M^n 是紧致克勒流形,$\omega=\mathrm{i}\Sigma g_{\alpha\beta}\mathrm{d}z^\alpha\wedge\mathrm{d}\overline{z}^\beta$ 为克勒形式,$\rho=\mathrm{i}\Sigma R_{\alpha\beta}\mathrm{d}z^\alpha\wedge\mathrm{d}\overline{z}^\beta$ 为里奇形式. 若给定的实闭 $(1,1)$ 形式 ρ' 的上同调类 $[\rho']$ 与 ρ 的上同调类 $[\rho]$ 一致,则在 M 上存在一种且只存在一种具有下列性质的克勒度量:

1. 其克勒形式 ω' 和 ω 决定相同的上同调类,即 $[\omega']=[\omega]$.

2. 其里奇形式与给定的 ρ' 一致.

在该文章中,卡拉比已证明了惟一性. 里奇形式 ρ 的重要性在于 M 的第一陈类 $C_1(M)$ 与 $2\pi[\rho]$ 一致. 卡拉比特别关心 $C_1(M)=0$ 的情况. 在命题"若 $C_1(M)=0$,则存在里奇形式为 0 的克勒度量"的假

设下，他证明了上述猜测的特殊情况．所要求的 ω' 用适当的实数 φ 可以写成 $\omega'=\omega+\mathrm{i}\partial\bar{\partial}\varphi$，于是问题可归结为求下列 φ 的微分方程：$(\omega+\mathrm{i}\partial\bar{\partial}\varphi)^n=\mathrm{e}^f\omega^n$，其中 f 是由 $\rho'=\rho-\mathrm{i}\partial\bar{\partial}f$ 和

$$\int_M \mathrm{e}^f\omega^n=\int_M\omega^n$$

而定的实函数．与上述猜测（通常称为第一猜测）有关尚有下列第二猜测：若 M^n 为紧致流形，第一陈类 C_1 为负，则满足 $R_{\alpha\bar{\beta}}=-g_{\alpha\bar{\beta}}$ 的克勒度量存在且只有一个．这种度量就是所谓克勒-爱因斯坦度量，这时微分方程变为

$$\mathrm{e}^{-\varphi}(\omega+\mathrm{i}\partial\bar{\partial}\varphi)^n=\mathrm{e}^f\omega^n.$$

奥平（Aubin，T.）于 1976 年初解决了第二猜测，而丘成桐于 1976 年底把两个猜测都解决了．卡拉比猜测的解决，使得克勒-爱因斯坦流形的研究更加重要．

阿贝尔流形（Abel manifold）　见“复环面”．

全纯子流形（holomorphic submanifold）　复流形的复子流形．设 $\bar{M}$ 是一克勒流形，具有殆复结构 J．若 $\bar{M}$ 的子流形 M 满足 $J(T_xM)=T_xM$，$x\in M$，则称 M 为 $\bar{M}$ 的全纯子流形．全纯子流形 M 可从 $\bar{M}$ 诱导自然的殆复结构和埃尔米特度量而成为一个克勒流形，称之为 $\bar{M}$ 的克勒子流形．

克勒子流形（Kähler submanifold）　见“全纯子流形”．

全实子流形（totally real submanifold）　亦称反不变子流形．复流形中的特殊实子流形．设 M 是克勒流形 $\bar{M}$ 的子流形．若 M 每点 x 处的切空间在 $\bar{M}$ 的殆复结构 J 的作用下都落在法空间中，即 $J(T_xM)\subset T_x^{\perp}M$，则称 M 是 $\bar{M}$ 的全实子流形．

反不变子流形（anti-invariant submanifold）　即“全实子流形”．

CR 子流形（CR submanifold）　全纯子流形和全实子流形概念的推广．设 M 是克勒流形 $\bar{M}$ 的子流形，如果在 M 上存在一个光滑分布 D，使得 $JD_x=D_x$，$JD_x^{\perp}\subset T_x^{\perp}M$，这里 $D_x^{\perp}$ 是 D_x 在切空间 T_xM 中的正交补，$T_x^{\perp}M$ 表示 M 在 x 处的法空间，则称 M 是 $\bar{M}$ 的 CR 子流形．特别地，若

$$\dim D_x^{\perp}=0(\dim D_x=0),$$

M 就是全纯子流形（全实子流形）．

辛空间（symplectic space）　一类有特殊结构的向量空间．设 V 是特征 $\neq 2$ 的域 K 上的向量空间，ω 是 V 上一个反对称 2 形式．若 $\ker\omega=\{0\}$，则称 ω 为 V 上的一个辛形式．此时，(V,ω) 就称为辛空间．V 是偶数维的．

辛形式（symplectic manifold）　见“辛空间”．

辛群（symplectic group）　一类重要的群．辛空间的自同构群．设 (V,ω) 是一辛空间，若 $\varphi:V\to V$ 是线性同构且满足 $\omega(\varphi X,\varphi Y)=\omega(X,Y)$，$\forall\ X,Y\in V$，则称 φ 为 (V,ω) 的一个自同构．(V,ω) 的自同构全体构成群 $\mathrm{GL}(V)$ 的一个子群，记为 $\mathrm{SP}(V,\omega)$．特别地，标准辛空间 (K^{2n},ω) 的自同构群记为 $\mathrm{Sp}(2n,K)$．若 $K=\mathbb{R}$（实数域），则把 $\mathrm{Sp}(2n,K)$ 简记为 $\mathrm{Sp}(2n)$ 并称它为 $2n$ 维辛群．

辛复结构（symplectic-complex structure）　属于辛群的复结构．设 (V,ω) 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 $2n$ 维辛空间，J 是 V 的一个复结构，即 $J:V\to V$ 是满足 $J^2=-\mathrm{id}_v$ 的自同构．若 $J\in\mathrm{Sp}(V,\omega)$，则称 J 为一个辛复结构．

辛流形（symplectic manifold）　具有辛结构的微分流形．设 ω 是微分流形 M 上的 2 次微分形式．若对于任一点 $x\in M$，ω_x 都是点 x 处切空间 $T_x\omega$ 上的一个辛形式且 $\mathrm{d}\omega=0$，则称它为 M 上的一个辛结构，并且称 (M,ω) 为辛流形．

辛结构（symplectic structure）　见“辛流形”．

辛坐标（symplectic coordinate）　辛流形上的一种特殊坐标．若 (M,ω) 是一个 $2n$ 维的辛流形，则在 M 的每一点的一个适当的邻域 U 上，存在局部坐标 $x_1,x_2,\cdots,x_{2n}$，使得

$$\omega|_u=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_{n+1}+\cdots+\mathrm{d}x_n\wedge\mathrm{d}x_{2n}.$$

这种坐标就称为辛坐标．局部辛坐标的存在说明了两个同维数的辛流形是局部同构的．

辛向量场（symplectic vector field）　一类向量场．使辛形式的李导数消失的向量场．设 (M,ω) 是一辛流形，若 M 上向量场 X 满足 $L_X\omega=0$，这里 L_X 表示沿 X 的李导数，则称 X 为辛向量场．

哈密顿向量场（Hamiltonian vector field）　一类特殊的辛向量场．设 f 是辛流形 (M,ω) 上的任意光滑函数．若 f 对应于 M 上的向量场 X_f 使得 $\omega(X_f,\cdot)=\mathrm{d}f$，则 X_f 是惟一确定的且它是一个辛向量场．辛流形上所有形如 $X_f(f\in C^{\infty}(M))$ 的向量场就称为哈密顿向量场．

辛子空间（symplectic subspace）　辛空间的特殊子空间．设 ω 是向量空间 V 上的一个反对称 2 形式，由 ω 可定义 V 的元素间的正交性．设 $X,Y\in V$，若 $\omega(X,Y)=0$，则称 X,Y 是互相正交的．设 E 是 V 的一个子空间，且 $E^{\perp}$ 表示 E 的正交补，若 E 满足 $E\cap E^{\perp}=\{0\}$，则称 E 为 (V,ω) 的辛子空间．

辛子流形（symplectic submanifold）　辛流形的特殊子流形．设 (M,ω) 是一辛流形，N 是 M 的子流形．若对于任意 $x\in N$，切空间 T_xN 都是辛空间 (T_xM,ω_x) 的一个辛子空间，则称 N 为 (M,ω) 的辛子流形．

拉格朗日子空间（Lagrange subspace）　辛空间的特殊子空间．设 E 是辛空间 (V,ω) 的子空间．若

$E=E^{\perp}$,则称 E 为(V,ω)的拉格朗日子空间.

拉格朗日子流形(Largrange submanifold)　辛流形的特殊子流形. 设 N 是辛流形(M,ω)的子流形. 若对任一 $x\in N$,T_xN 都是(T_xM,ω_x)的拉格朗日子空间,则称 N 为(M,ω)的拉格朗日子流形.

史告天-尼琴赫司括号(Schouten-Nijenhuis bracket)　张量空间上的一类特殊的双线性映射. 设 M 是一流形,记 M 上的 p 阶反对称反变可微张量空间为 $D_p(M)$,并记

$$D_*(M)=\bigoplus_{p\geq 0}D_p(M).$$

在 $D_*(M)$上定义一个括号[,],即双线性映射

$$[\ ,\ ]:D_*(M)\times D_*(M)\to D_*(M),$$
$$[\ ,\ ]:(u,v)\to[u,v],\ u,v\in D_*(M),$$

要求它满足下列条件:

1. $[f,g]=0.$
2. $[f,X_1\wedge X_2\wedge\cdots\wedge X_p]$
$=(-1)^p[X_1\wedge X_2\wedge\cdots\wedge X_p,f]$
$=\sum_{i=1}^{p}(-1)^i(X_i\cdot f)X_1\wedge\cdots\hat{X}_i\cdots\wedge X_p.$
3. $[X_1\wedge\cdots\wedge X_p,Y_1\wedge\cdots\wedge Y_q]$
$=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}(-1)^{i+j}[X_i,X_j]\wedge X_1\wedge X_2$
$\wedge\cdots\hat{X}_i\wedge\cdots\wedge X_p\wedge Y_1$
$\wedge Y_2\wedge\cdots\hat{Y}_j\wedge\cdots\wedge Y_q,$

其中,$f,g\in D_0(M)=C^\infty(M)$和 $X_1,X_2,\cdots,X_p,Y_1,Y_2,\cdots,Y_q\in D_1(M)$都是任意的. 符号 $\hat{X}$ 表示把 X 去掉.

这样定义的括号是惟一的,把它称为史告天-尼琴赫司括号.

泊松流形(Poisson manifold)　辛流形的推广. 设 M 是一流形,ω 是 M 上一个反对称反变的 2 阶张量场,若 ω 满足$[\omega,\omega]=0$,这里[,]表示史告天-尼琴赫司括号,则称 ω 为 M 上一个泊松结构,而称(M,ω)为泊松流形.

泊松结构(Poisson structure)　见"泊松流形".

撰　稿　东瑜昕
审　阅　李安民　陈维桓

子流形几何

子流形几何(geometry of submanifolds)　微分几何的一个分支. 主要研究黎曼流形中各种子流形的结构及其性质. 如极小子流形、常平均曲率子流形等. 子流形几何与微分几何本身具有同样悠久的历史,它们都是在经典三维欧氏空间中的曲线论和曲面论的基础上发展起来的. 在很长一段时期里,子流形几何学的发展仅限于局部性质的研究. 随着微分流形理论和整体微分几何学的迅速发展,现代子流形几何学主要研究黎曼流形中各种子流形的整体性质,尤其是局部性质与整体性质的关系. 实和复空间形式中的子流形理论是子流形几何学的重要方面. 子流形几何学还与数学的其他分支学科密切相关,如微分方程、复变函数论、拓扑学、李群论、数学物理等,并且促进了这些学科的发展. 可以说,子流形几何是微分几何中历久不衰的一个分支.

等距浸入(isometric immersion)　黎曼流形到黎曼流形的保持度量的浸入. 设(M,g)和$(\widetilde{M},\widetilde{g})$为黎曼流形,$f:(M,g)\to(\widetilde{M},\widetilde{g})$为一浸入,$f_*$为 f 的切映射,若 $f^*\widetilde{g}=g$,即对任意 $p\in M$ 及 $X,Y\in T_pM$,有 $g_p(X,Y)=\widetilde{g}_{f(p)}(f_{*p}X,f_{*p}Y)$,则称 f 为(M,g)到$(\widetilde{M},\widetilde{g})$的等距浸入,其中 f^*为 f 的拉回映射,T_pM 为 M 在 p 点的切空间. 这时也称(M,g)为$(\widetilde{M},\widetilde{g})$的黎曼子流形,在不致混淆的情况下,也简称 M 为子流形,$\widetilde{M}$ 为外围空间.

黎曼子流形(Rimannian submanifold)　见"等距浸入".

第二基本形式(second fundamental form)　子流形的基本微分形式之一. 设 M 为 $\widetilde{M}$ 的黎曼子流形,$\widetilde{\nabla}$和∇分别为 $\widetilde{M}$ 和 M 的黎曼联络,M 的第二基本形式 σ 定义如下:对

$$p\in M,u,v\in T_pM,\ \sigma(u,v)=(\widetilde{\nabla}_UV-\nabla_UV)_p,$$

其中 U 和 V 是定义在 $\widetilde{M}$ 中 p 的一个邻域上的向量场,在 M 的任何点都与 M 相切,且 $U_p=u,V_p=v$. 上面的定义与 U,V 的选取无关,σ 是对称的. 设 $\xi\in T_p^{\perp}M$ 是某一单位法向量,$\langle\sigma,\xi\rangle$称为 M 关于 ξ 的第二基本形式. 正如三维欧氏空间的曲面论一样,第二基本形式在子流形理论中起着非常重要的作用.

平均曲率向量(mean curvature vector)　子流形几何的一个重要概念. 第二基本形式的迹与子流形的维数之比. 设(M^n,g)为黎曼流形$(\widetilde{M},\widetilde{g})$的 n 维子流形,σ 为 M 的第二基本形式,M 的平均曲率向量 H 定义为

$$H=\frac{1}{n}\mathrm{tr}\sigma,$$

即任给 $p\in M$,则有

$$H_p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma(e_i,e_i),$$

其中 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为 T_pM 的一组幺正基.

法联络(normal connection)　一种联络. 由外围空间的联络在子流形的法丛上诱导的联络. 设 M 为黎曼流形 $\widetilde{M}$ 的黎曼子流形,$\widetilde{\nabla}$为 $\widetilde{M}$ 的黎曼联络,$N(M)$为 M 的法丛,任给 $p\in M$ 及 $u\in T_pM,n\in$

NM_p，将 u，n 分别扩充成 p 在 $\widetilde{M}$ 中的一个邻域上的向量场 U 和 N，并且在 M 的任何点，U 和 N 都分别与 M 相切和正交，M 的法联络 $\nabla^{\perp}$ 由下式给出：

$$\nabla_U^{\perp} n = (\widetilde{\nabla}_U N)_p^{\perp},$$

其中 $(\widetilde{\nabla}_U N)_p^{\perp}$ 表示 $(\widetilde{\nabla}_U N)_p$ 在 NM_p 上的投影.

高斯方程(Gauss equations)　子流形的基本方程. 设 M 为黎曼流形 $(\widetilde{M}, \langle\ ,\ \rangle)$ 的子流形，σ 为 M 的第二基本形式，若用 R 和 $\widetilde{R}$ 分别表示 M 和 $\widetilde{M}$ 的曲率张量，则高斯方程为：对 M 上的任何切向量场 X，Y，Z，W，有

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle &= \langle \widetilde{R}(X,Y)Z,W\rangle \\ &\quad + \langle \sigma(Y,Z),\sigma(X,W)\rangle \\ &\quad - \langle \sigma(X,Z),\sigma(Y,W)\rangle.\end{aligned}$$

特别地，当 $\widetilde{M}$ 为三维欧氏空间 R^3，M 为 R^3 中的曲面时，上式即为经典曲面论中的高斯方程.

科达齐方程(Codazzi equations)　子流形的基本方程. 设 M 为黎曼流形 $(\widetilde{M}, \langle\ ,\ \rangle)$ 的子流形. σ 和 $\nabla\sigma$ 分别为 M 的第二基本形式及其一阶共变导数. 若用 R 和 $\widetilde{R}$ 分别表示 M 的 $\widetilde{M}$ 的曲率张量，则科达奇方程为

$$\begin{aligned}&(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} \\ &= (\nabla\sigma)(X,Y,Z) - (\nabla\sigma)(Y,X,Z),\end{aligned}$$

其中 $(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp}$ 表示 $\widetilde{R}(X,Y)Z$ 在 M 的法丛 $N(M)$ 上的投影. 当 $\widetilde{M}$ 为常曲率空间时，科达齐方程变成 $(\nabla\sigma)(X,Y,Z) = (\nabla\sigma)(Y,X,Z)$.

里奇方程(Ricci equations)　子流形的基本方程. 设 M 为黎曼流形 $(\widetilde{M}, \langle\ ,\ \rangle)$ 的子流形，σ 和 A_ξ 分别为 M 的第二基本形式和关于法向量 ξ 的外恩加滕变换. 用 R 和 $\widetilde{R}$ 分别表示 M 和 $\widetilde{M}$ 的曲率张量，则里奇方程为

$$\begin{aligned}&\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle \\ &= \langle \widetilde{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle + \langle [A_\xi, A_\eta]X,Y\rangle,\end{aligned}$$

其中 $R^{\perp}$ 为 M 的法联络 $\nabla^{\perp}$ 所相应的曲率张量，$X,Y \in TM$，$\xi,\eta \in N(M)$.

等距嵌入问题(isometric imbedding problem)　子流形几何的一个重要问题. 黎曼流形等距地嵌入到高维欧氏空间中作为子流形的问题. 它是黎曼几何学中由来已久的重要问题. 雅内特(Janet, N.)于1926年，嘉当(Cartan, E.)于1927年，就局部等距嵌入问题，即黎曼流形的一个局部区域等距嵌入到高维欧氏空间的问题，独立地证明了如下定理：任意 n 维解析黎曼流形能够局部等距地嵌入到

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

维欧氏空间中. 但是，若去掉解析性的要求，问题至今尚未解决. 例如，对于最简单的 $n=2$ 的情况，至今仍不知道一个高斯曲率变号的二维黎曼流形是否总可以局部等距嵌入到三维欧氏空间中. 关于曲面的整体等距浸入问题，有著名的外尔问题：若二维黎曼流形 M 同胚于球面且高斯曲率恒正，则 M 能整体等距浸入到 R^3 中吗？这个问题已被尼伦伯格(Nirenberg, L.)和波戈列洛夫(Погорелов, А. В.)先后解决. 亚历山德罗夫(Александров, А. Д.)则用完全不同的所谓凸度量理论的方法解决外尔问题. 关于双曲平面，有著名的希尔伯特定理：常负高斯曲率的完备曲面不能 C^2 阶等距浸入到 R^3 中. 后来叶菲莫夫(Ефимов, Н. В.)把上述定理的条件改进为严格负高斯曲率的完备曲面. 关于高维流形的情况，可参见“纳什嵌入定理”.

纳什嵌入定理(Nash imbedding theorem)　关于黎曼流形整体等距嵌入问题的一个著名定理. 任意 n 维紧致黎曼流形能够整体地等距嵌入到

$$\frac{n(3n+1)}{2}$$

维欧氏空间中作为其子流形；任意 n 维非紧黎曼流形可以整体地嵌入到

$$\frac{n(n+1)(3n+1)}{2}$$

维欧氏空间中作为其子流形. 此定理是纳什(Nash, J. F.)于1956年证明的.

全测地子流形(totally geodesic submanifold)　一类子流形. 第二基本形式恒为零的子流形. 设 M 为黎曼流形 $\widetilde{M}$ 的黎曼子流形，则 M 为 $\widetilde{M}$ 的全测地子流形的另一等价条件是：$\widetilde{M}$ 中的任意一条与 M 相切的测地线位于 M 中，且也为 M 的测地线. 通常的包含嵌入 $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$，$S^n(1) \to S^m(1)$，$n<m$ 都是全测地子流形的例子. 全测地子流形的例子是十分稀少的，一般黎曼流形几乎都不具有任何全测地子流形. 黎曼流形的一个等距变换的固定点集是一个全测地子流形. 具正里奇曲率流形的任意两个紧致全测地超曲面必相交.

全脐点子流形(totally umbilical submanifold)　一类子流形. 第二基本形式与第一基本形式只差一个平均曲率向量因子的子流形. 设 M 为黎曼流形 $(\widetilde{M}, \langle\ ,\ \rangle)$ 的 n 维子流形，σ 为 M 的第二基本形式，若 $\sigma = \langle\ ,\ \rangle H$，即对任意 $X,Y \in TM$，有 $\sigma\langle X,Y\rangle = \langle X,Y\rangle H$，其中 H 为 M 上的平均曲率向量场，则称 M 为 $\widetilde{M}$ 的全脐点子流形. M 为 $\widetilde{M}$ 的全脐点子流形的充分必要条件是：$|\sigma|^2 = n|H|^2$，其中 $|H|$ 和 $|\sigma|^2$ 分别表示 M 的平均曲率向量的长度和第二基本形式模长的平方. 空间形式 $N^m(c)$ 中的一个 n 维全脐点子流形或者是全测地的，或者含于 $N^m(c)$ 的一个 $(n+1)$ 维全测地子流形中. 全脐点的极小子流形是全测地子流形.

伪脐点子流形(pseudo-umbilical submanifold)

一类特殊的子流形. 设 M 为 $(\widetilde{M},\langle\ ,\ \rangle)$ 的子流形，若存在 M 上的函数 λ，使得对 M 上的任意切向量场 X,Y，有 $\langle\sigma(X,Y),H\rangle=\lambda\langle X,Y\rangle$，这里 σ 和 H 分别为 M 的第二基本形式和平均曲率向量，则称 M 为 $\widetilde{M}$ 的伪脐点子流形. 上面的函数 λ 恰好为 $|H|^2$. 全脐点子流形必是伪脐点子流形.

黎曼淹没(Riemannia submersion)　一种映射. 黎曼流形到黎曼流形的保持水平等距的淹没. 设 $p:(M,g)\to(N,h)$ 为一光滑淹没，p_* 为 p 的切映射，对 $x\in M$，用 H_x 表示 $p_{*x}^{-1}(0)$ 在 T_xM 中的正交补空间. 若对任意 $x\in M$，$p_{*x}:H_x\to T_{p(x)}N$ 为一等距，则称 p 为一黎曼淹没. $p_{*x}^{-1}(0)$ 中的向量称为垂直向量，H_x 中的向量称为水平向量. 这时，对 N 上的任意向量场 X，存在惟一的水平向量场 X^L，使得 $p_*(X^L)=X$，X^L 称为 X 的水平提升. 例如，若 (M,g) 和 (N,h) 为黎曼流形，f 为 N 上处处非零的光滑函数，则从 $(M\times N,f^2g+h)$ 到 (N,h) 上的投影为一黎曼淹没.

垂直向量(vertical vector)　见“黎曼淹没”.

水平向量(horizontal vector)　见“黎曼淹没”.

向量的水平提升(horizontal lifting of vector)　见“黎曼淹没”.

外恩加滕变换(Weingarten transformation)　亦称形状算子. 一种特殊的线性变换. 由子流形的法向量在各点的切空间上所定义. 若 M 为黎曼流形 N 的子流形，对 $x\in M,\xi\in T_x^{\perp}M$，则由 $\langle A_\xi u,v\rangle=\langle\sigma(u,v),\xi\rangle$ 所定义的 T_xM 上的线性变换 $A_\xi:T_x\to T_xM$ 称为相对于法向量 ξ 的外恩加滕变换. A_ξ 是自共轭的，即对于任意 $u,v\in T_xM$，有 $\langle A_\xi u,v\rangle=\langle A_\xi v,u\rangle$. 外恩加滕变换在子流形几何中起着重要作用.

形状算子(shape operator)　即“外恩加滕变换”.

主曲率(principal curvature)　子流形几何的一个概念. 形状算子的特征值. 设 M 为黎曼流形 N 的子流形，ξ 为 M 的一个法向量，形状算子的特征值称为 M 的沿 ξ 方向的主曲率. 由于 A_ξ 是自共轭的，所以 M 沿着其任一法方向的主曲率都是实数.

李普希茨-基灵曲率(Lipschitz-Killing curvature)　R^3 中曲面的总曲率的推广. 欧氏空间中子流形关于一个单位法向量场的所有主曲率之积. 设 M^n 是 R^{n+p} 中的 n 维浸入子流形，γ 是 M^n 的某个单位法向量场，h_{ij}^{γ} 是 M^n 关于 γ 的第二基本张量. M^n 关于 γ 的李普希茨-基灵曲率 $G(\gamma)$ 定义为

$$G(\gamma)=(-1)^n\det\ (h_{ij}^{\gamma}).$$

当 M^n 是 R^{n+1} 的超曲面时，相应的李普希茨-基灵曲率称为高斯-克罗内克曲率，它是 M^n 的 n 个主曲率之积(不计符号). 对于浸入子流形 $x:M^n\to\mathrm{R}^{n+p}$，若 $x\in M^n$，$L(\gamma)$ 是由切空间 T_xM 与在 x 的单位法向量 γ 构成的 $n+1$ 维线性子空间，则 M 关于 γ 的李普希茨-基灵曲率等于 $x(M)$ 在 $L(\gamma)$ 中的正交投影的高斯-克罗内克曲率.

高斯-克罗内克曲率(Gauss-Kronecker curvature)　见“李普希茨-基灵曲率”.

全绝对曲率(totally absolute curvature)　李普希茨-基灵曲率的绝对值的积分. 设 $x:M^n\to\mathrm{R}^{n+p}$ 是紧致定向流形 M^n 到欧氏空间的等距浸入，x 也表示 M^n 的位置向量，$U^{\perp}M^n$ 表示 M^n 上的单位法丛. M^n 的全绝对曲率 $\tau(M^n,x)$ 定义为

$$\tau(M^n,x)=\frac{1}{c_0}\int_{U^{\perp}M^n}|G(x,\gamma)|\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $G(x,\gamma)$ 表示 M^n 关于单位法向量场 $\gamma\in U^{\perp}M^n$ 的李普希茨-基灵曲率，$\mathrm{d}\sigma$ 是单位法丛 $U^{\perp}M^n$ 的体积元，c_0 表示 R^{n+p} 中 $n+p-1$ 维单位球面的体积. 若 $\tau(M^n,x)<3$，则 M^n 同胚于 n 维球面. $\tau(M^n,x)$ 等于 2 的充分必要条件是 x 为等距嵌入，且 $x(M^n)$ 是 R^{n+p} 的线性子空间 R^{n+1} 中的凸超曲面.

高斯映射(Gauss map)　欧氏空间中可定向子流形到格拉斯曼流形的一种映射. 设 M^n 为 R^m 的 n 维可定向子流形，$2\leqslant n\leqslant m-1$，$\mathrm{R}^m$ 中的有向 n 维线性子空间的全体记成 $G_{n,m}$，称它为格拉斯曼流形. 对于 $x\in M$，平移 M 在 x 处的切空间 T_xM 使之通过 R^m 的原点，映射 $\mathfrak{F}:M\to G_{m,n}$，$x\to T_xM$ 称为高斯映射. 当 $n=m-1$ 时，$G_{m,m-1}$ 可以看成单位球面 $S^{m-1}(1)$ 在 x 处以单位法向量 N_x 代替切空间 T_xM，并且使 (TM_x,N_x) 和 R^m 的定向一致，这样的对应是经典的高斯映射. R^m 中定向子流形 M 的高斯映射是调和映射的充分必要条件是具有平行平均曲率向量. 若 M^n 为 R^{n+1} 中的紧致定向连通超曲面，其截面曲率处处非负，则高斯球面映射 $\mathfrak{F}:M^n\to S^n$ 为一微分同胚.

格拉斯曼流形(Grassmann manifold)　见“见高斯映射”.

高斯球面映射(Gauss spherical map)　古典曲面论的高斯映射的一种推广. 设 $x:M^n\to\mathrm{R}^{n+p}$ 是 n 维光滑流形 M^n 到欧氏空间的等距浸入，x 也表示 M^n 的位置向量. 利用欧氏平行性，把点 x 处的 M^n 的一个单位法向量 γ 平移到 R^{n+p} 的原点，它的像位于 R^{n+p} 的单位超球面 S_0^{n+p-1} 上. 这样，就诱导了一个映射 $g_\gamma:U^{\perp}M^n\to S_0^{n+p-1}$，其中 $U^{\perp}M^n$ 表示 M^n 上的单位法丛. 映射 g_γ 称为 M^n 的高斯球面映射. 当 $n=2$ 和 $p=1$ 时，它就是经典的高斯映射.

子流形的管状邻域(tubular neighborhood of a submanifold)　嵌入子流形在外围空间中的一类特殊邻域. 设 M 为黎曼流形 N 中的嵌入闭子流形，对 $r>0$，记 $v_r(M)=\{u\in v(M)_x\,|\,x\in M,|u|<r\}$，其中

$v(M)$为 M 的单位法丛. 若 exp 将 $v_r(M)$微分同胚地映射到开子集 $U_r=\exp(v_r(M))$上,则称 U_r 为 M 的管状邻域,这里 exp 表示 M 的指数映射.

等参超曲面(isoparametric hypersurface)　一类曲面. 它是等参函数的等位面. 等参函数 F 是满足下列性质的函数:F 的梯度的模长平方 $|\nabla F|^2$ 和 F 的拉普拉斯算子 ΔF 都仅是 F 本身的函数. 在空间形式 $\widetilde{M}^{n+1}(c)$中,等参超曲面 M 的特征是 M 具有常数主曲率. 嘉当(Cartan,E.)于 1938 年证明:若 M 有 g 个不同常主曲率 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_g$,其重数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_g$,则对于每个 i $(1\leqslant i\leqslant g)$成立

$$\sum_{k\neq i} m_k \frac{c+\lambda_i\lambda_k}{\lambda_i-\lambda_k}=0.$$

此结果对空间形式中等参超曲面的分类起着重要作用. 等参超曲面的测地平行超曲面也是等参的. 对于 $c\leqslant 0$ 的空间形式 $\widetilde{M}^{n+1}(c)$,其等参超曲面的不同主曲率的个数最多是 2. 在球面上,等参超曲面的不同主曲率的个数只可能是 1,2,3,4 或 6,它们都是代数曲面.

等参函数(isoparametric function)　见“等参超曲面”.

等参子流形(isoparametric submanifold)　等参超曲面的推广. 黎曼流形 N 的子流形 M 称为等参的,若 M 的法丛平坦,并且关于 M 的任意平行法向量场的主曲率都是常数. 例如,对称空间 U/K 的迷向表示的主轨道是欧氏空间 $T(U/K)_{eK}$中的等参子流形. 空间形式 $N^m(c)$中存在许多不是轨道的等参子流形,它们还远远没有分类.

迪潘超曲面(Dupin hypersurface)　欧氏空间中的一类特殊超曲面. 设 M^n 为 R^{n+1}中的超曲面,若 M^n 的每个主曲率的重数为常数,并且沿着它的主叶层的叶片是常数,则称 M^n 为迪潘超曲面.

紧贴浸入(tight immersion)　一种浸入. 它是具有极小全绝对曲率的浸入. 数学中凸性概念的自然推广. 设 $f_0:M_n\to\mathrm{R}^m$ 为等距浸入,若对任何等距浸入 $f:M^n\to\mathrm{R}^s$,有 $\tau(M,f)\geqslant\tau(M,f_0)$,则称 f_0 为紧贴浸入. 紧贴浸入与莫尔斯理论有密切的关系. 给定一个莫尔斯函数 $f:M^n\to\mathrm{R}$,设 $\mu_k(f)$为 f 的指标为 k 的临界点个数,

$$\mu(f)=\sum_k \mu_k(f),$$

定义 M^n 的莫尔斯数为 $\gamma(M)=\inf\{\mu(f)\,|\,f:M^n\to\mathrm{R}$ 为莫尔斯函数$\}$,则有:

1. $\gamma(M)=\inf\{\tau(M,\varphi)\,|\,\varphi:M\to\mathrm{R}^m$ 为等距浸入$\}$.

2. 浸入 $\varphi_0:M^n\to\mathrm{R}^m$ 为紧贴的,当且仅当每个非退化的高度函数 h_p 有 $\gamma(M)$个临界点.

一个尚未解决的困难问题是哪些流形容许紧贴浸入.

绷紧浸入(taut immersion)　一种浸入. 它是到欧氏空间中的每个非退化的欧氏距离函数都有最小个数的临界点的浸入. 设 M 为紧致定向微分流形,$f:M\to\mathrm{R}^m$ 为等距浸入,对 $p\in\mathrm{R}^m$,$L_p(x)=|p-x|^2$ 称为欧氏距离函数. 对某一实数 $r>0$,记

$$M_r(L_p)=\{x\in M\,|\,L_p(f(x))\leqslant r\}.$$

若 $\mu_k(L_p,r)$为 L_p 在 $M_r(L_p)$上具有指标为 k 的临界点的个数,$\beta_k(L_p,r,Z_2)$为 $M_r(L_p)$的第 k 个 Z_2 贝蒂数,则 f 为绷紧的充分必要条件是对每个非退化的欧氏距离函数 L_p 及任意 $0<r\in\mathrm{R}$,$k\in\mathrm{Z}$,有

$$\mu_k(L_p,r)=\beta_k(L_p,r,Z_2).$$

欧氏距离函数(distance function)　见“绷紧浸入”.

体积第一变分(first variation of the volume)　子流形几何的一个重要公式. 它是子流形的体积的一阶变分公式. 设 $f:M\to\widetilde{M}$ 为等距浸入在 $\widetilde{M}$ 中的紧致定向带边 ∂M(可能空集)的子流形,$\dim M=n$,$\dim\widetilde{M}=m$,M 的一个变分$\{M_t\}$是一个 C^∞映射 $F:M\times[0,\varepsilon]\to\widetilde{M}$,使得:若 $f_t(x)\equiv F(x,t)$,并记 F_t 为 $f_t:M\to\widetilde{M}$ 的像,则有

1. $f_0=f$.

2. $f_t|_{\partial M}=f|_{\partial M}$对任意 t 都成立.

3. 每一个 $f_t:M\to\widetilde{M}$ 为等距浸入.

记

$$W=\mathrm{d}F\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{t=0}$$

为 M 的变分向量场,若 H 为 M 在 $\widetilde{M}$ 中的平均曲率向量,$\mathrm{d}v$ 为 M 的体积元,$V(t)=\mathrm{vol}(M_t)$,则有

$$V'(0)=-n\int_M\langle H,W\rangle\mathrm{d}v,$$

上式称为体积第一变分.

体积第二变分(second variation of the volume)　子流形几何的一个重要公式. 它是极小子流形的体积关于法方向的二阶变分公式. 设 $f:M\to\widetilde{M}$ 为极小浸入,记 $N(M)$和$\nabla^\perp$为 M 的法丛和法联络,定义算子

$$\Delta^\perp V=\sum_{i=1}^n(\nabla^\perp_{e_i}\nabla^\perp_{\nabla_{e_i}}e_iV),$$

式中$\{e_i\}$表示 M 上的局部单位正交标架场. 用 B 表示 M 的第二基本形式,记 B^t 为 B 的转置,即 B^t: $N_xM\to T_xM\otimes T_xM$,使得$\langle B^t(\mu),V\otimes W\rangle=\langle\mu,B(V,W)\rangle$,$\forall\,\mu\in N_xM$, $V,W\in T_xM$. 定义 $\overline{\mathrm{Ric}}$: $N(M)\to N(M)$为

$$\overline{\mathrm{Ric}}(V)=-\sum_{i=1}^n\widetilde{R}(E_i,V)E_i\quad(\forall\,V\in N(M)),$$

其中 $\widetilde{R}$ 为 $\widetilde{M}$ 的曲率张量,$\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$为 M 的任何标架场. 设$\{M_t\}$为 M 的法向变分,即变分向量场 $V\in N(M)$,对 $V(t)=\mathrm{vol}(M_t)$有

$$V''(0)=\int_M\langle-\bar{\Delta}V+\overline{\mathrm{Ric}}(V)-(B\circ B^t)(V),V\rangle\mathrm{d}\sigma.$$

上式称为体积的第二变分. 设 M 是极小浸入在 $\widetilde{M}$ 中的子流形,若对 M 中每一具有 C^∞ 边界的可定向紧致区域 D,沿它的每个法向变分具有非负的体积第二变分,则称 M 是稳定的. 运用第二变分公式,丘成桐和孙理察(Schoen,R.)于 1981 年证明了下面的重要结果:若 $\widetilde{M}$ 为具有正数量曲率的紧致定向三维流形,则 $\widetilde{M}$ 中不存在亏格为正的紧致定向稳定的极小二维子流形. $n(n\geqslant2)$ 维欧氏球面 S^n 中不存在任何紧致无边的稳定极小子流形.

稳定极小子流形(stable minimal submanifold) 见“体积的第二变分”.

极小子流形(minimal submanifold) 一类子流形. 它是平均曲率向量为 0 的子流形. 设 M^n 为黎曼流形 N^m 的子流形,σ 为 M 的第二基本形式,若 M 的平均曲率向量

$$H=\frac{1}{n}\mathrm{tr}\sigma=0,$$

则称 M 为 N 的极小子流形. 当 $n=2$ 时,称 M 为极小曲面;当 $n=m-1$ 时,称 M 为极小超曲面. 一维的极小子流形就是测地线. $S^{n+1}(1)$中的超曲面

$$S^p\left(\sqrt{\frac{p}{n}}\right)\times S^{n-p}\left(\sqrt{\frac{n-p}{n}}\right)$$

是极小的,称为克利福德极小超曲面. 任何秩 1 对称空间可以等距极小浸入到高维球面中. 欧氏空间中的子流形是极小当且仅当其坐标函数是调和的. 具有非正截面曲率的单连通完备黎曼流形中不存在闭的极小子流形. 极小子流形具有明显的变分意义,由体积的第一变分公式可得,它是体积泛函的临界点. 历史上,极小子流形与著名的普拉托问题所代表的极小曲面论有密切联系,后者起始于拉格朗日(Lagrange,J.-L.)的变分法. 对重积分的情况,拉格朗日举例如下:在 R^3 中考虑曲面 $z=f(x,y)$,$(x,y)\in D$,$D\subset\mathrm{R}^2$ 为某个区域,若此曲面在与之有相同边界的曲面族中面积最小,则 $z=f(x,y)$ 应满足下列极小曲面方程:

$$(1+z_y^2)z_{xx}-2z_xz_yz_{xy}+(1+z_x^2)z_{yy}=0.$$

欧拉(Euler,L.)于 1744 年发现悬链面是局部面积最小的曲面;梅斯尼埃(Meusnier,J. B. M.)于 1776 年指出正螺面也满足极小曲面方程.

极小曲面的高维推广是由李普希茨(Lipschitz,R. (O. S.))开始的,他给出了梅斯尼埃关于极小曲面几何解释的推广,并且证明了黎曼流形中的子流形是其体积泛函的临界点当且仅当其平均曲率向量为 0. 在其后很长一段时期里,极小子流形的发展基本上限于局部性质的研究. 在近代,极小子流形的研究主要是整体性质以及局部性质与整体性质的关系,其发展非常迅速,出现了很多惊人的重要结果和不少有趣的新问题. 尤其是极小超曲面和空间形式的极小子流形理论中更是如此. 另外,极小曲面理论在三维拓扑学中的应用也获得了意外的成功. 极小子流形现在已构成微分几何学的一个极其重要的分支,它与微分几何学的其他分支以及微分方程、拓扑学、几何测度论、复变函数等都有密切联系,并在物理学中有重要应用. 关于极小子流形的整体性研究,陈省身、项武义、丘成桐等都做出了重要贡献.

极小曲面(minimal surface) 见“极小子流形”.

极小超曲面(minimal hypersurface) 见“极小子流形”.

克利福德极小超曲面(Clifford minimal hypersurface) 见“极小子流形”.

高桥定理(Takahashi theorem) 子流形几何的一个著名定理. 它是判断欧氏空间中的子流形是否为某一超球面中的极小子流形. 若 $x:M^n\to\mathrm{R}^{m+1}$ 为一等距浸入,Δ 表示 M^n 的拉普拉斯算子,则位置向量 x 满足 $\Delta x=-\lambda x,\lambda>0$ 的充分必要条件是 M^n 为 R^{m+1} 中的超球面 $S^m\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ 中的极小子流形. 此定理是由高桥健人发现的. 由高桥定理,当 M^n 是由它的 Δ 的特征函数等距浸入在欧氏空间中时,M^n 是某个超球面中的极小子流形. 例如,设(x,y,z)和$(u^1,u^2,\cdots,u^5)$分别为 R^3 和 R^5 中的标准坐标系,考虑下面的映射:

$$u^1=\frac{1}{\sqrt{3}}yz,$$
$$u^2=\frac{1}{\sqrt{3}}zx,$$
$$u^3=\frac{1}{\sqrt{3}}xy,$$
$$u^4=\frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2-y^2),$$
$$u^5=\frac{1}{6}(x^2+y^2-2z^2).$$

它是 $S^2(\sqrt{3})$到 $S^4(1)$的一等距浸入,$S^2(\sqrt{2})$的两点(x,y,z)和$(-x,-y,-z)$被映到 $S^4(1)$的同一点,上面的映射定义了从实射影空间 $\mathrm{R}P^2(\sqrt{3})$到 $S^4(1)$的一等距嵌入. 从实射影空间的特征函数理论有:$\Delta u^i=-2u^i,i=1,2,\cdots,5$,所以由高桥定理知,它是 $S^4(1)$中的一极小曲面,称为凡罗尼斯曲面.

凡罗尼斯曲面(Veronese surface) 见“高桥定理”.

西蒙斯不等式(Simons inequality) 子流形几何的一个重要不等式. 这是关于球面中极小子流形的第二基本形式模长平方的不等式. 若 M^n 为单位

球面$S^{n+p}(1)$中的闭极小子流形，Δ 为 M^n 的拉普拉斯算子，σ 为 M^n 的第二基本形式，则有

$$\int_M |\sigma|^2\left(n-2-\frac{1}{p}\right)|\sigma|^2 \mathrm{d}v \leqslant 0.$$

它称为西蒙斯不等式. 由西蒙斯不等式立刻可以推出：若 M^n 是紧致闭的，且

$$|\sigma|^2 < n\Big/\left(2-\frac{1}{p}\right),$$

则 M^n 是全测地的. 另外，陈省身、杜卡莫(do Carmo, M.)和小林昭七于 1969 年证明：若 $S^{n+p}(1)$中的紧致极小子流形 M^n 满足

$$|\sigma|^2 = \frac{n}{2-\dfrac{1}{p}},$$

则或者 M^n 为 $S^{n+1}(1)$中的克利福德极小超曲面；或者 $n=2$，且 M 为 $S^4(1)$中的凡罗尼斯曲面. 西蒙斯不等式出现在他的文章"Minimal Varieties in Riemannian manifolds"中，该文对于广义伯恩施坦问题、极小子流形的拼挤问题和稳定性等都有很好的研究，是极小子流形理论中的一篇非常重要的文献.

极小子流形的指标(index of minimal submanifold) 测地线的指标在极小子流形上的推广. 设 M 为 N 中紧致带边极小流形，V,W 为 M 的法丛 $N(M)$中的截面，$V|_{\partial M}=W|_{\partial M}=0$，定义

$$I(V,W)=\int_M\langle -\Delta^{\perp}V+\overline{\mathrm{Ric}}(V) - B\circ B^t(V), W\rangle.$$

上式中的记号 $\Delta^{\perp}$，$\overline{\mathrm{Ric}}$，$B\circ B^t$ 见"第二变分公式". 从强椭圆算子的理论知，I 是在 ∂M 上为 0 的 $N(M)$中的截面上定义的对称双线性型，I 可以关于标准的内积极对角化，且有不同的实特征值$\{\lambda_i\}$满足

$$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_i<\cdots\to+\infty$$

且每一特征空间的维数是有限的. M 的指标记为 $\mathrm{Ind}(M)$，它是负特征值所对应的特征空间的维数之和；M 的零化数记为 $\mathrm{Null}(M)$，它是零特征空间的维数. 若 $N(M)$中的截面 V 满足

$$\Delta^{\perp}V=\mathrm{Ric}(V)-B\circ B^t(V),$$

则 V 称为 M 的雅可比场. 在 ∂M 上为 0 的雅可比场的空间是有限维的且为 I 的核，从而，此空间的维数为 M 的零化数. 设 C_t 为 M 到自身的收缩，特别地，假定 C_t $(t\geqslant 0)$为 M 到 M 内的光滑微分同胚族，使得：

1. C_0=恒等映射.
2. $C_t(M)\subset C_s(M)$，$t>s$.
3. $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{Vol}(C_t(M))=0$.

与测地线的莫尔斯指标定理类似地有：

$$\mathrm{Ind}(M)=\sum_{t>0}\mathrm{Null}(C_t(M)).$$

这就是极小子流形的莫尔斯指标定理.

极小子流形的零化数(nullity of minimal submanifold) 见"极小子流形的指标".

极小子流形的雅可比场(Jacobi field of minimal submanifold) 见"极小子流形的指标".

极小子流形的莫尔斯指标定理(Morse index theorem of minimal submanifold) 见"极小子流形的指标".

极小子流形的内蕴刚性(intrinsic rigidity of minimal submanifolds) 由极小子流形的内蕴曲率所描述的惟一性现象. 它是极小子流形理论中的一个重要研究方向. 设 M^n 为 N^m 的极小子流形，由 M^n 的度量所决定的量称为 M^n 的内蕴量. 譬如，截面曲率、里奇曲率、数量曲率等. 西蒙斯不等式及陈省身-杜卡莫-小林昭七的结果给出了球面上紧致极小子流形的第一个内蕴刚性定理，因为根据高斯方程，球面上极小子流形的第二基本形式的模长平方仅依赖于子流形的数量曲率. 江尻(Ejirt, N.)考虑了里奇曲率，得到如下结果：设 $M^n(n\geqslant 4)$是球面 S^{n+p}的紧致极小子流形，若 M^n 的里奇曲率处处不小于 $n-2$，则或者 M^n 是全测地的；或者 $n=2k$，$M^n=S^k\times S^k$ 作为 S^{n+1}的克里夫特超曲面；或者 $n=4$，$M^4=CP^2$ 极小浸入在 S^7 中. 丘成桐和伊滕分别考虑了截面曲率，他们的结果可综述如下：设 M^n 是球面 S^{n+p}的紧致极小子流形，若 M^n 的截面曲率处处大于

$$\min\left\{\frac{p-1}{2p-1},\frac{n}{2(n+1)}\right\},$$

则 M^n 必是全测地的. 这种对内蕴曲率施加限制的问题，常称为曲率拼挤问题. 中国学者对实和复空间形式中的极小子流形的曲率拼挤问题，作出了不少贡献.

极小子流形的外在刚性(extrinsic rigidity of minimal submanifolds) 由极小子流形的法空间的性态所决定的惟一性现象. 这方面最主要的是考虑极小子流形的高斯映射的像的测度. 藤本定理给出了 $\mathbb{R}^3$ 中完备极小曲面的一个最佳外在刚性结果. 对于球面上的极小超曲面，有下述结果：设 M^n 是 S^{n+1} 的闭极小超曲面，若 M^n 的高斯映射像落在 S^{n+1}的开半球面内，则 M^n 必是全测地的. 关于球面上高余维数的极小子流形，西蒙斯(Simons, J.)给出了推广. 设 M 是 S^m 的 n 维定向闭子流形，$N(p)$表示点 $p\in M$ 的 M 的 $m-n$ 维法空间. $N(p)$可平行移动过 S^m 的中心，从而在 $\mathbb{R}^{m+1}$中确定了过原点的一张定向的 $m-n$ 维平面，也即得到了格拉斯曼流形 $G_{m-n,m+1}$ 中的一点. 这也是一种高斯映射. 设 M^* 表示 M 在上述映射下的像. 于是，存在一个仅与 m 和 n 有关的常数 $C_{m,n}$，使得当 M^* 落在 $G_{m-n,m+1}$的 $C_{m,n}$球域内时，M 必是全测地的，从而 M 只能是一个单点. 这

个外在刚性定理中的常数 $C_{m,n}$后来被高勒丽(Colbrie,D. F.)做了改进. 丘成桐于 1975 年给出了 S^4 中闭极小曲面(同胚于 S^2)的最佳外在刚性结果.

极小曲面方程(minimal surface equation) 偏微分方程和微分几何中的一个非常重要的方程. 它是极小曲面所满足的微分方程. 设 $M^2=\{(x_1,x_2,f(x_1,x_2))\mid(x_1,x_2)\in D, D$ 为 R^2 中的一区域$\}$为 R^3 中的一极小曲面,由于 M^2 的平均曲率为零,所以有

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}}\right)=0.$$

此方程称为极小曲面方程. 一般地,设 $f:M^n\to\widetilde{M}^m$ 为一极小浸入,局部地由$(f^1,f^2,\cdots,f^m)$所给出. 换言之,相对于 M 中的坐标系$\{y^1,y^2,\cdots,y^n\}$及 $\widetilde{M}^m$ 中的坐标系$\{x^1,x^2,\cdots,x^m\}$,$f^\alpha\equiv x^\alpha\circ f$. 若

$$\sum_{i,j}g_{ij}\mathrm{d}y^i\mathrm{d}y^j \quad 及 \quad \sum_{\alpha,\beta}\widetilde{g}_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta$$

局部地为 M 及 $\widetilde{M}$ 上的度量,则

$$g_{ij}=\sum_{\alpha,\beta}\widetilde{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial f^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial y^j}.$$

因为 M 是极小的,所以对 M 中每一幺正基$\{e_i\}$,有

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma(e_i,e_i)=0,$$

或等价地

$$\sum_{i,j}g^{ij}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=0,$$

其中 σ 为 M 的第二基本形式. 将上式详细写出来,得

$$\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\frac{\partial^2 f^\beta}{\partial y^i\partial y^j}+\sum_{i,j,k,\sigma,\tau}g^{ij}\left(\frac{\partial f^\sigma}{\partial y^i}\frac{\partial f^\tau}{\partial y^j}\widetilde{\Gamma}^\beta_{\sigma\tau}-\frac{\partial f^\beta}{\partial y^k}\Gamma^k_{ij}\right)=0$$
$$(\beta=1,2,\cdots,m),$$

其中

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial y^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial y^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^l}\right),$$

$$\widetilde{\Gamma}^\beta_{\sigma\tau}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m}\widetilde{g}^{\beta\alpha}\left(\frac{\partial\widetilde{g}_{\alpha\sigma}}{\partial x^\tau}+\frac{\partial\widetilde{g}_{\alpha\tau}}{\partial x^\sigma}-\frac{\partial\widetilde{g}_{\sigma\tau}}{\partial x^\alpha}\right)$$

分别为 M 及 $\widetilde{M}$ 的联络系数. 这是一个拟线性的椭圆型方程组. 若 $f:M\to\widetilde{M}$ 是黎曼流形间的一个极小浸入,则函数$(f^1,f^2,\cdots,f^m)\equiv f$ 必适合上述方程组.

常平均曲率曲面(surfaces with constant mean curvature) 一类重要的子流形. 它是平均曲率为常数的 2 维黎曼子流形. 设 M 为黎曼流形 N 的 2 维子流形,σ 为 M 的第二基本形式,

$$H=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\sigma$$

为 M 的平均曲率向量,H 的长度$|H|$称为 M 的平均曲率. 若$|H|$为常数 ,称 M 为 N 的常平均曲率曲面. 3 维欧氏空间中的紧致单连通的常平均曲率曲面必为球面(参见“霍普夫猜想”).

具平行平均曲率的子流形(submanifolds with parallel mean curvature) 一类重要的子流形. 指平均曲率向量在法丛中平行的子流形. 设 M^n 为黎曼流形 N^m 的 n 维子流形,σ 为 M^n 的第二基本形式,

$$H=\frac{1}{n}\mathrm{tr}\sigma$$

为 M^n 的平均曲率向量,$\nabla^\perp$为 M^n 的法联络,若 M^n 的平均曲率向量平行,即$\nabla^\perp H=0$,则称 M^n 为具平行平均曲率的子流形. 当 M^n 为 N 的超曲面时,M^n 具平行平均曲率与 M^n 的平均曲率为常数是等价的. 具平行平均曲率的子流形的平均曲率为常数.

具常数量曲率的子流形(submanifolds with constant scalar curvature) 三维欧氏空间中高斯曲率为常数的曲面的推广. 指数量曲率为常数的子流形. 当 M 为空间流形中的极小子流形时,M 具有常数量曲率等价于 M 的第二基本形式模长平方为常数. 欧氏空间中闭的具常数量曲率的嵌入超曲面必为球面. $S^4(1)$中的数量曲率为常数的闭的定向极小浸入超曲面是等参的.

有限型子流形(submanifolds of finite type) 欧氏空间中其位置向量能够分解成有限个向量值特征函数之和的子流形. 设 $X:M^n\to\mathrm{R}^m$ 为 n 维连通黎曼流形 M 到欧氏空间的等距浸入,若 M 的位置向量 X 可以分解成下面的形式:

$$X=X_0+X_{i_1}+\cdots+X_{i_k},$$

其中 $\Delta X_{i_j}=\lambda_{i_j}X_{i_j}$, $\lambda_{i_1}<\lambda_{i_2}<\cdots<\lambda_{i_k}$, $j=1,2,\cdots,k\to+\infty$,X_0 为 R^m 的常向量(当 M 为紧致时,X_0 为 M 在 R^m 中的质量中心),Δ 为 M 上拉普拉斯算子对 M 上的 R^m 值光滑函数的自然扩充,则 M 称为 k 型子流形. 若 $k<+\infty$是有限的,则称 M 是有限型的. 对于实和复空间形式中的 1 型和 2 型子流形的分类,是目前颇感兴趣的问题.

正质量猜想(positive mass conjecture) 广义相对论中的一个著名猜想. 若孤立系统的局部质量密度非负,则总质量非负. 用相对论理论来讲,设 V_4 是具有符号为(+ + + −)的洛伦茨度量的时空,M_3 为 V_4 中的类空超曲面,假定 M_3 的黎曼度量在无穷远处是渐近平坦的,这时,在 M^3 的度量的系数中有称之为质量的部分. 正质量猜想是:该质量是非负的,而且当它等于零时,V_4 是平坦的. 丘成桐和孙理察(Schoen,R.)于 1979 年证明了这一猜想. 特别地,他们证明:若 3 维环面 T^3 的一个黎曼度量具有非负数量曲率,则它是平坦的. 这一结果蕴含着正质量猜想的一种特殊情形:R^3 上的一个具有非负数量曲率的黎曼度量,若在紧致集合之外是平坦的,则它

必为欧氏度量. 他们对正质量猜想的证明包括整体极小曲面的构造及其稳定性和在无穷远处的状态的研究. 这是极小曲面理论十分成功的应用之例.

迷向子流形(isotropic submanifold)　一类特殊的子流形. 设 M 为黎曼流形 $\widetilde{M}$ 的子流形, σ 为 M 的第二基本形式, UM 为 M 的单位切丛, 若对于任意的 $x\in M$, $|\sigma(u,u)|^2$ $(u\in UM_x)$ 在 UM_x 上为常数, 则称 M 为 $\widetilde{M}$ 的迷向子流形; 若 $|\sigma(u,u)|^2$ 在整个 UM 上为常数, 则称 M 为常迷向子流形.

常迷向子流形(constant isotropic submanifolds) 见"迷向子流形".

撰　稿　沈一兵　夏昌玉　盛为民
审　阅　许洪伟　潘养廉

调和映射与杨-米尔斯场

调和映射(harmonic map)　黎曼流形之间的一类十分重要的可微映射. 设 M 和 N 为黎曼流形, $f:M\to N$ 为光滑映射, 若 f 的张力场 $\tau(f)$ 恒为零, 则称 f 为调和映射. 由第一变分公式可知: 调和映射是能量泛函的临界点; 反之, 若 f 是能量泛函在每一个紧致区域 $D\subset M$ 上关于保持边界 ∂D 不动的变分的临界点, 则 f 必是调和映射. 另一方面, 若将 $\mathrm{d}f$ 看做 M 上取值于诱导丛 $f^{-1}TN$ 的 1 形式, 这里 TN 是 N 的切丛, 则可以证明: 当 f 为调和映射时, $\mathrm{d}f$ 为调和 1 形式; 且当 M 为紧致流形时, 其逆亦真. 因此, 调和映射与非线性调和 1 形式理论有密切关系. 调和映射有许多重要的特例, 因而具有广阔的背景. 例如:

1. 当 $N=\mathbf{R}$ 时, 调和映射就是 M 上的调和函数.

2. 当 $\dim M=1$ 时, 调和映射就是 N 中的测地线.

3. 当 f 为等距浸入时, f 是调和映射的充分必要条件为 f 是极小浸入.

4. 克勒流形间的全纯映射必为调和映射.

5. 具有双不变黎曼度量的李群间的连续同态必为调和映射.

调和映射理论的基本问题是它的存在性问题, 即, 给定黎曼流形 M 和 N 间的一个映射 $f:M\to N$, 在 f 的同伦类中是否存在调和映射 φ? 当 M 具有边界 ∂M 时, 还要求在 ∂M 上 $\varphi=f$. 调和映射的存在性依赖于 M 和 N 的拓扑和几何性质以及 f 所在的同伦类. 例如:

1. 若 M 和 N 是紧致黎曼流形且 N 的截曲率非正, 则在 M 到 N 的任何映射同伦类中都存在一个调和映射, 它的能量在该同伦类中为极小.

2. 设 M 是二维环面, N 是二维球面, 若 $\deg f=\pm1$, 则在 f 的同伦类中不存在调和映射.

调和映射方程 $\tau(f)=0$ 是一个半线性二阶椭圆型方程组, 对其整体解的存在性尚无一般理论可应用. 因此, 调和映射的存在性问题比较复杂, 需要根据不同的情形采用不同的方法来解决. 几种主要的方法为:

1. 利用热方程的热流法.
2. 利用莫尔斯理论的摄动法.
3. 利用正则性理论的变分学直接法.
4. 化为常微分方程的方法.
5. 利用全纯映射的 twistor 方法.

与存在性问题相辅相成的是非常值调和映射的不存在性问题. 这方面的结果与部分正则性定理相结合往往可以得到某种存在性定理.

作为几何变分问题的解, 调和映射的稳定性研究十分重要. 若一个调和映射的第二变分恒非负, 则称为稳定调和映射. 当 $n\geqslant3$ 时, 从欧氏球面 S^n 到任何黎曼流形的稳定调和映射必是常值映射; 另一方面, 从任何紧致黎曼流形到 $S^n(n\geqslant3)$ 的稳定调和映射也必是常值映射. 对稳定调和映射的存在性与不存在性的研究, 广而言之, 对调和映射的指标定理的研究是调和映射理论的一个重要方面. 调和映射可用来刻画黎曼流形的子流形的性质及构造. 这种结果往往是通过对子流形的各种高斯映射的研究而得到. 例如, $\mathbf{R}^n$ 中子流形具有平行平均曲率的充分必要条件是它的高斯映射为调和映射. 调和映射与全纯映射的关系是调和映射理论的又一个重要方面, 特别是复流形间的调和映射的全纯性的研究已成为构造全纯映射和解决很多重要数学问题的有力工具. 反过来, 通过 twistor 结构, 利用全纯映射来研究调和映射的构造和分类也已成为一种十分有效的方法. 近 40 年来, 调和映射理论得到了蓬勃的发展, 它与复几何、代数几何、非线性分析和数学物理等领域互相渗透, 正日益受到人们的重视, 并发挥着重要的作用.

能量泛函(energy functional)　映射的微分的模长平方的积分. 设 M 和 N 为黎曼流形, $f:M\to N$ 为光滑映射, f 的能量定义为

$$E(f)=\frac{1}{2}\int_M|\mathrm{d}f|^2*1,$$

式中 $\mathrm{d}f$ 为 f 的微分, $*1$ 是 M 的体积元, E 称为能量泛函,

$$e(f)=\frac{1}{2}|\mathrm{d}f|^2$$

称为能量密度. 若在局部坐标下, M 和 N 的度量张量分别表示为

$$g=\sum_{i,j}g_{ij}\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j,\quad h=\sum_{\alpha,\beta}h_{\alpha\beta}\mathrm{d}y^\alpha\otimes\mathrm{d}y^\beta,$$

f 表示为 $y^\alpha=f^\alpha(x^i)$, $\alpha=1,2,\cdots,\dim N$,则

$$e(f)=\frac{1}{2}\sum g^{ij}h_{\alpha\beta}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j},$$

式中(g^{ij})为(g_{ij})的逆阵. f 的能量可以是无限的,当 M 为紧致流形时,能量 $E(f)$一定是有限的. $e(f)$在区域 $D\subset M$ 上的积分也称为 f 在 D 上的能量.

能量密度(energy density) 见"能量泛函".

映射的第二基本形式(second fundamental form of a map) 由映射确定的重要微分形式. 设 M 和 N 为黎曼流形, $f:M\to N$ 为光滑映射. 记 $f^{-1}TN$为 f 决定的 M 上的诱导向量丛,它的诱导联络记为$\tilde\nabla$. 于是,映射 f 的第二基本形式 $\beta(f)$是向量丛 $T^*M\otimes T^*M\otimes f^{-1}TN$ 的一个截面,定义如下:

$$\beta(f)(X,Y)=\tilde\nabla_X\mathrm{d}f(Y)-\mathrm{d}f(\nabla_XY)\quad(\forall\, X,Y\in\Gamma(TM)),$$

式中 $\mathrm{d}f$ 是 f 的微分, ∇为 M 的黎曼联络. 若 M 和 N 在 f 下对应点的局部坐标分别为(x^i)和(y^α),则

$$\beta(f)\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\sum\left(\frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i\partial x^j}-\Gamma^l_{ij}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^l}+\bar\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}\frac{\partial f^\lambda}{\partial x^i}\frac{\partial f^\mu}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^\alpha},$$

式中 Γ^l_{ij}, $\bar\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}$分别是 M 和 N 的克氏符号,从而 $\beta(f)$关于 X 和 Y 是对称的,即 $\beta(f)(X,Y)=\beta(f)(Y,X)$. 第二基本形式也记为$\nabla\mathrm{d}f$. 当 f 是等距浸入时, $\beta(f)$即为子流形 M 在 N 中的第二基本形式.

映射的张力场(tension field of a map) 映射的第二基本形式的迹. 设 $f:M\to N$ 是黎曼流形 M 到 N 的光滑映射. f 的第二基本形式 $\beta(f)$关于 M 的度量张量的迹称为映射 f 的张力场,记为 $\tau(f)$. 它是诱导向量丛 $f^{-1}TN$ 的一个截面,即 $\tau(f)\in\Gamma(f^{-1}TN)$. 若$\{e_i\}$为 M 的一个局部幺正标架场,则

$$\tau(f)=\sum_i\beta(f)(e_i,e_i).$$

在局部坐标下, $\tau(f)$的表达式为

$$\tau(f)=\sum\left(\Delta_M f^\alpha+g^{ij}\bar\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^\alpha},$$

式中 Δ_M 是 M 上的拉普拉斯算子. 映射 f 为调和映射的充分必要条件是 $\tau(f)=0$.

第一变分公式(first variational formula) 计算能量泛函的一阶变分公式. 若 $f:M\to N$ 是光滑映射, $V\in\Gamma(f^{-1}TN)$是诱导向量丛 $f^{-1}TN$ 的一个截面, $f_t:M\to N$ $(-\varepsilon<t<\varepsilon)$是满足 $f_0=f$ 和

$$\left.\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|_{t=0}=V$$

的单参数光滑映射族,则当 V 具有紧致支集时,成立第一变分公式

$$\left.\frac{\mathrm{d}E(f_t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\int_M\langle V,\tau(f)\rangle_N*1,$$

式中 $\tau(f)$为 f 的张力场, $\langle\ ,\ \rangle$表示 N 的黎曼内积, $*1$ 为 M 的体积元. 这个公式表明 $\tau(f)=0$ 是能量泛函的欧拉-拉格朗日方程,而调和映射恰是能量泛函的临界点.

第二变分公式(second variational formula) 刻画能量泛函在临界点附近属性的重要公式. 若 $f:M\to N$ 是调和映射, $V\in\Gamma(f^{-1}TN)$是诱导向量丛 $f^{-1}TN$ 的一个具有紧致支集的截面. $f_t:M\to N$ $(-\varepsilon<t<\varepsilon)$是单参数光滑映射族且满足 $f_0=f$ 和

$$\left.\frac{\partial f_t}{\partial t}\right|_{t=0}=V,$$

则成立第二变分公式

$$I_f(V,V)=\left.\frac{\mathrm{d}^2E(f_t)}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0}$$

$$=\int_M\langle V,-\nabla^2V-\sum R^N(\mathrm{d}f(e_i),V)\mathrm{d}f(e_i)\rangle_N*1,$$

式中$\{e_i\}$是 M 上幺正标架场, R^N 是 N 上的黎曼曲率张量, $\nabla^2=\sum(\tilde\nabla_{e_i}\tilde\nabla_{e_i}-\tilde\nabla_{\nabla_{e_i}e_i})$是 $f^{-1}TN$ 丛上的迹拉普拉基算子. 若 $I_f(V,V)$恒非负,则称 f 为稳定调和映射.

稳定调和映射(stable harmonic mapping) 见"第二变分公式".

应力-能量张量(stress-energy tensor) 由映射确定的一个特殊张量. 若 $f:M\to N$ 是光滑映射, M 和 N 的黎曼度量张量分别为 g 和 h, f 的能量密度为 $e(f)$,则 $S_f=e(f)g-f^*h$ 称为 f 的应力-能量张量,它是 M 上的一个二阶对称张量场. 若 S_f 的散度 $\mathrm{div}\,S_f=0$,则称 f 满足守恒律. 由于成立 $\mathrm{div}\,S_f=-\langle\tau(f),\mathrm{d}f\rangle$,式中 $\tau(f)$是 f 的张力场, $\mathrm{d}f$ 是 f 的微分,所以调和映射必满足守恒律. 对向量丛值的 p 形式也可定义应力-能量张量.

向量丛值的外微分形式(exterior differential forms valued in a vector bundle) 流形上外微分形式的推广. 取值于向量丛的外微分形式. 若 $\xi\to M$ 是 M 上一个有限维向量丛,则向量丛 $\wedge^p(T^*M)$表示 M 的余切丛的 p 次外积丛, $\wedge^p(T^*M)\otimes\xi$ 的一个截面称为(M 上)一个向量丛 ξ 值的 p 次外微分形式,简称 ξ 值的 p 形式. 若 ω 是一个 ξ 值的 p 形式,即 $\omega\in\Gamma(\wedge^p(T^*M)\otimes\xi)$, $X_1,X_2,\cdots,X_p$ 是 M 上 p 个向量场,则 $\omega(X_1,X_2,\cdots,X_p)\in\Gamma(\xi)$. M 上 R 值的 p 形式就是普通的流形 M 上的 p 次外微分形式. 向量丛值的外微分形式在微分几何中使用很多. 例如,若 $f:M\to N$ 是光滑映射,则 f 的微分 $\mathrm{d}f$ 就可视为诱导向量丛 $f^{-1}TN$ 值的 1 形式,这里丛 $f^{-1}TN\to M$ 在 $x\in M$ 处的纤维是 $T_{f(x)}N$,对 $X\in T_xM$, $\mathrm{d}f(X)$就是 X 在 f 的切映射下的像. 再如,若 ξ 有联络时,联络的曲率算子可视为 $\mathrm{Hom}(\xi,\xi)$值的 2 形式. 当向量丛 ξ 具有黎曼内积及相容的联络时,对

ξ 值的外微分形式可定义其内积、外微分算子以及它的共轭算子，即余微分算子，并从而定义霍奇-拉普拉斯算子等.

外微分算子(exterior differential operator) 一种特殊的映射. 指向量丛值的 p 形式到 $(p+1)$ 形式的线性映射. 若 ω 为向量丛 ξ 值的 p 形式，ξ 的联络为 ∇，则可如下定义一个 ξ 值的 $(p+1)$ 形式 $d\omega$：$\forall\ X_1, X_2, \cdots, X_{p+1} \in \Gamma(TM)$，

$$d\omega(X_1, X_2, \cdots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}\nabla_{X_i}(\omega(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_{p+1})), + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_{p+1}),$$

式中符号“ ^ ”表示该项被略去，$d\omega$ 称为 ω 的外微分，算子 $d: \omega \to d\omega$ 称为外微分算子. 一般情形下，$d^2 \neq 0$. d^2 与 ξ 的曲率算子有关. 当底流形 M 具无挠联络时，外微分算子 d 还可用 $A^p(\xi)$ 上的诱导联络来表达，即

$$d\omega(X_1, X_2, \cdots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}(\nabla_X\omega)(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_{p+1}).$$

外微分(exterior differential) 见“外微分算子”.

余微分算子(codifferential operator) 外微分算子的共轭算子. 设 M 是黎曼流形，$\xi \to M$ 是黎曼向量丛，即 ξ 具有黎曼内积及相容的联络. 此时在 $A^p(\xi)$ 上有相应的诱导联络 ∇ 及逐点内积 $\langle\ ,\ \rangle$. 若 ω 为 ξ 值的 p 形式，则可如下定义一个 ξ 值的 $(p-1)$ 形式 $\delta\omega$：$\forall\ X_1, X_2, \cdots, X_{p-1} \in \Gamma(TM)$，

$$\delta\omega(X_1, X_2, \cdots, X_{p-1}) = -\sum_i(\nabla_{e_i}\omega)(e_i, X_1, X_2, \cdots, X_{p-1}),$$

式中 $\{e_i\}$ 是 M 的幺正标架基，$\delta\omega$ 称为 ω 的余微分，算子 $\delta: \omega \to \delta\omega$ 称为余微分算子. 当 M 为紧致无边流形或 $\alpha \in A^{p-1}(\xi)$，$\beta \in A^p(\xi)$ 具紧致支集时，成立

$$\int_M \langle d\alpha, \beta\rangle * 1 = \int_M \langle \alpha, \delta\beta\rangle * 1,$$

式中 $*1$ 为 M 的体积元，即 d 与 δ 互为共轭算子.

余微分(codifferential) 见“余微分算子”.

霍奇-拉普拉斯算子(Hodge-Laplace operator) 一种特殊的映射. 由 $\Delta = d\delta + \delta d$ 定义的算子 Δ：$A^p(\xi) \to A^P(\xi)$，式中 $A^p(\xi)$ 表示流形 M 上 ξ 值的 p 形式丛，d 和 δ 分别为外微分算子和余微分算子. 当底流形 M 为紧致无边流形时，Δ 为椭圆型自共轭算子，即成立，$\forall\ \alpha, \beta \in A^p(\xi)$，

$$\int_M \langle \Delta\alpha, \alpha\rangle * 1 \geqslant 0,$$

$$\int_M \langle \Delta\alpha, \beta\rangle * 1 = \int_M \langle \alpha, \Delta\beta\rangle * 1.$$

因此，$\ker\Delta$ 是有限维的，且有正交直和分解

$$A^P(\xi) = \Delta(A^p(\xi)) \oplus \ker\Delta.$$

调和形式(harmonic form) 一类最重要的向量丛值的外微分形式. 设 ω 是向量丛值的 p 形式，Δ 表示霍奇-拉普拉斯算子. 若 $\Delta\omega = 0$，则称 ω 为向量丛值的调和 p 形式. 换言之，当 $\omega \in \ker\Delta$ 时，称 ω 为调和形式. 当底流形 M 为紧致无边时，ω 为调和形式的充分必要条件是成立 $d\omega = 0$ 和 $\delta\omega = 0$. 设 $f: M \to N$ 为黎曼流形 M 到 N 的光滑映射. 视 f 的微分 df 为 M 上 $f^{-1}TN$ 值的 1 形式，直接计算可知 $d(df) = 0$ 和 $\tau(f) = -\delta(df)$，式中 $\tau(f)$ 为 f 的张力场. 于是，f 是调和映射等价于 df 是调和 1 形式. 类似地，在规范场理论中，联络为杨-米尔斯联络等价于其曲率形式是调和 2 形式.

魏春扑克公式(Weitzenböck formula) 霍奇-拉普拉斯算子的局部表示式. 它在博赫纳技巧中有重要的作用. 设 $\xi \to M$ 是黎曼流形 M 上的黎曼向量丛，R^ξ 和 R^M 分别表示 ξ 和 M 的曲率算子. 此时，ξ 值的 p 形式丛 $A^P(\xi)$ 有诱导联络 ∇，其曲率算子 R 定义如下：$\forall\ \sigma \in \Gamma(A^P(\xi))$，$X, Y, X_1, X_2, \cdots, X_p \in \Gamma(TM)$，

$$(R(X,Y)\sigma)(X_1, X_2, \cdots, X_p) = R^\xi(X,Y)(\sigma(X_1, X_2, \cdots, X_p)) - \sum_{i=1}^{p}\sigma(X_1, X_2, \cdots, R^M(X,Y)X_i, \cdots, X_p).$$

记 $S: \Gamma(A^P(\xi)) \to \Gamma(A^P(\xi))$ 为如下定义的算子：当 $p=0$ 时，规定 $S \equiv 0$；当 $p \geqslant 1$ 时，$\forall\ \sigma \in \Gamma(A^p(\xi))$，

$$S(\sigma)(X_1, X_2, \cdots, X_p) = \sum_{i=1}^{\dim M}\sum_{k=1}^{p}(-1)^k(R(e_i, X_k)\sigma)(e_i, X_1, X_2, \cdots, \hat{X}_k, \cdots, \cdots, X_p),$$

式中符号“ ^ ”表示该项略去，$\{e_i\}$ 是 M 的幺正标架场. 再以 ∇^2 表示迹拉普拉斯算子，即

$$\nabla^2\sigma = \sum_i(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\sigma - \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}\sigma),$$

则成立 $\forall\ \sigma \in \Gamma(A^p(\xi))$，

$$\Delta\sigma = -\nabla^2\sigma + S(\sigma),$$

称为魏春扑克公式.

复合公式(composition formula) 计算两映射的复合映射的公式. 设 $f: M \to N$ 和 $g: N \to W$ 为黎曼流形 M，N 和 W 之间的两个光滑映射. 直接计算复合映射 $g \circ f: M \to W$ 的第二基本形式和张力场可得复合公式：$\forall\ X, Y \in \Gamma(TM)$，

$$\beta(g \circ f)(X,Y) = dg(\beta(f)(X,Y)) + \beta(g)(df(X), df(Y)),$$

$$\tau(g \circ f) = dg(\tau(f)) + \sum_i\beta(g)(df(e_i), df(e_i)),$$

式中 $\{e_i\}$ 为 M 的幺正标架场. 由复合公式看出：全测

地映射的复合映射一定是全测地映射；若 f 是调和映射，g 是全测地映射，则 $g\circ f$ 是调和映射. 但调和映射的复合映射不一定再是调和映射. 复合公式反映了映射 f,g 和 $g\circ f$ 之间的联系，颇为重要.

全测地映射(totally geodesic map) 特殊的调和映射. 设 $f:M\to N$ 是黎曼流形 M 与 N 之间的映射，若 f 的第二基本形式 $\beta(f)$ 恒为零，即 $\beta(f)\equiv 0$，则称 f 为全测地映射. 此时，有 f 的张力场 $\tau(f)\equiv 0$，所以全测地映射必是调和映射. 当 f 又是等距映射时，M 就成为 N 的全测地子流形. 映射 f 是全测地映射的充分必要条件为 f 将 M 的测地线映为 N 的测地线. 由于测地线可由仿射联络定义，所以全测地映射的概念在具仿射联络的空间中即可定义.

能量极小映射(energy minimizing map) 一类特殊的映射. 指具有最小能量的映射. 设 $f:M\to N$ 是黎曼流形 M 和 N 间的光滑映射. 若对任何满足 $g|_{\partial M}=f|_{\partial M}$ 的光滑映射 $g:M\to N$ 都有 $E(f)\leqslant E(g)$，则称 f 为能量极小映射. 能量极小映射必是稳定调和映射. 但是，非常值映射 f 的同伦类中并不一定具有能量极小映射. 例如，当 $\pi_1(M)=0$，$\pi_2(N)=0$ 时，f 的同伦类中能量的下确界为零，从而能量极小映射必是常值映射. 若改变对 f 的光滑性要求，则可如下定义能量极小映射：将 N 光滑等距嵌入高维欧氏空间 R^k 中，用 $L_1^2(M,\mathsf{R}^k)$ 表示从 M 到 R^k 的分量函数具 L^2 意义下的一阶导数的映射全体构成的空间. 记

$$L_1^2(M,N)=\{u\in L_1^2(M,\mathsf{R}^k):u(x)\in N,\text{a. e. }x\in M\}.$$

若 $u\in L_1^2(M,N)$ 且对任何的 $w\in L_1^2(M,N)$，$u|_{\partial M}=w|_{\partial M}$ 都成立 $E(u)\leqslant E(w)$，则称 u 为能量极小映射. 此时，u 是能量泛函 E 的形式上的欧拉-拉格朗日方程 $\tau(u)=0$ 的弱解，u 不一定是光滑的；但是，若在 $x\in M$ 的一个邻域内 u 是连续的，则在该邻域内 u 是光滑的.

极小切映射(minimizing tangent map) 一类特殊的切映射. 设 R^k 表示 k 维欧氏空间，N 是黎曼流形. 若映射 $u:\mathsf{R}^k-\{0\}\to N$ 在每条从原点出发的射线上是常值，则称 u 为切映射；若切映射 u 在 R^k 的每个紧致集上又是能量极小的，则称 u 是极小切映射. 切映射 u 在单位球面 S^{k-1} 上的限制产生映射 $w:S^{k-1}\to N$；反之，对任一映射 $w:S^{k-1}\to N$，设

$$u(x)=w(x/|x|),\quad \forall\, x\in\mathsf{R}^k-\{0\},$$

就得到一个切映射 u. u 是调和映射当且仅当 w 是调和映射. 极小切映射在能量极小映射的光滑性研究中有重要作用.

乌伦贝格-舍恩定理(Uhlenbeck-Schoen theorem) 亦称部分正则性定理，描述调和映射正则性的重要定理. 设 M^n 和 N^k 分别为 n 维和 k 维的紧黎曼流形，M 可能有非空边界. $u\in L_1^2(M,N)$ 为能量极小映射. 若在 $x\in M^n$ 的某一邻域中 u 连续(从而必光滑)，则称 x 为 u 的正则点. u 的正则点全体在 M 的内部的补集称为 u 的奇点集，记为 S. 乌伦贝格-舍恩定理断言：若存在整数 $l\geqslant 3$ 使得对任何 $3\leqslant j\leqslant l$，极小切映射 $f:\mathsf{R}^j-\{0\}\to N^k$ 都是常值映射，则 S 的豪斯道夫维数不超过 $n-l-1$. 根据这个定理，由非常值的极小切映射的不存在性可推出能量极小映射的内部光滑性. 由此建立了调和映射的不存在性和存在性之间的一种密切联系.

部分正则性定理(partial regularity theorem) 即“乌伦贝格-舍恩定理”.

主纤维丛上的联络(connection on the principal bundle) 主纤维丛中邻近两点间的一种对应关系，借此可定义纤维中的一点沿底空间中的一条曲线的平行移动. 设 P 是一个以流形 M 为底空间、李群 G 为结构群的主纤维丛. P 上的一个联络 A 可局部地用一个取值于 G 的李代数中的 1 形式 $A=A_\alpha^i\mathrm{d}x^\alpha X_i$ 表出，其中 x^α 是流形 M 的局部坐标，X_i 是 G 的李代数的一组基. 重叠区域 $U_1\cap U_2$ 上的两个局部联络 1 形式 A_1 和 A_2 之间存在着关系式

$$A_2=g^{-1}A_1g+g^{-1}\mathrm{d}g,$$

其中 g 是重叠区域 $U_1\cap U_2$ 上的一个取值于 G 中的函数，称为规范变换.

联络的规范变换(gauge transformation of a connection) 见“主纤维丛上的联络”.

和乐群(holonomy group) 亦称完整群. 反映一联络与平坦联络之间差别的一个群. 在主纤维丛上给定一个联络后，可将纤维沿底空间 M 中的曲线平行移动. 设 γ 是一条以 $x\in M$ 为基点的闭环路，从 x 点出发沿 γ 绕行一周后，位于 x 处的纤维中的另一点 v'，一般地它不再是原来的 v，记 $v'=v\cdot g_\gamma$，其中 g_γ 是结构群 G 中的元素. 当 γ 取遍所有以 x 为基点的闭环路后，这些相应的元素 g_γ 的全体就构成了 G 的一个子群 H^*，称为主纤维丛上该联络的和乐群. 若 γ 限于以 x 为基点的同伦于零的闭环路，则相应的元素 g_γ 的全体就构成了 G 的另一个子群 H，称为该联络的齐次和乐群. 这两种和乐群与该联络的曲率有极密切的关系. 使和乐群为 G 中恒等元的联络即是平坦联络. 使齐次和乐群为 G 中恒等元的联络即是局部平坦联络. 伯热(Berger, M.)于 1955 年对黎曼流形的和乐群作出了详尽的分类.

完整群(holonomy group) 即“和乐群”.

联络的齐次和乐群(homogeneous holonomy group of connection) 见“和乐群”.

杨-米尔斯规范理论(Yang-Mills gauge theory) 一种关于主纤维丛上联络的理论. 杨振宁和

米尔斯(Mills,R.L.)于1954年提出的一种规范理论.它起源于电磁场理论,并已成功地用来描述弱电相互作用.人们正试图用它作为描述自然界各种相互作用统一理论的框架.从数学上看,设 P 是一个底空间为四维流形 M,结构群为紧致单纯李群 G 的主纤维丛.对 P 上的每一个联络,可算出该联络的曲率以及曲率模长的平方关于底流形 M 上的积分,并称此积分值为该联络的杨-米尔斯作用量.使杨-米尔斯作用量达到临界值的联络被称为杨-米尔斯联络.研究杨-米尔斯联络的存在性、有多少这样的联络以及这种联络的性质是杨-米尔斯规范理论的主要研究内容.杨-米尔斯规范理论对四维光滑流形的拓扑性质和分类的研究起了重要的作用.

杨-米尔斯作用量(Yang-Mills action) 一类特殊的泛函.对底空间为四维流形 M^4,结构群为紧致单纯李群 G 的主纤维丛 P 上的任一联络 A,有下列泛函

$$YM(A)=\int_{M^4}|F_A|^2*1,$$

其中 F_A 是联络 A 的曲率,$|F_A|^2$ 是曲率的模长平方,$*1$ 是 M^4 的体积元.$YM(A)$称为杨-米尔斯作用量,也称为杨-米尔斯泛函.

杨-米尔斯泛函(Yang-Mills functional) 即"杨-米尔斯作用量".

杨-米尔斯方程(Yang-Mills equation) 一个重要的微分方程.指杨-米尔斯作用量所确定的欧拉-拉格朗日方程.设 F_A 是联络 A 的曲率,δ_A 表示关于 A 的余微分算子,则杨-米尔斯方程可表示为

$$\delta_A F_A=0.$$

满足该微分方程的联络 A 称为杨-米尔斯联络,亦称杨-米尔斯场,又称杨-米尔斯势.

杨-米尔斯联络(Yang-Mills connection) 见"杨-米尔斯方程".

杨-米尔斯场(Yang-Mills field) 即"杨-米尔斯联络".

杨-米尔斯势(Yang-Mills potential) 即"杨-米尔斯联络".

自对偶联络(self-dual connection) 一种杨-米尔斯联络.它使杨-米尔斯作用量达到最小值.这种联络的曲率形式是一个自对偶的2形式.

反自对偶联络(anti-self-dual connection) 一种杨-米尔斯联络.它使杨-米尔斯作用量达到最小值.这种联络的曲率形式是一个反自对偶的2形式.

瞬子(instanton) 一种自对偶联络.它是底空间为四维球面 S^4,结构群为SU(2)的主纤维丛上的自对偶联络.

自对偶联络的模空间(moduli space of self-dual connection) 主纤维丛上自对偶联络全体所构成的集合.在此模空间上可配上适当的拓扑及微分结构,使它成为一个流形.研究该流形的拓扑及几何性质已成为杨-米尔斯理论的中心课题.唐纳森(Donaldson,S.)于1982年通过对自对偶联络的模空间的拓扑性质及几何性质的研究和分析,弄清了四维流形的许多拓扑及几何性质,为此他荣获了1986年的菲尔兹奖.

陈-西蒙斯规范理论(Chern-Simons gauge theory) 由陈省身和西蒙斯(Simons,J.)所提出的一种规范理论.它是关于在三维底流形的主纤维丛上联络的理论.这种理论对三维流形和扭结的拓扑性质的研究起了十分重要的作用.

撰 稿 沈纯理 潘养廉

审 阅 东瑜昕 沈一兵 陈维桓 蔡开仁

其他类型的几何结构

芬斯勒流形(Finsler manifold) 亦称芬斯勒空间,一种比黎曼流形更广泛的度量空间.设$(x^1,x^2,\cdots,x^n)$是微分流形 F_n 的一个坐标系,$C:x^i=x^i(t)(i=1,2,\cdots,n)$是一条曲线,定义它的弧长为

$$s=\int_{t_0}^{t}F(x^1(t),x^2(t),\cdots,x^n(t),\dot{x}^1,\dot{x}^2,\cdots,\dot{x}^n)\mathrm{d}t,$$

其中 $\dot{x}^i(t)=\dfrac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}$, $F(x^1,x^2,\cdots,x^n,\dot{x}^1,\dot{x}^2,\cdots,\dot{x}^n)$ 是芬斯勒度量函数.这样的微分流形 F_n 称为芬斯勒流形.$F(x^1,x^2,\cdots,x^n,\mathrm{d}x^1,\mathrm{d}x^2,\cdots,\mathrm{d}x^n)^2$ 是黎曼度量

$$\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(x^1,x^2,\cdots,x^n)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

的推广.像黎曼流形一样,芬斯勒流形的两点之间的距离定义为连接这两点的曲线弧长的下确界.关于这个距离,芬斯勒流形是度量空间,度量拓扑和原来微分流形拓扑一致.黎曼流形作为度量空间的许多性质可以推广到芬斯勒空间.黎曼(Riemann,G.F.B.)曾经考虑过以这样一般化的度量为基础讨论流形,但是他认为用黎曼度量更为适当.芬斯勒(Finsler,P.)于1918年在学位论文中系统地研究了这种推广的度量,把经典的曲线和曲面论中许多概念和定理推广过来.嘉当(Cartan,E.)于1933年引进联络并得到许多重要结论才使芬斯勒流形几何理论逐渐完整.陈省身于1990年发现了一个新联络,使芬斯勒几何的发展推向一个新阶段,尤其是成功地开展了整体芬斯勒几何的研究.芬斯勒空间 F_n 是对线素$(x^1,x^2,\cdots,x^n;\dot{x}^1,\dot{x}^2,\cdots,\dot{x}^n)$赋予度量的一种微分流形.作为对偶的概念有嘉当空间,它对超平面素赋予度量.进一步的推广还有道路空间和 K 展空间

等,统称为一般空间. 芬斯勒流形几何理论在广义相对论和其他物理学领域中有许多应用. 近年来无限维芬斯勒流形在非线性分析中有重要作用.

芬斯勒度量函数(Finsler metric function) 见"芬斯勒流形".

芬斯勒度量(Finsler metric) 黎曼度量的一种推广. 若 F_n 是 n 维微分流形, TF_n 是 F_n 的切丛, F_n 上的芬斯勒度量是定义在切丛 TF_n 上满足下列条件的连续的实值函数 F: 设 $(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 是 F_n 上局部坐标系, $(x^1,x^2,\cdots,x^n;y^1,y^2,\cdots,y^n)$ 是 TF_n 的点 (x,y) 的局部坐标, 其中 $(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 是 F_n 的点 x 的局部坐标, $(y^1,y^2,\cdots,y^n)$ 是 F_n 在 x 的切向量 y 的分量, 即

$$y=\sum_{j=1}^{n}y^j\frac{\partial}{\partial x^j},$$

则:

1. 在 $y\neq 0$, $F(x,y)$ 可微.
2. 对任意实数 λ, $F(x,\lambda y)=|\lambda|F(x,y)$.
3. 以

$$g_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(x,y)^2}{\partial y^i\partial y^j}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

为元素的矩阵是正定的.

此时, F_n 称为芬斯勒空间, 函数 F 也称为芬斯勒空间 F_n 的度量函数. 以 g_{ij} 为分量的张量称为 F_n 的度量张量或基本张量, $F(x,y)^2$ 称为基本形式. 当 $F(x,y)^2$ 是 $y^1,y^2,\cdots,y^n$ 的二次齐式时,

$$F(x,y)^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(x)y^iy^j,$$

这个芬斯勒度量是黎曼度量. 微分流形上存在芬斯勒度量的充分必要条件是它为仿紧的.

芬斯勒空间(Finsler space) 见"芬斯勒度量".

芬斯勒度量张量(Finsler metric tensor) 见"芬斯勒度量".

嘉当联络(Cartan connection) 一种度量联络. 它是嘉当(Cartan, E.)在芬斯勒空间上引进的, 是黎曼联络在芬斯勒空间的一种推广. 在 n 维芬斯勒空间 F_n 中, 嘉当考虑由点 $(x^1,x^2,\cdots,x^n;\dot{x}^1,\dot{x}^2,\cdots,\dot{x}^n)$ 构成的 $2n-1$ 维流形 M_{2n-1} 的欧氏联络(其中 $\dot{x}^1,\dot{x}^2,\cdots,\dot{x}^n$ 看做齐次坐标). 相对于 F_n 的度量函数 $F(x^1,x^2,\cdots,x^n;\dot{x}^1,\dot{x}^2,\cdots,\dot{x}^n)$ 和度量张量

$$g_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2F^2}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^j},$$

嘉当联络有两组联络系数 C^i_{jk} 和 Γ^i_{jk}(都是 $x^1,x^2,\cdots,x^n;\dot{x}^1,\dot{x}^2,\cdots,\dot{x}^n$ 的函数, $i,j,k=1,2,\cdots,n$). 任意向量场

$$X=\sum_{i=1}^{n}X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

的共变微分

$$DX^i=dx^i+\sum_{j,k=1}^{n}C^i_{jk}X^jd\dot{x}^k+\sum_{j,k=1}^{n}\Gamma^i_{jk}X^jdx^k$$
$$(i=1,2,\cdots,n).$$

关于嘉当联络, 度量张量 g_{ij} 的共变微分为零, 因此, 平行移动时向量的长度保持不变.

贝尔瓦尔德联络(Berwald connection) 仿射联络的一种推广. 它是贝尔瓦尔德(Berwald, L.)在芬斯勒空间中定义的联络, 在 n 维芬斯勒空间 F_n 的局部坐标系 $(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 下, 相对于 F_n 的度量张量 $g_{ij}(x,\dot{x})$, 贝尔瓦尔德联络的联络系数

$$G^i_{jk}=\frac{\partial G^i}{\partial\dot{x}^j\partial\dot{x}^k},$$

其中

$$G^i=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\gamma^i_{jk}\dot{x}^jx\dot{x}^k,$$

$$\gamma^i_{jk}=\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n}g^{ih}\left(\frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h}\right),$$

g^{ih} 是 g_{ij} 的反变分量. 贝尔瓦尔德联络和嘉当联络有如下关系:

$$G^i_{jk}=\Gamma^{*i}_{jk}+\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial\Gamma^{*i}_{jh}}{\partial x^k}\dot{x}^h,$$

其中

$$\Gamma^{*i}_{jk}=\Gamma^i_{jk}-\sum_{h=1}^{n}C^i_{jh}\frac{\partial G^h}{\partial\dot{x}^k},$$

Γ^i_{jk} 和 C^i_{jk} 是嘉当联络的联络系数. 芬斯勒空间中贝尔瓦尔德联络对应的平行移动一般不保持向量的长度.

道路(path) 黎曼流形的测地线在芬斯勒空间的推广. 在 n 维芬斯勒空间 F_n 的局部坐标系 $(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 下, 道路是满足微分方程

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+2H^i(x,\dot{x})=0$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

的曲线 $x^i=x^i(t)\,(i=1,2,\cdots,n)$, 其中 $H^i(x,\dot{x})$ 是 F_n 的线素 $(x,\dot{x})=(x^1,x^2,\cdots,x^n;\dot{x}^1,\dot{x}^2,\cdots,\dot{x}^n)$ 的给定函数. 不考虑芬斯勒度量时, 赋予这种道路的微分流形 F_n 称为一般的道路空间, 这是道格拉斯(Douglas, J.)于1928年引进的概念. 若相对于 F_n 的芬斯勒度量函数 $F(x,\dot{x})$, 函数 $H^i=G^i(x,\dot{x})$, 则道路微分方程为

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\sum_{j,k=1}^{n}\gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k=0\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

当 $t=s$(弧长)时, 道路为测地线, 它是芬斯勒空间 F_n 的弧长变分问题的极值曲线.

道路空间(path space) 见"道路".

芬斯勒空间的挠率(Torsion of the Finsler space) 非对称联络的挠率在芬斯勒几何学的推广. 考虑芬斯勒空间 F_n 的无穷小平行四边形,设 $\overline{PP_1}$ 和 $\overline{PP_2}$ 是两邻边(既看做曲线又看做向量),将 $\overline{PP_1}$ 沿 $\overline{PP_2}$ 从 P 平行移动(关于嘉当联络)到 P_2 得到 $\overline{P_2P_3}$,将 $\overline{PP_2}$ 沿 $\overline{PP_1}$ 从 P 平行移动到 P_1 得到 $\overline{P_1P'_3}$(P'_3 和 P_3 一般不重合)和 $\overline{P'_3P_3}$ 产生 F_n 的挠率. 在局部坐标系 $(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 下,挠率张量的分量

$$A_{ijk}=\frac{1}{4}(x,\dot{x})\frac{\partial^3 F(x,\dot{x})}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^j\partial\dot{x}^k},$$

$$A^i_{kh}=\sum_{j=1}^{n}g^{ij}A_{kjh}=F(x,\dot{x})C^i_{kh},$$

其中 F 是 F_n 的度量函数,g^{ij} 是度量张量 g_{ij} 的反变分量.

芬斯勒空间的曲率(curvature of the Finsler space) 一种曲率,它与黎曼流形的曲率类似. 在芬斯勒空间 F_n 的一点 P 的向量 X 沿无穷小回路平行移动回到 P 时得到向量 X',X 到 X' 的旋转产生 F_n 在 P 的曲率. 按照这条无穷小回路的类型,相对于嘉当联络,芬斯勒空间 F_n 有三个曲率张量 S^i_{jkl},P^i_{jkl} 和 R^i_{jkl}. 芬斯勒几何学的曲率论比黎曼几何学的曲率论复杂得多. 最近,陈省身等人给出了一种新的联络和曲率,简化了芬斯勒几何的局部理论,开展了芬斯勒几何的整体性质研究.

仿射微分几何(affine differential geometry) 微分几何的一个近代分支. 它是由以布拉施克(Blaschke, W. J. E.)为首的汉堡学派根据克莱因(Klein,(C.)F.)的几何分类思想,于 20 世纪 20 年代初创立的. 它主要研究仿射空间中曲线和曲面在等积仿射变换(行列式为 1 的仿射变换)群下的不变性质. 由于等积仿射变换群比刚体运动群大得多,要得到满意的理论,必须对曲面加上一些限制,最自然的限制是曲面为非退化的,即它的第二基本形式的系数行列式不为零. 利用非退化性,可以在曲面上定义一个仿射不变的伪黎曼度量和一个仿射不变的横截向量场,分别称为曲面的布拉施克度量和仿射法向量场. 这样就可以仿照欧氏曲面论,发展一套仿射不变的曲面论. 中国数学家苏步青于 20 世纪 20 年代后期,用他自己的独特方法,在仿射曲面的几何结构、仿射柱面和仿射旋转面的引进、仿射曲面论与射影曲面论间的关系等方面取得了丰硕成果,对仿射微分几何做出了重要的贡献.

最近 30 年来,在高维和整体性的研究方面进展很大,研究主要集中于局部严格凸的仿射球和仿射极大曲面. 特别值得注目的是,完成了关于布拉施克度量完备的局部严格凸仿射球的整体分类. 仿射球的研究,自然地引导到蒙日-安培方程. 这个重要的非线性偏微分方程因此有了几何的意义,对于它的研究便有很大帮助. 在这方面作出重要贡献的有卡拉比(Calabi, E.)、丘成桐、郑绍远、波戈列洛夫(Погорелов, A. B.)等. 仿射极大曲面因其基本方程是四阶非线性偏微分方程,产生了严重困难,仿射伯恩施坦问题至今没有完全解决.

布拉施克度量(Blaschke metric) 仿射空间中超曲面上的仿射不变的黎曼度量. 设 M 是 $n+1$ 维仿射空间中的超曲面,x 是位置向量,$(u^1,u^2,\cdots,u^n)$ 是局部坐标. 若

$$h_{ij}=\det\left[\frac{\partial x}{\partial u^1},\frac{\partial x}{\partial u^2},\cdots,\frac{\partial x}{\partial u^n},\frac{\partial^2 x}{\partial u^i\partial u^j}\right].$$

当 $\det(h_{ij})\neq 0$ 时,则称 M 非退化. 此时,若记

$$g_{ij}=|\det(h_{kl})|^{\frac{-1}{n+2}}h_{ij},$$

则

$$G=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$$

在 M 上定义了一个仿射不变的伪黎曼度量,称为布拉施克度量. 当 M 局部严格凸时,可选择 M 的定向,使布拉施克度量正定.

非退化超曲面(non-degenerate hypersurface) 见"布拉施克度量".

仿射法线(affine normal line) 欧氏空间中曲面法线的推广. 与仿射空间中的超曲面横截相交的直线,它是欧氏曲面论中法线的仿射类似. 若 M 是 $n+1$ 维仿射空间 A^{n+1} 中的非退化超曲面,x 是位置向量,Δ 是关于布拉施克度量的拉普拉斯算子,则 $Y=\Delta x/n$ 是 M 上仿射不变的横截向量场,称为 M 的仿射法向量场. 过 M 的点 x 且平行于 $Y(x)$ 的直线,称为 M 在点 x 的仿射法线. 当 M 严格凸时,仿射法线有下述几何意义:用 T_xM 表示 M 在点 x 的切超平面,A^{n+1} 中平行于 T_xM 的超平面 π 与 M 的交线界定 π 上一个凸域 Ω,当 π 平行移动时,Ω 的重心描出一条从 x 出发的曲线,这条曲线在点 x 的切线,就是 M 在点 x 的仿射法线.

仿射法向量场(affine normal vector field) 见"仿射法线".

富比尼-皮克形式(Fubini-Pick form) 仿射超曲面上一个仿射不变的三次微分式. 设 M 是 $n+1$ 维仿射空间 A^{n+1} 中的非退化超曲面,$(u^1,u^2,\cdots,u^n)$ 是局部坐标. M 上可以定义两个联络:一个为 A^{n+1} 的联络通过仿射法线在 M 上的诱导联络,用 Γ^k_{ij} 表其联络系数;另一个是 M 上布拉施克度量的列维-齐维塔联络,用 $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ 表其联络系数. 若

$$A_{ijk}=\sum_{l=1}^{n}g_{il}(\Gamma^l_{jk}-\widetilde{\Gamma}^l_{jk}),$$

则 A_{ijk} 定义了 M 上的一个三阶对称协变张量场. 三

次微分式

$$A = \sum_{i,j,k=1}^{n} A_{ijk} \mathrm{d}u^i \mathrm{d}u^j \mathrm{d}u^k$$

称为富比尼-皮克形式. A 和布拉施克度量

$$G = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \mathrm{d}u^i \mathrm{d}u^j$$

满足下面的所谓反极关系：

$$\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} A_{ijk} = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,n),$$

式中(g^{ji})为(g_{ij})的逆矩阵.

仿射主曲率(affine principal curvature)　刻画仿射空间中超曲面弯曲程度的不变量. 它是欧氏曲面论中主曲率的仿射类似. 设 M 是 $n+1$ 维仿射空间中的局部严格凸的超曲面，x 是位置向量，$(u^1, u^2, \cdots, u^n)$是局部坐标，Y 是仿射法向量场. Y 关于 u^i 的偏微商可由

$$\frac{\partial x}{\partial u^1}, \frac{\partial x}{\partial u^2}, \cdots, \frac{\partial x}{\partial u^n}$$

线性表出：

$$\frac{\partial Y}{\partial u^i} = -\sum_{j=1}^{n} B_i^j \frac{\partial x}{\partial u^j} \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

系数矩阵(B_i^j)在 M 每点的切空间中定义了一个自伴线性变换，称为仿射外恩加滕变换，它的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 称为 M 的仿射主曲率. 仿射主曲率的初等对称函数

$$L_r = \frac{1}{\binom{r}{n}} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_r} \quad (r = 1,2,\cdots,n)$$

称为 M 的第 r 阶仿射平均曲率. L_1 称为 M 的仿射平均曲率.

仿射外恩加滕变换(affine Weigarten transformation)　见“仿射主曲率”.

仿射平均曲率(affine mean curvature)　见“仿射主曲率”.

仿射微分几何基本定理(fundamental theorem of affine differential geometry)　关于仿射空间中的超曲面完全由布拉施克度量和富比尼-皮克形式确定的定理. 设在一个 n 维单连通可微流形 M 上给定了黎曼度量 G 和一个三阶对称协变张量场 A，若它们满足一组所谓可积性条件，则存在一个从 M 到 $n+1$ 维仿射空间 A^{n+1}的局部严格凸浸入 x，使 G 和 A 分别为 $x(M)$的布拉施克度量和富比尼-皮克形式，并且除了一个等积仿射变换外，浸入是惟一的.

仿射球面(affine hypersurface)　一个重要的超曲面. 指仿射空间中仿射法线交于一点或互相平行非退化的超曲面. 一个局部严格凸的仿射球称为虚的或抛物型的仿射球面，若它的仿射法线互相平行. 它称为一个真仿射球面，若它的仿射法线交于一点，称交点为它的仿射中心. 真仿射球又依仿射中心位于曲面凹的一侧或凸的一侧，分别称为椭圆型的或双曲型的仿射球面. 三维仿射空间 A^3 中的椭球面、双叶双曲面和椭圆抛物面分别是椭圆型、双曲型和抛物型仿射球面的例子. 设$(x^1, x^2, \cdots, x^{n+1})$是 $n+1$ 维仿射空间 A^{n+1}中的坐标，A^{n+1}中的局部严格凸超曲面，局部上可表示为

$$x^{n+1} = f(x^1, x^2, \cdots, x^n),$$

其中 f 是由定义在 A^n 中某个开集上的严格凸的可微函数. M 是抛物型仿射球面的充分必要条件为 f 满足以下蒙日-安培方程

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) = 1; \qquad (*)$$

M 是椭圆型或双曲型仿射球面的充分必要条件为 f 的勒让德变换函数

$$u(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} - f,$$

$$\xi_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

满足

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right) = (L_1 u)^{-n-2},$$

其中 L_1 为仿射平均曲率，它为常数. 欧氏曲面论中法线交于一点或互相平行的曲面中有球面和平面两种，而仿射球面则广泛得多. 因此，对仿射球面的分类是基本的、重要的. 关于布拉施克度量完备的局部严格凸仿射球面的整体分类始于布拉施克(Blaschke, W. J. E.)，他于 1923 年证明：一个紧致无边的 2 维球面一定是椭球面. 后来，戴克(Deicke, A.)于 1953 年把这个结果推广到了高维. 因为完备的椭圆型仿射球面一定是紧致无边的，他们实际上完成了对完备椭圆型仿射球面的分类. 对完备抛物型仿射球面的分类是卡拉比(Calabi, E.)完成的，他于 1958 年证明：一个完备的抛物型仿射球面一定是椭圆抛物面. 完备的双曲型仿射球面是迷人的，它不必是二次超曲面，例如，由 $x^1 x^2 \cdots x^{n+1} = 1$ 确定的超曲面，卡拉比曾构造出许多别的例子，并于 1971 年提出猜测：A^{n+1}中每个完备的双曲型仿射球面渐近于 A^{n+1}中某个凸锥的边界；反之，任给一个负常数和 A^{n+1}中一个非退化的凸锥，A^{n+1}中有惟一一个完备的双曲型仿射球面渐近于所给凸锥的边界，并以所给常数为仿射平均曲率. 这个猜测，经过卡拉比、丘成桐、郑绍远、佐佐木(Sasaki, T.)等数学家的努力，直到 1990 年才被李安民彻底解决，从而完成了完备局部严格凸仿射球面的整体分类. 关于布拉施克度量为常截面曲率的仿射球面的局部分类于 1990 年由弗航肯(Vrancken, L.)、李安民、西蒙(Simon, U.)完成. 这类仿射球面局部地为椭球面(正

截面曲率)、双曲面(负截面曲率)、椭圆抛物面和由$x^1x^2\cdots x^n=1$定义的超曲面(零截面曲率). 对仿射球面的研究,自然地引出以下方程问题:蒙日-安培方程(*)的定义在整个A^n上的凸解f是二次多项式吗?或等价地,f的图是椭圆抛物面吗?答案是肯定的. $n=2$是约根斯(Jörgens,K.)于1954年证明的;$n\leqslant 5$是卡拉比于1958年证明的;任意的n是波戈列洛夫(Погорелов,А.В.)于1972年证明的.

伪仿射球面(pseudo-affine hypersphere) 见"仿射球面".

真仿射球面(proper affine hypersphere) 见"仿射球面".

抛物型仿射球面(affine hypersphere of parabolic type) 见"仿射球面".

椭圆型仿射球面(affine hypersphere of elliptic type) 见"仿射球面".

双曲型仿射球面(affine hypersphere of hyperbolic type) 见"仿射球面".

蒙日-安培方程(Monge-Ampère equation) 见"仿射球面".

仿射极大曲面(affine maximal hypersurface) 欧氏曲面论中极小曲面的推广. 早期称仿射极小曲面,后因发现其第二变分在许多重要情形为负而改称现名. 仿射不变面积变分的极值曲面,亦即仿射平均曲率为零的曲面. $n+1$维仿射空间A^{n+1}中的局部严格凸超曲面,局部上可表示为某个凸函数$x^{n+1}=f(x^1,x^2,\cdots,x^n)$的图. 它是仿射极大曲面的充分必要条件为

$$\Delta\left\{\left[\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)\right]^{-\frac{1}{n+2}}\right\}=0,$$

其中Δ为布拉施克度量的拉普拉斯算子. 椭圆抛物面是仿射极大曲面的重要例子. 类似于欧氏曲面论的伯恩施坦问题,陈省身于1971年提出以下猜测:定义在整个A^2上的严格凸函数,若它的图是仿射极大曲面,则它是二次多项式. 局部的仿射曲面的例子很多,但关于布拉施克度量完备的仿射极大曲面,已知的例子只有椭圆抛物面. 卡拉比(Calabi,E.)于1986年提出了下面的问题:关于布拉施克度量完备的仿射极大曲面一定是椭圆抛物面吗?陈省身的猜测和卡拉比的问题都称为仿射伯恩施坦问题. 这个问题最近被塔丁格(Trudinger,N.S.)和汪锡加共同解决.

切触流形(contact manifold) 一类特殊的微分流形. 若$2n+1$维微分流形M容许满足$\eta\wedge(\mathrm{d}\eta)^n\neq 0$的1形式$\eta$,式中$\mathrm{d}\eta$是$\eta$的外微分,$\wedge$表示外乘法,则$M$称为具有切触形式$\eta$的切触流形. 切触流形的切丛的结构群可简化为$\mathrm{U}(n)\times 1$,这里$\mathrm{U}(n)$是酉群. 因此,每个切触流形是可定向的. 欧氏空间$\mathbb{R}^{2n+2}$中的单位球面S^{2n+1}和$n+1$维黎曼流形的切球丛是简单的典型例子,二者都具有自然的切触形式. 每个3维紧的可定向微分流形均为切触流形.

殆切触流形(almost contact manifold) 切触流形的推广. 若$2n+1$维微分流形M允许一个1形式η,一个向量场ξ,以及一个(1,1)型张量场φ使得

$$\varphi_\alpha^\lambda\varphi_\lambda^\beta=-\delta_\alpha^\beta+\eta_\alpha\xi^\beta,\quad \eta_\lambda\xi^\lambda=1,\qquad (*)$$

则M就称为殆切触流形. 组(φ,ξ,η)则称为殆切触结构. (*)式蕴含着$\varphi_\alpha^\lambda\xi^\alpha=0,\varphi_\alpha^\lambda\eta_\lambda=0$. 殆切触流形的切丛的结构群可简化为$\mathrm{U}(n)\times 1$. 事实上,格雷(Gary,J.W.)曾将该性质作为殆切触结构的定义. 对于具有结构为(φ,ξ,η)的切触流形M,必能求得一个正定黎曼度量g使得$\eta_\lambda=g_{\lambda\mu}\xi^\mu$, $g_{\alpha\beta}\varphi_\lambda^\alpha\varphi_\mu^\beta=g_{\lambda\mu}-\eta_\lambda\eta_\mu$. 度量$g$与$\varphi,\xi,\eta$一起组成了$M$的殆切触黎曼结构,$M$则称为殆切触黎曼流形.

殆切触结构(almost contact structure) 见"殆切触流形".

殆切触黎曼流形(almost contact Rimannian manifolds) 见"殆切触流形".

佐佐木流形(Sasakian manifold) 一类特殊的殆切触黎曼流形. 在殆切触黎曼流形M中,若成立

$$\nabla_\lambda\xi^\mu=\varphi_\lambda^\mu,\quad \nabla_\mu\varphi_{\lambda\gamma}=\eta_\lambda g_{\mu\gamma}-\eta_\gamma g_{\mu\lambda}\ (\varphi_{\lambda\gamma}=g_{\lambda\mu}\varphi_\gamma^\mu),$$

则称M为佐佐木流形或正规切触黎曼流形. 式中算子∇表示关于度量g的协变微分. 另外,它的曲率张量由下式给定:

$$\begin{aligned}R_{\lambda\mu\gamma\sigma}=&(k+1)(g_{\mu\gamma}g_{\lambda\sigma}-g_{\lambda\gamma}g_{\mu\sigma})\\&+k(\varphi_{\mu\gamma}\varphi_{\lambda\sigma}-\varphi_{\lambda\gamma}\varphi_{\mu\sigma}-2\varphi_{\lambda\mu}\varphi_{\gamma\sigma}\\&+g_{\mu\sigma}\eta_\lambda\eta_\gamma+g_{\lambda\gamma}\eta_\mu\eta_\sigma-g_{\lambda\sigma}\eta_\mu\eta_\gamma-g_{\mu\gamma}\eta_\lambda\eta_\sigma),\end{aligned}$$

其中k是常数. 当$k=0$时,M成为常截曲率是1的空间.

正规切触黎曼流形(normal contact Rimannian manifolds) 即"佐佐木流形".

正规仿切触黎曼流形(normal paracontact Riemannian manifold) 一类特殊的殆仿切触流形. 在一个殆仿切触黎曼流形M中,若成立

$$2\varphi_{\lambda\mu}=\nabla_\lambda\eta_\mu+\nabla_\mu\eta_\lambda\quad(\varphi_{\lambda\mu}=g_{\lambda\gamma}\varphi_\mu^\gamma),\qquad(1)$$

则M称为仿切触黎曼流形. 若它又满足

$$\nabla_\lambda\eta_\mu-\nabla_\mu\eta_\lambda=0,\qquad(2)$$

$$\begin{aligned}\nabla_\gamma\nabla_\mu\eta_\lambda=&(-g_{\gamma\lambda}+\eta_\gamma\eta_\lambda)\eta_\mu\\&+(-g_{\gamma\mu}+\eta_\gamma\eta_\mu)\eta_\lambda,\end{aligned}\qquad(3)$$

则该M便称为正规仿切触黎曼流形,或称为具有结构(φ,ξ,η,g)的P佐佐木流形. 这一概念实际上来源于类似的概念——正规切触黎曼流形,因为在(1),(2),(3)下殆仿切触黎曼流形的挠率张量

$$\begin{aligned}N_{\beta\alpha}^\gamma=&\Phi_{\nabla_\lambda}^\lambda\varphi_\alpha^\gamma-\varphi_\alpha^\lambda\nabla_\lambda\varphi_\beta^\gamma\\&-(\nabla_\beta\varphi_\alpha^\lambda-\nabla_\alpha\varphi_\beta^\lambda)\varphi_\lambda^\gamma-(\nabla_\beta\eta_\alpha-\nabla_\alpha\eta_\beta)\xi^\gamma\end{aligned}$$

消失. 另外,(1)和(2)意味着 $\varphi_{\lambda\mu}=\nabla_\lambda\eta_\mu=\nabla_\mu\eta_\lambda$. 因此,一个殆仿切触黎曼流形只要满足该式和条件(3)便成为一个P佐佐木流形. 这一事实常视为P佐佐木流形的定义而作为研究相关问题的出发点. 特别地,$\varphi_{\lambda\mu}=\nabla_\lambda\eta_\mu=\pm(-g_{\lambda\mu}+\eta_\lambda\eta_\mu)$时,一个佐佐木流形称为SP佐佐木流形. 在P佐佐木流形中,曲率张量和结构向量满足关系式:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\sigma}\eta_\alpha=g_{\beta\sigma}\eta_\gamma-g_{\beta\gamma}\eta_\sigma.$$

P佐佐木流形(P sasakian manifold)　见"正规仿切触黎曼流形".

SP佐佐木流形(SP sakian manifold)　见"正规仿切触黎曼流形".

殆仿切触流形(almost paracontact manifold)　殆切触流形的类似. 设 M 是一个 n 维微分流形,若 M 存在一个1形式 η,一个向量场 ξ,以及一个(1,1)型张量场 φ 满足条件

$$\varphi^\lambda_\alpha\varphi^\beta_\lambda=\delta^\beta_\alpha-\eta_\alpha\xi^\beta,\quad \eta_\lambda\xi^\lambda=1, \qquad (*)$$

则 M 称为殆仿切触流形. 而组(φ,ξ,η)称为殆仿切触结构. 它是类似于殆切触结构的一个结构. 这一结构是由沙通(Satō, I.)于1976年8月首先引入的. 因为讨论的基本依据和得到的主要结构均建立在佐佐木(Sasaki, S.)研究的基础上,所以沙通特别声称殆仿切触结构的观点得益于佐佐木教授. 类似于切触结构,(*)式也意味着 $\varphi^\lambda_\alpha\xi^\alpha=0,\eta_\lambda\varphi^\lambda_\alpha=0$. 同时,对于具有结构为$(\varphi,\xi,\eta)$的殆仿接触流形 M,必可求得一个正定黎曼度量 g 使得 $\eta_\mu=g_{\mu\lambda}\xi^\lambda, g_{\alpha\beta}\varphi^\alpha_\lambda\varphi^\beta_\mu=g_{\lambda\mu}-\eta_\lambda\eta_\mu$. 这个伴随的度量 g 与 φ,ξ,η 一起组成了 M 的殆仿切触黎曼结构,从而称 M 为殆仿切触黎曼流形. 黎曼流形的切球丛具有自然的殆仿切触结构,从而是一个简单的典型例子. 再如在具有直角坐标(x,y,z,w)的4维欧氏空间 R^4 中,若

$$\xi=(\xi^\alpha)=(0,0,0,2),$$

$$\eta=(\eta_\lambda)=\left(0,0,0,\frac{1}{2}\right),$$

$$\varphi=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$g=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1+y^2&0&0&0\\0&1+z^2&0&0\\0&0&1+y^2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

则(φ,ξ,η,g)确定了 R^4 的一组殆仿切触黎曼结构.

带系数 k 的正规仿切触黎曼流形(normal paracontact Riemannian manifold with a coefficient k)　一类特殊的正规仿切触流形. 在一个 n 维殆仿切触黎曼流形 M 中,若成立

$$\nabla_\gamma\varphi_{\lambda\mu}=k[(-g_{\gamma\mu}+\eta_\gamma\eta_\mu)\eta_\lambda+(-g_{\gamma\lambda}+\eta_\gamma\eta_\lambda)\eta_\mu], \qquad (1)$$

$$\varphi_{\lambda\mu}=\frac{1}{k}\nabla_\lambda\eta_\mu\quad(\text{函数 } k\neq 0), \qquad (2)$$

则 M 称为带有系数 k 的正规仿切触黎曼流形,或称 M 为带有系数 k 的P佐佐木流形,又名EP佐佐木流形. $k=1$ 时,它就成为一个P佐佐木流形. 在带有系数 k 的P佐佐木流形中,曲率张量和结构向量满足关系式:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\sigma}\eta_\alpha=-[k_\sigma\varphi_{\beta\gamma}-k_\gamma\varphi_{\beta\sigma}]+k^2(g_{\beta\sigma}\eta_\gamma-g_{\beta\gamma}\eta_\sigma).$$

具有保圆型结构的殆仿切触黎曼流形是带有系数 k 的P佐佐木流形的一个典型例子. 在其中成立着

$$R^\alpha_{\beta\gamma\sigma}\eta_\alpha=P(g_{\beta\sigma}\eta_\gamma-g_{\beta\gamma}\eta_\sigma). \qquad (3)$$

容有单位挠形场的黎曼流形也是一个带有系数 k 的P佐佐木流形. 它的结构可称为挠形结构,因此它也称为具有挠形结构的殆仿切触黎曼流形. 设 M 是带有系数 k 的P佐佐木流形. 若它满足

$$R^\alpha_{\beta\gamma\sigma}\eta_\alpha=-[k_\sigma(g_{\beta\nu}-\eta_\beta\eta_\nu)-k_\gamma(g_{\beta\sigma}-\eta_\beta\eta_\sigma)]+k^2(g_{\beta\sigma}\eta_\gamma-g_{\beta\gamma}\eta_\sigma),$$

则它是较具挠形结构的殆仿切触黎曼流形广泛的一类EP佐佐木流形;而当满足条件(3)时,则 M 是较具保圆型结构的仿切触黎曼流形广泛的一类EP佐佐木流形,且称之为LP佐佐木流形. 佐佐木流形和P佐佐木流形与其他流形一样,从它引进以来便有丰富多彩的微分几何与拓扑学的问题可供研究. 有关的论述已由国内外许多学者所发表. 特别是日本学者至今仍在对这些流形做不倦的研究,形形色色的各种结果在诸多杂志上时有所见.

带有系数 k 的P佐佐木流形(P-Sasakian manifold with a coefficient k)　见"带系数 k 的正规仿切触黎曼流形".

EP佐佐木流形(EP-Sasakian manifold)　见"带系数 k 的正规仿切触黎曼流形".

LP佐佐木流形(LP-Sasakian manifold)　见"带系数 k 的正规仿切触黎曼流形".

积分几何(integral geometry)　几何学的一个分支. 是通过考察各种密度的积分来研究图形性质的一门学科. 它渊源于几何概率,其发展与几何概率的发展有着不可分割的联系. 布丰(Buffon, G.-L. L. de)于1733年在一份研究报告的附录中提出了著名的投针问题. 克罗夫顿(Crofton, M. W.)于1868年建立了一系列重要的积分公式. 但到了19世纪末,贝特朗(Bertrand, J. L. F.)发现,对于同一个几何概率问题,选取不同的测度求解竟会得出不同的答案,他提出了著名的贝特朗悖论:在圆内任做一弦,求其长超过该圆的内接正三角形边长的概率. 该问题可以有不同的解答:

1. 由对称性可预先固定弦的方向，做垂直于该方向的直径，只有当直径与弦的交点到圆心的距离小于 $d/4$ 时，弦长才大于内接正三角形边长，这里 d 为圆的直径. 设所有交点是等可能的，则所求概率为 1/2(图 1).

2. 由对称性可预先固定弦的一端，只有当弦与过此端点的切线的交角在 60°～120°之间，其长才合乎要求. 设所有方向是等可能的，则所求概率为 1/3(图 2).

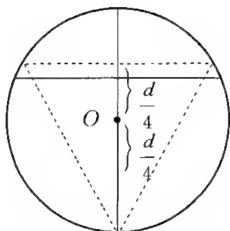


图1

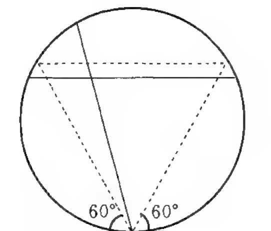


图2

庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)于 1896 年引进了运动密度的观念，把积分几何建立在群论的基础上，从而克服了上述矛盾. 布拉施克(Blaschke,W. J. E.)于 1934 年将这一学科取名为积分几何. 1935 至 1939 年，布拉施克及其合作者以积分几何为总标题发表了一系列论文，布拉施克推得了欧氏平面中的运动学基本公式等重要结果. 继布拉施克之后，陈省身和桑塔洛(Santaló,L. A.)对积分几何作出了卓越的贡献. 1940 年前后，陈省身和韦伊(Weil,A.)将局部紧致李群上不变测度的概念引入到积分几何，从而建立了齐性空间的积分理论. 桑塔洛毕生致力于积分几何研究，他获得了桑塔洛公式和 n 维非欧空间中运动学基本公式等大量研究成果，他的专著《积分几何与几何概率》(1976 年第一版，1979 年修订版)是迄今为止积分几何领域最完备的权威性专著. 积分几何与微分几何的各个分支关系密切，积分几何方法经常用以研究流形的等周不等式、特征值估计等整体微分几何问题. 它还牵涉到数论(闵科夫斯基-卢卡-西格尔定理)、偏微分方程(拉东-约翰变换)、概率统计(广义布丰问题)等许多数学领域；它在物理学、天文学、生物学、医学、金属学、矿物学、声学、建筑学等众多学科中有重要应用. 随着现代科技的迅猛发展，它的应用将日趋广泛、深入.

不变密度(invariant density)　积分几何中各种密度的统称. 指某一可迁变换群下不变的微分形式. 在 R^2 中，设有动点 $P(x,y)$ 和动直线 $G: x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$，分别称微分形式 $\mathrm{d}P = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}G = \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}\varphi$ 为点密度和直线密度. 将点密度和直线密度做各种组合，就得到点偶 (P_1,P_2)、线偶 (G_1,G_2) 等几何元素的密度. R^2 上的任一运动 u 可表示为

$$u:\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b, \end{cases}$$

式中 $a,b\in\mathrm{R}$，$\varphi\in[0,2\pi)$ 称为运动 u 的参数. 在 R^3 中引入等价关系：$(a,b,\varphi+2k\pi)\sim(a,b,\varphi)$，$k$ 为任意整数，便得到一个新的三维空间，即运动群的参数空间，则微分形式 $\mathrm{d}a\wedge\mathrm{d}b\wedge\mathrm{d}\varphi$ 在运动群作用下具有左不变性、右不变性和逆不变性，除一个常数因子外，它是惟一具有这些性质的微分 3 形式，称之为平面运动群的运动密度，记为 $\mathrm{d}K$. 上述概念可推广到 n 维欧氏空间和非欧空间.

设 G/H 是 n 维齐性空间，这里 G 和 H 分别为 m 维李群和 $(m-n)$ 维闭李子群. 若 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 是李群 G 的一组毛瑞尔-嘉当形式，则 H 的任一左陪集可视为完全可积发甫方程组 $\omega_1=\omega_2=\cdots=\omega_n=0$ 的积分流形. 称 $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_m$ 为李群 G 的运动密度，记为 $\mathrm{d}_L G$. 若 $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n$ 是 G/H 上关于 G 的左作用不变的 n 形式，则称之为齐性空间 G/H 上的不变密度，记为 $\mathrm{d}(G/H)$. 当 H 为 G 的闭正规子群时，齐性空间 G/H 上必存在不变密度.

点密度(point density)　见“不变密度”.

直线密度(line density)　见“不变密度”.

运动密度(motion density density)　见“不变密度”.

陈省身条件(Chern condition)　齐性空间积分几何中最重要的结果之一. 陈省身推得的齐性空间上存在不变密度的充分必要条件. 若 G/H 是 n 维齐性空间，这里 G 是 m 维李群，H 是 G 的 $(m-n)$ 维闭李子群，则齐性空间 G/H 上存在不变密度的充分必要条件是

$$\sum_{k=1}^{n} C_{sk}^{k} = 0 \quad (s = n+1,\cdots,m),$$

式中 C_{sk}^{k} 为李群 G 的结构常数. 这一充分必要条件称为陈省身条件.

弦幂积分(integrals for power of chords)　一类与直线密度相联系的重要积分. 设 K 为 R^2 中有界凸集，σ 为 K 被动直线 G 截得的弦长，称积分

$$I_n = \int_{G\cap K\neq\varphi} \sigma^n \mathrm{d}G \quad (n = 0,1,3,\cdots)$$

为凸集 K 的弦幂积分. 为了研究 I_n，常常引进另一种积分

$$J_n = \int_{P_1,P_2\in K} r^n \mathrm{d}P_1 \wedge \mathrm{d}P_2 \quad (n = -1,0,1,2,\cdots),$$

式中 r 表示 P_1 与 P_2 两点间的距离. I_n 与 J_n 之间存在关系式

$$I_n = \frac{n(n-1)}{2} J_{n-3} \quad (n \geqslant 2).$$

弦幂积分 I_n 与凸集 K 的几何性质有密切的关系. 若凸集 K 的周长和面积分别为 L 和 F，则有重要公式

$$I_0 = L,\ I_1 = \pi F,\ I_3 = 3F^2.$$

I_n 与 I_1 之间还有弦幂积分不等式

$$I_0 \geqslant 2I_1^{\frac{1}{2}},\quad I_2 \leqslant \frac{16}{3\pi^2}I_1^{\frac{3}{2}},$$

$$I_n \geqslant \frac{2\cdot 4\cdots n}{3\cdot 5\cdots(n+1)}2^{(n+1)\pi-n}I_1^{\frac{n+1}{2}}$$
$$(n = 4,6,8,\cdots),$$

$$I_n \geqslant \frac{1\cdot 3\cdots n}{2\cdot 4\cdots(n+1)}2^{n\pi-(n+1)}I_1^{\frac{n+1}{2}}$$
$$(n = 3,5,7,\cdots).$$

一个与弦幂积分相联系的引人注目的问题是：一实数序列$\{I_n\}(n=0,1,2,\cdots)$是凸集的弦幂积分序列的充分必要条件是什么？这就是著名的布拉施克猜测，至今尚未解决. 在高维欧氏空间也可以定义弦幂积分，目前已有相当丰富的研究成果.

布拉施克运动学基本公式(Blaschke fundamental kinematic formula)　平面积分几何中最基本的公式. 设 D_0,D_1 是 R^2 中两个边界由有限条简单闭曲线构成的区域，D_0 固定而 D_1 做运动，F_0,F_1；L_0,L_1；c_0,c_1 依次是它们的面积、周长和边界总曲率. 若 C_{01}是交集 $D_0\cap D_1$ 的边界总曲率，$\mathrm{d}K_1$ 是 D_1 的运动密度，则

$$\int_{D_1\cap D_0\neq\varnothing} C_{01}\mathrm{d}K_1 = 2\pi(F_0c_1 + F_1c_0 + L_0L_1),$$

上式称为布拉施克运动基本公式. 它有很多重要的应用. 例如，当 D_i 缩成长度为 l_i 的曲线 C_i 时 $(i=0,1)$，若它们的交点数为 n，则布拉施克运动学基本公式简化为庞加莱公式

$$\int_{c_1\cap c_0\neq\varnothing} n\mathrm{d}K_1 = 4l_0l_1.$$

哈德威格条件(Hadwiger conditions)　平面中一个区域包含另一区域的充分条件. 设 D_i 是 R^2 中由简单闭曲线围成的区域，其周长和面积分别为 L_i 和 F_i，$i=0,1$. 若下述条件之一成立：

$$L_0L_1 - 4\pi F_1 > (L_0^2L_1^2 - 16\pi^2F_0F_1)^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

$$4\pi F_0 - L_0L_1 > (L_0^2L_1^2 - 16\pi^2F_0F_1)^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

则区域 D_1 必包含在一个与 D_0 合同的区域之中. 上述充分条件称为哈德威格条件. 在非欧平面中已有平行的结果. 这些结果在高维常曲率空间型可否做相应的推广是一饶有兴趣的问题.

均质积分(quermass integral)　亦称平均截面测度. 凸体论和积分几何的重要概念. 本质上是 R^n 中凸集在$(n-r)$维平面上投影体积的积分平均值. 若 K 为 R^n 中的凸集，$L_{n-r(0)}$表示过定点 O 的任一$(n-r)$维平面. 则 K 到 $L_{n-r(0)}$上的垂直投影所构成的凸集 K'_{n-r}的$(n-r)$维体积$V(K'_{n-r})$的积分平均值

$$E(V(K'_{n-r}))$$
$$= \frac{1}{m(G_{n-r,r})}\int G_{n-r,r}V(K'_{n-r})\mathrm{d}L_{n-r[0]},$$

式中 $\mathrm{d}L_{n-r[0]}$是 R^n 中过定点的$(n-r)$维平面的不变密度，$m(G_{n-r,r})$是 R^n 中过定点的所有$(n-r)$维平面所构成的格拉斯曼流形 $G_{n-r,r}$的体积. 设 $V(K)$和 O_m 分别为 K 的 n 维体积和 m 维单位球面的面积，设

$$W_0(K) = V(K),\quad W_n(K) = O_{n-1}/n,$$

$$W_r(K) = \frac{(n-r)O_{n-1}}{nO_{n-r-1}}E(V(K'_{n-r}))$$
$$(r = 1,\cdots,n-1),$$

称 $W_r(K)\ (r=0,1,\cdots,n)$为 R^n 中凸集 K 的均质积分. 这一概念是由闵科夫斯基(Minkowski, H.)引进的，它在凸体论和积分几何中非常有用. 设 F 和 K_ρ 分别为 R^n 中凸集 K 的表面积和 K 的距离为 ρ 的外平行凸集，$W'_{r-1}(K'_{n-1})$是$(n-1)$维空间 $L_{n-1[0]}$中凸集 K'_{n-1}的均质积分. 用 $\mathrm{d}v_{n-1}$表示$(n-1)$维单位半球面 S_+^n 的点密度$(\mathrm{d}L_{n-1[0]}=\mathrm{d}v_{n-1})$，则有

$$F = nW_1(K), \quad (1)$$

$$V(K_\rho) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}W_i(K)\rho^i, \quad (2)$$

$$W_r(K) = \frac{2(n-1)}{nO_{n-2}}\int_{S_+^{n-1}}W'_{r-1}(K'_{n-1})\mathrm{d}v_{n-1}. \quad (3)$$

(1)，(2)，(3)式依次被称为柯西公式、施泰纳公式和卡勃塔公式.

平均截面测度(average section density)　即"均质积分".

克罗夫顿公式(Crofton formulae)　一组重要的积分公式. 在平面中，设 K 是周长和面积分别为 L 和 F 的有界凸集，动点 P 不在 K 内，t_1 和 t_2 是从 P 到 K 的两条切线的长，ω 是两切线间的夹角，σ 是 K 被运动直线 G 截得的弦长. 设 C 是 R^2 中一条长为 l 的曲线，n 是 G 与 C 的交点数，则

$$\int_{P\in K}\frac{\sin\omega}{t_1t_2}\mathrm{d}P = 2\pi^2, \quad (1)$$

$$\int_{P\in K}(\omega - \sin\omega)\mathrm{d}P = \frac{1}{2}L^2 - \pi F, \quad (2)$$

$$\int_{G\cap C\neq\varnothing}\cap\ n\mathrm{d}G = 2l, \quad (3)$$

$$\int_{G\cap K\neq\varnothing}\sigma\mathrm{d}G = \pi F, \quad (4)$$

$$\int_{G\cap K\neq\varnothing}\sigma^3\mathrm{d}G = 3F^2. \quad (5)$$

上述积分公式是由克罗夫顿(Crofton, M. W.)推得的，统称为克罗夫顿公式.

陈省身公式(Chern formula)　一个十分有用的积分公式. 设 $L_{q[0]}$是 R^n 中过定点 O 的固定的 q 维平面，L_r 是 R^n 中 r 维运动平面，$r+q>n$. 交集 $L_r\cap$

$L_{q[0]}$一般是 $L_{q[0]}$中$(r+q-n)$维平面，记为 $L^{(q)}_{r+q-n}$. 若 $F(L_r)$是仅依赖于 $L^{(q)}_{r+q-n}$的可积函数，X 是 R^n 中所有 r 维平面的集合，Y 是 $L_{q[0]}$中所有$(r+q-n)$维平面的集合，$\mathrm{d}L_r$ 和 $\mathrm{d}L^{(q)}_{r+q-n}$分别是 R^n 中 r 维线性子空间密度和 $L_{q[0]}$中$(r+q-n)$维线性子空间密度，则

$$\int_X F(L_r)\mathrm{d}L_r = \frac{O_n\cdots O_{q+1}}{O_r\cdots O_{r+q-n+1}}\int_Y F(L^{(q)}_{r+q-n})\mathrm{d}L^{(q)}_{r+q-n}.$$

上式是由陈省身推得的，所以称为陈省身公式. 它在桑塔洛公式的证明中起了关键作用.

桑塔洛公式(Santaló formula)　克罗夫顿弦公式的推广. 设 M^q 是 R^n 中 q 维逐块光滑的紧致嵌入微分流形，L_r 是 R^n 中 r 维运动平面，$r+q\geqslant n$. 用 $\sigma_k(\cdot)$表示 k 维流形的 k 维体积，则

$$\int_{L_r\cap M^q\neq\varnothing}\sigma_{r+q-n}(L_r\cap M^q)\mathrm{d}L_r = \frac{O_n\cdots O_{n-r}O_{r+q-n}}{O_r\cdots O_o O_q}\sigma_q(M^q).$$

上式称为桑塔洛公式. 当 $n=2,r=1$ 且 M^q 为 R^2 中的区域 K 时，这一公式简化为

$$\int_{G\cap K\neq\varnothing}\sigma\mathrm{d}G = \pi F,$$

它包括了克罗夫顿(Crofton, M. W.)的一个弦公式. 桑塔洛公式还蕴含了其他一些经典的积分公式.

射影微分几何(projective differential geometry)　微分几何的一个分支. 从属于射影变换群的微分几何. 在达布(Darboux, (J.-)G.)的著名的曲面论中已含有它的萌芽，它主要是在 20 世纪初期按照克莱因(Klein, (C.)F.)的思想展开的，到 20 世纪 40 年代趋于完善. 主要研究对象是曲线、曲面和共轭网等在射影变换群下的不变量、协变图形及其性质. 射影微分几何的研究方法大致有下列三种：

第一种是以富比尼(Fubini, G.)为首的意大利学派的方法. 以曲面论为例，设$(x)=(x_0,x_1,x_2,x_3)$是三维射影空间 P^3 中齐次坐标，$x=x(u,v)$是曲面 S 的参数表示. 用一种射影不变的方法确定 x 的比例因子，得到富比尼规范坐标，构造二次和三次形式：

$$\varphi = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2,$$
$$\psi = A\mathrm{d}u^3 + 3B\mathrm{d}u^2\mathrm{d}v + 3C\mathrm{d}u\mathrm{d}v^2 + D\mathrm{d}v^3,$$

式中 φ 和普通曲面论中第二基本形式只相差一个因子. 于是 $\varphi=0$ 定义了曲面的两族渐近曲线. ψ 和 φ 满足配极关系，$\psi=0$ 定义曲面的三族达布曲线. 这两个基本形式的系数满足一系列关系式，即曲面的基本方程. 同普通曲面论一样，可导出射影曲面论的基本定理.

第二种是嘉当(Cartan, E.)的活动标架法. 嘉当用活动标架法重建射影曲面论，问题归结为普法夫方程组，可积条件即嘉当结构方程，从而导出许多结果. 近年来，用嘉当方法发展起来高维射影空间共轭网理论.

第三种是以苏步青为首的中国学者开创和发展的结构式射影微分几何方法，主要是用几何作图法来建立射影协变的构图和不变量. 例如用平面曲线在其某种奇点的不变量来表达其他的几何不变量.

渐近曲线(asymptotic curve)　亦称主切曲线. 曲面上的一种曲线. 它在每点的密切平面与曲面在该点的切平面重合. 设 S 是三维射影空间 P^3 中一解析的非直纹面，它的参数向量方程为 $x=x(u,v)$. S 上任意正常点 $P(x)$的切平面方程为$(X\ x\ x_u\ x_v)=0$，式中 $X=(X_0,X_1,X_2,X_3)$为切平面上点的齐次坐标，括号表示四阶行列式，以 $x_u=\dfrac{\partial x}{\partial u}$表示偏导数. S 上曲线 $\Gamma: u=u(t), v=v(t)$为渐近曲线的充分必要条件是$(x\ x_u\ x_v\ \mathrm{d}^2x)=0$. 由此得到渐近曲线的微分方程为

$$(x\ x_u\ x_v\ x_{uu})\mathrm{d}u^2 + 2(x\ x_u\ x_v\ x_{uv})\mathrm{d}u\mathrm{d}v + (x\ x_u\ x_v\ x_{vv})\mathrm{d}v^2 = 0.$$

曲面的渐近曲线是射影协变曲线.

主切曲线(principal tangent curve)　即“渐近曲线”.

曲面的基本方程(fundamental equation of surface)　射影曲面论的重要结论之一. 射影曲面满足的微分方程组. 若 S 是一解析的非直纹面，取渐近曲线为参数曲线，u,v 为渐近参数，则 x 满足下列微分方程组

$$x_{uu} = px + \theta_u x_u + \beta x_v,$$
$$x_{vv} = qx + \gamma x_u + \theta_v x_v,$$

其中 p,q,θ,β,γ 为 u,v 的数量函数. 这个方程组称为曲面的基本方程. 取适当比例因子可使 $\theta=\ln(\beta\gamma)$. 此时，坐标 x 称为富比尼坐标. 点 $P(x)$和 $Q(x_{uv})$的连线称为 S 在点 $P(x)$的射影法线. 若记

$$x=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta}y,$$

则方程组改写为

$$y_{uu}+2by_v+c_1y=0,\quad y_{vv}+2ay_u+c_2y=0,$$

其中 a,b,c_1,c_2 是 u,v 的函数. 这方程组称为维尔清斯基型基本方程.

富比尼坐标(Fubini coordinates)　见“曲面的基本方程”.

射影法线(projective normal)　见“曲面的基本方程”.

维尔清斯基型基本方程(fundamental quation of Wilezynski type)　见“曲面的基本方程”.

渐近密切二次曲面(asymptotic osculating quad

ric) 亦称主密切二次曲面.射影曲面论的重要元素之一.设Γ是曲面S上的曲线,从Γ每点引渐近曲线$u=\text{const}$的切线,得到直纹面R_u.从Γ每点引渐近曲线$v=\text{const}$的切线,得到直纹面R_v.R_u和R_v称为Γ的渐近直纹面.设O是Γ上任意一点,l是通过O属于R_v的母线,做R_v沿l的密切二次曲面Q_v^0(由l及其邻近的二母线决定的二次曲面).类似地做密切二次曲面Q_u^0.Q_u^0和Q_v^0称为Γ在O的渐近密切二次曲面.直纹面R_v的一族弯曲渐近曲线的每条切线与R_v相交于三重点,因此,从l每点引R_v的弯曲渐近曲线的切线,其轨迹就是Q_v^0.渐近密切二次曲面是由克罗布捷克(Kloboucek,J)和邦皮亚尼(Bompiani,E.)同时发现的.

主密切二次曲面(principal osculating quadric) 即“渐近密切二次曲面”.

渐近直纹面(asymptotic ruled surface) 见“渐近密切二次曲面”.

李二次曲面(Lie quadric) 射影曲面论中重要元素之一.一种射影协变的二次曲面.设Γ和$\bar{\Gamma}$是曲面S上交于正常点O的两条渐近曲线,Γ和$\bar{\Gamma}$的渐近直纹面都有一个是切线曲面.李(Lie,S.)证明:Γ的另一渐近直纹面沿$\bar{\Gamma}$的切线的密切二次曲面(Γ在O的渐近密切二次曲面)和$\bar{\Gamma}$的另一渐近直纹面沿Γ的切线的密切二次曲面($\bar{\Gamma}$在O的渐近密切二次曲面)重合.这个二次曲面称为李二次曲面.

达布二次曲面束(Darboux pencil of quadrics) 射影曲面论中重要元素之一.设$P(x)$是曲面上任意点,x是富比尼坐标.以x,x_u,x_v,x_{uv}为在P的活动标架,空间任意点$M(z)$可表示为

$$z = x_1x + x_2x_u + x_3x_v + x_4x_{uv},$$

x_1,x_2,x_3,x_4为$M(z)$在标架$\{x,x_u,x_v,x_{uv}\}$下的齐次坐标.方程

$$x_1x_4 - x_2x_3 + kx_4^2 = 0 \quad (k\text{ 为参数})$$

决定的二次曲面束称为达布二次曲面束.达布二次曲面束有两种不同的作图法.每个达布二次曲面由它的指数h决定.$h=0$为李二次曲面,$h=1$为维尔清斯基二次曲面,$h=1/3$为富比尼二次曲面,$h=\infty$是二重切平面.

规范直线(normalized line) 射影曲面论的重要概念之一.通过曲面上一点P而不在切平面上的直线$x+k\psi z=0$,$y+k\varphi z=0$(k为任意常数)或在切平面上但不通过P的直线$z=0$,$1+k\varphi x+k\psi y=0$(k为任意常数),其中

$$x = \frac{x_2}{x_1},\ y = \frac{x_3}{x_1},\ z = \frac{x_4}{x_1}$$

是非齐次坐标,(x_1,x_2,x_3,x_4)是关于标架$\{x,x_u,x_v,x_{uv}\}$的齐次坐标,

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial u}\ln(\beta\gamma^2),\ \psi = \frac{\partial}{\partial v}\ln(\beta^2\gamma).$$

前一种是连结点$P(x)$和点$M(x_{uv}-k\psi x_u-k\varphi x_v)$的直线,称为第一类规范直线,记为$l_1(k)$.后一种是连结点$(x_u-k\varphi x)$和点$(x_v-k\psi x)$的直线,称为第二类规范直线,记为$l_2(k)$.$l_2(k)$构成直线束,称为规范线束,公共点$(0,-\psi,\varphi,0)$称为规范点.$l_1(k)$在同一平面上,这个平面称为规范平面.规范平面关于曲面在P的李二次曲面的极就是规范点.对同一常数k,$l_1(k)$和$l_2(k)$关于李二次曲面是共轭直线.$k=0$时,$l_1(0)$为射影法线;$k=1/4$时,

$$l_1\left(\frac{1}{4}\right) \quad 和 \quad l_2\left(\frac{1}{4}\right)$$

分别是格林(Green)第一、第二棱线;$k=1/2$时,

$$l_1\left(\frac{1}{2}\right) \quad 和 \quad l_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

分别为维尔清斯基第一、第二准线;$k\to\infty$时,得到点$P(x)$和$(\psi x_u+\varphi x_v)$的连线,称为规范切线.

第一类规范直线(the first kind normalized line) 见“规范直线”.

第二类规范直线(the second kind normalized line) 见“规范直线”.

规范线束(normalized line pencil) 见“规范直线”.

规范点(normalized point) 见“规范直线”.

格林第一棱线(Green first edge line) 见“规范直线”.

格林第二棱线(Green second edge line) 见“规范直线”.

维尔清斯基第一准线(Wilczynski first directrix) 见“规范直线”.

维尔清斯基第二准线(Wilczynski second directrix) 见“规范直线”.

规范切线(normalized tangent line) 见“规范直线”.

嘉当规范标架(Cartan normalized frame) 曲面论的一种活动标架.设$M(x)$是曲面S的任一点,M_1和M_2是维尔清斯基第二准线$l_2(1/2)$与李二次曲面的两个交点,M_3是维尔清斯基第一准线$l(1/2)$与李二次曲面的另一个交点,以M,M_1,M_2,M_3为顶点的四面体$\{M,M_1,M_2,M_3\}$称为嘉当规范标架.这个标架是射影协变的.在这个标架下,二次曲面的方程可以有更简单的形式.例如李二次曲面的方程为$y_1y_4-y_2y_3=0$,达布二次曲面束的方程为

$$y_1y_4 - y_2y_3 - \frac{1}{2}h\beta\gamma y_4^2 = 0 \quad (h\text{ 是参数}),$$

其中(y_1,y_2,y_3,y_4)是关于标架$\{M,M_1,M_2,M_3\}$的坐标.

德穆林四边形(Demoulin quadrangle)　一种射影协变四边形. 德穆林(Demoulin, A.)于 1908 年研究李二次曲面时得到. 当点 M 在曲面 S 上变动时,相应的李二次曲面有 ∞^2 个,八个包络面中有四个与 S 重合,其余四个与 M 点的李二次曲面切于另外四点. 这四点形成的四面体称为曲面 S 在 M 的德穆林四面体,这四点对应的四条直线是李二次曲面的母线,构成的空间四边形称为德穆林四边形. 点 M 变动时,四点的轨迹称为 S 的德穆林变换.

德穆林四面体(Demoulin tetrahedroid)　见"德穆林四边形".

德穆林变换(Demoulin transformation)　见"德穆林四边形".

伴随二次曲面(associate quadric)　射影曲面论的基本元素之一. 德穆林四边形和伴随二次曲线确定的二次曲面. 曲面 S 上点 M 沿渐近曲线 u 变动形成李二次曲面的特征线,其中两条是重合的渐近线 MM_2,另外两条是直线 $\bar{f}_\varepsilon(\varepsilon=\pm 1)$. 每条 $\bar{f}_\varepsilon$ 和 MM_2 的交点 $\bar{F}_\varepsilon$ 是渐近直纹面 $\bar{R}$ 在 MM_2 的弯节点,$\bar{f}_\varepsilon$ 是弯节切线. 类似地,M 沿 v 曲线变动得到重合渐近线 MM_1 和渐近直纹面 R 的弯节切线 f_ε,对应弯节点 F_ε. 当 M 沿 u 曲线变动时,F_ε 形成的曲线在 F_ε 的切线 t_ε 在切平面(MM_1M_2)上;M 沿 v 曲线变动时,$\bar{F}_\varepsilon$ 形成的曲线在 $\bar{F}_\varepsilon$ 的切线 $\bar{t}_\varepsilon$ 也在切平面(MM_1M_2)上. 存在二次曲线 K_2 通过 $F_1, F_{-1}, \bar{F}_1, \bar{F}_{-1}$ 并在这些点分别和 $t_1, t_{-1}, \bar{t}_1, \bar{t}_{-1}$ 相切. K_2 称为 S 在 M 的伴随二次曲线. 伴随二次曲面是苏步青在 1935 年首先发现的,白正国做了重要推广.

伴随二次曲线(associated quadratic curve)　见"伴随二次曲面".

穆塔儿二次曲面(Moutard quadric)　射影曲面论的基本元素之一. 若 S 是非直纹面,t 是 S 在 P 点具方向 λ 的切线(非渐近切线),则通过 t 的任意平面与 S 的平截线在 P 的密切二次曲线的轨迹是一个二次曲面,称为 S 在 P 的切线 t 或方向 λ 的穆塔儿二次曲面. 由 S 在 P 沿切线 t 的穆塔儿二次曲面和 S 在 P 的切平面决定的二次曲面束称为属于切线 t 的穆塔儿二次曲面束. 在 P 的切平面上任取点 $R(\neq P)$,做属于切线 PR 的穆塔儿二次曲面束和 R 关于它的任意极面 π,点 R 与 π 之间的对应称为穆塔儿对应.

穆塔儿二次曲面束(Moutard quadric pencil)　见"穆塔儿二次曲面".

穆塔儿对应(Moutard correspondence)　见"穆塔儿二次曲面".

射影线素(projective line element)　射影曲面论的重要概念之一. 欧氏线素在射影曲面论的推广,用交比表达. 设 u, v 是曲面 S 的参数,x 是 S 的点 $P(x)$ 的齐次坐标. 若 $\xi=\rho(x\ x_u\ x_v)$,其中 ρ 是非零因子,$(x\ x_u\ x_v)$ 是行列式 $(X\ x\ x_u\ x_v)$ 关于第一列四个元的代数余子式. 定义分式

$$\frac{\xi\cdot \mathrm{d}^3 x - x\cdot \mathrm{d}^3\xi}{2\xi\cdot \mathrm{d}^2 x}=\frac{\mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}^2\xi-\mathrm{d}\xi\cdot \mathrm{d}^2 x}{2\xi\cdot \mathrm{d}^2 x}$$

为 S 的射影线素. 这个定义最初由德拉齐尼(Terracini, A.)于 1926 年给出. 若取 u, v 为渐近参数,则射影线素为

$$\frac{\beta \mathrm{d}u^3+\gamma \mathrm{d}v^3}{2\mathrm{d}u\mathrm{d}v},$$

称为富比尼线素.

富比尼线素(Fubini line element)　见"射影线素".

射影变形(projective deformation)　射影曲面论的重要概念之一. 富比尼拓广普通曲面变形到射影曲面论而导入的概念. 设曲面 S 和 S' 之间存在点对应,且对于 S 任意点 P 均可找到直射 T,变换 P 到 S' 的对应点 P',S 上过 P 的任意曲线 Γ 变换到 $\bar{\Gamma}$,$\bar{\Gamma}$ 和 Γ 的对应曲线 Γ' 在点 P' 构成二阶解析接触,则称 S 和 S' 为互为射影变形的曲面,它们的对应称为射影变形. 两曲面互为射影变形的充分必要条件是它们的渐近曲线互相对应且在对应点的 β, γ 分别相等,或者两曲面在对应点有相同的射影线素.

射影变形的曲面(surface of projective deformation)　见"射影变形".

共轭网(net of conjugate curves)　射影曲面论的重要概念之一. n 维射影空间 P^n 中曲面上一种曲线网,在其中一族的每条固定曲线上各点做另一族各曲线的切线构成一个可展曲面. 曲面 $x=x(u,v)$ 具有共轭网(u,v)的充分必要条件是 x 满足拉普拉斯方程

$$x_{uv}+a x_u+b x_v+c x=0,$$

其中 a, b, c 是 u, v 的函数.

射影极小曲面(projective minimal surface)　射影曲面论的基本元素之一. 变分问题

$$\delta\iint \beta\gamma \mathrm{d}u\mathrm{d}v=0$$

的解曲面. 这个定义是汤姆森(Thomson, G.)于 1928 年给出的. 射影极小曲面有许多特征,例如:

1. 射影极小曲面的射影极小曲线(曲面关于伴随二次曲线 K_2 的非欧线素 $\mathrm{d}s^2=0$ 给出的两族曲线)构成共轭网.

2. 射影极小曲面的切平面关于对应的伴随二次曲面的极在对应的李二次曲面上.

3. 射影极小曲面的德穆林变换是可逆的.

撰　稿　刘继志　许洪伟　李中林　欧阳崇珍　赵国松
审　阅　白正国　李安民

凸集几何与距离几何

凸集几何

凸集几何(geometry of convex set) 现代几何学的一个分支.凸集几何集线性代数、分析、点集拓扑、几何等内容于一体,利用凸性概念的几何观点,研究有限维实仿射空间中图形的几何性质,它是一门年轻的数学分支.在20世纪50年代,由于数学规划论、最优控制理论、对策论、数理经济等应用学科的兴起,出现了一个新的数学分支——凸分析.随着凸分析的崛起,根据凸集的几何特性,与凸分析相辅相成地形成了凸集几何.

凸集几何含有古典的有趣内容.早在1813年,柯西(Cauchy,A.-L.)就指出:"设P,P'是仿射空间X中的两个凸多面体,$f:F_rP\to F_rP'$是保持顶点、棱和面的一个双射.若对于P的任意一个面F,限制$f|_F:F\to f(F)$是一个等距,则存在X的一个等距$\bar{f}$,使得$\bar{f}(P)=P'$,$\bar{f}|_{F_rP}=f$,特别地,P和P'是等距的".柯西的这个定理有一个推论:"一个凸多面体P是不可弯曲的",从这推论又提出一个问题:是不是存在非凸的可弯曲的多面体?时隔164年之后,由康内利(Connely,R.)构作了一个单连通的可弯曲的多面体.多胞形是内部非空的紧多面体,是平面上凸多边形和三维空间中凸多面体的推广.施拉夫里(Schläfli,M.)于1850年给出了多胞形的分类:对于二维情形有无限多个正多胞形;对于三维与四维情形,各有五个正多胞形;当维数大于或等于五时,恰只有三个正多胞形:立方体、余立方体和正则单形.由此施拉夫里定理可以作为下面那句富有哲理的格言的一个例证:"丰富的结构大多数是低维的,而贫乏的结构大多数是高维的",例如,单李群、可除代数、二次型域、正交群的非单性、二维负常曲率的紧结构的可变性等具有丰富的结构;但拓扑向量空间、有限域的可换性、可微映射的一般奇性等具有贫乏的结构.此外,尽管施拉夫里定理是纯几何的,但是正多胞形就它们的等距群来说,是属于重要的数学结构之列的;它们的群是"经反射生成的",用的是超平面对称.而这种类型的有限群也能进行完全分类,这在李群和代数群的研究中起着重要的作用.

体现凸集几何特性的有三个著名的例子:闵科夫斯基加法;一个凸集关于一个球面的对偶凸集(或配极);一个凸集的施泰纳对称.尤其是施泰纳对称化可用于证明一类凸超曲面的极值性质.凸集有两个判定准则:

1.设S是欧几里得仿射空间X的一个非空闭集,若对于$\forall\ x\in X$,存在惟一的$y\in S$,使得$d(x,y)=d(x,S)$,则S是一个凸集.

2.设A是一个内部非空的闭集,若A的边界上每一点都具有一个支撑超平面,则A是一个凸集.

利用代数拓扑观点,在不计同胚差别的意义下,可将凸集与凸集的边界进行分类,有下述的结论:

1.若X是一个d维仿射空间,A是X的一个d维凸集,则$\mathring{A}$与R^d同胚,特别地,d维空间内一切非空的开凸集都是与R^d同胚的.

2.X的任意一个开星形集与X同胚.

3.若A是一个有界的凸集,且$\dim X=\dim A=d$,则其边界F_rA恒与球面S^{d-1}同胚.

对于非有界的凸集A,若$\dim A=\dim X=d$,且$F_rA\neq\varnothing$,则F_rA或同胚于R^{d-1},或同胚于

$$S^{d-r-1}\times\mathsf{R}^r\quad(0\leqslant r\leqslant d-1).$$

作为此结论的特例,一条凸曲线或同胚于圆S^1,或同胚于直线R,对于三维欧几里得空间中的凸曲面,它是一个连通集,可作为空间中三维凸集的边界.因此,凸曲面总是或同胚于R^2,或同胚于$S^1\times\mathsf{R}$(圆柱面),或同胚于S^2.凸集几何中有一个古典的海因-巴拿赫定理:若X是仿射空间,A是X的一个非空凸开集,且L是X的一个仿射子空间,使得$A\cap L=\varnothing$,则存在X的一个超平面,它包含L且与X不相交.作为这个定理的一个几何应用是:若A是一个闭凸集,则经过A的边界上的每一点,有一个在该点处的支撑超平面.海因-巴拿赫定理在泛函分析中有重要的应用,其关键是超平面与线性形式之间具有对应关系.一个凸集具有不同类型的边界点:顶点、端点和暴露点.顶点必是端点,但反之不然,对于多面体两者是一致的.暴露点必是端点,但反之不然.作为端点的一个应用是:若$f:A\to\mathsf{R}$是连续的凸函数,则f至少在A的一个端点处达到它的极大值,即

$$\sup\nolimits_A f=\sup\nolimits_{\mathrm{Extrem}(A)} f.$$

这个结论在极大值问题的具体应用中是有用的.例如,在博弈论、对策论和线性程序设计方面都可用到.若要找其极大值的那个函数是凸的,则只要知道该函数在Extrem(A)上的值就够了.例如,当A为多面体时,这种点只有有限多个.端点在应用数学中也要用到,例如,双随机矩阵全体构成一个凸集,此凸集的端点为置换矩阵.有两种构作凸函数的方法:

1. 布鲁诺-闵科夫斯基定理：若 A 和 B 是仿射空间 X 中的两个 d 维紧凸集，并且 L 是 X 上的勒贝格测度，则函数

$$[0,1]\ni\lambda\mapsto L(\lambda A+(1-\lambda)B)^{1/d}\in\mathbb{R}$$

是凹的.

2. 若 $Q(E)$ 是 E 上欧几里得结构全体所成的空间，L 是 E 上的一个勒贝格测度，对于每一个 $q\in Q(E)$，配以椭球面 $q^{-1}(1)$，其凸包络为实心椭球 $\mathscr{E}(q)=q^{-1}([0,1])$，则 $Q(E)\ni q\to L(\mathscr{E}(q))\in\mathbb{R}$ 是严格凸的.

利用这个凸函数可以证明勒夫纳-伯哈雷特定理：若 E 是一个有限维实向量空间，赋有一个勒贝格测度，若 K 是 E 的一个具有非空内部的紧集，则存在惟一的一个包含 K 且体积极小的椭球体. 布鲁诺-闵科夫斯基定理也可用于证明等周不等式. 所谓等周不等式可叙述如下：设 C 是欧几里得空间中任意一个内部非空的 d 维凸集，则在体积给定的所有内部非空的紧凸集中，以球的面积最大(或者说：在面积给定的这些凸集中，以球的体积最大). 等周不等式有广泛的应用，特别地，紧致黎曼流形的齐格等周不等式已成为现代微分几何研究中一个强有力的计算工具.

从 20 世纪 70 年代开始，伯热(Berger, M.)在黎曼流形 (M,g) 中用到了凸集的有关性质. 所谓黎曼流形 (M,g) 中的集合 A 是凸的，是指：对于 $\forall\ m, m'\in A$，存在惟一的一条极小测地线连结 m 与 m' 点，并且此测地线含于集合 A 内. 按凸集的定义，在黎曼流形 (M,g) 上引入了凸半径的概念. 设 (M,g) 是 $n+1$ 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 维黎曼子流形. $m\in M$，用 H_m 表示 m 点处切于 M 的超平面. 若在 M 内存在点 m 的邻域 U，使得整个 U 位于 H_m 的一边，则称子流形 M 在点 m 处是凸的. 又，若 $U\cap H_m$ 退缩为点 m，则称子流形 M 在点 m 处是严格凸的. 若在 M 的任意点处都是凸的(严格凸的)，则称子流形 M 是凸的(严格凸的).

随着凸集几何与凸分析的发展，凸集几何在变分学、最优控制、偏微分方程、逼近论、数理经济学等方面将越来越显示出它的重要性，特别地，在随机几何中它将发挥更大的作用. 作为几何学的本身，凸集几何将会广泛地用于几何测度论和微分几何，尤其在黎曼流形上，凸集的几何特性的应用将越来越深入，越来越广泛. 例如，伯热于 1988 年指出：设有一类黎曼流形，带有边界 ∂M，且具有凸性，在 ∂M 中定义距离 $d(p,q)$，试问在什么范围之内距离 d 可作为映射 $\partial M\times\partial M\to\mathbb{R}_+$ 决定一个"内部"度量 g(不计内部等距的微分同胚)？据此，在地震、x 射线、扫描等考虑一刹那间的这样一类问题中显示出凸性研究的重要性.

凸集(convex set) 亦称凸子集. 一类重要的集合. 设 X 是 d 维实的仿射空间，A 是 X 的一个子集，若 $\forall\ x,y\in A$，有 $[x,y]\subset A$，其中

$$[x,y]=\{\lambda x+(1-\lambda)y\,|\,\lambda\in[0,1]\},$$

则称 A 是凸子集，简称凸集. 例如，整个仿射空间 X，X 的任意一个仿射子空间，尤其是点、直线和超平面都是凸集. 空集也是凸集. 凸集是连通的. 当 $d=1$ 时，X 中的凸集就是任何一种类型的区间. 在欧几里得空间中，每一个开球 $B(a,r)$ 或闭球 $U(a,r)$ 都是凸集. 若 H 是 X 的一个超平面，则由 H 决定的开的或闭的半空间是凸的. 任意多个凸集的交集为凸集；半空间的交集为凸集.

凸子集(convex subset) 见"凸集".

紧凸集(compact convex set) 一类重要的凸集. 它既是凸集又是紧致集. 设 X 是任一拓扑空间，A 是 X 的任一子集. 若能够从 A 的任何开覆盖 F 中取出 A 的一个有限子覆盖 F'，则称 A 是拓扑空间 X 的一个紧致集，简称紧集. 实直线 $\mathbb{R}$ 中每个有界闭区间 $[a,b]$ 都是 $\mathbb{R}$ 的紧凸集. 但实直线 $\mathbb{R}$ 不是紧致的. 在欧几里得空间中，每一个闭球 $U(a,r)$ 都是紧凸集.

紧致集(compact set) 见"紧凸集".

星形集(star set) 一类比凸集更广泛的子集. 设 E 是 d 维实仿射空间 X 中的一个子集. $x\in E$，若对任意的 $y\in E$，有 $[x,y]\subset E$，则称 E 是一个在 x 处的星形集. 一个凸集在其每一点处都是星形集. 星形集是连通的，并且是弧连通的. 设 A 是 d 维欧几里得空间 X 中的一个紧集，并且对于任意的

$$\{x_i\}_{i=1,\cdots,d+1}\subset A,$$

存在 $y\in X$，使得 $[x_i,y]\subset A$ 对于任意的 $i=1,2,\cdots,d+1$ 成立，则 A 是一个星形集.

闵科夫斯基加法(Minkowski addition) 凸集的一种加法运算. 用它可以构作一个较为复杂的凸集. 设 S,T 是向量空间 X 的两个凸集，则

$$\lambda S+\mu T=\{\lambda s+\mu t\,|\,s\in S,t\in T\}$$

是凸集，其中 λ,μ 为任意实数. 闵科夫斯基(Minkowski, H.)首先采用此加法运算构作了这个凸集. 若 X 是仿射空间，则此加法仅当 $\lambda+\mu=1$ 时才有意义；否则，$\lambda S+\mu T$ 仅当不计平移差别时才是确定的，而它的"形状"却总是相同的. 当 $\lambda=1,\mu=-1$ 时，凸集 $S-T$ 用来证明等周不等式. 又，若 S，T 是两个多胞形，则对任意的 λ，闵科夫斯基和集 $\lambda S+(1-\lambda)T$ 是一个多胞形.

凸集的施泰纳对称(Steiner symmetry of a convex set) 凸集的一种变换. 它是凸集关于超平面的对称变换. 设 X 是 d 维欧几里得空间，H 是 X 的一个超平面，A 是 X 的一个紧子集，定义一个称为 A 关于 H 的施泰纳对称集的新的紧子集，记为

$St_H(A)$. 该紧子集 $A'=St_H(A)$ 由以下条件确定：对任何正交于 H 的直线 D，若 $A\cap D=\varnothing$，则 $A'\cap D=\varnothing$；若 $A\cap D\neq\varnothing$，则 $A'\cap D$ 是 D 上的线段，它的中点在 $D\cap H$ 上，线段长度等于$A\cap D$在 D 上的长. 若 A 是紧凸集，则 $St_H(A)$也是凸的、紧的，即由 A 构作了凸集 $St_H(A)$. 这是由施泰纳(Steiner, J.)最早构作的. 设 A,B 是 X 的两个紧凸集，H 是一个超平面，则$\forall\ \lambda\in[0,1]$，$St_H(\lambda A+(1-\lambda)B)\supset\lambda St_H A+(1-\lambda)St_H(B)$. 当 C 是 d 维紧凸集时，体积

$$\mathfrak{U}(St_H(C))\leqslant\mathfrak{U}(C).$$

此式表明凸集的施泰纳对称不会使凸集的体积增大. 若 F_rC 容有一个有限剖分，剖分为维数取 $0,1,\cdots,d-1$ 的 X 的可微子流形，则此剖分的每一个$(d-1)$维子流形的体积是有限的，并且 $\mathfrak{U}(C)$是全体$(d-1)$维子流形体积之和.

凸集的配极(polarity of convex set)　构作凸集的一种方法. 设 A 是欧几里得空间 X 的任意一个子集，A 的配极子集为

$$A^*=\{y\in X\mid(x\mid y)\leqslant 1,\ \forall\ x\in A\},$$

这里$(x\mid y)$代表内积. 对于任意的 A，A^* 是个凸集. 凸集的配极和关于 X 中单位球面 $S=S(0,1)$的逆配极变换有密切的联系：$x\in X$的配极超平面是$\{y\in X\mid(x\mid y)=1\}$. 设 X 是以 O 为原点的欧几里得空间，若 A 是有界的，则$O\in\mathring{A}^*$；若 $O\in\mathring{A}$(A 的内部)，则 A^* 是有界的. 若 A 是含 O 点的一个凸闭集，则 $A^{**}=A$，即把 $*$ 作为运算符号. 若 A 取遍内部包含有 O 点的紧凸集，则映射 $f:A\to A^*$ 是一个优异的对偶，这种对偶用于研究多面体. 凸集的配极子集可作为海因-巴拿赫定理的一个几何应用.

凸锥(convex cone)　锥的推广. 一个凸集 C 称为以 x 为顶点的凸锥，是指：对于每一个以 x 为中心，比值为 $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ 的位似 $H_{x,\lambda}$，C 是稳定的. 在三维空间中凸锥可看做由点 x 引出的所有射线构成的无界凸体.

凸集的判定准则(criteria of convex set)　凸集几何的重要规则. 即判定凸集的两条定理：

1. 设 A 是欧几里得空间 X 的一个非空闭集，若对于$\forall\ x\in A$，存在惟一的 $y\in A$，使得 $d(x,y)=d(x,A)$，则 A 是一个凸集.

2. 设 A 是一个内部非空的闭集，若 A 的边界上每一点具有一个支撑超平面，则 A 是一个凸集.

凸包络(convex envelope)　亦称凸包. 一类凸集. 指包含集合 A 的最小的凸集. 若 A 是仿射空间 X 的任意一个子集，则存在一个包含 A 的最小凸集，即 X 内所有包含 A 的凸集之交，称为 A 的凸包络，记为 $\varepsilon(A)$. 若 A 是紧的，则 $\varepsilon(A)$也是紧的；若 A 是一个紧凸集，则$A=\varepsilon(F_r(A))$，这里 $F_r(A)$是 A 的边界集；若 A 是有界的，则直径

$$\operatorname{diam}(\varepsilon(A))=\operatorname{diam}A.$$

特别地，$\varepsilon(A)$仍是有界的. 为了得到 $\varepsilon(A)$，有两种重要的方法：

1. 卡拉西奥多里定理：对于 d 维仿射空间 X 的任意一个子集 A，有

$$\varepsilon(A)=\Big\{\sum_{i=1}^{d+1}\lambda_i x_i\mid\forall\ i,x_i\in A,\lambda_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{d+1}\lambda_i=1\Big\}.$$

2. 一个紧凸集是其端点的凸包络.

凸包(convex hull)　即"凸包络".

凸胞腔(convex cell)　特殊的凸包络. 在 d 维欧里得空间中，有限集的 d 维凸包络称为凸胞腔.

凸闭包络(convex closed envelope)　特殊的凸包络. 设 A 是仿射空间 X 中的一个子集，包含 A 的所有凸闭集的交集称为子集 A 的凸闭包络，这个凸闭包络就是$\overline{\varepsilon(A)}$.

凸集的维数(dimension of convex set)　凸集的一种刻画. 凸集 S 所生成的仿射子空间$\langle S\rangle$的维数，记为 $\dim S$. 因此 $\dim S=\dim\langle S\rangle$. 对于一个非空凸集 S，$\dim S=\dim X$ 等价于 $\mathring{S}\neq\varnothing$.

凸集的拓扑(topology of convex set)　刻画凸集的拓扑结构. 因为 X 是有限维的仿射空间，所以它有一个典范的拓扑. 对凸集与凸集的边界在不计同胚差别的意义下，有下述的结论：

1. 若 X 是一个 d 维仿射空间，A 是 X 的一个 d 维凸集，即 $\dim A=\dim X=d$，则 $\mathring{A}$ 与 $\mathbb{R}^d$ 同胚，特别地，d 维空间内一切非空的开凸集都是与 $\mathbb{R}^d$ 同胚的.

2. X 的任意一个开星形集与 X 同胚.

3. 若 A 是一个有界的凸集，而且 $\dim A=\dim X=d$，则其边界 F_rA 恒与球面 S^{d-1}同胚. 此外，若 A 是紧的，则 A 与 d 维闭球同胚，特别地，当 $d=2$ 时，F_rA 是一条简单闭曲线.

4. 若 A 是 X 的一个凸集，$\dim A=\dim X=d$，而且 $F_rA\neq\varnothing$，则 F_rA 或者同胚于 $\mathbb{R}^{d-1}$，或者同胚于 $S^{d-r-1}\times\mathbb{R}^r(0\leqslant r\leqslant d-1)$.

5. 若凸集 A 是任意维的，即其维数未必为 $\dim X$，则把结论 1 与 3 用于由 A 所生成的仿射子空间可得：d'维的开凸集与 $\mathbb{R}^{d'}$同胚，d'维紧凸集与 $\mathbb{R}^{d'}$中的单位球同胚.

海因-巴拿赫定理(Hahn-Banach theorem)　凸集几何的基本定理. 它是关于凸集与超平面的定理. 它在泛函分析中有重要的应用，其关键乃是超平面与线性形式之间有着对应关系. 若 X 是仿射空间，A 是 X 的一个非空凸开集，且 L 是 X 的一个仿射子空间，使得 $A\cap L=\varnothing$，则存在 X 的一个超平面，它包含 L，并且与 A 不相交.

分离定理(separated theorem) 凸集几何的重要定理.它是海因-巴拿赫定理的一个重要几何应用.设 X 是一仿射空间,A 和 B 是 X 的两个子集,H 是一个超平面,称 H 分离 A 和 B,是指:A 落在由 H 所决定的一个半空间内,而 B 落在另一个半空间内.若上述的半空间均是开的,则称 H 严格分离 A 和 B.利用分离的概念和海因-巴拿赫定理可得下述诸分离定理:

1.若 A,B 是仿射空间 X 内的两个非空凸集,A 是开的,且 $A\cap B=\varnothing$,则存在一个超平面分离 A 与 B.

2.若在一个仿射空间内有两个非空、不相交的开凸集,则存在一个超平面把它们严格分离.

3.若 A 和 B 是两个凸集,A 是非空闭集,B 是紧集,且 $A\cap B=\varnothing$,则存在一个超平面把它们严格分离.

4.若 A,B 是两个非空、不相交的闭凸集,则存在一个超平面把它们分离.

5.设 X 是以 O 为原点的欧几里得空间,利用海因-巴拿赫定理以及分离的概念,对于 A 的配极子集 A^*,有 $A^{**}=A$.

宽度(width) 凸集的一个重要概念.若 A 是欧几里得空间 X 中的一个紧集,V 是 X 的一个超平面方向,则 X/V 有一个自然的欧几里得结构:紧集 $\rho(A)$ 的长度,即直径 $\mathrm{diam}\rho(A)$,称为在直线 $\xi=V^{\perp}$ 方向上的 A 的宽度,记为 $\mathrm{larg}_{\xi}A$,这里 $\rho:X\to X/V$ 是 X 在商空间 X/V 上的投影,$\rho(A)$ 是仿射直线 X/V 上的一个紧集.又,若 A 是一个紧凸集,当方向 ξ 取遍所有的直线方向,而 $\mathrm{larg}_{\xi}A$ 恒为常数,则称 A 为常宽度凸集.

常宽度凸集(convex set with constant width) 见"宽度".

最大宽度(maximal width) 对紧凸集的一种刻画.设 C 是一个紧凸集.当超平面方向 V 取遍所有的方向时,方向 ξ 取遍所有的直线方向,C 沿 ξ 方向的宽度的上确界称为 C 的最大宽度,记为 $D(C)$;其下确界称为最小宽度,记为 $d(C)$.C 的直径 $\mathrm{diam}(C)=D(C)$.若用 $r(C)$ 表示 C 的内半径,它是包含在 C 内的球面的半径的上确界.若外围空间的维数为 d,则当 d 为奇数时,

$$r(C)\geqslant\frac{d(C)}{2\sqrt{d}};$$

当 d 为偶数时,

$$r(C)\geqslant\frac{\sqrt{d+2}}{2(d+1)}\cdot d(C).$$

最小宽度(minimal with) 见"最大宽度".

金定理(Jung theorem) 凸集几何的重要定理.它是关于欧几里得空间中紧集的定理.该定理断言:若 A 是 d 维欧几里得空间 X 的一个紧集,则 A 被包含在惟一的一个半径最小的球内.此外,若此球中心为 x,半径为 r,则有:

1.$r\leqslant\sqrt{\dfrac{d}{2(d+1)}}\cdot\mathrm{diam}(A)$(此不等式是所有可能的估计中最好的结果).

2.$x\in\varepsilon(A\cap S(x,r))$.

凸集的顶点(vertex of convex set) 对凸集的一种刻画.它是凸集的一种边界点.设 A 是仿射空间 X 的一个 d 维闭凸集,且 $x\in F_rA$.所谓 x 的阶为 α,是指:A 在点 x 处的所有的支撑超平面的交集作为仿射子空间,其维数为 α.若 x 的阶 $\alpha=0$,则称 x 是 A 的一个顶点.换言之,顶点是阶为零的边界点.又,若 $\alpha=d-1$(即点 x 处的支撑超平面是惟一的),则称 A 在点 x 处是光滑的.一个 d 维单形具有阶数为 $0,1,\cdots,d-1$ 的边界;任意一个多胞形也是如此.凸集可有无限多个顶点,但顶点集总是可数的.

凸集的暴露点(exposed point of convex set) 对凸集的一种刻画.它是凸集的一种边界点.设 A 是仿射空间 X 的一个凸集,$x\in F_rA$.若在点 x 处存在一个支撑超平面 H,使得 $H\cap A=\{x\}$,则称 x 是暴露点.若一个凸集的所有的边界点均是暴露点,则称此凸集为严格的凸集.暴露点必是端点,反之未必成立.

严格凸集(strictly convex set) 见"凸集的暴露点".

凸集的端点(extreme point of convex set) 对凸集的一种刻画.它是凸集的一种边界点.设 A 是仿射空间 X 的一个凸集,若存在 $y,z\in A$ 和 $x=((y+z)/2)\in A$,总有 $y=z$,则称 x 为端点.顶点必是端点,但反之不然;然而对于多面体两者是一致的.用 $\mathrm{Extrem}(\cdot)$表示凸集 A 所有端点的集合,此集合未必是闭的,但当 $\dim A=\dim X=2$ 时,$\mathrm{Extrem}(\cdot)$ 是闭的.一个紧区间的端点就是它作为区间的端点.端点有广泛的应用,在测度论里,端点起重要的作用.在应用数学里也会遇到端点.例如,双随机矩阵全体构成一个凸集,此凸集的端点为置换矩阵.

赫利定理(Helly theorem) 关于凸集族的一个定理.设 X 是一个 d 维仿射空间,F 是 X 的一个基数大于 $d+1$ 的凸集族.若 F 满足下述两个条件:

1.F 的任意 $d+1$ 个元素所成的子集,其交集是非空的.

2.F 的所有元素是紧的或者 F 是有限的,

则整个族 F 其交集是非空的.

这个几何性很强的赫利定理有两条推论:

1.若在一个仿射平面 X 内,族 F 由有限个平行线段所组成,并且每三个线段具有一条共同的割线,则整个族 F 具有一条共同的割线.

2. 对于 d 维仿射空间 X 的任意一个紧凸集 A，至少存在一点 $z\in A$，使得 A 中过 z 的任意一条弦 $[u,v]$ 满足

$$\frac{1}{d}\leqslant\frac{|\overrightarrow{zu}|}{|\overrightarrow{vz}|}\leqslant d.$$

规范(normalization)　一个凸函数. 若 X 是欧几里得空间，$f:X\to\mathrm{R}$ 是任意一个凸函数，且对于 $\forall\ x\in X,\lambda>0$ 有 $f(\lambda x)=\lambda f(x)$，则称 f 是 X 上的规范. 例如，X 上的范数是一个规范. 若 f 是一个规范，则 $C(f)=\{x\in X\mid f(x)\leqslant 1\}$ 是 X 的一个凸集. 反之，若 C 是一个紧凸集，且 $0\in C$，则

$$f_C(x)=\inf\{\lambda\mid\lambda>0,x\in\lambda C\}$$

是一个规范，称 f_C 是 C 的距离函数.

距离函数(distance function)　见"规范".

支撑函数(supporting function)　凸集几何的一个概念. 它是同支撑超平面相联系的概念. 它对于凸集的几何研究是一个有力的工具. 若 C 是欧几里得空间 X 中的一个有界集，则

$$h_C(x)=\sup\{(y\mid x)\mid y\in X\}$$

是一个规范，称为 X 的支撑函数. 若 f 和 g 分别是 A 和 B 的支撑函数，则闵科夫斯基和集 $\lambda A+\mu B$ 的支撑函数为 $\lambda f+\mu g$.

布鲁诺-闵科夫斯基定理(Brunn-Minkowski theorem)　凸函数的一个重要定理. 它可用于证明等周不等式. 若 A 和 B 是仿射空间 X 中两个 d 维紧集，并且 L 是 X 上的勒贝格测度，则函数

$$[0,1]\ni\lambda\to L(\lambda A+(1-\lambda)B)^{\frac{1}{d}}\in\mathrm{R}$$

是凹的. 若 E 是 d 维实向量空间，$Q(E)$是 E 上全体欧几里得结构所成的空间，则函数

$$Q(E)\ \ni q\to L(\varepsilon(q))\in\mathrm{R}$$

是严格凸函数，这里 L 是 E 上取定的一个勒贝格测度. 这是构作一个非平凡凸函数的例子. 称 $Q(E)\ni q\to L(\varepsilon(q))\in\mathrm{R}$ 为勒夫纳-伯哈雷特函数.

勒夫纳-伯哈雷特函数(Loewner-Behrend function)　见"布鲁诺-闵科夫斯基定理".

凸多面体(convex polyhedron)　一类特殊的凸集. 设 X 是 d 维实仿射空间，X 的一个凸多面体是 X 的这样一个子集，它是有限多个闭半空间的交集. 凸多面体的有限交仍是凸多面体. 一个凸多面体和一个仿射子空间之交仍是此仿射子空间中的一个凸多面体. 紧凸多面体的有限并集称为多面体. 多面体不一定是凸的，甚至不一定是单连通的.

多胞形(polytope)　一类特殊的凸多面体. 一个多胞形就是一个内部非空的紧凸多面体. 当 $\dim X=2$ 时，一般不称多胞形，而称之为多边形. 例如，平行六面体. 若$(x_i)_{i=0,1,\cdots,d}$是一个单形，则平行六面体

$$P=\left\{x_0+\sum_{i=0}^{d}\lambda_i\overrightarrow{x_0x_i}\,\middle|\,\lambda_i\in[0,1],\forall\ i\right\}$$

是一个多胞形；又如，实心单形

$$S=\left\{\sum_{i=0}^{d}\lambda_i x_i\,\middle|\,\lambda_i\geqslant 0,\sum_i\lambda_i=1\right\}$$

也是一个多胞形.

标准多胞形(standard polytope)　一类多胞形. 三个最重要、最基本的多胞形是：

1. 标准立方体

$$\mathrm{Cub}_d=\{(x_1,\cdots,x_d)\mid|x_i|\leqslant 1,\forall\ i=1,\cdots,d\}.$$

2. 标准余立方体

$$\mathrm{Coc}_d=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_d)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{d}|x_i|\leqslant 1\right\}.$$

3. 标准实心单形

$$\mathrm{Simp}_d=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_{d+1})\,\middle|\,\sum_{i=1}^{d+1}x_i=1,x_i\geqslant 0\right\}.$$

Cub_d 和 Coc_d 是 R^d 中的多胞形，而 Simp_d 是 R^{d+1}的超平面

$$H=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_{d+1})\,\middle|\,\sum_{i=1}^{d+1}x_i=1\right\}$$

中的一个多胞形. 欧几里得空间中与 Cub_d,Coc_d 和 Simp_d 相似的多胞形相应地称为 d 维立方体、d 维余立方体和 d 维实心单形，其中 d 是欧几里得空间的维数.

***d* 维立方体**(d-dimensional cube)　见"标准多胞形".

***d* 维余方体**(d-dimensional cocube)　见"标准多胞形".

***d* 维实心单形**(real central simplex of d-dimension)　见"标准多胞形".

对偶(duality)　凸集几何的一个重要概念. 它是与凸集的配极和凸包络有关的概念. 若 X 是一个欧几里得空间，取 X 中有限个点$(a_i)_{i=1,2,\cdots,n}$，且 $Q=\varepsilon(a_1,a_2\cdots,a_n)$是$(a_i)_{i=1,2,\cdots,n}$的凸包络，则凸集 Q^*(即 Q 的配极)是一个凸多面体. 若还有 $O\in Q^*$，则 Q^* 是一个多胞形，称 Q^* 是 Q 的对偶. Cub_d 的对偶是 Coc_d；Coc_d 的对偶是 Cub_d. 若 Q 是欧几里得空间 X 中的一个多胞形 $O\in Q$，则 $O\in Q^*$，且 Q^* 亦为多胞形，称 Q^* 是 Q 的对偶. 由对偶方法可知：一个多胞形 P 的顶点个数是有限的，则 P 是它们的凸包络. 反过来，有限多个点的凸包络是一个紧的凸多面体.

多面体结构定理(structural theorem of polyhedron)　凸集几何的一个重要定理. 它是关于多面体结构的定理. 若 P 是一个内部非空的凸多面体，且

$$P=\bigcap_{i=1}^{n}R_i$$

是一个最低限度的记法，即 R_i 都是闭半空间，并且 P 不能表示成个数比 n 更小的有限多个闭半空间之交，则：

1. 若不计次序，则 R_i 都是确定的.

2. 若 H_i 表示定义 R_i 的超平面 F_rR_i，则 $H_i\cap P$ 是 H_i 内一个内部非空的凸多面体，称为 P 的第 i 个面（当 $\dim P=2$ 时，称为第 i 条边），记为 Face_iP.

3. $F_rP=\bigcup\limits_i\mathrm{Face}_iP$.

这就是多面体的结构定理. 一般地，一个内部非空的凸多面体记为 $P=\bigcap\limits_iR_i$ 时，总是指最低限度的记法. 若 P 是一个多胞形，则它的面仍为多胞形. 若 H 是外围空间 X 的一个超平面，$H\cap\mathring{P}\neq\varnothing$，并且 P 是一个多胞形，则 $H\cap P$ 是 H 的一个多胞形，$H\cap P$ 的面为 $H\cap\mathrm{Face}_iP$.

k 维面（k-face） 多面体的基本内容. 设 P 是一个内部非空的凸多面体. 把 P 的 $(k+1)$ 维面中的每一个面称为 P 的 k 维面，其中的面是从 P 的 $(d-1)$ 维面开始的 $(k=0,1,\cdots,d-1)$. 一维面称为棱（当 $d=2$ 时，称为边）. 0 维面称为 P 的顶点，也是 P 的端点. 若两个 k 维面的交集为 $(k-1)$ 维面，则称这两个面是相邻的. 例如，R^{d+1} 空间中 d 维实心单形有 C_{d+1}^{i+1} 个 i 维面 $(i=0,1,\cdots,d-1)$，有 $d+1$ 个顶点；d 维立方体有 $2^{d-i}\cdot C_d^i$ 个 i 维面 $(i=0,1,\cdots,d-1)$，有 2^d 个顶点；d 维余立方体有 $2^{i+1}\cdot C_d^{i+1}$ 个 i 维面 $(i=0,1,\cdots,d-1)$，有 2^d 个顶点.

多胞形的体积（volume of polytope） 多胞形的一个基本内容. 设 H 是 d 维欧几里得空间 X 的一个超平面，$x\notin H$，K 是 H 的一个紧集，并且 $C=\varepsilon\{\{x\}\cup K\}$ 是"以 x 为顶点，K 为底的角锥体"，则 C 的体积

$$L(C)=\frac{1}{d}\cdot d(x,H)L_H(K).$$

若 $P=\bigcup\limits_iR_i$ 是一个多胞形，$a\in P$，诸 H_i 是 P 的超平面，则

$$L(P)=\frac{1}{d}\sum_i d(a,H_i)L_{H_i}(\mathrm{Face}_iP),$$

这就是多胞形的体积，这里 $d(a,\cdot)$ 代表几何距离. 多胞形的体积不一定用到勒贝格测度，也可用初等的方法给出多胞形的初等体积 Φ：给定一个欧几里得空间 X 和 X 的一个边长为 1 的立方体 C，则存在惟一的一个映射 Φ，把多胞形 P 的集合映到 R_+ 中，且满足下面三条公理：

1. 对于 X 的任意一个平移 t 和任意一个多胞形 P，有 $\Phi(t(P))=\Phi(P)$.

2. 对于任意的多胞形 P 和 Q，若 $P\cap Q=\varnothing$，且 $P\cup Q$ 是一个多胞形，则 $\Phi(P\cup Q)=\Phi(P)+\Phi(Q)$.

3. $\Phi(C)=1$.

Φ 不依赖于立方体 C 的选取，称为多胞形 P 的体积.

有许多关于初等体积的有趣内容，也有大量未曾解决的这方面的问题. 例如，希尔伯特（Hilbert, D.）提出如下的问题：X 中两个体积相等、维数大于或等于 3 的多胞形是不是总能分解成相互等距的一些多胞形？狄恩（Dehn）断言：对 R^3 中多胞形是不可能的.

球的体积（volume of sphere） 关于球体和球面的测度. 设 X 是 d 维欧几里得空间. 对任意的 $a\in X$ 及 $r\in\mathsf{R}_+$，有以下球的体积计算公式：

$$L(B_{2k}(a,r))=\frac{\pi^k}{k!}r^{2k},$$

$$L(B_{2k+1}(a,r))=\frac{2^{k+1}\cdot\pi^k}{(2k+1)!!}r^{2k+1}.$$

因为 $L(B_d(0,1))$ 应用更广，所以记 $\beta(d)=L(B_d(0,1))$. 此外，将 X 中 $d-1$ 维单位球面 S^{d-1} 的体积记为 $\alpha(d)$，则 $\alpha(d)=d\beta(d)$. 因此

$$\alpha(2d)=\frac{2\pi^d}{(d-1)!},$$

$$\alpha(2d+1)=\frac{2^{d+1}\cdot\pi^d}{(2d-1)!!}.$$

多胞形的面积（area of polytope） 多胞形的测度. 设 $P=\bigcap\limits_iR_i$ 是欧几里得空间 X 的一个多胞形，H_i 是超平面. 多胞形 P 的面积记为 $\mathfrak{U}(P)$，是正的数量

$$\mathfrak{U}(P)=\sum_iL_{H_i}(\mathrm{Face}_iP).$$

当 $\dim P=2$ 时，就是周长. 若 K 是 X 的一个紧集，H 是一个超平面，并且 $p:X\to H$ 是 X 到 H 上的正交投影，则 $L_H(p(K))$ 只依赖于 $\vec{H}$，而同 H 无关. 若 ξ 是 X 的一个单位向量，即 $\xi\in S=S(0,1)$（单位球面），则称 $L_H(p_\xi(K))$ 是投影 $p(K)$ 在 H 内的体积，其中 $\xi\in(\vec{H})^\perp$. 因此，就有柯西公式：对于任意的 $d\geqslant2$ 和任意的多胞形 P，若 σ 表示 S 的典范测度，则

$$\mathfrak{U}(P)=(\beta(d-1))^{-1}\int_{\xi\in S}L(p_\xi(P))\mathrm{d}\sigma(\xi).$$

多胞形的二面角（dihedral angle of polytope） 三维欧氏空间中多面体的二面角的推广. 设 P 是 d 维欧几里得空间 X 中的一个 d 维多面体，对于 P 的任意一个 $(d-2)$ 维面 A，恰好有两个超平面 F 和 F' 经过它，超平面 F 和 F' 确定了 X 的两个单位向量 ξ 和 ξ'，其中 ξ 与 F 正交且在 F 靠 F' 的一侧，ξ' 与 F' 正交且在 F' 靠 F 的一侧，则 P 在 $(d-2)$ 维面 A 处的二面角就是角度

$$\widehat{\langle\xi,\xi'\rangle}\in(0,\pi).$$

当 $d=2$ 时，二面角就是角，而 A 是 P 的一个顶点.

施泰纳-闵科夫斯基公式(Steiner-Minkowski formula) 凸集几何中的一个重要公式.它是关于多胞形体积的公式.它由两个公式组成,一个是多胞形的体积计算公式,另一个是紧凸集的体积公式.设 P 是欧几里得空间中任意一个 d 维多胞形,对于

$$B(P,\lambda)=\{x\in X \mid d(x,P)\leqslant\lambda\}\ (\lambda\in\mathbb{R}_+),$$

伴有数量

$$L_i(P)\in\mathbb{R}_+^*\ (i=0,1,\cdots,d),$$

使得对于$\forall\ \lambda\in\mathbb{R}_+^*$,体积

$$L(B(P,\lambda))=\sum_{i=0}^{d}L_i(p)\lambda^i.$$

此外,$\forall\ P,L_0(P)=L(P),L_1(P)=\mathfrak{U}(P),L_d(P)=\beta(d)$.对于欧几里得空间中任意一个 d 维紧凸集 C,伴有数量 $L_i(C)(i=0,1,\cdots,d)$,使得$\forall\ \lambda\in\mathbb{R}_+^*$,

$$L(B(C,\lambda))=\sum_{i=0}^{d}L_i(C)\lambda^i.$$

对于任意的 $C,L_0(C)=L(C),L_1(C)=\mathfrak{U}(C),L_d(C)=\beta(d)$.式中 $L_i(\cdot)$都是附着于紧凸集的有趣的等距不变量.当 $d=3$ 时,称 $L_2(C)$为 C 的全平均曲率.当 F_rC 是 X 的一个 C^2 类子流形时,

$$L_2(C)=\int_{F_rC}\mu\mathrm{d}\sigma(\xi),$$

这里 σ 是 F_rC 的典范测度,而 $\mu:F_rC\to R$ 是它的平均曲率.

正多胞形(regular polytope) 一类重要的特殊胞形.若给定欧几里得空间 X 中一个 d 维多胞形 P,d 元组$(F_0,F_1,\cdots,F_{d-1})$由 P 的使 $F_i\subset F_{i+1}(i=0,1,\cdots,d-2)$的 i 维面所构成,则称$(F_0,F_1,\cdots,F_{d-1})$为 P 的旗.若 P 的稳定群 $G(P)=I_{sP}(X)$对于 P 的所有的旗都是可迁的,则称 P 是一个正多胞形.下面给出两个正多胞形的等价定义:

1.d 维多胞形 P 称为正多胞形,是指:它的所有的面都是彼此等距的 $d-1$ 维正多胞形,并且所有的二面角相等.

2.d 维多胞形 P 称为正多胞形,是指:它的所有的面是 $d-1$ 维正多胞形,并且,对 P 的任意一个顶点 x,P 的含 x 的棱的另一端点都属于同一超平面,并且在此超平面内构成一个 $d-1$ 维正多胞形.

多胞形 P 的顶点的重心 O 与所有顶点的距离相等,即这些顶点位在以 O 为中心的一个球面上,称此球面为 P 的外接球面,称 O 为 P 的中心.P 的每一个 i 维面$(i=2,3,\cdots,d-1)$是一个 i 维正多胞形.三维、四维正多胞形的研究不仅同代数上的四元数和一般五次方程具有一定的联系,而且利用正多胞形可对欧几里得空间的正则铺嵌问题进行分类:二维铺嵌用的是等边三角形、正方形和正六边形,三维铺嵌可用立方体.此外,符号为$\{r_1,r_2,\cdots,r_{d-1}\}$的正多胞形能铺嵌一个 d 维空间的充分必要条件是存在一个符号为$\{r_2,r_3,\cdots,r_d\}$的正多胞形,使得

$$\rho(r_1,r_2,\cdots,r_{d-1},r_d)=0,$$

这个符号为$\{r_2,r_3,\cdots,r_d\}$的多胞形对应于正则铺嵌的星形集.这里函数 ρ 满足

$$\rho(r_1,r_2\cdots,r_{d-1})=1-\frac{\cos^2\dfrac{\pi}{r_1}}{\rho(r_2,r_3,\cdots,r_{d-1})}.$$

多胞形的旗(flag of polytope) 见"正多胞形".

正多胞形的外接球面(circumscribed sphere of regular polytope) 见"正多胞形".

正多胞形的中心(center of regular polytope) 见"正多胞形".

正多胞形的星形集(star set of regular polytope) 一种特殊的集合.它是由正多胞形确定的集合.设 P 是一个以 O 为中心的正多胞形,x 是 P 的一个顶点.若 A 是 P 中含 x 的一条棱,y 是另一个顶点,则 P 的所有顶点都和 y 一样属于同一个与$\overrightarrow{Ox}$正交的超平面 H,交集 $P\cap H$ 是一个正多胞形,称此正多胞形为 P 在点 x 处的星形集,记为 Et_xP.因为所有这些星形集都是等距的,所以又可记为 $\mathrm{Et}\,P$.例如,$\mathrm{Et}(\mathrm{Coc}_d)=\mathrm{Coc}_{d-1}$.

正多胞形的符号(symbol for regular polytope) 正多胞形的一种刻画.它是正多胞形分类的有力工具之一.设 P 是一个 d 维正多胞形.所谓 P 的符号,记为$\{r_1(P),r_2(P),\cdots,r_{d-1}(P)\}$,是指归纳定义如下的 $d-1$ 个整数的序列:$r_1(P)$是 P 的二维面的边数,而$\{r_2(P),r_3(P),\cdots,r_{d-1}(P)\}$是 $\mathrm{Et}(P)$的符号.依定义有 $r_i\geqslant 3$.Simp_d 的符号是$\{3,3,\cdots,3\}$;Cub_d 的符号是$\{4,3,\cdots,3\}$;Coc_d 的符号是$\{3,3,\cdots,3,4\}$;正二十面体的符号是$\{3,5\}$;正十二面体的符号是$\{5,3\}$;P 的对偶多胞形 P^* 的符号是

$$\{r_{d-1}(P),r_{d-2}(P),\cdots,r_1(P)\}.$$

正多胞形的基本关系式(fundamental relation of regular polytope) 正多胞形的一种刻画.关于正多胞形符号的一个公式.若 P 是一个 d 维正多胞形,l 是其棱的公共长度,外接球的半径为 r,并记 $\rho(P)=l^2/4r^2$,则当 P 具有符号$\{r_1,r_2,\cdots,r_{d-1}\}$时,在 $\rho(P)$和 $\rho(\mathrm{Et}P)$之间有关系式

$$\rho(P)=1-\frac{\cos^2\dfrac{\pi}{r_1}}{\rho(\mathrm{Et}P)}.$$

此式称为正多胞形的基本关系式.因为数 $\rho(P)$只依赖于 $d-1$ 元组$\{r_1,r_2,\cdots,r_{d-1}\}$,所以可记为 $\rho(r_1,r_2,\cdots,r_{d-1})$,每当一个正多胞形的符号为$\{r_1,r_2,\cdots,r_{d-1}\}$时,多胞形的基本关系式可写作

$$\rho(r_1,r_{d-1})=1-\frac{\cos^2\dfrac{\pi}{r_1}}{\rho(r_2,r_3,\cdots,r_{d-1})}.$$

正多胞形的分类(classification of regular polytope) 凸集几何的基本问题之一. 用正多胞形符号给出的一种分类. 借助于正多胞形的符号以及正多胞形的基本关系式,有施拉夫里(Schläfli,M.)于1850年给出的著名的施拉夫里定理,该定理断言:对于一个正多胞形,它所有可能取的符号可用下表给出:

$d=2$: $\{n\}$(n 是$\geqslant 3$ 的任意整数);

$d=3$: $\{3,3\},\{3,4\},\{4,3\},\{3,5\},\{5,3\}$;

$d=4$: $\{3,3,3\},\{3,3,4\},\{4,3,3\},\{3,4,3\},\{3,3,5\},\{5,3,3\}$;

$d\geqslant 5$: $\{3,3,\cdots,3\},\{3,\cdots,3,4\},\{4,3,\cdots,3\}$.

对应于此表中的每一个符号,存在一个正多胞形,以它作为符号. 两个具有相同符号的正多胞形是相似的. 当 $d=2$ 时,有无限多个正多边形,即对于任意的整数 $n\geqslant 3$,总存在一个 n 边正多边形. 当 $d=3$ 时,依符号$\{3,3\},\{3,4\},\{4,3\},\{5,3\},\{3,5\}$,相应地是三维欧几里得空间中的正四面体、正八面体、立方体、正十二面体和正二十面体. 当 $d=4$ 时,依给出符号$\{3,3,3\},\{3,3,4\},\{4,3,3\}$,相应地是四维欧几里得空间中的正则单形、余立方体和立方体;$\{3,3,4\}$与$\{4,3,3\}$是互为对偶的正多胞形;$(3,3,5)$与$(5,3,3)$也是两个互为对偶的正多胞形;而$\{3,4,3\}$与$\{3,3,5\}$是四维欧几里得空间中两个较复杂的正多胞形:$\{3,4,3\}$具有 24 个顶点,它们是 Cub_4 的顶点与位似比为 2 的 Coc_4 的顶点之并集,称为四维 24 面体;$\{3,3,5\}$具有 120 个顶点,它们是标准$\{3,4,3\}$的 24 个顶点,以及八个点$(\pm\tau,\pm 1,\pm\tau^{-1},0)$经坐标偶置换得出的所有的点,这里

$$\tau=\frac{(\sqrt{5}+1)}{2},$$

称$\{3,3,5\}$为四维 600 面体;其对偶$\{5,3,3\}$称为四维 120 面体. 当 $d\geqslant 5$ 时,正多胞形的分类尤为简单,只有三个正多胞形$\{3,3,\cdots,3\},\{3,3,\cdots,4\}$和$\{4,3,\cdots,3\}$. 它们相应地为正则单形、余立方体和立方体.

紧凸集的体积(volume of compact convex set) 对于紧凸集的一种刻画. 凸集中一个重要概念. 采用多胞形逼近紧凸集得出紧凸集的体积. 设 X 是欧几里得空间. 若

$$\mathscr{F}=\left\{(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{d+1})\in \mathsf{R}^{d+1}\,|\,\forall\, i,\ \lambda_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{d+1}\lambda_i=1\right\},$$

则 $\mathscr{F}$ 是 R^{d+1}的一个紧集. 若 $\mathscr{C}=\{F\in\mathscr{F}\,|\,F$ 是凸集$\}$,则 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{F}$ 的闭集,且是完全集. 记

$$\mathscr{C}'=\{C\in\mathscr{C}\,|\dim C=\dim X\};$$

$\mathscr{P}$ 为所有紧凸多面体的集合;$\mathscr{P}'$是所有多胞形的集合. 于是,$\mathscr{P}$ 在 $\mathscr{C}$ 内是稠密的. 对于 $C\in\mathscr{C}$,C 的体积

$$\mathscr{L}(C)=\sup\{\mathscr{L}(P)\,|\,P\in\mathscr{P}\text{ 和 }P\subset C\}=\inf\{\mathscr{L}(P)\,|\,P\in\mathscr{P}\text{ 和 }P\supset C\}.$$

利用多胞形体积的定义,把上式作为 $\mathscr{L}(\cdot)$在全体凸集上的定义,避免求助于积分理论. 体积 $\mathscr{L}:\mathscr{C}'\to R$ 是严格递增的,体积 $\mathscr{L}:\mathscr{C}\to\mathsf{R}$ 是一个连续函数. 紧凸集内点之间的最大距离称为紧凸集的直径.

紧凸集的直径(diameter of compact convex set) 见"紧凸集的体积".

紧凸集的面积(area of compact convex set) 对于紧凸集的一种刻画. 紧凸集的测度. 根据多胞形面积的定义,对于维数与欧几里得空间 X 的维数相等的任意凸集 C,积分

$$\mathfrak{U}(C)=(\beta(d-1))^{-1}\int_{\xi\in S}\mathscr{L}(p_\xi(C))\sigma$$

存在,称它为 C 的面积,式中 S 为 X 的单位球面. 当 $d=2$,即 C 为欧几里得平面上的凸集时,$\mathfrak{U}(C)$称为长度. 此时,凸集 C 的长度同 F_rC 的长度,这两个长度概念是一致的. 类似于紧凸集体积的定义,$\mathfrak{U}(C)=\sup\{\mathfrak{U}(P)\,|\,P\in\mathscr{P}'$ 和 $P\subset C\}=\inf\{\mathfrak{U}(P)\,|\,P\in\mathscr{P}'$ 和 $P\supset C\}$.

等周不等式(isoperimetric inequality) 凸集几何中的一个著名不等式. 它是关于凸集的体积及其面积的不等式. 若 C 是欧几里得空间中任意一个内部非空的 d 维凸集,则

$$\mathfrak{U}(C)\geqslant d(\beta(d))^{1/d}\mathscr{L}(C)^{(d-1)/d}$$

或

$$\frac{\mathfrak{U}(C)}{\alpha(d)}\geqslant\left(\frac{\mathscr{L}(C)}{\beta(d)}\right)^{(d-1)/d},$$

式中 $\mathfrak{U}(C)$,$\mathscr{L}(C)$分别代表 C 的面积和体积. 若 C 是一个球,则等号成立;反之,若等号成立,则 C 是一个球. 上述等周不等式中等号成立的条件表明:在体积给定的所有内部非空的紧凸集中,以球的面积最小;或者说,在面积给定的这些凸集中,以球的体积最大. 当 $d=2$ 时,$\beta(2)=\pi$,$\mathfrak{U}(C)=l$(周长),$\mathscr{L}(C)=s$(代表面积),从而得到平面上的等周不等式 $l^2\geqslant 4\pi s$,从而就有在周长给定的一切图形中(包括凹的),以圆的面积最大. 换一种写法:若 C 是欧几里得平面上一个紧凸集,$\Gamma=F_rC$ 是一条简单闭曲线,则等周不等式为

$$\mathrm{long}(\Gamma)\geqslant 2\sqrt{\pi}(\mathscr{L}(\varepsilon(\Gamma)))^{1/2}.$$

亏差(defect) 等周不等式研究中的一个基本概念. 所谓亏差就是

$$\mathfrak{U}(C)-d(\beta(d))^{1/d}(\mathscr{L}(C))^{(d-1)/d}.$$

当两个量不相等时,研究它们的差是好还是不好,是个十分有趣的问题. 关于亏差的结果很少. 若记 $r(C)$为内切于 C 的球面的最大半径,即 C 的内半径,又记 $R(C)$是含 C 的球半径的下确界,称为外半径,则有

$$(\mathfrak{U}(C))^d - d^d(\beta(d))(\mathscr{L}(C))^{d-1} \geqslant [(\mathfrak{U}(C))^{1/(d-1)} - (d\beta(d))^{1/(d-1)} r(C)]^{d(d-1)}.$$

对于平面的情形，则有

$$(\mathfrak{U}(C))^2 - 4\pi\mathscr{L}(C) \geqslant \pi^2(R(C) - r(C))^2.$$

另外，若已给整数 $n\geqslant 3$，而且 C 是一个凸 n 边形，则

$$n\tan\frac{\pi}{n}(r(C))^2 \leqslant \mathscr{L}(C) \leqslant \frac{1}{2}n\sin\frac{\pi}{n}(R(C))^2,$$

$$2n\tan\frac{\pi}{n}\cdot r(C) \leqslant \mathfrak{U}(C) \leqslant 2n\sin\frac{\pi}{n}R(C).$$

等号当且仅当 C 是正 n 边形时成立. 设 C 是平面上一个紧凸集，若一个凸 n 边形 P 内接于 C 且面积取最大值，则有

$$\mathscr{L}(P) \geqslant \frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n}\mathscr{L}(C).$$

等号当且仅当 $F.C$ 是一个椭圆时成立.

二维凸图形(2-dimensional convex figure)　凸集几何的研究对象之一. 它是一种平面凸图形. 若一个图形包含连结它的任意两点的整个线段，则称此图形是凸的. 此外，若一个凸图形能被一个半径为有限数的圆所包含，则称为有界凸图形；反之称为无界凸图形. 圆、半圆、椭圆、所有三角形都是有界凸图形. 半平面、两条平行线之间的图形都是无界凸图形. 二维凸图形的边界是一条线，称为凸线. 若二维凸图形 P 包含不共线三点 A,B,C，则 P 包含整个 $\triangle ABC$；包含不共线 A,B,C 三点的最小凸图形是 $\triangle ABC$. 点称为零维凸图形，直线、射线、线段称为一维凸图形. 它们是平面上特殊的凸图形. 两个凸图形的交是同属于两个图形的所有点的集合，即它们的公共部分. 若两个图形无公共点，则称它们不相交，即其交集为空集. 例如，两条直线的交是一点或空集；半平面和圆的交是整圆，或弓形，或一点，或为空集. 若两个凸图形的交非空，则它们的交仍是凸图形(零维、一维或二维). 垂直于直线 p 的平面凸图形两条支撑线之间的距离称为此凸图形在 p 方向的宽度.

有界凸图形(bounded convex figure)　见“二维凸图形”.

无界凸图形(unbounded convex figure)　见“二维凸图形”.

凸线(convex line)　见“二维凸图形”.

零维凸图形(zero-dimensional convex figure)　见“二维凸图形”.

一维凸图形(1-dimensional convex figure)　见“二维凸图形”.

凸图形的宽度(width of convex figure)　见“二维凸图形”.

支撑线(supporting line)　与凸图形有关的一类特殊直线. 已给二维凸图形 P 和定直线 l，若整个凸图形 P 在直线 l 的一侧，而且直线 l 与 $F.P$ 有公共点，则称直线 l 是凸图形 P 的支撑线. 支撑线也可以定义为包含了图形边界点但不包含内点的直线. 若 A 是 $F.P$ 与支撑线 l 的公共点，则称 l 与 P 在点 A 相接，并称 A 为支撑点. 支撑线 l 可规定正、负两个相反的方向. 当向 l 的正向看去时，被支撑线 l 分出的两个半平面一在左边，一在右边. 规定支撑线 l 的正向，使凸图形 P 在支撑线 l 的左边. 因此，P 的任何两条平行支撑线必有相反的方向.

支撑点(supporting point)　见“支撑线”.

凸多边形(convex polygon)　一类特殊的凸图形. 边界由若干条线段构成的凸图形称为凸多边形. 这些线段称为凸多边形的边. 邻边的公共点称为凸多边形的顶点. 若凸多边形 Q 包含凸图形 P 且它的边都是凸图形 P 的支撑线的一部分，则称 Q 是凸图形 P 的外切多边形. 若凸多边形 Q 的每一个顶点在 $F.P$ 上，则称 Q 是凸图形 P 的内接多边形. 做 $F.P$ 的内接凸 n 边形 P_n，当 n 趋于无穷大时，若其最大边长趋于零，则 P_n 的周长必趋于一个极限值. 此极限值称为凸图形 P 的周长.

凸图形的外切多边形(circumscribed polygon of convex figure)　见“凸多边形”.

凸图形的内接多边形(inscribed polygon of convex figure)　见“凸多边形”.

凸图形的周长(perimeter of convex figure)　见“凸多边形”.

正多边形(regular polygon)　一类特殊的凸多边形. 在欧几里得平面上，若凸多边形的各边长度相等，且各角也相等，则称此凸多边形为正多边形. 若 n 表示多边形的边数，则角度的公共值为 $(n-2)\pi/n$. 对于任一整数 $n\geqslant 3$，总存在一个 n 边正多边形. 一个多边形 P 是正多边形的充分条件是 $G(P)$ 关于序对 (x,F) 是可迁的，这里 (x,F) 是由 P 的一个顶点 x 和 P 的一条含 x 的棱 F 所组成的，而

$$G(P) = I_{sP}(X) = \{g \in I_s(X) \mid g(P) = P\}.$$

等宽曲线(equal width curve)　亦称恒宽卵形. 一类特殊的凸集. 欧几里得平面上一个常宽度凸集. 即指欧几里得平面上的一个凸集 C，它使得 $\forall\xi\in S$，线段 $P_\xi(C)$ 有定长. 这等价于沿 ξ 方向的 C 的两条支撑直线保持定距离. 在此情形下，不仅有圆盘，还有鲁洛克斯三角形(用等边三角形的边长为半径，三个顶点为圆心做圆弧所构成的曲边三边形). 若用 l 表示这个常数宽度，则等宽曲线的长度为 πl.

恒宽卵形(equal width egg-shape)　即“等宽曲线”.

凸体(convex body)　亦称三维凸图形. 二维凸图形的简单推广. 三维空间中其点不全在同一平面

上的凸图形称为凸体.例如,球、平行六面体、底为凸多边形的棱柱都是凸体.若凸体可含于一个球内,则称为有界的;反之称为无界的.若凸体 Q 包含不共面四点 A,B,C,D,则 Q 也包含整个四面体 $ABCD$.此外,四面体 $ABCD$ 是包含 A,B,C,D 四点的最小凸体.在通常意义下,凸体是紧致的、凸的,并有非空内部.

三维凸图形(three-dimensional convex figure) 即“凸体”.

有界凸体(bounded convex body) 见“凸体”.

无界凸体(unbounded convex body) 见“凸体”.

支撑面(supporting plane) 凸集几何的一个概念.它是支撑线的推广.也是支撑超平面的特例.设给定凸体 Q 和平面 α,若平面 α 同 F_rQ 有公共点,但同 $\mathring{Q}$ 没有公共点,则称 α 是 Q 的支撑面.也可把支撑面定义为与 Q 有非空交集,且 Q 位于它的一侧的一个平面.凸体 Q 内每条以内点 O 为始点的射影 OL,有且只有一个支撑面同它垂直相交.对任何直线 q,有界凸体 Q 有两个垂直于 q 的支撑面.

距 离 几 何

距离几何(distance geometry) 现代几何学的一个分支,它的研究对象是定义了距离的几何空间,其最初的任务是借助于定义在某些空间上的距离对这些空间进行分类,后来的发展超出了这个框架.距离几何一词得名于当代美国数学家布卢门塔尔(Blumenthal,L. M.),他是《距离几何的理论和应用》一书的作者,该书被公认为本领域的奠基性著作.他于1938年首先以《距离几何》作为一篇论文的标题,该名称随即被沿用至今.

距离的一般概念比日常生活中的距离概念及数学中的度量概念要广泛些.设 S 是一个集,F 是一个域,甚至更一般地,F 是一个抽象群或有序集.一个映射 $d:S\times S\to F$ 称为定义在 S 上的一个抽象距离,而 (S,d) 就称为一个抽象距离空间或简称一个距离空间.特别地,在上述定义中,若 F 是实数域而距离函数 d 满足以下条件,即对于 $\forall\ p,q\in S$ 有:

1. $d(p,q)=d(q,p)$;

2. $d(p,q)\geqslant 0$,而 $d(p,q)=0$ 当且仅当 $p=q$;

则将 d 称为 S 上的一个半度量,而称 (S,d) 为一个半度量空间.

若距离函数 d 还满足三角形不等式,即对于 $\forall\ p,q,r\in S$,成立着

3. $d(p,q)+d(q,r)\geqslant d(p,r)$;

则称 (S,d) 是一个度量空间.

两个距离空间 (S,d) 和 (S^*,d^*) 之间的一个双射 $f:S\to S^*$ 称为一个合同或称为等长,若 $\forall\ p,q\in S$ 成立着

$$d^*(f(p),f(q))=d(p,q).$$

当然合同的概念也可以限制在两空间的子集上来使用,特别是当 S 与 S^* 之间不存在全空间合同对应的情形.

距离几何的经典问题之一是把一类距离空间从更大的一类中区别出来.较为精确地讲,设 Σ 是一类距离空间而 Σ_0 是 Σ 的一个子类,对于一个空间 $(S,d)\in\Sigma$,试问需要对距离函数 d 加上什么条件,才能使 $(S,d)\in\Sigma_0$? 这方面的一个简单例子是常曲率空间的分类.在给定的常曲率空间中取一个非退化的三角形,考虑这个三角形任意两边中点的距离.若这个距离等于第三边之半,则可判定该空间是欧氏的.若这距离小于或大于第三边之半,则该空间分别是罗巴切夫斯基的或正曲率的.门杰(Menger,K.)于1928－1931年发表的几篇论文中首先给出了一个半度量空间成为欧氏空间的充分必要条件,他的条件是借助于所谓凯莱-门杰行列式来表述的,借此他甚至给出了欧氏几何的一个新的公理系统.凯莱(Cayley,A.)已经注意到 n 维欧氏空间中 $n+2$ 个点的相互距离之间存在着一个依赖关系,更重要的是他于1941年将这关系用一个十分简洁的行列式来表述,这一思想后来在门杰的工作中得到了系统的发展.安达拉胡特(Andalafte ,E. Z.)和布卢门塔尔继续研究度量空间成为巴拿赫空间以及进一步成为欧氏空间的条件.这里给出的条件不再借助于凯莱-门杰行列式,而立足于度量凸、度量外凸性质、弱毕达哥拉斯性质等度量特征.与上述空间判属问题大同小异的一个问题是合同嵌入或称等长嵌入.给了距离空间 (S,d) 的一个子集 A 和另一距离空间 (S^*,d^*),试问是否存在一个单射 $f:A\to S^*$,使得 $\forall\ p,q\in A$ 有

$$d(p,q)=d^*(f(p),f(q))?$$

若这样的 f 存在,则称 A 可以合同地嵌入于 (S^*,d^*).例如,能否在三维欧氏空间中构造一个四面体使其具有给定的棱长?施恩伯格(Schoenberg,I. J.)首先将二次型应用于合同嵌入问题.设 $A=\{p_0,p_1,\cdots,p_k\}$ 是半度量空间 (S,d) 中的点列.记 $d_{ij}=d(p_i,p_j)$;又,对于 $i,j=1,2,\cdots,k$,记

$$a_{ij}=\frac{d_{0i}^2+d_{0j}^2-d_{ij}^2}{2}.$$

做一个二次型 $\mathrm{Q}(A)=\sum a_{ij}x_ix_j$.施恩伯格指出:$A$ 可以合同嵌入欧氏空间的充分必要条件是二次型 $\mathrm{Q}(A)$ 是半正定的.此外,若 $\mathrm{Q}(A)$ 的秩是 n,则 A 可以嵌入 E^n 而不能嵌入 E^{n-1}.

有关的二次型和双线性型的应用给距离几何的研究带来许多方便.德瑞斯(Dress,A. W. M.)和哈

韦尔(Havel,T. F.)于1987年发表的文章《距离几何的基础理论》,对此做了某些统一的系统处理.实际应用中产生的一个问题是:若 A 不能合同地嵌入 (S^*,d^*),则怎样将前者近似地嵌入后者?换言之,如何将 A 映射于 S^*,这映射虽不能完全保持距离,却使得某个描述距离改变的损失函数取到最小值?若用统计学的语言来讲,则这恰好是多维尺度化问题.克鲁斯卡尔(Kruskal,J. B.)等统计学家于20世纪70年代发展起来的多维尺度化,主题是将距离空间(或其子集)如何最佳近似地嵌入一个低维数的欧氏空间、闵科夫斯基空间或双曲空间.这一任务有极强的实际应用背景.分子构型研究中提出这样的问题:用二维核磁共振技术获得某个分子的各原子之间的相互距离的数据后,如何确定这个分子在三维欧氏空间中的构型?若将该分子中各原子的集合看做一个半度量空间 (A,d),则这里 d 是所测得的数据.由于测量误差不可避免,所以,一般说来 (A,d) 是不能合同嵌入于 E^3 的.如何将所获数据略做修改使能嵌入 E^3,这正是统计学中多维尺度化所考虑的问题之一.

克瑞彭(Crippen,G. M.)和哈韦尔等人于20世纪80年代就距离几何在分子构型中的应用发表了一系列的著作,不过他们没有使用统计学语言.而统计学家在多维尺度化的研究中业已直接引用距离几何的概念和结果.分子构型学还向距离几何提出了较难的任务:虽然不知道各原子间的准确值 d_{ij},但是,已经知道每个 d_{ij} 必定在对应的某个小区间中取值,即 $l_{ij}\leqslant d_{ij}\leqslant m_{ij}$.试问如何在这些给定的小区间 $[l_{ij},m_{ij}]$ 中各取一个值 d_{ij},使其可以合同地嵌入 E^3 或其他某个指定维数的空间?这样的 d_{ij} 是否都存在?即,给定各个距离上下界之后,要判定对应的合同嵌入是否存在.有人指出这至少是一个NP难度的问题,并称之为距离几何的基本问题.当然,对于具体问题而言,充分条件有时也能奏效.至于要想构造性地给出这样的嵌入就更难些,至今还没有一个普遍行之有效的算法.将合同嵌入技巧应用于几何本身,亚历山大(Alexander,R.)在几何不等式的研究中发展了度量和的概念,他和斯托拉斯基(Stolarsky,K. B.)考虑了距离几何中一系列极值问题.一个著名的斯托拉斯基问题是:一个球面上的5个点如何分布才能使5点间的10条弦的长度之和为最大?给了一些点之间的部分而非全部距离信息,人们能够做些什么?首先是,未直接给出的那部分距离是否被惟一地确定了或者被确定到什么程度?这就是所谓刚性问题,可参阅康内利(Connelly,R.)等人的文章.下一个问题是,如何根据给出的部分距离信息来计算未给出的那部分,若后者能被前者所确定的话.对于欧氏空间,这任务依赖的工具是凯莱-门杰代数,它导致了采用无坐标方法或称不变量方法来对几何学进行算法化的研究方向.近期十分活跃的几何定理计算机辅助证明领域,有一部分工作就是基于不变量方法的.

综合微分几何正是作为一种无坐标几何而归属于此(参见“美国数学会数学主题分类表”).该领域的奠基性工作,首推布斯曼(Busemann,H.)的专著《测地线的几何》.该书直接对度量空间加上几条极简单的公理建立了 G 空间的概念.用无坐标方法研究 G 空间中的测地线获得一系列非平凡结果.例如,对二维 G 空间的高斯-波内定理(一般的 G 空间上是否有流形结构尚不清楚,也是一个重要的未解决问题).综合微分几何的研究和应用有着十分广阔的前景.

半度量空间(semi-metric space) 见“距离几何”.

度量空间(metric space) 见“距离几何”.

度量凸(metrically convex) 距离几何的一个概念.它是半度量空间的一种类似于一般的凸性但稍弱些的性质.此概念是门杰(Menger,K.)引进的.一个半度量空间 (S,d) 称为度量凸的,若对于其中任意两个不同的点 x,z 总能找到一点 y,使得 $y\neq x,z$ 而且

$$d(x,y)+d(y,z)=d(x,z).$$

例如,实轴上全部有理点按常义的距离构成一个半度量空间,这空间按上面的定义显然是度量凸的.但它不是通常意义下的凸集.

度量外凸(metrically externally convex) 距离几何的一个概念.它是类似于线段的可延性那样的性质.一个半度量空间 (S,d) 称为度量外凸的,若对其中任意两点 x,y 总能找到一点 z 使得 $y\neq z$ 而且 $d(x,y)+d(y,z)=d(x,z)$.稍弱一点的是局部度量外凸的性质.一个半度量空间 (S,d) 称为局部度量外凸的,若对其中任一点 p 可以找到一个小正数 $\varepsilon(p)$,对于 S 中任何两个满足

$$d(p,x)<\varepsilon(p)\text{和}d(p,y)<\varepsilon(p)$$

的点 x 和 y,总能找到一点 z 使得 $y\neq z$ 而且 $d(x,y)+d(y,z)=d(x,z)$.例如,球面就是局部度量外凸的度量空间.

局部度量外凸(locally metrically externally convex) 见“度量外凸”.

凯莱-门杰行列式(Cayley-Menger determinant) 联系于半度量空间中某个有限子集的行列式,定义如下.设 $A=\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$ 是某半度量空间中的一个 k 元有序组.记

$$d_{ij}=d(p_i,p_j)(\forall\ i,j=1,2,\cdots,k),$$

而将阶方阵 $L=[d_{ij}^2]$ 称为 A 的平方距离阵.又记 $J=[1\cdots1]$ 表示所有元素都等于1的 $1\times k$ 阶阵,而将

$k+1$ 阶方阵及对应的行列式

$$\begin{bmatrix} 0 & J \\ J' & -\frac{1}{2}L \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & J \\ J' & -\frac{1}{2}L \end{vmatrix}$$

分别称为 A 的凯莱-门杰矩阵和凯莱-门杰行列式(这里 J' 表示 J 的转置).该矩阵依赖于 A 中各点的排序而其行列式的值却不依赖于这个排序.设 $\{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$ 是欧氏空间中一个单形的顶点集,记 $D(p_0, p_1, \cdots, p_n)$ 表示其凯莱-门杰行列式,它具有如下的几何意义:

$$D(p_0, p_1, \cdots, p_n) = -(n!)^2 V^2,$$

这里 V 表示该单形的 n 维体积.应注意到某些文献中的定义略有出入,在那里凯莱-门杰阵和凯莱-门杰行列式分别是指

$$\begin{bmatrix} 0 & J \\ J' & L \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & J \\ J' & L \end{vmatrix}.$$

平方距离阵(squared distance matrix)　见"凯莱-门杰行列式".

凯莱-门杰矩阵(Cayley-Menger matrix)　见"凯莱-门杰行列式".

度量方程(metric equations)　距离几何的一个重要概念.它是几何学算法化和机械化的有效工具.指一组方程,它们给出某些距离空间中各点距离之间的依赖关系.例如,对于 n 维欧氏空间 E^n 中任意一个 k 元组,当 $k \geqslant n+2$ 时这样的关系是存在的,即其凯莱-门杰行列式等于 0.此即著名的凯莱定理.进而,若 $k \geqslant n+3$,则其凯莱-门杰行列式的所有余子式都等于 0,这就得到更多的度量方程.其他有限维常曲率空间也有类似的度量方程.这一概念近期已被推广到某些更抽象的距离空间.

西尔维斯特-布卢门塔尔行列式(Sylvester-Blumenthal determinant)　凯莱-门杰行列式的一种推广.设 $A=\{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ 和 $B=\{q_1, q_2, \cdots, q_k\}$ 是某个半度量空间中的两个 k 元有序组.记

$$d_{ij} = d(p_i, q_j)(\forall\, i, j = 1, 2, \cdots, k)$$

而构造一个 k 阶方阵 $L=[d_{ij}^2]$.又记 $J=[1\cdots 1]$ 表示其所有元素都等于 1 的 $1\times k$ 阶阵,而将下面的 $k+1$ 阶矩阵及其对应的行列式

$$\begin{bmatrix} 0 & J \\ J' & -\frac{1}{2}L \end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & J \\ J' & -\frac{1}{2}L \end{vmatrix}$$

分别称为 $\{A, B\}$ 的西尔维斯特-布卢门塔尔矩阵和西尔维斯特-布卢门塔尔行列式;后者在一些文献中常被记为

$$D(p_1, p_2, \cdots, p_k; q_1, q_2, \cdots, q_k).$$

它有明显的几何意义.若 n 维欧氏空间中两个 k 维单形的 k 维体积为 V_p, V_q;其顶点集分别为 $\{p_0, p_1, \cdots, p_k\}$ 和 $\{q_0, q_1, \cdots, q_k\}$;两单形所在的两个 k 维仿射子空间的夹角为 θ,则有

$$D(p_0, p_1, \cdots, p_k; q_0, q_1, \cdots, q_k) = \pm (k!)^2 V_p V_q \cos\theta,$$

等式右边的正负号可以根据某种简单的法则确定.该等式称为达布定理,其应用尚未被充分研究.例如,对于三维欧氏空间中的两个三角形 $p_1p_2p_3$ 和 $q_1q_2q_3$,若有 $D(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3)=0$,则下列三情况至少出现其一:

1. p_1, p_2, p_3 三点共直线.
2. q_1, q_2, q_3 三点共直线.
3. 两个三角形所在的两平面互相垂直.

对于 E^n 中的两个 n 维单形,达布定理导致

$$D(p_0, p_1, \cdots, p_n; q_0, q_1, \cdots, q_n) = -(n!)^2 V_p V_q.$$

其中的 V_p, V_q 应作为有向单形的带号体积来理解.西尔维斯特-布卢门塔尔行列式首先出现在西尔维斯特(Sylvester, J. J.)的工作中,近期布卢门塔尔(Blumenthal, L. M.)借助它来证明一个新的欧氏平面公理系统的完备性,因而得名.而达布定理也曾被遗忘多年.西尔维斯特-布卢门塔尔行列式与凯莱-门杰行列式的关系是:

$$D(p_1, p_2, \cdots, p_k; p_1, p_2, \cdots, p_k) = D(p_1, p_2, \cdots, p_k).$$

西尔维斯特-布卢门塔尔矩阵(Sylvester-Blumenthal matrix)　见"西尔维斯特-布卢门塔尔行列式".

合同嵌入(congruent imbedding)　亦称保距嵌入.一种映射.距离空间或其子集到另一距离空间的单射,它保持距离不变.设 (S, d) 和 (S^*, d^*) 是两个抽象距离空间,距离 d 和 d^* 都在同一域(或集)中取值,若 $f: S \to S^*$ 是一个单射,$\forall\, x, y \in S$ 有 $d^*(f(x), f(y)) = d(x, y)$,则称 f 是一个合同嵌入.给定 (S, d) 和 (S^*, d^*),若满足上述条件的单射存在,则称前者可以合同地嵌入后者.一个半度量空间在什么条件下可以合同地嵌入欧氏空间或其他常曲率空间?这是经典距离几何要解决的基本问题之一.

保距嵌入(isometric imbedding)　即"合同嵌入".

欧几里得四点性质(Euclidean four-point property)　对半度量空间的一种刻画.一个半度量空间称为具有欧几里得四点性质,若其中任意四个点都可以合同地嵌入三维欧氏空间.威尔森(Wilson, W. A.)于 1932 年发表了下述结果:任何一个完备的、度量凸的并且度量外凸的半度量空间,若具有欧几里得四点性质,则它必然合同于一个有限维或无限维的欧氏空间.据此推出:任何一个有限紧致的、度量凸的并且度量外凸的半度量空间,若具有欧几里得四点性质,则它必然合同于某一个有限维的欧氏空间.此后,布卢门塔尔(Blumenthal, L. M.)提出了

弱四点性质的概念.一个半度量空间(S,d),若满足条件$p,q,r,s\in S$, $d(p,q)+d(q,r)=d(p,r)$的任意四个点都可以合同地嵌入欧氏平面,则称为具有欧几里得弱四点性质.布卢门塔尔证明了一个改进的结果:任何一个完备的、度量凸的并且度量外凸的半度量空间,若具有欧几里得弱四点性质,则它必然合同于一个有限维或无限维欧氏空间.据此推出:任何一个有限紧致的、度量凸的并且度量外凸的半度量空间,若具有弱四点性质,则它必然合同于某一个有限维的欧氏空间.

欧几里得弱四点性质(weak Euclidean four points property) 见"欧几里得四点性质".

门杰嵌入条件(Menger's imbedding condition) 对半度量空间的一种刻画.判别一个半度量空间能否合同地嵌入欧氏空间的充分必要条件之一.一个半度量空间S可以合同地嵌入n维欧氏空间E^n,当且仅当:

1.S含有一个$r+1$元有序组$p_0,p_1,\cdots,p_r(r\leqslant n)$使得$D(p_0,p_1,\cdots,p_k)<0$ ($\forall\ k=1,2,\cdots,r$).

2.对于S中任意一对点x,y,总有

$$D(p_0,p_1,\cdots,p_r,x)=0,$$
$$D(p_0,p_1,\cdots,p_r,y)=0,$$
$$D(p_0,p_1,\cdots,p_r,x,y)=0.$$

上面所给出的条件是S可以合同嵌入E^r但不能嵌入E^{r-1}的充分必要条件.称S是不可约地可嵌入空间E^n的,若它不能嵌入E^{n-1}.门杰(Menger,K.)还证明:一个可分的半度量空间S可以合同嵌入希尔伯特空间的充分必要条件是,S中任何有限子集的凯莱-门杰行列式都不取正值.

非欧几里得嵌入(non-Euclidean imbedding) 对半度量空间的一种刻画.一般指半度量空间或其子集在非欧常曲率空间中的合同嵌入.关于球面型空间$S_{n,r}$(n是空间的维数,r是空间的半径)中的嵌入问题,布卢门塔尔(Blumenthal,L. M.)和嘉瑞特(Garret)证明了下述定理:若半度量空间(S,d)中任意两点的距离都不超过πr,且满足下列条件:

1.S含有一个$m+1$元有序组$p_1,p_2,\cdots,p_{m+1}$ $(m\leqslant n)$,使得对于整数列$k=1,2,\cdots,m+1$,下面这些k阶行列式

$$\Delta_k(p_1,p_2,\cdots,p_k)=\left|\cos\frac{d(p_i,p_j)}{r}\right|_{i,j=1,2,\cdots,k}$$

都取正值.

2.对于S中每对元素x,y,

$$\begin{aligned}&\Delta_{m+2}(p_1,p_2,\cdots,p_{m+1},x)\\&=\Delta_{m+2}(p_1,p_2,\cdots,p_{m+1},y)\\&=\Delta_{m+3}(p_1,p_2,\cdots,p_{m+1},x,y)\\&=0,\end{aligned}$$

则(S,d)可以合同地嵌入球面型空间$S_{n,r}$.更确切地说,(S,d)可以不可约地嵌入$S_{m,r}$,即,它可以合同地嵌入$S_{m,r}$,但不能嵌入$S_{m-1,r}$.关于双曲空间$H_{n,r}$(这里n是空间的维数,而$r>0$是空间的参数,即空间曲率为$-1/r^2$)的嵌入问题有如下定理:若半度量空间(S,d)满足下列两条件:

1.S含有一个$m+1$元有序组$p_1,p_2,\cdots,p_{m+1}$ $(m\leqslant n)$,使得对于整数列$k=1,2,\cdots,m+1$,下面这些k阶行列式

$$\Lambda_k(p_1,p_2,\cdots,p_k)=\left|\cosh\frac{d(p_i,p_j)}{r}\right|_{i,j=1,2,\cdots,k}$$

具有符号$(-1)^{k-1}$;

2.对于S中每对元素x,y,

$$\begin{aligned}&\Lambda_{m+2}(p_1,p_2,\cdots,p_{m+1},x)\\&=\Lambda_{m+2}(p_1,p_2,\cdots,p_{m+1},y)\\&=\Lambda_{m+3}(p_1,p_2,\cdots,p_{m+1},x,y)\\&=0;\end{aligned}$$

则(S,d)可以合同地嵌入双曲空间$H_{n,r}$.更确切地说,(S,d)可以不可约地嵌入$H_{m,r}$,即它可以合同地嵌入$H_{m,r}$但不能嵌入$H_{m-1,r}$.

度量和(metric sum) 度量之间的一种加法.最初称为度量加,其定义如下:设欧氏空间中有m个N元有序组

$$S_k=\{p_1^k,p_2^k,\cdots,p_N^k\},k=1,2,\cdots,m.$$

若有一个N元有序组$S=\{p_1,p_2,\cdots,p_N\}$使得

$$|p_i-p_j|^2=\sum_{k=1}^{m}|p_i^k-p_j^k|^2$$

对$i,j=1,2,\cdots,N$都成立,则称S是$S_1,S_2,\cdots,S_m$的度量和.满足上述条件的S不是惟一的,而是组成一个合同类.此外,将满足条件

$$|\bar{p}_i-\bar{p}_j|^2=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}|p_i^k-p_j^k|^2$$

的N元有序组$\bar{S}=\{\bar{p}_1,\bar{p}_2,\cdots,\bar{p}_N\}$称为$S_1,S_2\cdots,S_m$的度量平均.关于度量和(度量平均)的维数定理:若点组$S_1,S_2,\cdots,S_m$等所占空间维数的最大值为n,则其度量和(度量平均)占有空间维数不超过n的充分必要条件是,对其中某个S_r存在着一组仿射映射A_k $(k=1,2,\cdots,m)$,使得$A_k(S_k)=S_r$.维数定理在几何不等式的研究中有重要应用.度量和(度量平均)的概念和维数定理都可以推广到连续型.

度量加(metric addition) 见"度量和".

度量平均(metric mean) 见"度量和".

度量变换(metric transformation) 一种映射.半度量空间之间的一种变换.一个半度量空间(S^*,d^*)称为某个半度量空间(S,d)的按照某个实函数$\varphi(x)$的度量变换,若存在一个双射$f:S\to S^*$,使得

$\forall\ p,q\in S$ 总有

$$d^*(f(p),f(q))=\varphi(d(p,q)).$$

这时可以将空间(S^*,d^*)写作$(S^*,\varphi(d))$. 经常考虑的是$S^*=S$而f是恒同映射的情形,这时的度量变换是在同一点集上采用新的距离

$$d^*(p,q)=\varphi(d(p,q)).$$

为了方便,在不致引起混淆的情况下,有时将S按φ的度量变换简记为$\varphi(S)$. 布卢门塔尔(Blumenthal, L. M.)指出:若M是一个度量空间而φ是一个单调递增凹函数,$\varphi(0)=0$,则其度量变换$\varphi(M)$也是一个度量空间. 施恩伯格(Schoenberg, I. J.)就这一课题做了一系列有趣的工作. 有人证明:若(M,d)是一个由n个点组成的度量空间,$0\leqslant c\leqslant 0.72/n$,则度量变换$(M,d^c)$可以合同地嵌入一个欧氏空间.

***G* 空间**(*G*-space)　特殊的度量空间. 一个度量空间(M,d)称为G空间,若它具有以下几条性质:

1. 它是有限紧致的,即任何有界的无限子集至少有一个聚点.
2. 它是度量凸的.
3. 它是局部度量外凸的.
4. 它满足延长惟一性,即

$$d(x,y)+d(y,z_1)=d(x,z_1),$$
$$d(x,y)+d(y,z_2)=d(x,z_2),$$
$$d(y,z_1)=d(y,z_2)$$

三条件必蕴涵$z_1=z_2$.

常见的许多具流形结构的度量空间都是G空间,因此,它成为综合微分几何研究的重要对象. 目前已知二维和三维的G空间具有流形结构;一般的高维G空间是否具有流形结构尚属悬而未决的难题.

抽象距离空间(abstract distance space)　一般距离空间的推广. 一个集连带在这集上定义类似于距离的一个二元抽象函数. 设S是一个集,F是一个抽象群或有序集. 一个映射$d:S\times S\rightarrow F$称为S上的一个抽象距离,而(S,d)则称为一个抽象距离空间或简称一个距离空间. 在许多场合中,一个距离空间的某些点的实际含义并不重要,主要关心的是各点间的相互距离. 一个有用的例子:设$\mathfrak{S}_n$表示由n维欧氏空间中所有的点,所有的定向超平面,外加一个抽象点α所组成的集合. 每一个超平面y可记为

$$y=(\pi_1(y),\pi_2(y)),$$

其中$\pi_1(y)$是y上的任意一点,而$\pi_2(y)$是y的单位法向量. 然后对$\mathfrak{S}_n$中任意一对元素x,y来定义抽象距离d:

1. 若x,y都是点,将$d(x,y)$定义为欧氏距离的平方乘以$-1/2$,即

$$d(x,y)=-\frac{1}{2}|x-y|^2.$$

2. 若x,y都是定向超平面,将$d(x,y)$定义为两超平面夹角的余弦,即

$$d(x,y)=\pi_2(x)\cdot\pi_2(y).$$

3. 若x是点而y是定向超平面,则将$d(x,y)$定义为点到超平面的带号距离,即

$$d(x,y)=(x-\pi_1(y))\cdot\pi_2(y).$$

4. 若$x=\alpha$(抽象点)而y是正常点,则定义$d(x,y)=1$;若$x=y=\alpha$,或$x=\alpha$而y是定向超平面,则定义$d(x,y)=0$.

最后约定$d(y,x)=d(x,y)$. 这空间的构造方式看去虽不很自然,却具有极强的度量性质. 设p_0, $p_1,\cdots,p_k$是$\mathfrak{S}_n$中的一个$k+1$元的有序组. 记

$$d_{ij}=d(p_i,p_j)\ (i,j=0,1,\cdots,k),$$

将$k+1$阶方阵$[d_{ij}]$称为这个$k+1$元组的距离矩阵. 一个有用的性质是,在空间$(\mathfrak{S}_n,d)$上,任何一个这样的距离矩阵的秩不超过$n+2$. 这导致一系列度量方程,这些方程在几何算法化的研究中扮演重要角色. 距离空间$(\mathfrak{S}_n,d)$还可以扩充使之包括所有定向超球面. 类似的结构可在其他常曲率空间上建立. 抽象距离空间的概念实际上早已应用于统计学、计量心理学等多个学科领域,虽然有时没有使用这个术语.

抽象距离(abstract distance)　见"抽象距离空间".

距离空间(distance space)　见"抽象距离空间".

距离矩阵(distance matrix)　见"抽象距离空间".

分子构形(molecular conformation)　一般指根据某分子的各个原子两两之间的距离来确定该分子的立体几何结构的技术. 可以把任务提得更具体一些,比方说,要求给出在某个直角坐标系中各个原子的坐标. 有关原子距离的数据可借助于核磁共振或其他技术来获得. 根据距离信息建造分子模型则是距离几何的任务. 用一般的照相技术确定分子的精确模型是困难的,因为分子相对而言很微小,有的还常常处于高速自旋之中. 若人们不满足于一个大致的几何轮廓,则必须依赖有效的数学工具. 从距离几何的角度看,分子构形不过是有限点集在三维欧氏空间中的合同嵌入问题. 最近发现的碳元素的第三种存在形式,即碳分子C_{60},具有足球形状的美妙几何结构. 这个结构的发现首先是用胶水和牙签来模拟,剪纸片拼凑,又通过从某种穹形屋顶到足球的联想,最后以精确的计算予以肯定. 而在分子的几何对称性较差的一般情况下,模拟和联想既非必要,也可能无效. 下面叙述分子构形问题的一种典型算法. 设$A=\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$是k个原子的一个有序组而

$d_{ij}=d(p_i,p_j)$表示测得的距离数据；M_A 表示 A 的凯莱-门杰阵. 又 I_k 是 k 阶单位阵而

$$\tilde{I}_k=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & I_k\end{bmatrix},$$

这时 $\det(M_A-\lambda\tilde{I}I_k)$是 λ 的一个多项式，将它的 $k-1$ 个根称为 A 的次特征值. 所有的次特征值都是实的. 进而，若某个 $k+1$ 维向量$(u_0,u_1,\cdots,u_k)$使得

$$M_A\begin{bmatrix}u_0\\ u_1\\ \vdots\\ u_k\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}0\\ u_1\\ \vdots\\ u_k\end{bmatrix},$$

则将 k 维向量$(u_1,u_2,\cdots,u_k)$称为 A 的一个对应于 λ 的次特征向量. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的三个最大的次特征值. 当 $\lambda_1\geqslant0,\lambda_2\geqslant0,\lambda_3\geqslant0$ 时，认为距离测量的精确度达到了起码的要求（否则算法失效）. 这时从 A 的对应于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的次特征向量中各取一个组成正交规范组，设它们为

$$u^i=(u_1^i,u_2^i,\cdots,u_k^i)\quad(i=1,2,3).$$

最后给出 k 个点在 E^3 中的直角坐标：

$$\bar{p}_j=(\sqrt{\lambda_1}u_j^1,\sqrt{\lambda_2}u_j^2,\sqrt{\lambda_3}u_j^3)\quad(j=1,2,\cdots,k).$$

已经证明，若距离测量是无误差的，即 A 恰好可以合同嵌入 E^3，则有

$$|\bar{p}_i-\bar{p}_j|=d(p_i,p_j)\quad(i,j=1,2,\cdots,k).$$

否则，$\{\bar{p}_1,\bar{p}_2,\cdots,\bar{p}_k\}$将是某种意义下 A 在 E^3 中的最佳近似. 关于分子构形向距离几何提出的未解决问题可参见“距离几何”.

次特征值(sub-eigenvalue)　见“分子构形”.

次特征向量(sub-eigenvector)　见“分子构形”.

伪对称集(pseudo-symmetric set)　某种具有类似于对称性那样性质的点集. 欧氏空间中一个点集 $\mathfrak{S}$ 称为是 n 维伪对称的，若 $\mathfrak{S}$ 的凸包是 n 维的并且满足以下条件：

1. $\mathfrak{S}$ 中所有的点都分布在 E^n 中的某一个超球面 S^{n-1}上.

2. 超球面 S^{n-1}的中心 O 恰好是集 $\mathfrak{S}$ 的重心.

3. $\mathfrak{S}$ 关于 O 的惯量椭球面是一个超球面.

设 $\mathfrak{S}=\{p_1,p_2,\cdots,p_N\}$是 E^n 的有限子集，记

$$M_r(\mathfrak{S})=\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|p_i-p_j|^r$$

表示各点间相互距离的 r 次幂的平均值. 已经证明成立着不等式

$$M_4(\mathfrak{S})\geqslant\frac{N-1}{N}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot M_2^2(\mathfrak{S}),$$

式中等号成立的充分必要条件是：$\mathfrak{S}$ 是一个 n 维伪对称集.

惯量椭球面(ellipsoid of inertia)　一个特殊的椭球面. 它是联系欧氏空间中某个点集 S 和某个点 O 的椭球面，其定义如下：

1. 一个点关于某条直线（轴）的惯性矩是指该点到该直线距离的平方值.

2. 一个点集关于某条直线的惯性矩，是指各点到该直线距离的平方和或距离平方的积分值.

3. 给定一个点集 S 和一个点 O，考虑满足下述条件的点 P：线段 OP 的长度等于 $I(OP)^{-(1/2)}$，这里 $I(OP)$表示 S 关于直线 OP 的惯性矩；所有这样的点的轨迹是一个椭球面，称为点集 S 关于点 O 的惯量椭球面.

类似地可以定义一个质点组关于某个点的惯量椭球面. 一个质点关于某条直线的惯性矩是指该点到该直线距离的平方乘以该质点的质量；定义的以下部分类推.

惯性矩(moment of inertia)　见“惯量椭球面”.

杨-张不等式(Yang-Zhang inequalities)　即杨路-张景中不等式. 是具有广泛应用价值的一类与质点组有关的不等式. 设

$$\mathscr{G}=\{A_i(m_i)\,|\,i=1,2,\cdots,N\}$$

是 $E^n(n<N)$中的质点组，m_i 是点 A_i 所赋有的质量. $\mathscr{G}$ 中任意 $k+1$ 个点$(A_{i_0},A_{i_1},\cdots,A_{i_k})$所支撑的单形的 k 维体积记为 $V_{i_0i_1\cdots i_k}$，若

$$M_k=\sum_{i_0<i_1<\cdots<i_k}\sum\cdots\sum m_{i_0}m_{i_1}\cdots m_{i_k}V_{i_0i_1\cdots i_k}^2\quad(1\leqslant k\leqslant n),$$

$$M_0=m_1+m_2+\cdots+m_N\neq0,$$

则有杨-张不等式：

$$\frac{M_k^l}{M_l^k}\geqslant\frac{[(n-l)!(l!)^3]^k}{[(n-k)!(k!)^3]^l}(n!M_0)^{l-k}\qquad(1)$$

$$(1\leqslant k<l\leqslant n,m_i\geqslant0),$$

$$M_k^2\geqslant\left(\frac{k+1}{k}\right)^3\frac{n-k+1}{n-k}\cdot M_{k-1}M_{k+1}\qquad(2)$$

$$(1\leqslant k\leqslant n,m_i\text{ 可正可负}),$$

其中等号当且仅当 $\mathscr{G}$ 关于其质心的惯量椭球面是一个球面. 设 $\mathscr{G}$ 不是有限质点组而是某个具有有限质量的区域，若质量分布函数为 $m(x)(x\in\mathscr{G})$，则可定义

$$M_k=\frac{1}{k!}\iint\cdots\int m(x_0)m(x_1)\cdots m(x_k)\times V_{(x_0,x_1,\cdots,x_k)}^2\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k,$$

$$M_0=\int m(x)\mathrm{d}x.$$

不等式(1)，(2)仍然成立.

撰　稿　马传渔　左铨如　杨　路
审　阅　沈一兵　蒋　声

一　般　拓　扑　学

一般拓扑学(general topology)　亦称点集拓扑学.简称一般拓扑.研究与拓扑有关的空间结构和映射性质的学科.拓扑学是由于分析学与几何学的需要而发展起来的,起初是几何学的一个分支,从研究几何图形在连续变形下保持不变的性质开始,现已发展成研究连续性现象的数学分支.由于连续性的表现方式、研究方法和讨论课题的不同,分成一般拓扑学、组合拓扑学、代数拓扑学等分支,后来又出现了微分拓扑学、几何拓扑学等分支.

19 世纪 70 年代,康托尔(Cantor,G.(F.P.))创建了一般集合论,研究欧几里得空间内的点集,引入开集、聚点、闭集等概念,实际上是研究了欧几里得空间的拓扑结构.稍后若尔当(Jordan,C.)、庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)、波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)、贝尔(Baire,R.L.)、勒贝格(Lebesgue,H.L.)等于 1893—1905 年期间,也引进一些欧几里得空间中与拓扑结构有关的重要概念.实际上,对欧几里得空间拓扑结构的刻画已讨论得很清楚,前进的决定性步骤是由欧几里得空间到抽象空间的发展.关于这一问题,黎曼(Riemann,G.F.B.)是先驱,他在 1854 年引进并研究了二维流形的概念,并且指出了研究高维流形以及函数空间的可能性.1900 年前后,阿斯科利(Ascoli,G.)在曲线集合上,阿尔泽拉(Arzelà,C.)、沃尔泰拉(Volterra,V.)、希尔伯特(Hilbert,D.)、弗雷德霍姆(Fredholm,(E.)I.)在函数集合上,以及波莱尔在三维空间的直线和平面集合上引入拓扑结构,对极限概念给予公理化处理.伴随公理化方法的发展,在函数空间研究的基础上,弗雷歇(Fréchet,M.-R.)、里斯(Riesz,F.(F.))等人开始了抽象空间的研究,标志着用公理化方法研究连续性的开始.弗雷歇为了把集合论和函数空间的研究统一起来,在 1906 年的博士论文中定义了度量空间,讨论了空间的紧性和完备性,开辟了抽象的方向.豪斯多夫(Hausdorff,F.)于 1914 年在希尔伯特和外尔(Weyl,(C.H.)H.)的观念的基础上,定义了一类足够广泛的拓扑空间,开创了一般拓扑学.在这门学科形成过程中,波兰的亚尼谢夫斯基(Janiszewski,Z.)、谢尔品斯基(Sierpiński,W.)、马祖尔克维奇(Mazurkiewicz,S.)、库拉托夫斯基(Kuratowski,K.),俄罗斯的亚历山德罗夫(Александров,П.С.)、乌雷松(Урысон,П.С.)、吉洪诺夫(Тихонов,А.Н.),美国的穆尔(Moore,R.L.)、怀伯恩(Whyburn,G.T.)、门杰(Menger,K.)等人都做出了重要的贡献.到 20 世纪 30 年代,一般拓扑学已成为一门独立的数学分支,并具有明确内部课题与保证本领域发展的内部动力.

一般拓扑学出发的公理为数甚少,而且简单明了,容易掌握,如开集公理(或与之等价的闭包公理、邻域公理、收敛公理等).当研究各种不同类型的拓扑空间时,根据需要引进大量拓扑公理,如可数性公理、分离性公理、连通性公理、紧性公理等.可见拓扑公理既具有简单性又具有丰富性.一般拓扑学的基本课题就是在这些公理的基础上与相互关系的探讨中有规律地展开.在空间结构的讨论中,公理的相容性和独立性自然涉及,如闭包公理的相互独立性意味着减少其中任意一条公理都会得到实质上不同于拓扑空间的更广泛的空间结构.又如第一可数性、正则性、可数紧性与非紧性是相容的,因为可以举出满足这四条公理的拓扑空间.所以反例在这一学科中有特殊意义.

一般拓扑学基本上是处理服从某些公理的集族,并在各种集族之间的运算推演中展开.为适应这一特点采用一套符号,尽可能将逻辑论证归结为某些有规则的形式演算,从而使文字证明减少到最小程度.这种方式采用了极为有力的表述形式,应用了高度抽象的观点,使得理论十分简洁且具有高度概括力.概念的敏锐和精确,在这一学科中具有特殊的意义.这一学科正在蓬勃发展中,新的观点不断涌现,新的方法不断产生,新的理论相继形成.但其基本内容早已成为现代数学的基础学科之一.它的观点、方法和成果大大刺激和推动了数学各分支的发展.

一般拓扑学是一个基础理论学科,是服务于几乎所有数学部门的.它的价值决定于它在现代数学中不可取代的地位,决定于它的结论和方法的普遍意义,决定于它在其发展中日益显示出的旺盛生命力.恩格斯(Engels,F.)说过:“数学上的公理,是数学需要用作自己出发点的少数思想上的规定.”一般拓扑学充分表明这些少数思想上的规定不是凭空臆造的,而是有它的实际背景,是概括、抽象的结果.从这些少数思想规定出发,确可得出一系列丰富的结果而形成数学中一门很重要的学科.中国已故数学家关肇直指出:“拓扑空间的理论一方面是由 19 世纪数学分析奠基工作的需要,另一方面是它受了 19 世纪末以来几何学基础以及一般的公理化方法的影响而产生的.”几十年来一般拓扑学发展的事实充分

证明了一般拓扑学的建立与发展，大大促进了数学分析的研究，促进了整个数学的发展而且也进一步巩固了公理法在纯粹数学研究中占有的统治地位.

点集拓扑学(point set topology) 即“一般拓扑学”.

度量空间(metric space) 亦称距离空间.一类特殊的拓扑空间.弗雷歇(Fréchet,M.-R.)将欧几里得空间的距离概念抽象化，于1906年定义了度量空间.设 X 是一非空集合，R 为全体实数的集，若函数 $d:X\times X\to \mathrm{R}$ 对于任意 $x,y,z\in X$ 满足条件：

1. $d(x,y)\geqslant 0, d(x,x)=0$;
2. 当 $x\neq y$ 时，$d(x,y)>0$;
3. $d(x,y)=d(y,x)$;
4. $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$;

则称函数 d 为 X 上的一个度量，$d(x,y)$ 为 x 与 y 之间的距离.赋予度量 d 的集合 X 称为度量空间，记为(X,d). n 维欧几里得空间 R^n 按通常的度量构成度量空间.区间$[0,1]$上定义的连续实值函数的集合上赋予由

$$d(f,g)=\max_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$$

确定的度量也是度量空间.在任意非空集合 X 上定义 $d(x,x)=0$，当 $x\neq y$ 时，$d(x,y)=1$，则(X,d)也是度量空间.当 d 满足条件1,3,4时，d 称为伪度量，赋予伪度量的集合 X 称为伪度量空间.当 d 满足条件1,2,4时，d 称为拟度量，赋予拟度量的集合 X 称为拟度量空间.

在度量空间中，紧性、可数紧性、序列紧性、子集紧性是一致的.可分性、遗传可分性、第二可数性、林德勒夫性是一致的.度量空间必满足第一可数公理，是豪斯多夫空间，完全正规空间，仿紧空间.伪度量空间满足第一可数公理，但一般不是豪斯多夫空间.

距离空间(distance space) 即“度量空间”.

度量(metric) 见“度量空间”.

距离(distance) 见“度量空间”.

伪度量(pseudo-metric) 见“度量空间”.

伪度量空间(pseudo-metric space) 见“度量空间”.

拟度量(quasi-metric) 见“度量空间”.

拟度量空间(quasi-metric space) 见“度量空间”.

开球(open ball) 度量空间的基本概念之一.设(X,d)为度量空间，$a\in X$，ε 为正数.令

$$B_\varepsilon(a)=\{x\in X\,|\,d(a,x)<\varepsilon\},$$

$$\overline{B_\varepsilon}(a)=\{x\in X\,|\,d(a,x)\leqslant\varepsilon\},$$

则 $B_\varepsilon(a)$称为以 a 为中心的 ε 开球，$\overline{B_\varepsilon}(a)$称为以 a 为中心的 ε 闭球. $B_\varepsilon(a)$又称为 a 的 ε 邻域. a 的 ε 邻域全体$\{B_\varepsilon(a)\,|\,\varepsilon>0\}$称为点 a 的基本邻域系.用基本邻域系在 X 中可以导入拓扑，使 X 成为拓扑空间.

ε开球(open ε-ball) 见“开球”.

ε闭球(closed ε-ball) 见“开球”.

ε邻域(ε-neighborhood) 见“开球”.

基本邻域系(basic system of neighborhoods) 见“开球”.

直径(diameter) 度量空间的基本概念之一.设 M 为度量空间(X,d)的子集，定义

$$\delta(M)=\sup\{d(x,y)\,|\,x,y\in M\},$$

则 $\delta(M)$称为集合 M 的直径.直径为有限的集合称为有界集.当整个空间 X 的直径为有限(即 $\delta(X)<\infty$)时，称 X 上的度量 d 为有界度量.

有界集(bounded set) 见“直径”.

有界度量(bounded metric) 见“直径”.

完备度量空间(complete metric space) 一类重要的度量空间.设(X,d)是度量空间，$\{x_n\}$为 X 中的序列.若对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $n\in\mathrm{N}$，当 $i,j\geqslant n$ 时有

$$d(x_i,x_j)<\varepsilon,$$

则称$\{x_n\}$为柯西序列或基本序列.度量空间中每一收敛序列必为柯西序列；反之柯西序列未必收敛.若 X 中的任意柯西序列都收敛，则称 X 为完备度量空间.欧几里得空间和希尔伯特空间都是完备度量空间.又设 f 是度量空间(X_1,d_1)到度量空间(X_2,d_2)的映射.若对于任意 $x,y\in X_1$ 成立

$$d_1(x,y)=d_2(f(x),f(y)),$$

则称 f 为 X_1 到 X_2 的等距映射，此时称 X_1 等距于 $f(X_1)\subset X_2$.

豪斯多夫(Hausdorff,F.)于1914年证明了以下定理：对于任意度量空间 X_1，必存在完备度量空间 X_2，使得 X_1 等距于 X_2 中的一个稠密子空间，并且除去等距不计外，这种空间是惟一的，度量空间 X_2 称为 X_1 的完备化空间.这个定理称为完备化定理.在完备度量空间中闭球套定理成立.即设$\{M_n\,|\,n\in\mathrm{N}\}$为完备度量空间 X 中一列闭球，若满足：

1. $M_n\supset M_{n+1}, n\in\mathrm{N}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$，其中 ε_n 为 M_n 的半径；

则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 恰含有一点.

紧度量空间必为完备度量空间.完备度量空间是弗雷歇(Fréchet,M.-R.)于1906年定义的.

柯西序列(Cauchy sequence) 见“完备度量空间”.

基本序列(fundamental sequence) 即“柯西序列”.

等距映射(isometric mapping) 见“完备度量空间”.

完备化空间(completion of a space) 见"完备度量空间".

完备化定理(theorem of completion) 见"完备度量空间".

闭球套定理(theorem for nest of closed balls) 见"完备度量空间".

完全有界度量空间(totally bounded metric space) 一类特殊的度量空间. 设(X,d)为度量空间,ε为正数,M和A都是X的子集. 若对于任意$x\in M$,存在$x_\varepsilon\in A$使得$d(x,x_\varepsilon)\leqslant\varepsilon$,则称$A$为$M$的$\varepsilon$网. 若对于任意$\varepsilon>0$,存在$M$的有限$\varepsilon$网(即由有限多个点组成的$\varepsilon$网),则称$M$为完全有界集. 若$X$本身为完全有界集,则称$X$为完全有界度量空间. 完全有界集必为有界集,反之有界集未必是完全有界的. 紧度量空间是完全有界度量空间. 完全有界的完备度量空间是紧度量空间. 完全有界度量空间是第二可数空间.

ε网(ε-net) 见"完全有界度量空间".

完全有界集(totally bounded set) 见"完全有界度量空间".

拓扑(topology) 集合上的一种结构. 设$\mathscr{T}$为非空集X的子集族. 若$\mathscr{T}$满足以下条件:

1. X与空集$\varnothing$都属于$\mathscr{T}$;
2. $\mathscr{T}$中任意两个成员的交属于$\mathscr{T}$;
3. $\mathscr{T}$中任意多个成员的并属于$\mathscr{T}$;

则$\mathscr{T}$称为X上的一个拓扑. 具有拓扑$\mathscr{T}$的集合X称为拓扑空间,记为$(X,\mathscr{T})$.

设$\mathscr{T}_1$与$\mathscr{T}_2$为集合X上的两个拓扑. 若有关系$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$,则称$\mathscr{T}_1$粗于$\mathscr{T}_2$,或$\mathscr{T}_2$细于$\mathscr{T}_1$. 当$X$上的两个拓扑相互之间没有包含关系时,则称它们是不可比较的. 在集合X上,离散拓扑是最细的拓扑,平凡拓扑是最粗的拓扑.

粗于关系(coarser relation) 见"拓扑".

细于关系(finer relation) 见"拓扑".

不可比较拓扑(incomparable topologies) 见"拓扑".

拓扑空间(topological space) 一般拓扑学的基本研究对象. 确定了拓扑$\mathscr{T}$的集合X称为拓扑空间,记为$(X,\mathscr{T})$. 具有拓扑结构的抽象空间是弗雷歇(Fréchet,M.-R.)于1906年和里斯(Riesz,F.(F.))于1907年首先引进的. 弗雷歇用收敛序列,里斯用聚点分别定义了他们的空间. 但里斯的定义过于一般且比较复杂,弗雷歇的定义过于狭窄. 第一个令人满意的拓扑空间的定义是豪斯多夫(Hausdorff,F.)于1914年用邻域系提出的. 他的定义发展了希尔伯特(Hilbert,D.)于1902年和外尔(Weyl,(C.H.)H.)于1913年的思想. 希尔伯特和外尔用邻域分别给出平面和黎曼曲面的一种公理描述. 而豪斯多夫将他们引进的概念给出适当的一般化,并发展成有系统且详尽的一般理论,从而奠定了一般拓扑学这一学科. 稍后,穆尔(Moore,R.L.)于1916年用开集系,库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)于1922年用闭包算子分别提出另一种公理系统,它们都是等价的. 还可用闭集系、内部算子、收敛类等各种不同公理系统刻画拓扑空间. 目前较常用的是开集系、邻域系或闭包算子等公理系统建立拓扑空间.

开集(open set) 拓扑空间的基本概念之一. 在集合X上确定适当的拓扑结构$\mathscr{T}$后,$\mathscr{T}$中的元素就称为$\mathscr{T}$开集,在不致混淆时亦简称开集. 拓扑$\mathscr{T}$亦称为开集系. 开集的补集是闭集,开集G的每一点都是G的内点,G也是G的任一点的邻域(参见"邻域"). 开集、闭集、内部、闭包等概念都是康托尔(Cantor,G.(F.P.))在研究欧几里得空间的子集类时引进的. 豪斯多夫(Hausdorff,F.)于1914年将它们推广到抽象空间.

$\mathscr{T}$开集($\mathscr{T}$-open set) 即"开集".

开集系(system of open sets) 见"开集".

内点(interior point) 拓扑空间的基本概念之一. 设A是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的子集,$a\in A$. 若存在$G\in\mathscr{T}$,使得$a\in G\subset A$,则称a是A的内点. 这时A称为点a的邻域(参见"邻域"). A的全部内点组成的集合称为A的内部或A的开核,记为A°或$\operatorname{int}A$.

内部(interior) 见"内点".

开核(open kernel) 即"内部".

内部算子(interior operator) 亦称开核算子. 集合之间的一种对应. 设X为一非空集合,X的任意子集A对应着X的子集A°. 称此对应为内部算子,若满足下列四个条件:

1. $X^\circ=X$.
2. $A^\circ\subset A$.
3. $A^{\circ\circ}=A^\circ$.
4. $(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$,其中$A,B$为$X$的任意子集.

这四个条件称为内部算子公理. 内部算子公理也是刻画拓扑结构的一种公理系统.

开核算子(open kernel operator) 即"内部算子".

内部算子公理(axiom of interior operator) 见"内部算子".

邻域(neighborhood) 拓扑空间的基本概念之一. 设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间,A和V都是X的子集. 若存在$G\in\mathscr{T}$使得$A\subset G\subset V$,则称V为A的邻域. 特别地,包含A的开集称为A的开邻域. 当A为单点集$\{x\}$时,称V为x的邻域. 点x的邻域的全体称为x的邻域系,记为$\mathscr{U}(x)$.

开邻域(open neighborhood)　见“邻域”.

邻域系(neighborhood system)　见“邻域”.

邻域公理(neighborhood axioms)　刻画拓扑结构的一种公理系统. 设 X 是一个集合, 若对于任意 $x\in X$, 存在 X 的子集族 $\mathscr{U}_x$ 满足下述公理:

1. $\mathscr{U}_x\neq\varnothing$, 并且, 若 $U\in\mathscr{U}_x$, 则 $x\in U$.
2. 若 $U\in\mathscr{U}_x$ 且 $U\subset W$, 则 $W\in\mathscr{U}_x$.
3. 若 $U,V\in\mathscr{U}_x$, 则 $V\cap U\in\mathscr{U}_x$.
4. 若 $U\in\mathscr{U}_x$, 则存在 $V\in\mathscr{U}_x$ 使得 $V\subset U$, 且对于任意 $y\in V$ 必有 $V\in\mathscr{U}_y$, 则在 X 上可定义拓扑 $\mathscr{T}$, 使得拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中每一点 x 的邻域系刚好为 $\mathscr{U}_x$.

上述公理系统称为邻域公理. 邻域公理是豪斯多夫(Hausdorff, F.)于 1914 年首先提出的.

聚点(accumulation point)　拓扑空间的基本概念之一. 设 A 为拓扑空间 X 的子集, $a\in X$. 若 a 的任意邻域都含有异于 a 的 A 中的点, 则称 a 是 A 的聚点. 集合 A 的所有聚点的集合称为 A 的导集, 记为 A^d 或 $d(A)$. 若 $A=A^d$, 则称 A 为完备集. 若 $A\subset A^d$, 则称 A 为自密集. 聚点和导集等概念是康托尔(Cantor, G. (F. P.))研究欧几里得空间的子集时首先提出的.

完备集(perfect set)　见“聚点”.

自密集(dense-in-itself set)　见“聚点”.

导集(derived set)　拓扑空间的基本概念之一(参见“聚点”). 导集有下列性质:

1. $\overline{A}=A\cup A^d$.
2. 若 $A\subset B$, 则 $A^d\subset B^d$.
3. $(A\cup B)^d=A^d\cup B^d$.
4. $\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha^d\subset(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha)^d$,

其中 D 为任意指标集, A^d 表示 A 的导集, $\overline{A}$ 表示 A 的闭包.

α 阶导集(α-th derived set)　导集概念的推广. 拓扑空间 X 的导集 X^d 称为 X 的第一阶导集, 记为 $X^{(1)}=X^d$. 一般地, 设 α 为任意序数, 当 α 有前趋序数 $\alpha-1$ 时, 记 $X^{(\alpha)}=(X^{(\alpha-1)})^d$; 当 α 是极限序数时, 记 $X^{(\alpha)}=\bigcap\{X^{(\beta)}\mid\beta<\alpha\}$. 依超限递归定义, 对任意序数 α 可以定义 $X^{(\alpha)}$. 此时 $X^{(\alpha)}$ 称为 X 的 α 阶导集. $X^{(\alpha)}$ 必定达到定值, 即有某个 α 使得 $X^{(\alpha)}=X^{(\alpha+1)}$. 这个 $X^{(\alpha)}$ 称为 X 的核.

第一阶导集(first derived set)　见“α 阶导集”.

核(kernel)　见“α 阶导集”.

接触点(cluster point)　拓扑空间的基本概念之一. 设 A 是拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的子集, $x\in X$. 若对于 x 的任意邻域 U 有 $U\cap A\neq\varnothing$, 则称 x 为 A 的接触点. A 的所有接触点的集合称为 A 的闭包, 记为 $\overline{A}$ 或 $\mathrm{cl}\,A$. A 的闭包是包含 A 的最小闭集. 有 $\overline{A}=A\cup A^d$, 其中 A^d 为 A 的导集.

闭包(closure)　见“接触点”.

凝点(condensation point)　一类特殊的聚点. 设 A 为拓扑空间 X 的子集, $x\in X$. 若 x 的任意邻域都含有 A 中不可数多个点, 则称 x 为 A 的凝点. 这一概念是豪斯多夫(Hausdorff, F.)于 1914 年提出的. 设 X 为第二可数空间, $A\subset X$, 则 A 中不是凝点的点集是有限集或可数集. 第二可数空间 X 本身可以表示为两个不相交的集合的并, 其中一个是完备集, 另一个是有限集或可数集. 该结论称为康托尔-本迪克逊定理.

康托尔-本迪克逊定理(Cantor-Bendixson theorem)　见“凝点”.

完全聚点(complete accumulation point)　一类特殊的聚点. 设 A 为拓扑空间 X 的子集, $x\in A$. 若对于 x 的任意邻域 U 有 $|U\cap A|=|A|$, 则称 x 为 A 的完全聚点, 其中 $|A|$ 表示集合 A 的基数.

闭集(closed set)　拓扑空间的基本概念之一. 拓扑空间中开集的补集称为闭集. 集合 A 是闭集当且仅当 A 等于它的闭包, 或 A 的每个聚点都属于 A. 拓扑空间 X 中闭集的全体称为 X 的闭集系. 由闭集的定义可得到与开集对偶的三条性质:

1. 空集 $\varnothing$ 与 X 均为闭集.
2. 任意多个闭集的交是闭集.
3. 任意两个闭集的并是闭集.

闭集系(system of closed sets)　见“闭集”.

闭包公理(closure axioms)　刻画拓扑空间的一种公理系统. 设 X 为一非空集合, c 是 X 的幂集到自身的映射, 下列四个条件称为闭包公理:

1. $c(\varnothing)=\varnothing$.
2. 对于任意 $A\subset X$, 有 $A\subset c(A)$.
3. 对于任意 $A,B\subset X$, 有
$$c(A\cup B)=c(A)\cup c(B).$$
4. 对于任意 $A\subset X$, 有 $c(c(A))=c(A)$.

满足以上闭包公理的映射 c 称为闭包算子. 这个公理系统是波兰数学家库拉托夫斯基(Kuratowski, K.)于 1922 年提出的. 许多点集拓扑的著作应用闭包公理建立拓扑空间.

闭包算子(closure operator)　见“闭包公理”.

外点(exterior point)　拓扑空间的基本概念之一. 设 A 是拓扑空间 X 的子集. 对于 $a\in X$, 若 a 是 A 的补集 $X-A$ 的内点, 则称 a 是集合 A 的外点. a 是 A 的外点当且仅当存在 a 的邻域 U 使得 U 与 A 不相交. A 的外点的全体称为 A 的外部, 记为 A^e 或 $\mathrm{ext}A$. X 中的任意点 a, 或是 A 的内点, 或是 A 的外点, 或是 A 的边界点, 并且三者仅成立一个.

外部(exterior)　见“外点”.

边界点(boundary point)　拓扑空间的基本概

念之一. 设 A 是拓扑空间 X 的子集,$x\in X$. 若 x 既不属于 A 的内部,又不属于 A 的外部,亦即 x 的任意邻域既含有 A 的点也含有不属于 A 的点,则称 x 是 A 的边界点. A 的所有边界点的集合称为 A 的边界,记为 $b(A)$,A^b 或 bry$A$ 等. 边界概念是康托尔(Cantor,G. (F. P.))在研究欧几里得空间的子集情形时首先引入的.

边界(boundary) 见"边界点".

孤立点(isolated point) 拓扑空间的基本概念之一. 设 A 为拓扑空间 X 的子集,$a\in A$. 若存在开集 U 使得 $U\cap A=\{a\}$,则称 a 为 A 的孤立点. 与聚点定义对照可知,A 中的点若不是 A 的聚点,则必是 A 的孤立点. 自密集是不含孤立点的集合. 完备集是不含孤立点的闭集. 若 A 中每一点都是 A 的孤立点,则称 A 为 X 中的离散集或孤点集.

离散集(discrete set) 见"孤立点".

孤点集(isolated point set) 即"离散集".

子空间(subspace) 一类拓扑空间. 设$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间,若 Y 是 X 的非空子集,则族

$$\mathscr{U}=\{U\mid U=G\cap Y,G\in\mathscr{T}\}$$

是 Y 上的拓扑,称 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{T}$ 在 Y 上的相对拓扑. 拓扑空间$(Y,\mathscr{U})$称为$(X,\mathscr{T})$的子空间.

相对拓扑(relative topology) 见"子空间".

相对开集(relative open set) 子空间的开集. 设 Y 为拓扑空间 X 的子空间,在相对拓扑下 Y 的开子集称为相对开集. $U\subset Y$ 是相对开集的充分必要条件是存在 X 的开集 V,使得 $U=V\cap Y$.

相对闭集(relative closed set) 子空间的闭集. 设 Y 是拓扑空间 X 的子空间,在相对拓扑下 Y 的闭子集称为相对闭集. $F\subset Y$ 是相对闭集的充分必要条件是存在 X 的闭集 H,使得 $F=H\cap Y$.

遗传性质(hereditary property) 亦称继承性质. 一类特殊的拓扑性质. 设 P 是一个拓扑性质,若当拓扑空间 X 具有性质 P 时,X 的任意子空间(闭子空间、开子空间)也具有性质 P,则称 P 是遗传性质(闭遗传性质、开遗传性质),或性质 P 是遗传的(闭遗传的、开遗传的). 拓扑空间的分离性除正规性外都是遗传的,正规性是闭遗传的. 可分性不是遗传的. 林德勒夫性也是闭遗传的. 可数性是遗传的. 紧性是闭遗传的. 连通性不是遗传的.

基(base) 与拓扑有关的概念. 设$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间,$\mathscr{B}\subset\mathscr{T}$. 若 X 的任意非空开集均可表示为 $\mathscr{B}$ 的若干个元的并,则称 $\mathscr{B}$ 为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的基或拓扑 $\mathscr{T}$ 的基. 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$可以有不同的基,但由基惟一确定 X 上的拓扑. 若基 $\mathscr{B}$ 的基数为 $\aleph_0$,则 $\mathscr{B}$ 称为可数基. 拓扑空间 X 的所有基的基数的最小值称为拓扑空间 X 的权.

拓扑空间的权(weight of a topological space) 见"基".

可数基(countable base) 见"基".

子基(subbase) 与拓扑有关的概念. 设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间,$\mathscr{S}\subset\mathscr{T}$. 若 $\mathscr{S}$ 的元的所有有限交的族为 $\mathscr{T}$ 的基,则称 $\mathscr{S}$ 为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的子基或拓扑 $\mathscr{S}$ 的子基. 每一个非空集族 $\mathscr{S}$ 必是 $X=\bigcup\mathscr{S}$ 上的某个拓扑的子基,并且该拓扑由 $\mathscr{S}$ 惟一确定. 它是包含 $\mathscr{S}$ 的最小拓扑. 一个拓扑可以有不同的子基,但子基确定惟一的拓扑.

邻域基(base for a neighborhood system) 拓扑结构的基本概念之一. 设 x 是拓扑空间的一点,$\mathscr{U}(x)$是 x 的邻域系,$\mathscr{B}(x)\subset\mathscr{U}(x)$. 若对于任意 $U\in\mathscr{U}(x)$都有 $B\in\mathscr{B}(x)$使得 $B\subset U$,则称 $\mathscr{B}(x)$是点 x 的邻域基或局部基.

局部基(local base) 即"邻域基".

邻域系的子基(subbase for a neighborhood system) 拓扑结构的基本概念之一. 设 x 是拓扑空间的一点,$\mathscr{U}(x)$是 x 的邻域系,$\mathscr{S}(x)\subset\mathscr{U}(x)$. 若 $\mathscr{S}(x)$的元的所有有限交的族是 x 的邻域基,则称 $\mathscr{S}(x)$是点 x 的邻域系的子基或 x 的局部子基.

局部子基(local subbase) 即"邻域系的子基".

正规基(normal base) 拓扑结构的基本概念之一. 设 X 为拓扑空间,$\mathscr{F}$ 为 X 的闭集族. 称 $\mathscr{F}$ 为 X 的正规基,若 $\mathscr{F}$ 满足下列条件:

1. 对于 X 的任意闭集 A 和 $x\notin A$,存在 $F\in\mathscr{F}$ 使得 $x\in F$ 且 $F\cap A=\varnothing$.

2. $\mathscr{F}$ 的任意有限个元的并及交都属于 $\mathscr{F}$.

3. 若 $E,F\in\mathscr{F}$ 满足 $E\cap F=\varnothing$,且存在 $G,H\in\mathscr{F}$ 使得 $G\cap F=\varnothing,E\cap H=\varnothing,G\cup H=X$.

完全正则空间的所有零集族,正规空间的所有闭集族等都是正规基. 若完全正则空间 X 的正规基 $\mathscr{F}$ 的每一成员都是某开集的闭包时,则称 $\mathscr{F}$ 为 X 的正则正规基.

正则正规基(regularly normal base) 见"正规基".

离散拓扑(discrete topology) 一类特殊的拓扑. 设 X 为任意非空集合,则由 X 的所有子集组成的拓扑称为 X 上的离散拓扑. 它是 X 上的最细拓扑. 由此得到的拓扑空间称为离散拓扑空间或离散空间.

若 X 为离散空间,则 X 的任意点都是孤立点. 若 A 是 X 的任意子集,则 A 是 X 的既开又闭的集,并且 A 的边界为空集. 在 X 上定义的任意映射都是连续的. 离散空间恒可度量化,它满足一切分离公理,是局部紧空间,是第一可数空间. 多于一点的离散空间是局部连通的但不是连通的,也不是道路连通的. 离散拓扑分有限离散拓扑、可数离散拓扑和不

可数离散拓扑三类. 根据 X 分别是有限集、可数集和不可数集,容易给出它们的定义. 它们的拓扑性质也不尽相同,如有限离散拓扑是紧、可数紧、序列紧的,其他二者不是. 而不可数离散拓扑不是可分的、第二可数的、σ 紧的、林德勒夫的,其他二者却是.

离散拓扑空间(discrete topological space) 见"离散拓扑".

离散空间(discrete space) 即"离散拓扑空间".

有限离散拓扑(finitely discrete space) 见"离散拓扑".

可数离散拓扑(countably discrete space) 见"离散拓扑".

不可数离散拓扑(non-countably discrete space) 见"离散拓扑".

平凡拓扑(trivial topology) 一类特殊的拓扑. 它是相对于离散拓扑的另一种极端情形. 若 X 为任意非空集合,则由 X 与空集$\varnothing$组成的拓扑称为 X 上的平凡拓扑. 它是 X 上的最粗拓扑. 由此得到的拓扑空间称为平凡拓扑空间或平凡空间.

平凡空间 X 的任意非空真子集都不是开集、闭集、F_σ 集以及 G_δ 集. 任意子集都是紧集与序列紧集. X 的任意点都是 X 的任意非空子集的接触点. 若平凡空间 X 是不可数集,则它的任意序列都有不可数个极限点. 任意非空子集在 X 中是稠密的,惟一的无处稠密子集是空集. 平凡空间是可分的、第二可数的、道路连通的. 到平凡空间的任意映射都是连续的. 多于一点的平凡空间不满足 T_0,T_1,T_2 公理,但满足 T_3,T_4,T_5 公理.

平凡拓扑空间(trivial topological space) 见"平凡拓扑".

平凡空间(trivial space) 即"平凡拓扑空间".

序拓扑(order topology) 在全序集(线性序集)上依序关系定义的一类拓扑. 设$(X,<)$为全序集,则以所有形如$\{x|x<a\}$与$\{x|x>a\}$的集合为子基在 X 上生成的拓扑称为序拓扑.

通常拓扑(usual topology) 一类特殊的拓扑. 设 R^n 为 n 维欧几里得空间,$X\subset\mathrm{R}^n$. R^n 中按欧几里得空间的度量确定的拓扑在 X 上的相对拓扑称为 X 上的通常拓扑. 当 $X=\mathrm{R}^n$ 时,X 上的通常拓扑满足一切分离公理,是 σ 紧、林德勒夫、局部紧、可分、第一可数、第二可数、仿紧、亚紧、全体正规、连通、道路连通、局部连通空间. 但不是紧、可数紧、序列紧、伪紧、零维空间.

有限补拓扑(finite complement topology) 一种拓扑结构. 设 X 为任意非空集合,以 X 的所有补集是有限集的子集及空集组成的族构成的拓扑称为 X 上的有限补拓扑或有限余拓扑. 将上述定义中的"有限"两字都改为"可数"就是可数补拓扑的定义.

可数补拓扑(countable complement topology) 见"有限补拓扑".

有限余拓扑(finite complement topology) 即"有限补拓扑".

特殊点拓扑(particular point topology) 一种拓扑结构. 设 X 是任意非空集合,p 是 X 的一个定点,$\mathscr{T}=\{A\subset X|A=\varnothing 或 p\in A\}$,则 $\mathscr{T}$ 是一个拓扑,称为 X 上的特殊点拓扑. $(X,\mathscr{T})$是 T_0 空间. 当 X 多于一点时,X 不满足任何其他分离公理. 特殊点拓扑分为有限特殊点拓扑、可数特殊点拓扑和不可数特殊点拓扑三类. 其定义可仿照一个特殊点情形加以描述. 三者拓扑性质并不相同. 如有限特殊点拓扑是紧、可数紧、序列紧、仿紧、亚紧空间,其他二者不是. 不可数特殊点拓扑不是 σ 紧、林德勒夫、σ 局部紧、第二可数空间,其他二者却是. 它们都是伪紧、局部紧、可分、第一可数、连通、道路连通、局部连通、局部道路连通空间.

有限特殊点拓扑(finite particular point topology) 见"特殊点拓扑".

可数特殊点拓扑(countable particular point topology) 见"特殊点拓扑".

不可数特殊点拓扑(uncountable particular point topology) 见"特殊点拓扑".

例外点拓扑(excluded point topology) 一种拓扑结构. 设 X 为任意非空集合,$p\in X$,若

$$\mathscr{T}=\{A\subset X|A=X 或 p\notin A\},$$

则 $\mathscr{T}$ 是一个拓扑,称为 X 上的例外点拓扑. $(X,\mathscr{T})$满足 T_0,T_4,T_5 公理,但不满足其他分离公理,是紧、σ 紧、林德勒夫、可数紧、序列紧、拟紧、仿紧、局部紧、可数仿紧、第一可数、连通空间. 例外点拓扑分为有限例外点拓扑、可数例外点拓扑、不可数例外点拓扑三类. 其拓扑性质并不相同,例如有限例外点拓扑和可数例外点拓扑都是可分的、第二可数的. 而不可数例外点拓扑不具有这些性质.

有限例外点拓扑(finite excluded point topology) 见"例外点拓扑".

可数例外点拓扑(countable excluded point topology) 见"例外点拓扑".

不可数例外点拓扑(uncountable excluded point topology) 见"例外点拓扑".

紧补拓扑(compact complement topology) 一种拓扑结构. 在实数集 R 上,由紧集的补集及空集构成的拓扑称为 R 上的紧补拓扑,相应的拓扑空间称为紧补空间. 紧补拓扑粗于 R 上的通常拓扑,细于 R 上的有限补拓扑. 紧补空间为 T_1 空间,不满足 T_0,T_1 外的其他分离公理,是紧、连通、局部连通空间,但不是全体正规空间.

紧补空间(compact complement space) 见"紧补拓扑".

稠密集(dense set) 拓扑空间的一类特殊的点集.设 X 是拓扑空间,A 是 X 的子集.若 A 的闭包等于 X,则称 A 是 X 中的稠密集,或 A 在 X 中稠密.A 在 X 中稠密,当且仅当 X 的每一非空开集都包含 A 中的点.若 A 的补集在 X 中稠密,则称 A 为 X 中的边缘集.若 A,B 都是 X 的子集,并且 A 在 X 中的闭包包含 B,则称 A 在 B 中稠密.所有有理数的集合与所有无理数的集合在实数空间中是稠密的.整数集是实数空间中的边缘集.

稠密(dense) 见"稠密集".

边缘集(boundary set) 见"稠密集".

无处稠密集(nowhere dense set) 拓扑空间的一类特殊的点集.设 A 是拓扑空间 X 的子集.若 A 的闭包的内部为空集,即$(\overline{A})^{\circ}=\varnothing$,则称 A 是 X 中的无处稠密集.A 是 X 中的无处稠密集当且仅当 A 的闭包 $\overline{A}$ 在 X 中是边缘集,当且仅当 X 的每一非空开集都包含一个与 A 不相交的非空开集.

可分空间(separable space) 一类具有可数性质的拓扑空间.若拓扑空间 X 有一个可数的稠密子集,则称 X 为可分空间.这是弗雷歇(Fréchet,M.-R.)于 1906 年定义的.第二可数空间必是可分空间.可分性不具有遗传性,但具有开遗传性与可数可积性.可分空间的连续像是可分空间.欧几里得空间、希尔伯特空间都是可分空间.

半开集(semi-open set) 一类弱于开集的集合.设 A 为拓扑空间 X 的子集.若存在 X 的开集 G,使得 $G\subset A\subset\overline{G}$,则称 A 为 X 的半开集.开集一定是半开集,但是反之未必成立.任意多个半开集的并仍是半开集.包含于 A 的所有半开集的并称为集合 A 的半内部,它是包含于 A 的最大半开集.

半内部(semi-interior) 见"半开集".

半闭集(semi-closed set) 一类弱于闭集的集合.设 A 为拓扑空间 X 的子集.若 A 的补集是半开集,则称 A 为半闭集.A 是半闭集的充分必要条件是存在 X 中的闭集 F,使得 $F^{\circ}\subset A\subset F$.闭集一定是半闭集,但是反之未必成立.任意多个半闭集的交仍是半闭集.包含 A 的所有半闭集的交称为集合 A 的半闭包,它是包含 A 的最小半闭集.

半闭包(semi-closure) 见"半闭集".

正则开集(regular open set) 一类强于开集的集合.设 A 为拓扑空间 X 的子集.若 A 的闭包的内部等于 A,即$(\overline{A})^{\circ}=A$,则称 A 为 X 的正则开集.正则开集一定是开集,但是反之未必成立.若 A 的内部的闭包等于 A,即$\overline{(A^{\circ})}=A$,则称 A 为 X 的正则闭集.正则闭集一定是闭集,但是反之未必成立.A 为 X 的正则开集当且仅当 A 的补集为 X 的正则闭集.

正则闭集(regular closed set) 见"正则开集".

第一可数空间(first countable space) 一类具有可数性质的拓扑空间.若拓扑空间 X 的任意点都有一个可数的邻域基,则称 X 满足第一可数性公理,或称 X 是第一可数空间.度量空间是第一可数空间.在第一可数空间中,其拓扑可由点列的收敛来确定.第一可数性是遗传的,并且具有可数可积性.

第一可数性公理(first axiom of countability) 见"第一可数空间".

第二可数空间(second countable space) 一类具有可数性质的拓扑空间.若拓扑空间 X 有一个可数基,则称 X 为满足第二可数性公理,或称 X 是第二可数空间.欧几里得空间是第二可数空间.第二可数空间必是第一可数空间,并且是可分的林德勒夫空间.可分的度量空间是第二可数空间.第二可数性是遗传的,并且具有可数可积性.

第二可数性公理(second axiom of countability) 见"第二可数空间".

第一类型集(first category set) 拓扑空间的一类特殊的点集.若拓扑空间 X 的子集 A 可表为可数个无处稠密集的并,则称 A 为 X 的第一类型集.若 A 不是第一类型集,则称 A 为第二类型集.在实数空间中,有理数全体是第一类型集,无理数全体是第二类型集.它们都是实数空间中稠密的边缘集.可数个第一类型集的并仍为第一类型集.有人亦称第一(二)类型集为第一(二)范畴集.

第一范畴集(first category set) 即"第一类型集".

第二类型集(second category set) 见"第一类型集".

第二范畴集(second category set) 即"第二类型集".

贝尔空间(Baire space) 一类特殊的拓扑空间.设有拓扑空间 X,若当 E 是 X 的第一类型集时,E 的补集在 X 中稠密,则称 X 为贝尔空间.下列条件分别是 X 为贝尔空间的充分必要条件:

1. X 的任意非空开集是第二类型集.

2. 对于 X 的闭集列$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$,若

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$$

具有内点,则至少有一个 F_n 具有内点.

3. 若 X 的开集列$\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$中每一成员在 X 中都是稠密的,则

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$$

在 X 中也是稠密的.

贝尔空间的开子集也是贝尔空间.拓扑完备空

间,特别是完备度量空间是贝尔空间.局部紧豪斯多夫空间也是贝尔空间.

贝尔类型定理(Baire category theorem) 亦称贝尔范畴定理.关于完备度量空间的一条定理.若 X 为完备度量空间,$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 X 的一列无处稠密子集,

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,$$

则 A 的补集 $X-A$ 在 X 中是稠密的.它的等价形式为:完备度量空间中一列稠密开子集的交在 X 中仍是稠密的.这一结论称为贝尔类型定理.贝尔(Baire,R.L.)于1889年对实直线情形给出了证明,豪斯多夫(Hausdorff,F.)于1914年推广到完备度量空间,切赫(Čech,E.)于1937年推广到切赫完备空间的情形.

贝尔范畴定理(Baire category theorem) 即"贝尔类型定理".

可数密度空间(space of countable density) 一类特殊的拓扑空间.拓扑空间 X 满足下列条件时,称 X 为可数密度空间:设 F 是 X 的子集,若对于任意可数集 $H\subset F$ 有 $\overline{H}\subset F$,则 F 为闭集.T_2 的序列空间、遗传可分空间都是可数密度空间.X 是可数密度空间的充分必要条件是:对于 X 的任意子集 F,若 $x\in\overline{F}$,则存在 F 的可数子集 H,使得 $x\in\overline{H}$.可数密度空间是遗传的.

F_σ 集(F_σ-set) 拓扑空间中一类特殊的点集.设 A 为拓扑空间 X 的子集.若 A 可表为 X 中的可数个闭集的并,则称 A 为 X 的 F_σ 集.若 A 可表为 X 中的可数个开集的交,则称 A 为 X 的 G_δ 集.F_σ 集的补集是 G_δ 集;反之亦然.有限多个 F_σ 集的交是 F_σ 集,可数多个 F_σ 集的并是 F_σ 集.G_δ 集有相应的对偶性质.所有有理数的集合在实数空间 R 中是 F_σ 集,但不是 G_δ 集.

G_δ 集(G_δ-set) 见"F_σ 集".

波莱尔集(Borel set) 拓扑空间的一类特殊的点集.设 X 是拓扑空间,$\mathscr{S}$ 是 X 的子集族.若 $\mathscr{S}$ 是满足以下条件的最小集族:

1. $\mathscr{S}$ 包含 X 的所有开子集;
2. $A\in\mathscr{S}$ 蕴涵 $X-A\in\mathscr{S}$;
3. $A_i\in\mathscr{S}(i=1,2,\cdots)$ 蕴涵

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{S};$$

则称 $\mathscr{S}$ 为 X 中的波莱尔集族,$\mathscr{S}$ 的成员称为波莱尔集.G_δ 集,F_σ 集都是波莱尔集.波莱尔集的定义是波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)对于实直线的子集描述的,欧几里得空间的波莱尔集理论是由勒贝格(Lebesgue,H.L.)于1905年创建的,度量空间的波莱尔集理论是由豪斯多夫(Hausdorff,F.)于1914年创建的.

苏斯林空间(Suslin space) 一类特殊的拓扑空间.设 X 是拓扑空间.若 X 的任意两两不相交的非空开集族是至多可数的,则称 X 为苏斯林空间.这个空间是苏斯林(Суслин,М.Я.)于1920年提出的.可分空间是苏斯林空间.苏斯林空间的连续像是苏斯林空间.任意多个苏斯林空间的积空间也是苏斯林空间.

T_0 空间(T_0-space) 一类特殊的拓扑空间,它是具有 T_0 分离性的拓扑空间.若拓扑空间 X 的任意相异两点中至少有一点,该点有一个不含另一点的邻域,则称 X 满足 T_0 公理.此时称 X 为 T_0 空间或柯尔莫哥洛夫空间.X 是 T_0 空间的充分必要条件是:对于 X 的任意相异两点 x,y,有 $x\notin\overline{\{y\}}$ 或 $y\notin\overline{\{x\}}$.T_0 空间是柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А.Н.)于1935年引入的.T_0 空间的积空间是 T_0 空间.T_0 空间的子空间也是 T_0 空间.

T_0 公理(T_0-axiom) 见"T_0 空间".

柯尔莫哥洛夫空间(Kolmogoroff space) 见"T_0 空间".

T_1 空间(T_1-space) 一类特殊的拓扑空间,它是具有 T_1 分离性的拓扑空间.若拓扑空间 X 的任意相异两点各有一个邻域不含另一点,则称 X 满足 T_1 公理.此时称 X 为 T_1 空间或弗雷歇空间.X 是 T_1 空间的充分必要条件是:X 中任意单点集 $\{x\}$ 都是闭集.T_1 空间是弗雷歇(Fréchet,M.-R.)于1906年和里斯(Riesz,F.(F.))于1907年引入的.T_1 空间的积空间是 T_1 空间.T_1 空间的子空间是 T_1 空间.T_1 空间必是 T_0 空间.T_1 空间和正则空间是互相独立的.

T_1 公理(T_1-axiom) 见"T_1 空间".

弗雷歇空间(Fréchet space) 即"T_1 空间".

T_2 空间(T_2-space) 一类重要的拓扑空间.具有 T_2 分离性的拓扑空间.若拓扑空间 X 的任意相异两点有不相交的邻域,则称 X 满足 T_2 公理.此时称 X 为 T_2 空间或豪斯多夫空间.X 是 T_2 空间的充分必要条件是:对于任意 $x\in X$,x 的所有闭邻域的交等于 $\{x\}$.正则空间和 T_2 空间是互相独立的.半正则空间、完全豪斯多夫空间、乌雷松空间以及 T_3 空间都是 T_2 空间.T_2 空间的积空间还是 T_2 空间.T_2 空间具有遗传性,但 T_2 空间的连续像未必是 T_2 空间.T_2 空间是豪斯多夫(Hausdorff,F.)于1914年提出的.

T_2 公理(T_2-axiom) 见"T_2 空间".

豪斯多夫空间(Hausdorff space) 即"T_2 空间".

乌雷松空间(Urysohn space) 一类特殊的拓

扑空间. 它是具有某种函数分离性的拓扑空间. 设 X 为拓扑空间. 若对于 X 的任意相异两点 x,y,存在连续函数 $f:X\to[0,1]$,使得

$$f(x)=0,\quad f(y)=1,$$

则称 X 为乌雷松空间. 乌雷松空间是完全豪斯多夫空间,但是反之不成立. 乌雷松空间和 T_3 空间是互相独立的. 乌雷松空间是乌雷松(Урысон, П. С.)于 1925 年提出的.

半正则空间(semiregular space) 一类特殊的拓扑空间. 以正则开集形成基的豪斯多夫空间称为半正则空间. T_3 空间是半正则空间. 乌雷松空间和半正则空间是互相独立的.

$T_{2\frac{1}{2}}$空间($T_{2\frac{1}{2}}$-space) 一类特殊的拓扑空间. 它是具有 $T_{2\frac{1}{2}}$分离性的拓扑空间. 若对于拓扑空间 X 的任意相异两个点 a,b,存在开集 O_a,O_b 分别包含 a,b,并且$\overline{O_a}\cap\overline{O_b}=\varnothing$,则称 X 满足 $T_{2\frac{1}{2}}$公理. 此时称 X 为 $T_{2\frac{1}{2}}$空间或完全豪斯多夫空间. T_3 空间是完全豪斯多夫空间,完全豪斯多夫空间是豪斯多夫空间,但是反之均不成立. 完全豪斯多夫空间与半正则空间是互相独立的. 乌雷松空间必是完全豪斯多夫空间.

$T_{2\frac{1}{2}}$公理($T_{2\frac{1}{2}}$-axiom) 见"$T_{2\frac{1}{2}}$空间".

完全豪斯多夫空间(completely Hausdorff space) 即"$T_{2\frac{1}{2}}$空间".

T_3 空间(T_3-space) 一类特殊的拓扑空间. 它是具有 T_1 分离性与 T_3 分离性的拓扑空间. 若拓扑空间 X 的任意点 x 与不包含 x 的任意闭集有不相交的邻域,则称 X 满足 T_3 公理或 X 为正则空间. X 是正则空间的充分必要条件是 X 的任意点都有闭邻域基. 同时满足 T_1 公理与 T_3 公理的拓扑空间称为 T_3 空间. 有人称满足 T_3 公理的空间为 T_3 空间,而将满足 T_1 与 T_3 公理的空间称为正则空间. T_3 空间是完全豪斯多夫空间与半正则空间. T_3 空间和乌雷松空间是互相独立的. 吉洪诺夫空间是 T_3 空间. 正则空间和完全豪斯多夫空间、豪斯多夫空间、T_1 空间、T_0 空间等都是互相独立的. T_3 空间具有可积性与遗传性.

T_3 公理(T_3-axiom) 见"T_3 空间".

正则空间(regular space) 见"T_3 空间".

$T_{3\frac{1}{2}}$空间($T_{3\frac{1}{2}}$-space) 一类特殊的拓扑空间. 它是具有 T_1 分离性与 $T_{3\frac{1}{2}}$分离性的拓扑空间. 若对于拓扑空间 X 的任意点 x 和不包含 x 的闭集 B,存在连续映射 $f:X\to[0,1]$,使得

$$f(x)=0,\quad f(B)=\{1\},$$

则称 X 满足 $T_{3\frac{1}{2}}$公理. 这个公理是乌雷松(Урысон, П. С.)于 1925 年提出的. 满足 $T_{3\frac{1}{2}}$公理的拓扑空间称为完全正则空间. 同时满足 T_1 公理与 $T_{3\frac{1}{2}}$公理的拓扑空间称为 $T_{3\frac{1}{2}}$空间或吉洪诺夫空间. 这一类空间是吉洪诺夫(Тихонов, А. Н.)于 1930 年首先研究的. T_4 空间是 $T_{3\frac{1}{2}}$空间. $T_{3\frac{1}{2}}$空间是 T_3 空间. 完全正则空间是正则空间. 正规空间和完全正则空间是互相独立的. 完全正则空间和完全豪斯多夫空间、豪斯多夫空间、T_1 空间、T_0 空间都是互相独立的. $T_{3\frac{1}{2}}$空间具有可积性和遗传性. $T_{3\frac{1}{2}}$空间在研究紧化问题时是非常重要的.

$T_{3\frac{1}{2}}$公理($T_{3\frac{1}{2}}$-axiom) 见"$T_{3\frac{1}{2}}$空间".

完全正则空间(completely regular space) 见"$T_{3\frac{1}{2}}$空间".

吉洪诺夫空间(Tychonoff space) 即"$T_{3\frac{1}{2}}$空间".

T_4 空间(T_4-space) 一类特殊的拓扑空间. 它是具有 T_1 分离性与 T_4 分离性的拓扑空间. 若拓扑空间 X 的任意两个不相交的闭集有不相交邻域,则称 X 满足 T_4 公理或 X 为正规空间. 正规空间首先由蒂茨(Tietze, H.)于 1923 年,亚历山德罗夫(Александров, П. С.)和乌雷松(Урысон, П. С.)于 1924 年分别定义. 同时满足 T_1 公理与 T_4 公理的拓扑空间称为 T_4 空间. 有人将满足 T_4 公理的空间称为 T_4 空间. 关于正规性质的讨论曾出现在菲托里斯(Vietoris, I.)于 1921 年发表的文章中. 正规空间的子空间未必是正规空间. 它不具有可积性,但是具有闭遗传性. 在正规空间上乌雷松引理和蒂茨扩张定理都成立. 正规空间和 $T_0,T_1,T_2,T_{2\frac{1}{2}},T_3,T_{3\frac{1}{2}}$等空间都是互相独立的. T_4 空间是 $T_{3\frac{1}{2}}$空间. 紧 T_2 空间是正规空间.

正规空间(normal space) 见"T_4 空间".

T_4 公理(T_4-axiom) 见"T_4 空间".

T_5 空间(T_5-space) 一类特殊的拓扑空间. 它是具有 T_1 分离性与 T_5 分离性的拓扑空间. 若拓扑空间 X 的任意子空间都是正规空间,则称 X 满足 T_5 公理或 X 为完全正规空间. 同时满足 T_1 公理与 T_5 公理的拓扑空间称为 T_5 空间. 有人称满足 T_5 公理的空间为 T_5 空间. 完全正规空间又称为遗传正规空间.

T_5 公理(T_5-axiom) 见"T_5 空间".

完全正规空间(completely normal space) 见"T_5 空间".

遗传正规空间(hereditarily normal space) 即"完全正规空间".

T_6 空间(T_6-space) 一类特殊的拓扑空间. 它是具有 T_1 分离性与 T_6 分离性的拓扑空间. 若对于拓扑空间 X 的任意非空闭集 F,存在 X 上的实值连

续函数 f,使得 $f(F)=\{0\}$,并且当 $x\notin F$ 时,$f(x)\neq 0$,则称 X 满足 T_6 公理.正规空间满足 T_6 公理的充分必要条件是任意闭(开)集是 $G_\delta(F_\sigma)$集.满足 T_6 公理的拓扑空间称为完备正规空间.同时满足 T_1 公理与 T_6 公理的拓扑空间称为 T_6 空间.这是切赫(Čech,E.)于 1929 年定义的.库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)曾指出完备正规空间必是完全正规空间.完备正规性首先出现在乌雷松(Урысон,П. С.)于 1925 年发表的文章中,在紧空间的范围内由亚历山德罗夫(Александров,П. С.)和乌雷松于 1929 年研究过.维坚尼索夫(Веденисов,Н. Б.)于 1936 年和 1940 年给出完备正规性的条件.

T_6 公理(T_6-axiom)　见"T_6 空间".

完备正规空间(perfectly normal space)　见"T_6 空间".

乌雷松引理(Urysohn lemma)　刻画正规性的一条定理.拓扑空间 X 为正规空间的充分必要条件是:对于 X 的任意两个不相交的闭集 A,B,存在连续映射 $f:X\to[0,1]$,使得当 $x\in A$ 时,$f(x)=0$;当 $x\in B$ 时,$f(x)=1$.这个引理是乌雷松(Урысон,П. С.)于 1925 年建立的.它反映了正规空间中两个不相交闭集的邻域分离性与函数分离性之间的相互联系.

蒂茨扩张定理(Tietze extension theorem)　反映正规空间中连续映射的扩张性质的一条定理.对于任意给定的闭区间$[a,b]$,拓扑空间 X 为正规空间的充分必要条件是:对于 X 的任意闭集 A,以及 A 上的任意连续映射 $f_0:A\to[a,b]$,都有一个在 X 上的连续扩张 $f:X\to[a,b]$.以上结论称为蒂茨扩张定理.

连通空间(connected space)　一类重要和常用的拓扑空间.若拓扑空间 X 不能表示成两个互不相交的非空开集的并,则称 X 为连通空间.若拓扑空间的子集作为子空间是连通的.则称它为连通子集.

拓扑空间 X 是连通空间的充分必要条件是:X 不是两个非空隔离集的并.连通子集的闭包是连通的.连通空间的积空间是连通的.连通空间的连续像是连通的.n 维欧几里得空间、$n(\geqslant 1)$维球面 S^n 都是连通的,但 S^0 不是连通的.连通性的定义是若尔当(Jordan,C.)于 1893 年关于平面的紧子集类引入的.勒尼斯(Lennes,N. J.)于 1911 年、豪斯多夫(Hausdorff,F.)于 1914 年将它推广到抽象空间.连通性的系统研究开始于豪斯多夫于 1914 年,克纳斯特(Knaster,B.)和库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)于 1921 年的工作.

连通子集(connected subset)　见"连通空间".

隔离集(separated sets)　一对特定的子集.用于刻画拓扑空间的子集之间的一种关系.设 A,B 为拓扑空间 X 的子集.若满足

$$A\cap\overline{B}=\overline{A}\cap B=\varnothing,$$

则称 A 和 B 为 X 中的隔离集.利用隔离集概念可以定义拓扑空间的连通性.拓扑空间 X 是连通的当且仅当 X 不能表示为 X 中两个非空隔离集的并.

连通分支(component)　与连通性有关的一个概念.若拓扑空间 X 的子集 A 是一个极大的连通子集(即 A 本身是连通集,但不是其他连通子集的真子集),则称 A 是 X 的一个连通分支.对于道路连通性也可定义道路连通分支,只要把上述定义的连通二字都改成道路连通即可.任意拓扑空间可分解为两两不相交的连通分支的并集.

道路连通分支(path component)　见"连通分支".

局部连通空间(locally connected space)　一类拓扑空间.设 X 为拓扑空间,$x\in X$.若存在由连通子集组成的 x 的邻域基,则称 X 在点 x 是局部连通的.若拓扑空间 X 在每一点都是局部连通的,则称 X 是局部连通空间.X 是局部连通空间当且仅当 X 的开集的连通分支是开集.局部连通空间在连续开映射下的像是局部连通空间.局部连通空间的积空间是局部连通的.局部连通空间和连通空间是相互独立的.

道路(path)　拓扑空间的基本概念之一.单位区间 $I=[0,1]$到拓扑空间 X 的连续映射 $f:I\to X$ 称为 X 中的一条道路,$f(0)=a$,$f(1)=b$ 分别称为道路 f 的始点与终点.当 $f(0)=f(1)$时,称 f 为 X 中的闭路.

闭路(closed path)　见"道路".

道路连通空间(path connected space)　一类拓扑空间.若对于拓扑空间 X 中的任意两点都存在以这两点分别为始点与终点的道路,则称 X 为道路连通空间.若拓扑空间的子集作为子空间是道路连通的,则称它为道路连通子集.道路连通空间一定是连通空间,但是,其逆不成立.例如,X 为$\{(x,y)\mid y=\sin(1/x),x\neq 0\}$与$\{(0,y)\mid y\in[-1,1]\}$的并集且赋予通常拓扑,则 X 是连通空间但不是道路连通空间.

道路连通子集(path connected subset)　见"道路连通空间".

局部道路连通空间(locally path connected space)　一类拓扑空间.设 X 为拓扑空间.若对于任意 $x\in X$ 和 x 的任意邻域 U,存在 x 的一个道路连通的邻域 V 使得 $V\subset U$,则称 X 为局部道路连通空间.道路连通空间未必是局部道路连通空间.X 为局部道路连通空间当且仅当 X 的开集的道路连通分支是开集.局部道路连通空间在连续开映射下的像是局部道路连通空间.

遗传不连通空间(hereditarily disconnected space) 一类拓扑空间. 若拓扑空间 X 的每一连通分支都是单点集,则称 X 为遗传不连通空间. 拓扑空间 X 是遗传不连通的当且仅当 X 不含有基数多于 1 的连通子集. 这类空间是豪斯多夫(Hausdorff, F.)于 1914 年引入的. 遗传不连通空间有时也称为完全不连通空间. 离散空间、零维空间都是遗传不连通空间.

完全不连通空间(totally disconnected space) 见"遗传不连通空间".

积空间(product space) 一类重要的拓扑空间. 若$\{(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)\mid\alpha\in D\}$为一族拓扑空间,

$$X=\prod_{\alpha\in D}X_\alpha$$

为$\{X_\alpha\}_{\alpha\in D}$的笛卡儿乘积,$p_\alpha:X\to X_\alpha$ 为 X 到坐标空间 X_α 的投影,则以

$$\mathscr{S}=\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\mid\alpha\in D,U_\alpha\in\mathscr{T}_\alpha\}$$

为子基生成的拓扑 $\mathscr{T}$ 称为 X 上的积拓扑,$(X,\mathscr{T})$ 称为$\{(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)\mid\alpha\in D\}$的积空间. $\mathscr{S}$ 的元素的所有有限交构成的集族 $\mathscr{B}$ 是积拓扑的基. 弗雷歇(Fréchet,M.-R.)于 1910 年首先讨论抽象空间的积空间. 任意多个拓扑空间的积空间是由吉洪诺夫(Тихонов,А. Н.)于 1930 年定义的. 在笛卡儿乘积上引入积拓扑是从已知拓扑空间构成新拓扑空间的重要方法. 吉洪诺夫的论文不仅定义了积空间,也提出了一些重要性质. 他的结果使积空间成为现代一般拓扑的典型工具之一. 不仅在可度量化和紧化问题上给出了完美的结果,而且对函数空间的拓扑结构也给出了深刻的刻画.

积拓扑(product topology) 见"积空间".

箱拓扑(box topology) 在拓扑空间的乘积集合上不同于积拓扑的一个常用拓扑. 设$\{(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)\mid\alpha\in D\}$是一族拓扑空间. 在乘积集合

$$X=\prod_{\alpha\in D}X_\alpha$$

上以

$$\mathscr{B}=\left\{\prod_{\alpha\in D}U_\alpha\mid\alpha\in D,U_\alpha\in\mathscr{T}_\alpha\right\}$$

为基生成的拓扑称为 X 上的箱拓扑. 一般情况下它细于积拓扑. 当 D 为有限集时,箱拓扑与积拓扑是一致的.

乘积不变性(product invariance) 在乘积运算下保持不变的拓扑性质. 设 P 表示某个拓扑性质,若当每个坐标空间 $X_\alpha(\alpha\in D)$具有性质 P 时,积空间

$$X=\prod_{\alpha\in D}X_\alpha$$

也具有性质 P,则称性质 P 为乘积不变性或可积性. 例如,豪斯多夫分离性是乘积不变性,连通性和紧性也是乘积不变性. 对有限个坐标空间具有的乘积不变性称为有限可积性. 对可数个坐标空间具有的乘积不变性称为可数可积性. 度量空间、第一可数空间、第二可数空间、可分空间等都具有可数可积性. 正规空间、林德勒夫空间不具有可积性.

可积性(productive property) 见"乘积不变性".

有限可积性(finitely productive property) 见"乘积不变性".

可数可积性(countably productive property) 见"乘积不变性".

商空间(quotient space) 一类重要的拓扑空间. 若$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间,R 是 X 上的等价关系,X/R 是 X 关于 R 的商集,则使得自然映射 $p:X\to X/R$ 为连续的 X/R 上的最细拓扑,即

$$\mathscr{T}_R=\{U\subset X/R\mid p^{-1}(U)\in\mathscr{T}\},$$

称为 X/R 上的商拓扑,拓扑空间$(X/R,\mathscr{T}_R)$称为$(X,\mathscr{T})$关于等价关系 R 的商空间. 商空间首先出现在穆尔(Moore,R. L.)于 1925 年发表的论文和亚历山德罗夫(Александров,П. С.)于 1927 年发表的论文中,两位作者仅讨论了特殊情形,即由上半连续分解确定的商空间. 商空间的一般概念及商映射的概念是由比尔(Baer,R. W.)和列维(Levi,E. E.)于 1932 年引入的. 布尔巴基(Bourbaki,N.)于 1940 年与 1951 年出版的书中首先系统讨论了商空间.

商拓扑(quotient topology) 见"商空间".

和空间(sum space) 一类拓扑空间. 若$\{(X_i,\mathscr{T}_i)\mid i\in D\}$为一族两两不相交的拓扑空间,

$$X=\bigcup_{i\in D}X_i.$$

X 上的拓扑 $\mathscr{T}$ 是这样确定的:$U\in\mathscr{T}$,当且仅当对任意 $i\in D$,$U\cap X_i\in\mathscr{T}_i$,则拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称为$\{(X_i,\mathscr{T}_i)\mid i\in D\}$的和空间.

分解空间(decomposition space) 一类拓扑空间. 拓扑空间 X 的分解 $\mathscr{F}$ 是满足以下条件的集族:$\mathscr{F}$ 由 X 的两两不相交的非空闭集组成,并且 $\mathscr{F}$ 构成 X 的覆盖. 给定空间 X 的分解 $\mathscr{F}$,在 X 上可引入下述等价关系~:对于 $x,y\in X$,若存在某个 $F\in\mathscr{F}$ 同时含有 x,y,则规定 $x\sim y$,此时,商空间 $X/\sim$ 称为分解空间.

上半连续分解空间(upper semi-continuous decomposition space) 一类拓扑空间. 设 $\mathscr{D}$ 为拓扑空间 X 的商空间. 若对于 $\mathscr{D}$ 中任意元素 D 和 X 中包含 D 的任意开集 U,存在开集 V 使得 $D\subset V\subset U$,其中 V 是 $\mathscr{D}$ 中某些元的并,则称 $\mathscr{D}$ 为上半连续分解空间. 商空间是上半连续分解空间的充分必要条件是自然映射为闭映射. 上半连续分解空间的概念是穆尔(Moore,R. L.)于 20 世纪 20 年代末期

引入的.

定向集(directed set) 一类特殊的偏序集.设$(D,\leqslant)$为偏序集.若对于任意$d_1,d_2\in D$都有$d_3\in D$使得$d_1\leqslant d_3,d_2\leqslant d_3$,则称$(D,\leqslant)$为定向集.全序集是定向集.滤子按包含关系$\supset$是定向集.拓扑空间中一点的邻域系按包含关系$\supset$也是定向集.

共尾子集(cofinal subset) 定向集的一类子集.设$(D,\leqslant)$是定向集,A是D的子集.若对于任意$a\in D$,存在$a_1\in A$使得$a\leqslant a_1$,则称A是D的共尾子集.拓扑空间的一点的邻域系按包含关系$\supset$看成定向集时,其邻域基就是它的一个共尾子集.自然数集的任意无限子集都是它的共尾子集.定向集的等终子集是共尾子集.定向集的共尾子集仍为定向集.

等终子集(eventially subset) 定向集的一类子集.设$(D,\leqslant)$是定向集,A是D的子集.若存在$a_0\in D$,使得当$a\geqslant a_0$时有$a\in A$,则称A是D的等终子集.对于$a_0\in D$,若

$$D(a_0)=\{a\mid a\in D,a\geqslant a_0\},$$

则$D(a_0)$是D的等终子集.

网(net) 亦称定向点集.序列概念的推广.网的概念是研究拓扑空间中极限理论的有力工具.设X是集合,$(D,\leqslant)$是定向集,D到X的映射S称为X中的网.网亦记为$\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$,其中$S_\alpha$是映射$S$在$\alpha\in D$的值.特别地,当$D$是自然数集,$\leqslant$是通常的大小关系时,网就是序列.和度量空间类似,对于第一可数空间,它的拓扑可以用序列的极限来刻画,但是对于一般拓扑空间该性质不成立.穆尔(Moore,E. H.)与史密斯(Smith,H. L.)为了将这种方法应用于一般情形,于1922年建立了网和定向集上的收敛理论.在一般拓扑空间中用网准确地描述收敛性是凯莱(Kelley,J. L.)于1950年给出的.麦克夏(Mcshane,E. J.)于1952年做了非常有趣的描述.设$\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$是集合$X$中的网,$A$是$X$的子集.若存在$\alpha_0\in D$,当$\alpha\geqslant\alpha_0$时都有$S_\alpha\in A$,则称网$S_\alpha$终于$A$.若对于任意$\alpha\in D$,存在$\beta\in D$使得$\alpha\leqslant\beta$且$S_\beta\in A$,则称网$S_\alpha$常在$A$中.这些语言在刻画网的收敛性时经常用到.

定向点集(directed set) 即"网".

子网(subnet) 子序列概念的推广.设$T=\{T_\beta,\beta\in E,\leqslant\}$与$S=\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$是两个网,称网$T$是网$S$的子网,若存在映射$\varphi:E\to D$,满足:

1. $T=S\circ\varphi$,即对于任意$\beta\in E$有$T_\beta=S_{\varphi(\beta)}$.
2. 对任意$\alpha\in D$,存在$\beta\in E$,使得当$\gamma\geqslant\beta$时有
$$\varphi(\gamma)\geqslant\alpha.$$

用子网可以刻画紧性如下:拓扑空间X是紧空间当且仅当X中的每个网都有一个收敛的子网.

网的极限点(limit point of a net) 序列极限概念的推广.设$S=\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$是拓扑空间$X$中的网,$x\in X$.若对于$x$的任意邻域$U$,存在$\alpha\in D$,使得当$\beta\geqslant\alpha$时有$S_\beta\in U$,则称网$S$收敛于$x$,或$x$是网$S$的极限.若一个网收敛,则它的极限未必是惟一的.但是,有以下结论:拓扑空间X是T_2空间当且仅当X中每个网至多有一个极限.用网的收敛可以刻画集合的闭包.设A是拓扑空间X的子集,$\overline{A}$表示A的闭包,则$x\in\overline{A}$当且仅当A中有收敛于x的网.

穆尔-史密斯收敛(Moore-Smith convergence) 亦称网的收敛.序列收敛的推广.分析的基本结构是极限过程,所以收敛理论极为重要.序列收敛的工具远不敷用,如积分的定义就不能用序列收敛刻画,因此,收敛理论必须推广.在拓扑空间中可以研究收敛理论,反之用收敛的概念也可刻画空间的拓扑.穆尔-史密斯收敛是其工具之一.

网的收敛(convergence of a net) 即"穆尔-史密斯收敛".

网的聚点(cluster point of a net) 序列聚点概念的推广.设$S=\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$是拓扑空间$X$中的网,$x\in X$.若对于$x$的任意邻域$U$以及任意$\alpha\in D$,存在$\beta\geqslant\alpha$,使得$S_\beta\in U$,则称$x$为网$S$的聚点.特别若网$S$收敛于$x$,则$x$必为$S$的聚点.存在这样的网,它有惟一的聚点,但却不收敛于该点.拓扑空间中点x为网S的聚点,当且仅当存在S的某个子网收敛于x.

超网(universal net) 一类特殊的网.设X是集合,$S=\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$是$X$中的网.若对于$X$的任意子集$A$,存在$\alpha\in D$,使得$\{S_\beta\mid\beta\geqslant\alpha\}\subset A$或者$\{S_\beta\mid\beta\geqslant\alpha\}\subset X-A$,则称$S$是$X$中的超网.$X$中的每个常值网是超网.对于$X$中的每个网$S$,都存在超网$T$,使得$T$是$S$的子网.拓扑空间$X$是紧空间当且仅当$X$中每个超网都有极限.

序列空间(sequential space) 一类特殊的拓扑空间.设X为拓扑空间,若对于任意$F\subset X$,当序列$\{x_n\}\subset F$收敛于x_0时,就有$x_0\in F$,则F为X中的闭集,此时称X为序列空间.序列空间的商空间是序列空间.度量空间的商空间也是序列空间.

弗雷歇空间(Fréchet space) 一类特殊的序列空间.设X为拓扑空间,若对于X的每一子集A与$x\in\overline{A}$,存在A中的序列$\{x_n\}$使得$\{x_n\}$收敛于x,则称X为弗雷歇空间.第一可数空间是弗雷歇空间,弗雷歇空间是序列空间,反之均不成立.但有人也把T_1空间称为弗雷歇空间.

滤子(Filter) 一类集族.设X是集合,$\mathscr{F}$是X的非空子集族.若$\mathscr{F}$满足:

1. $\mathscr{F}$的任意两个成员的交属于$\mathscr{F}$;
2. 若$A\in\mathscr{F}$,$A\subset B\subset X$,且$B\in\mathscr{F}$;

则称$\mathscr{F}$为X上的滤子.为了用极限的语言刻画拓

扑,嘉当(Cartan,H.)于 1937 年定义了滤子.布尔巴基(Bourbaki,N.)详细讨论了滤子的概念,并用它讨论了极限.滤子的理论也是研究极限理论的一种工具,它和网的理论是等价的.巴特尔(Bartle,R.G.)以及布龙斯(Bruns,G.)和施密特(Schmidt,J.)于 1955 年分别证明了它们的等价性.设 $\mathscr{F}_1,\mathscr{F}_2$ 为集合 X 上的两个滤子,若 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$,则称 $\mathscr{F}_1$ 弱于 $\mathscr{F}_2$ 或 $\mathscr{F}_2$ 强于 $\mathscr{F}_1$.这种强弱关系是滤子间的序关系.

弱于关系(coarser relation) 见"滤子".

强于关系(finer relation) 见"滤子".

滤子基(filter base) 生成滤子的一类集族.设 $\mathscr{B}$ 是集合 X 的子集族.若 $\mathscr{B}$ 满足:

1. $\mathscr{B}\neq\varnothing$;

2. $\varnothing\notin\mathscr{B}$;

3. 若 $A_1,A_2\in\mathscr{B}$,则存在 $A_3\in\mathscr{B}$,使得

$$A_3\subset A_1\cap A_2;$$

则称 $\mathscr{B}$ 为 X 上的滤子基.设 $\mathscr{B}$ 是 X 上的滤子基,若 $\mathscr{F}=\{A\subset X\mid$存在 $B\in\mathscr{B}$ 使 $B\subset A\}$,则 $\mathscr{F}$ 是 X 上的滤子,称 $\mathscr{F}$ 为由 $\mathscr{B}$ 生成的滤子.当 X 上的两个滤子基生成同一个滤子时,这两个滤子基称为等价的.X 的具有有限交性质的子集族 $\mathscr{S}$ 称为 X 上的滤子子基.由 $\mathscr{S}$ 的所有有限交构成的集族 $\mathscr{B}$ 是滤子基,称 $\mathscr{B}$ 为由滤子子基 $\mathscr{S}$ 生成的滤子基.

滤子基的生成滤子(filter generated by a filter base) 见"滤子基".

等价的滤子基(equivalent filter bases) 见"滤子基".

滤子子基(filter subbase) 见"滤子基".

极大滤子(maximal filter) 亦称超滤子.一类特殊的滤子.设 $\mathscr{F}$ 是集合 X 上的滤子.若对于包含 $\mathscr{F}$ 的滤子 $\mathscr{H}$ 恒有 $\mathscr{F}=\mathscr{H}$,则称 $\mathscr{F}$ 为极大滤子.对于集合 X 上的任意滤子 $\mathscr{F}$,恒存在包含 $\mathscr{F}$ 的极大滤子.若 $\mathscr{F}$ 为 X 上极大滤子,则对于任意 $A\subset X$,必有 $A\in\mathscr{F}$ 或 $X-A\in\mathscr{F}$.

超滤子(ultrafilter) 即"极大滤子".

邻域滤子(neighborhood filter) 一类特殊的滤子.拓扑空间 X 中点 x 的邻域系是 X 上的滤子,称为 x 的邻域滤子.

滤子的极限(limit of a filter) 一类特殊的极限.设 X 为拓扑空间,$x\in X$,$\mathscr{F}$ 为 X 上的滤子.若 x 的每一邻域都是 $\mathscr{F}$ 的成员,则称滤子 $\mathscr{F}$ 收敛于 x,或 x 是滤子 $\mathscr{F}$ 的极限,记为 $x\in\lim\mathscr{F}$.

滤子的聚点(cluster point of a filter) 一类特殊的聚点.设 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 上的滤子.若

$$x\in\bigcap_{B\in\mathscr{F}}\overline{B},$$

则称 x 为 $\mathscr{F}$ 的聚点.x 是滤子 $\mathscr{F}$ 的聚点当且仅当 x 的每一邻域与 $\mathscr{F}$ 的每一成员都相交.滤子的极限是滤子的聚点.超滤子的聚点是该超滤子的极限.

主超滤子(principal ultrafilter) 一类特殊的超滤子.具有聚点 p 的超滤子恰是含有点 p 的所有集合的集族,称为主超滤子.不具有聚点的超滤子称为非主超滤子.

非主超滤子(non-principal ultrafilter) 见"主超滤子".

覆盖(cover) 拓扑空间的基本概念.一种特殊的集族.设 $\mathscr{A}$ 是由集合组成的族.若它的所有成员的并包含集合 B,则称该集族 $\mathscr{A}$ 是 B 的一个覆盖,或称 $\mathscr{A}$ 覆盖 B.在拓扑空间 X 中,若 $\mathscr{A}$ 的每一成员都是 X 的开集(或闭集),并且 $\mathscr{A}$ 覆盖 X,则称 $\mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖(或闭覆盖).若 $\mathscr{A}$ 的子族 $\mathscr{A}_1$ 也是 B 的覆盖,则称 $\mathscr{A}_1$ 是 $\mathscr{A}$ 的子覆盖.当覆盖 $\mathscr{A}$ 为有限集或可数集时分别称 $\mathscr{A}$ 为有限覆盖或可数覆盖.

开覆盖(open cover) 见"覆盖".

闭覆盖(closed cover) 见"覆盖".

子覆盖(subcover) 见"覆盖".

有限覆盖(finite cover) 见"覆盖".

可数覆盖(countable cover) 见"覆盖".

林德勒夫空间(Lindelöf space) 一类具有可数性质的拓扑空间.若拓扑空间 X 的任意开覆盖都有可数子覆盖,则称 X 是林德勒夫空间.第二可数空间是林德勒夫空间,但林德勒夫空间未必是第一可数空间或第二可数空间.林德勒夫空间的连续像是林德勒夫空间.林德勒夫空间是闭遗传的,但是不具有可积性.正则的林德勒夫空间是正规空间.林德勒夫性与可分性是互相独立的.林德勒夫(Lindelöf,E.L.)于 1903 年证明了 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的任意开子集族含有可数子族具有相同的并.林德勒夫空间的概念是亚历山德罗夫(Александров,П.С.)和乌雷松(Урысон,П.С.)于 1929 年引入的.库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)和谢尔品斯基(Sierpiński,W.)曾于 1921 年讨论过林德勒夫性质.

有限交性质(finite intersection property) 集族的一种性质.设 $\mathscr{A}$ 为集族,若 $\mathscr{A}$ 的任意有限子族都有非空交,即:若 $\mathscr{A}_1$ 为 $\mathscr{A}$ 的有限子族,有

$$\bigcap_{A\in\mathscr{A}_1}A\neq\varnothing,$$

则称集族 $\mathscr{A}$ 具有有限交性质.

既约覆盖(irreducible cover) 一种特殊的覆盖.设 $\mathscr{U}$ 是拓扑空间 X 的覆盖.若 $\mathscr{U}$ 的任意真子族都不能覆盖 X,则称 $\mathscr{U}$ 为 X 的既约覆盖.

紧空间(compact space) 亦称紧致空间.最重要的一类拓扑空间.若拓扑空间 X 的任意开覆盖都有有限子覆盖,则称 X 为紧空间.下列条件分别与

紧性是等价的：

1. 具有有限交性质的闭集族有非空交.

2. 具有有限交性质的集族其各成员之闭包的交非空.

3. 任意网有聚点.

4. 任意滤子有聚点.

5. 任意极大滤子是收敛滤子.

平凡空间、有限补空间都是紧空间，但实直线不是紧的. 紧性是闭遗传的且具有可积性. 紧空间的连续像是紧空间. 紧豪斯多夫空间是正规空间.

紧性概念起源于在 1894 年被证明的波莱尔定理：闭区间的任意可数开覆盖有有限子覆盖. 勒贝格(Lebesgue，H. L.)注意到该定理对闭区间的任意开覆盖同样成立. 波莱尔(Borel，(F.-É.-J.-)É.)于 1903 年又将此结果推广到欧氏空间的有界闭子集上. 亚尼谢夫斯基(Janiszewski，Z.)于 1912 年对于抽象空间曾用过紧性概念. 紧空间的概念是菲托里斯(Vietoris，I.)于 1921 年引入的. 在紧空间理论形成和发展过程中，库拉托夫斯基(Kuratowski，K.)和谢尔品斯基(Sierpiński，W.)于 1921 年，萨克斯(Saks，S.)于 1921 年，亚历山德罗夫(Александров，П. С.)和乌雷松(Урысон，П. С.)于 1923 年，吉洪诺夫(Тихонов，А. Н.)于 1930 年，都先后作出了卓越的贡献.

紧集(compact set)　亦称紧致集. 拓扑空间的一类重要点集. 设 C 是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的子集，若 C 关于 $\mathscr{T}$ 的相对拓扑是紧空间，则称 C 为紧集. 紧空间的闭子集是紧集. 拓扑空间的紧集未必是闭集，但豪斯多夫空间的紧集是闭集. 拓扑空间中有限个紧集的并仍为紧集. 两个紧集的交未必是紧的，但闭且紧的子集的任意交是闭且紧的. 拓扑空间的紧集的闭包可以不是紧的，但 T_3 空间的紧集的闭包是紧的. 若 A 是 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的子集，则 A 是紧集当且仅当 A 是有界闭集.

吉洪诺夫定理(Tychonoff theorem)　关于紧空间的一条定理，该定理断言：任意多个紧空间的积空间是紧空间. 这个定理是有关紧性的最有用的定理，也是一般拓扑学中最重要的定理之一. 它是吉洪诺夫(Тихонов，А. Н.)于 1930 年提出的. 凯莱(Kelley，J. L.)于 1950 年证明了吉洪诺夫定理和选择公理是等价的.

半紧空间(semicompact space)　一类拓扑空间. 若拓扑空间 X 有紧集列$\{K_i\}$，使得 $X=\bigcup K_i$，并且 X 的任意紧集被某个 K_i 包含，则称 X 是半紧空间.

可数紧空间(countably compact space)　一类拓扑空间. 若拓扑空间 X 的任意可数开覆盖都有有限子覆盖，则称 X 为可数紧空间. X 是可数紧空间，当且仅当 X 的具有有限交性质的可数闭集族具有非空交，当且仅当所有可数无限子集有聚点，当且仅当非空闭集单调下降列有非空交. 可数紧空间是伪紧空间. 紧空间是可数紧空间. 序列紧空间是可数紧空间. 可数紧空间是子集紧空间. 可数紧空间的连续像是可数紧空间. 两个可数紧空间的积未必是可数紧的，诺瓦克(Novak，J.)于 1953 年曾举出反例. 可数紧的概念源于分析. 在古典分析中可数紧性、序列紧性与紧性三者是一致的. 实际上，在第二可数的 T_1 空间中三者是一致的.

序列紧空间(sequentially compact space)　一类拓扑空间. 若拓扑空间 X 中的任意序列都有收敛的子序列，则称 X 为序列紧空间. 序列紧空间和紧空间是互相独立的. 序列紧空间是可数紧空间. 在第一可数空间的范围内，序列紧性与可数紧性是等价的. 在度量空间的范围内，紧性、序列紧性与可数紧性三者是等价的. 序列紧性具有可数可积性、闭遗传性. 序列紧空间的连续像是序列紧的. 有限个序列紧空间的和空间是序列紧的.

子集紧空间(subsetwise compact space)　亦称弱可数紧空间或列紧空间. 一类拓扑空间. 若拓扑空间 X 中任意无限子集都有聚点，则称 X 为子集紧空间. 可数紧空间是子集紧空间. 在 T_1 空间的范围内，子集紧性与可数紧性是等价的. 子集紧性是闭遗传的.

弱可数紧空间(weakly countably compact space)　即"子集紧空间".

列紧空间(limit point compact space)　即"子集紧空间".

伪紧空间(pseudo compact space)　一类拓扑空间. 若拓扑空间 X 上的每个实值连续函数都是有界的，则称 X 是伪紧空间. 可数紧空间是伪紧空间. T_4 的伪紧空间是可数紧空间. 伪紧空间的连续像是伪紧的. 伪紧空间的概念是休伊特(Hewitt，E.)于 1946 年提出的.

实幂紧空间(real power compact space)　一类拓扑空间. 若拓扑空间 X 同胚于实直线的笛卡儿乘积的闭子空间，则称 X 为实幂紧空间.

***H* 闭空间**(H-closed space)　一类拓扑空间. 设 X 为豪斯多夫空间. 若对于以 X 为子空间的任何豪斯多夫空间 Y，X 都是 Y 的闭集，则称 X 为 H 闭空间. 紧豪斯多夫空间是 H 闭的. 豪斯多夫空间 X 是 H 闭的充分必要条件是：对于 X 的任意开覆盖 $\mathscr{A}$，存在 $\mathscr{A}$ 的有限子族 $\mathscr{B}$，使得$\{\overline{B}\mid B\in\mathscr{B}\}$覆盖 X. H 闭空间的积空间是 H 闭的. H 闭空间的概念是由亚历山德罗夫(Александров，П. С.)与乌雷松(Урысон，П. С.)于 1929 年引进的.

***r* 闭空间**(r-closed space)　一类拓扑空间. 设

X 为正则空间. 若对于以 X 为子空间的任何正则空间 Y,X 都是 Y 的闭集,则称 X 为 r 闭空间.

σ 紧空间(σ-compact space) 一类拓扑空间. 若拓扑空间 X 是紧集的可数并,则称 X 为 σ 紧空间. σ 紧空间是林德勒夫空间. σ 紧空间的有限积仍为 σ 紧空间.

局部紧空间(locally compact space) 一类拓扑空间. 设 X 是拓扑空间,若 X 的每一点都有一个紧邻域,则称 X 为局部紧空间. 紧空间是局部紧空间,反之不然. 欧几里得空间 R^n 不是紧空间,但是,R^n 是局部紧空间. 离散空间是局部紧空间. 局部紧的 T_2 空间是完全正则空间. 局部紧性是闭遗传的. 局部紧空间的连续像未必是局部紧的. 有限个局部紧空间的积仍为局部紧空间.

佩亚诺曲线(Peano curve) 欧几里得平面 R^2 上的一类连续曲线. 若单位闭区间 $I=[0,1]$到 R^2 的连续映射 f 的像可以覆盖整个正方形 $I\times I$,则这样的连续曲线称为佩亚诺曲线. 最初由佩亚诺(Peano, G.)给出了它的例子,但由希尔伯特(Hilbert, D.)把它简单化,并于 1890 年具体构造了佩亚诺曲线. 一般地,也称 I 到豪斯多夫空间的连续映射的像为佩亚诺曲线.

希尔伯特方体(Hilbert cube) 一类度量空间. 设 $I=[0,1]$,ω 为第一个可数序数. 若

$$I^\omega=\{(x_i)\in \mathsf{R}^\omega \mid |x_i|\leqslant 1/i, i=1,2,\cdots\},$$

则由

$$d(x,y)=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\Big)^{1/2}\quad (x,y\in I^\omega)$$

给出 I^ω 上的一个度量. 度量空间(I^ω,d)称为希尔伯特方体. 希尔伯特方体同胚于闭单位区间的可数无限积. 它是希尔伯特空间的子空间,是完全正规、可分、第二可数、紧、连通的空间.

贝尔度量(Baire metric) 一类特殊的度量. 对于实数集合 R 的可数无限笛卡儿乘积 $X=\mathsf{R}^\omega$ 中的任意两点 $x=(x_i)$,$y=(y_i)$,若

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & (x=y),\\ \max\{1/i \mid x_i\neq y_i\} & (x\neq y),\end{cases}$$

则(X,d)是度量空间. 这个 d 称为 X 上的贝尔度量,(X,d)称为贝尔度量空间. 贝尔度量 d 是 X 上的完备度量. 由贝尔度量确定的拓扑细于积拓扑,并且在每个因子空间上诱导的拓扑是离散拓扑. 贝尔度量空间不是 σ 紧的,不是局部紧的,不是可分的,不是完全不连通的.

贝尔度量空间(Baire metric space) 见“贝尔度量”.

嵌入(embedding) 一种特殊的映射. 若映射 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 内的同胚映射,即 $f(X)\subset Y$,并且 X 与$f(X)$同胚,则称 f 为 X 到 Y 内的嵌入. 这时称空间 X 可嵌入空间 Y 内. 嵌入是讨论空间结构的一种方法. 如 T_3 空间 X 是第二可数的充分必要条件是,X 可嵌入希尔伯特方体 I^ω 内. 空间 X 是可分可度量化空间的充分必要条件是,X 可嵌入 I^ω 内. 可分度量空间可稠密地嵌入紧度量空间内. 拓扑空间 X 是吉洪诺夫空间的充分必要条件是,X 可嵌入某个方体空间内. 拓扑空间 X 是吉洪诺夫空间的充分必要条件是,X 可稠密地嵌入某个紧 T_2 空间内.

万有空间(universal space) 一类特殊拓扑空间. 设 X 为拓扑空间,若 X 具有性质 P,并且具有性质 P 的任意空间都可嵌入 X 内,则称 X 为对于性质 P 的万有空间. 例如,希尔伯特方体 I^ω 对于可分可度量化性质是万有空间.

邵剑夫锐直线(Sorgenfrey line) 实数集 R 上的一种拓扑结构. 以 R 上所有右半开区间

$$\{[a,b)\mid a,b\in\mathsf{R}, a<b\}$$

为子基的拓扑空间,称为邵剑夫锐直线,其拓扑称为右半开区间拓扑. 这种拓扑首先出现在亚历山德罗夫(Александров, П. С.)和乌雷松(Урысон, П. С.)于 1929 年发表的论文中. 邵剑夫锐(Sorgenfrey, R. H.)于 1949 年发表的论文使它成为一般拓扑学中通用的反例. 它是第一可数的、遗传可分的、完备正规、遗传林德勒夫的、遗传仿紧的、实幂紧的空间. 但是,它不是第二可数的、连通的、可度量化的空间. 自身的乘积不是正规空间.

右半开区间拓扑(right half-open interval topology) 见“邵剑夫锐直线”.

康托尔集(Cantor set) 亦称康托尔完备集. 闭区间$[0,1]$上的一个无处稠密的完备集. 设 $E_1=[0,1]$,在 E_1 中除去开区间$(1/3,2/3)$,剩下的部分记为

$$E_2=[0,1/3]\cup[2/3,1],$$

在 E_2 中除去两个开区间

$$(1/9,2/9)\quad 与\quad (7/9,8/9),$$

剩下的四个闭区间的并记为 E_3,再从这四个闭区间中分别除去中间的三分之一(开区间),剩下的记为 E_4. 这样的手续无限进行下去. 若

$$C=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i,$$

则 C 称为康托尔集. 赋予通常拓扑的康托尔集是紧拓扑空间,满足所有 T_i 分离公理,是完全不连通的. 它同胚于可数个具有离散拓扑的两点集 $D=\{0,1\}$ 的积空间.

康托尔完备集(Cantor perfect set) 即“康托尔集”.

广义康托尔集(generalized Cantor set) 康托尔集概念的推广. 若 D 为具有离散拓扑的两点集 $\{0,1\}$,m 为任意基数,则积空间 D^m 称为广义康托

尔集. 它是紧的完全不连通空间. 广义康托尔集的连续像空间称为二进紧空间.

二进紧空间(binary compact space)　见"广义康托尔集".

开序数空间(open ordinal space)　序数集合上的一类拓扑空间. 设 $X=[0,\omega_1)$ 是严格小于 ω_1 的所有序数集合, 其中 ω_1 是第一个不可数序数. X 上赋予序拓扑所构成的拓扑空间称为开序数空间. 对于任意 $\alpha<\omega_1$, $[0,\alpha]$ 作为 $[0,\omega_1)$ 的子空间是紧空间. $[0,\omega_1)$ 中的任意零集或其补集必定是等终的. 开序数空间是伪紧、序列紧、可数紧、局部紧、第一可数、可数仿紧、完全不连通、零维空间, 不是紧、σ 紧、林德勒夫、σ 局部紧、可分、第二可数、仿紧、连通、道路连通、局部连通、局部道路连通空间.

闭序数空间(closed ordinal space)　序数集合上的一类拓扑空间. 设 $X^*=[0,\omega_1]$ 是小于或等于 ω_1 的所有序数的集合, 其中 ω_1 是第一个不可数序数. X^* 上赋予序拓扑所构成的拓扑空间称为闭序数空间. 开序数空间 $X=[0,\omega_1)$ 是闭序数空间 X^* 的子空间. $\{\omega_1\}$ 在 $[0,\omega_1]$ 中是闭集, 但不是 G_δ 集. 闭序数空间是紧、σ 紧、林德勒夫、可数紧、序列紧、伪紧、局部紧、仿紧、完全不连通、零维空间, 但不是可分、第一可数、第二可数、连通、道路连通、局部连通、局部道路连通空间.

吉洪诺夫板(Tychonoff plank)　一类特殊的拓扑空间. 设 $X=[0,\omega]$, $Y=[0,\omega_1]$, 其中 ω 是第一个可数序数, ω_1 是第一个不可数序数. X, Y 上分别赋予序拓扑. 由 $X\times Y$ 舍去端点 $P(\omega,\omega_1)$ 所得到的子空间 Z 称为吉洪诺夫板. Z 是完全正则的但不是正规的. $X\times Y$ 是正规的但不是遗传正规的. Z 满足 $T_0, T_1, T_2, T_{2\frac{1}{2}}, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$ 诸分离公理, 但不满足 T_4, T_5 公理; 是伪紧、局部紧、完全不连通、零维空间, 但不是紧、σ 紧、林德勒夫、可数紧、序列紧、第一可数、第二可数、可分、仿紧、可数仿紧、连通、道路连通、局部连通、局部道路连通空间.

穆尔半平面(Moore semiplane)　亦称乃米茨基切圆盘空间. 一类特殊的拓扑空间. 设 X 为包含 x 轴的上半平面, 普通的开集在 X 上是开的, x 轴上点 P 的邻域基中的元素是在 x 轴的上方与点 P 相切的开圆盘与 $\{P\}$ 的并集. 拓扑空间 X 称为穆尔半平面. 穆尔半平面是完全正则的、可分的. 其子空间 x 轴具有离散拓扑, 不是可分的. 穆尔半平面是第一可数的但不是第二可数的, 是连通的、道路连通、局部连通、局部道路连通的, 不是紧的、σ 紧、可数紧、序列紧、伪紧、林德勒夫、局部紧、仿紧空间. 亚历山德罗夫(Александров, П. С.)和乃米茨基(Niemytzki, Y.)于 1938 年, 麦克奥内(McAuley, L. F.)于 1956 年曾讨论过这类空间的性质. 亚历山德罗夫和霍普夫(Hopf, H.)于 1935 年定义的乃米茨基切圆盘空间, 现已成为通用的反例. 它不是正规的, 其证明是琼斯(Jones, F. B.)于 1937 年给出的.

乃米茨基切圆盘空间(Niemytzki's tangent disc space)　即"穆尔半平面".

加细(refinement)　集族之间的一种关系. 设

$$\mathscr{M}=\{U_\alpha \mid \alpha\in A\},\quad \mathscr{N}=\{V_\beta \mid \beta\in B\}$$

是集合 X 的两个子集族. 若存在映射 $\varphi: A\to B$, 使得当 $\varphi(\alpha)=\beta$ 时, 有 $U_\alpha\subset V_\beta$, 则称 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{N}$ 的加细或 $\mathscr{M}$ 加细 $\mathscr{N}$, 并称 φ 为加细映射. 特别地, 当 $A=B$, 并且恒等映射为加细映射时, 称 $\mathscr{M}$ 为 $\mathscr{N}$ 的一一加细.

加细映射(refinement mapping)　见"加细".

一一加细(one-to-one refinement)　见"加细".

重心加细(barycentric refinement)　覆盖之间的一种关系. 设 X 是拓扑空间, $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 都是 X 的覆盖. 记:

$$\mathscr{V}(x)=\bigcup\{V\in\mathscr{V} \mid x\in V\},$$
$$\mathscr{V}^\triangle=\{\mathscr{V}(x) \mid x\in X\}.$$

若 $\mathscr{V}^\triangle$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细, 则称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的重心加细.

星加细(star refinement)　覆盖之间的一种关系. 设 X 是拓扑空间, $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 都是 X 的覆盖. 记

$$\mathscr{V}^*=\{\mathscr{V}(V) \mid V\in\mathscr{V}\},$$

其中 $\mathscr{V}(V)=\bigcup\{V'\in\mathscr{V} \mid V'\cap V\neq\varnothing\}$. 若 $\mathscr{V}^*$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细, 则称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的星加细.

正规开覆盖(normal open cover)　一类开覆盖. 若 X 为拓扑空间, $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. 若存在 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_i\}$, 使得 $\mathscr{U}=\mathscr{U}_1$, 并且对于任意自然数 i, $\mathscr{U}_{i+1}$ 是 $\mathscr{U}_i$ 的星加细, 则称 $\mathscr{U}$ 为 X 的正规开覆盖. 空间 X 是正规空间的充分必要条件是, X 的任意局部有限开覆盖是正规开覆盖. 空间 X 的局部有限由补零集组成的覆盖是正规开覆盖.

全体正规空间(fully normal space)　一类拓扑空间. 任意开覆盖都是正规开覆盖的拓扑空间称为全体正规空间. 在 T_1 空间范围内, 全体正规空间等价于仿紧空间. 度量空间是全体正规空间. 全体正规空间是正规空间. 开序数空间 $[0,\omega_1)$ 是正规但非全体正规空间. 全体正规空间是族正规的、仿紧的. 仿紧 T_2 空间是全体正规的.

勒贝格数(Lebesgue number)　紧度量空间中与覆盖有关的数. 若 X 是紧度量空间, $\mathscr{B}$ 是 X 的任意开覆盖, 则存在正数 λ 使得 $\{B_\lambda(x) \mid x\in X\}$ 是 $\mathscr{B}$ 的加细, 其中 $B_\lambda(x)$ 为度量空间 X 中以 x 为中心 λ 为半径的开球. 正数 λ 称为覆盖 $\mathscr{B}$ 的勒贝格数. 上述结论称为勒贝格覆盖定理.

勒贝格覆盖定理(Lebesgue covering theorem)　见"勒贝格数".

点可数族(point-countable family)　一类集族. 考虑集合 X 及其子集族 $\mathscr{U}$. $\mathscr{U}$ 在点 $x\in X$ 的阶数是 $\mathscr{U}$ 中含有 x 的元的个数, 以 $\mathrm{ord}_x\mathscr{U}$ 表示之. $\mathscr{U}$ 的阶数是集合 $\{\mathrm{ord}_x\mathscr{U} \mid x\in X\}$ 的上确界, 记为 $\mathrm{ord}\,\mathscr{U}$. 若对于任意 $x\in X$, $\mathrm{ord}_x\mathscr{U}$ 都是有限数, 则称 $\mathscr{U}$ 为点有限族. 若 $\mathrm{ord}\,\mathscr{U}\leqslant\aleph_0$, 则称 $\mathscr{U}$ 为点可数族, 其中 $\aleph_0$ 为自然数集的基数.

点有限族(point-finite family)　见"点可数族".

局部有限族(locally finite family)　一类集族. 设 $\mathscr{M}$ 为拓扑空间 X 的子集族. 若对于任意 $x\in X$, 存在 x 的邻域 V, 使得 V 仅与 $\mathscr{M}$ 中有限个成员相交, 则称 $\mathscr{M}$ 为 X 的局部有限族. 若 $\mathscr{M}$ 是可数个局部有限族的并集, 则称 $\mathscr{M}$ 为 X 的 σ 局部有限族. 局部有限族的概念是亚历山德罗夫(Александров, П. С.)于 1924 年引入的.

σ 局部有限族(σ-locally finite family)　见"局部有限族".

星有限族(star finite family)　一类集族. 设 $\mathscr{U}$ 是拓扑空间 X 的子集族. 若对于任意 $U\in\mathscr{U}$, 满足 $U\cap V\neq\varnothing$ 的 $\mathscr{U}$ 的元 V 只有有限个, 则称 $\mathscr{U}$ 为 X 的星有限族.

离散族(discrete family)　一类集族. 设 $\mathscr{U}$ 是拓扑空间 X 的子集族. 若对于任意 $x\in X$, 存在 x 的邻域 V, 使得 V 与 $\mathscr{U}$ 中至多一个元相交, 则称 $\mathscr{U}$ 是 X 的离散族. $\mathscr{U}$ 是离散族, 当且仅当

$$\overline{\mathscr{U}}=\{\overline{U} \mid U\in\mathscr{U}\}$$

是两两不相交的局部有限族. 离散族一定是局部有限族. 若 $\mathscr{U}$ 可以表示为 X 的可数个离散族的并, 则称 $\mathscr{U}$ 是 X 的 σ 离散族.

σ 离散族(σ-discrete family)　见"离散族".

族正规空间(collectionwise normal space)　一类拓扑空间. 设 X 为拓扑空间. 若对于 X 的任意离散的闭集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 存在两两不相交的开集族 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 使得 $F_\alpha\subset G_\alpha$ 对于任意 $\alpha\in\Lambda$ 成立, 则称 X 为族正规空间. 族正规空间是正规空间. 族正规性是闭遗传的. 全体正规空间是族正规的. 仿紧空间是族正规的. 族正规空间是宾(Bing, R. H.)于 1951 年定义的. 岛克(Dowker, C. H.)于 1952 年给出了族正规空间的一个等价条件.

保闭族(closure preserving family)　一类集族. 设 $\mathscr{U}$ 为拓扑空间 X 的子集族. 若对于 $\mathscr{U}$ 的任意子族 $\mathscr{V}$, $\bigcup\{\overline{W} \mid W\in\mathscr{V}\}$ 为闭集, 则称 $\mathscr{U}$ 为 X 的保闭族. 若 $\mathscr{U}$ 可以表示为可数个保闭族的并, 则称 $\mathscr{U}$ 为 X 的 σ 保闭族. 局部有限族必为保闭族. 迈克尔(Michael, E.)用保闭族给出仿紧空间的充分必要条件. 保闭族是迈克尔于 1957 年提出的.

σ 保闭族(σ-closure preserving family)　见"保闭族".

θ 可加细空间(θ-refinable space)　亦称次亚紧空间. 一类拓扑空间. 设 X 是拓扑空间. 若对于 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$, 存在 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_i\}$ 满足条件: 对于任意 i, $\mathscr{U}_i$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细, 并且对于任意 $x\in X$, 存在 i, 使得 x 只属于 $\mathscr{U}_i$ 中的有限多个元, 则称 X 是 θ 可加细空间. 点有限仿紧空间、次仿紧空间都是 θ 可加细空间.

次亚紧空间(submetacompact space)　即"θ 可加细空间".

亚紧空间(metacompact space)　亦称点式仿紧空间或弱仿紧空间. 一类拓扑空间. 若拓扑空间 X 的任意开覆盖都存在点有限的开覆盖加细, 则称 X 为亚紧空间. 若 X 的任意可数开覆盖都存在点有限的开覆盖加细, 则称 X 为可数亚紧空间. 仿紧空间是亚紧空间. 亚紧空间是可数亚紧空间. 可数紧的亚紧空间是紧空间. 亚紧的族正规空间是仿紧的, 这是迈克尔(Michael, E.)和永见(Nagami, K.)于 1955 年分别独立证明的.

点式仿紧空间(pointwise paracompact space)　即"亚紧空间".

弱仿紧空间(weakly paracompact space)　即"亚紧空间".

可数亚紧空间(countably metacompact space)　见"亚紧空间".

仿紧空间(paracompact space)　一类重要的拓扑空间. 为了讨论拓扑空间的可度量化问题, 迪厄多内(Dieudonné, J.)于 1944 年引入仿紧空间的概念. 设 X 为拓扑空间. 若 X 的任意开覆盖都有局部有限的开覆盖加细, 则称 X 为仿紧空间. 紧空间是仿紧空间. 度量空间也是仿紧空间. 反之未必成立. 仿紧空间是紧空间的一种最重要的推广. 对于这一类空间的研究, 不仅从内容上推广了紧空间理论, 而且较大地发展了覆盖方法, 有力地推动了一般拓扑学的发展, 特别是广义度量空间理论和度量化问题的广泛进展. 另外, 仿紧空间在微分流形、代数拓扑和泛函分析中也有重要的应用. 仿紧性具有闭遗传性. 仿紧 T_2 空间的闭连续像是仿紧 T_2 的. 仿紧 T_2 空间是全体正规空间. 全体正规空间是仿紧空间. 仿紧 T_2 空间中的 F_σ 集是仿紧的. 在完全映射下, 仿紧空间的原像是仿紧的. 仿紧空间是亚紧的、可数仿紧的、族正规的. 可数紧的仿紧空间是紧空间. 林德勒夫空间是仿紧的. 斯通(Stone, A. H.)于 1948 年、迈克尔(Michael, E.)于 1953 年给出了仿紧性的几个等价条件. 森田纪一(Morita, K.)和玉野(Tamano, H.)于 1960—1962 年也分别给出了几个等价条件.

强仿紧空间(strongly paracompact space)　亦称星有限空间或 S 空间. 一类拓扑空间. 设 X 是拓

扑空间. 若 X 的任意开覆盖都存在星有限开覆盖加细，则称 X 为强仿紧空间. 强仿紧空间是仿紧空间. 正则的林德勒夫空间是强仿紧空间. 强仿紧空间是岛克(Dowker,C. H.)于 1947 年定义的. 斯米尔诺夫(Смирнов,Ю. М.)于 1956 年给出了强仿紧空间的等价条件. 卡普兰(Kaplan,S.)和亚历山德罗夫(Александров,П. С.)于 1947 年证明了可分度量空间是强仿紧的.

星有限空间(star-finite space)　即"强仿紧空间".

***S* 空间**(S-space)　即"强仿紧空间".

可数仿紧空间(countably paracompact space)　一类拓扑空间. 设 X 为拓扑空间. 若 X 的任意可数开覆盖都存在局部有限的开覆盖加细，则称 X 为可数仿紧空间. 完全正规空间是可数仿紧空间. 可数仿紧性是闭遗传的. 任意正规空间是否为可数仿紧的问题是岛克(Dowker,C. H.)于 1951 年提出的许多问题之一，20 年后由美国女数学家路丁(Rudin,M.)给出了否定的回答，并举出一个反例. 可数仿紧空间是岛克和卡切托夫(Катетов,M.)于 1951 年引入的.

σ 仿紧空间(σ-paracompact space)　亦称次仿紧空间. 一类拓扑空间. 设 X 是拓扑空间. 若对于 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$，存在开覆盖列 $\{\mathscr{U}_i\}$，对于任意点 $x\in X$，存在 i，使得 $\mathscr{U}_i(x)$ 包含在 $\mathscr{U}$ 的某一成员中，则称 X 为 σ 仿紧空间. X 是 σ 仿紧空间当且仅当 X 的任意开覆盖都存在 σ 离散的(或 σ 局部有限的，σ 保闭的)闭覆盖加细.

次仿紧空间(subparacompact space)　即"σ 仿紧空间".

可度量化空间(metrizable space)　一类特殊的拓扑空间. 设 X 是拓扑空间. 若在集合 X 上存在一个度量 d，使得 X 上由 d 诱导的拓扑和 X 上原来的拓扑一致，则称 X 为可度量化空间. 关于拓扑空间可度量化的充分必要条件的探索是一般拓扑学中最古老、产生问题最多的课题之一. 亚历山德罗夫(Александров,П. С.)和乌雷松(Урысон,П. С.)早于 1923 年用开覆盖列上的一个特殊条件提供了一个答案. 大约在 10 年后，穆尔(Moore,R. L.)稍微改变了他们的条件，琼斯(Jones,F. B.)于 1937 年称这样的空间为穆尔空间. 度量空间是穆尔空间，反之未必成立. 于是，关于可度量化定理的研究转变为精确地确定什么样的穆尔空间是可度量化的. 最有名的猜测是每个正规穆尔空间是可度量化的. 最近 50 年里对这个猜测的研究在一般拓扑学的发展中起着重要的作用. 琼斯于 1937 年指出，若 $2^{\aleph_0}<2^{\aleph_1}$，则每个可分正规穆尔空间是可度量化的. 宾(Bing,R. H.)和永见(Nagami,K.)指出每个仿紧穆尔空间是可度量化的. 西尔弗(Silver,J. H.)于 1970 年用科恩模型指出正规穆尔空间猜测本身不能用现有的集论公理证明. 周浩旋于 1979 年在附加集论假设 $MA+\neg CH$ 下，证明了存在不可度量化的穆尔空间. 由此可见，可度量化问题的研究与公理集合论有密切的联系.

乌雷松度量化定理(Urysohn metrization theorem)　著名的度量化定理. 该定理断言：

1. 第二可数的正则 T_1 空间是可度量化的.

2. 紧空间是可度量化的充分必要条件是，它是第二可数空间.

乌雷松度量化定理的两个结论是乌雷松(Урысон,П. С.)于 1925 年和 1923 年分别得到的.

宾-长田-斯米尔诺夫度量化定理(Bing-Nagata-Smirnov metrization theorem)　著名的度量化定理. 该定理断言：对于正则 T_1 空间 X，下列性质是等价的：

1. X 是可度量化的.

2. X 具有 σ 离散基.

3. X 具有局部有限基.

条件 2 是宾(Bing,R. H.)于 1951 年给出的. 条件 3 是长田(Nagata,J.)于 1950 年、斯米尔诺夫(Смирнов,Ю. М.)于 1951 年独立给出的.

穆尔空间(Moore space)　一类拓扑空间. 设 $\{\mathscr{U}_i\}$ 是拓扑空间 X 的开覆盖列. 对任意 $x\in X$，记

$$\mathscr{U}_i(x)=\bigcup\{U\in\mathscr{U}_i \mid x\in U\}.$$

若族 $\{\mathscr{U}_i(x)\mid i\in N\}$ 都是 x 的局部基，则称 $\{\mathscr{U}_i\}$ 是 X 的展开列. 具有展开列的空间称为可展空间. 正则的可展空间称为穆尔空间. 穆尔空间是琼斯(Jones,F. B.)于 1937 年命名的. 正规的穆尔空间可否度量化问题至今尚未全部解决. 度量空间必是穆尔空间. 冯・道文(van Douwen,E. K.)于 1977 年举出大量不可度量化的穆尔空间的例子. 琼斯于 1937 年曾指出正规穆尔空间是完全正规的.

可展空间(developable space)　见"穆尔空间".

展开列(development)　拓扑空间的一个概念. 指一类集族(参见"穆尔空间"). 展开列的概念是穆尔(Moore,E. H.)于 1916 年引入的，并常出现在他的论文中. 也出现在亚历山德罗夫(Александров,П. С.)和乌雷松(Урысон,П. С.)1923 年的论文中.

穆尔度量化定理(Moore metrization theorem)　著名的度量化定理. 设 $\{\mathscr{U}_i\}$ 为拓扑空间 X 的开覆盖列. 若对于任意 $x\in X$ 与 x 的任意邻域 U，存在 x 的邻域 V 与自然数 i，使得 $\mathscr{U}_i(V)\subset U$，则称 $\{\mathscr{U}_i\}$ 为 X 的强展开列. 穆尔度量化定理断言：拓扑空间 X 可度量化当且仅当 X 是 T_0 空间，并且具有强展

开列. 该定理的一个稍许不同的形式是由穆尔(Moore, R. L.)于 1935 年给出的. 斯通(Stone, A. H.)和阿尔汉盖路斯基(Архангельский, A.)分别于 1960 年与 1961 年引进强展开列概念并证明了上述定理.

强展开列(strong development) 见"穆尔度量化定理".

亚历山德罗夫-乌雷松度量化定理(Alexandroff-Urysohn metrization theorem) 著名的度量化定理. 拓扑空间 X 可度量化当且仅当 X 是 T_0 空间, 并且具有展开列 $\{\mathscr{U}_i\}$ 使得对于任意 i, $\mathscr{U}_{i+1}$ 是 $\mathscr{U}_i$ 的星加细. 该定理称为亚历山德罗夫-乌雷松度量化定理, 它出现在图基(Tukey, J. W.)于 1940 年出版的著作《拓扑中的收敛与一致性》中. 但是, 该定理的最初形式是亚历山德罗夫(Александров, П. С.)和乌雷松(Урысон, П. С.)于 1923 年发表的.

宾度量化定理(Bing metrization theorem) 著名的度量化定理. 宾(Bing, R. H.)于 1951 年证明了如下度量化定理: 拓扑空间 X 可度量化当且仅当 X 是族正规的可展空间.

阿尔汉盖路斯基度量化定理(Arhangel'skiĭ metrization theorem) 著名的度量化定理. 阿尔汉盖路斯基(Архангельский, A.)于 1960 年引进了拓扑空间的正则基与点正则基概念, 并证明了下面两个度量化定理:

1. 拓扑空间 X 可度量化当且仅当 X 是 T_1 空间且具有正则基.

2. 拓扑空间 X 可度量化当且仅当 X 是族正规的且具有点正则基.

拓扑空间 X 的基 $\mathscr{B}$ 称为正则的, 若对于任意 $x \in X$ 与 x 的任意邻域 U, 存在 x 的邻域 $V \subset U$, 使得 $\mathscr{B}$ 中与 V 及 $X-U$ 同时相交的元只有有限多个. $\mathscr{B}$ 称为点正则的, 若对于任意 $x \in X$ 与 x 的任意邻域 U, $\mathscr{B}$ 中含 x 且与 $X-U$ 相交的元只有有限个. 每一个正则基是点正则的.

正则基(regular base) 见"阿尔汉盖路斯基度量化定理".

点正则基(point-regular base) 见"阿尔汉盖路斯基度量化定理".

宾-永见度量化定理(Bing-Nagami metrization theorem) 著名的度量化定理. 宾(Bing, R. H.)于 1951 年, 永见(Nagami, K.)于 1955 年分别独立地证明了如下定理: 仿紧穆尔空间是可度量化的.

可对称度量化空间(symmetrizable space) 一类特殊的拓扑空间. 设 X 为拓扑空间. 若存在 $X \times X$ 到非负实数集的映射 d, 对于任意 $x, y \in X$ 满足:

1. $d(x,y)=0$, 当且仅当 $x=y$;

2. $d(x,y)=d(y,x)$;

3. $U \subset X$ 是开的当且仅当对于任意 $x \in X$, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x,\varepsilon) \subset U$, 其中

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\};$$

则称 X 是可对称度量化空间. 满足条件 1 与 2 的映射 d 称为 X 上的对称度量. 可对称度量化空间是序列空间, 但未必是第一可数的. 可对称度量化的 M 空间是可度量化的.

对称度量(symmetric metric) 见"可对称度量化空间".

可半度量化空间(semi-metrizable space) 一类特殊的拓扑空间. 设 X 为拓扑空间. 若存在 $X \times X$ 到非负实数集的映射 d, 对于任意 $x, y \in X$ 满足:

1. $d(x,y)=0$, 当且仅当 $x=y$;

2. $d(x,y)=d(y,x)$;

3. $\{B(x,\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ 构成 x 的邻域基, 其中

$$B(x,\varepsilon)=\{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\};$$

则称 X 是可半度量化空间. X 是可半度量化空间当且仅当 X 是可对称度量化的与第一可数的, 当且仅当 X 是可对称度量化的弗雷歇空间, 当且仅当 X 是半可层化的与第一可数的. 半可度量化空间是次仿紧的. 族正规的半可度量化空间是仿紧的.

紧化(compactification) 与紧性有关的一个概念. 设 X 为拓扑空间, Y 为紧空间. 若存在 X 到 Y 内的嵌入 $c: X \to Y$ 使得 $c(X)$ 在 Y 中稠密, 则称序偶 (Y, c) 为空间 X 的紧化. 有时也称 Y 或 $c(X)$ 为 X 的紧化. 若 Y 又是 T_2 空间, 则称 Y 是 X 的 T_2 紧化. 讨论拓扑空间的紧化及其性质是一般拓扑学发展的动力之一. 现已有多种紧化. 例如: 斯通-切赫紧化, 亚历山德罗夫紧化(单点紧化), 瓦勒曼型紧化, 正则的瓦勒曼型紧化, 完全紧化, 极大紧化, 斯米尔诺夫紧化, 实紧化, 点型紧化, π 紧化等. 紧化问题是卡拉西奥多里(Carathéodory, C.)于 1913 年开始研究的. 吉洪诺夫(Тихонов, A. H.)于 1930 年指出空间 X 有 T_2 紧化当且仅当 X 是吉洪诺夫空间.

T_2 紧化(T_2-compactification) 见"紧化".

单点紧化(one point compactification) 亦称亚历山德罗夫紧化. 一种特殊的紧化. 设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间, 点"∞"为不属于 X 的元素. 若

$X^* = X \cup \{\infty\}$, $\mathscr{T}^* = \mathscr{T} \cup \{\{\infty\} \cup (X-F) \mid F$ 是 X 的闭的紧子集$\} \cup \{X^*\}$, 则拓扑空间 $(X^*, \mathscr{T}^*)$ 是空间 X 的紧化, 称为 X 的单点紧化. 空间 $(X^*, \mathscr{T}^*)$ 为 T_2 空间当且仅当 $(X, \mathscr{T})$ 为局部紧的 T_2 空间. 上述结果是亚历山德罗夫(Александров, П. С.)于 1924 年证明的.

亚历山德罗夫紧化(Alexandroff compactification) 即"单点紧化".

极大紧化(maximal compactification) 一种特殊的紧化. 设 X 为吉洪诺夫空间, $\mathscr{C}(X)$ 表示 X 的

所有 T_2 紧化的族，又设 $c_1(X)$ 与 $c_2(X)$ 为 X 的两个 T_2 紧化．若存在连续映射 $f:c_1(X)\to c_2(X)$ 使得 $fc_1=c_2$，则规定 $c_2(X)\leqslant c_1(X)$．$\mathscr{C}(X)$ 在序关系 $\leqslant$ 下的极大元称为 X 的极大紧化．X 的任意两个极大紧化 $c_1(X)$ 与 $c_2(X)$ 是互相等价的，即存在同胚映射 $f:c_1(X)\to c_2(X)$ 使得

$$fc_1=c_2.$$

斯通-切赫紧化(Stone-Čech compactification)　一种特殊的紧化．设 X 为吉洪诺夫空间，F 为 X 到单位区间 I 的所有连续函数族，则 I^F 为紧空间．设 e 为 X 到 I^F 的赋值映射，即对于任意 $f\in F$，$e(x)$ 的 f 坐标为 $f(x)$，则 $e:X\to I^F$ 为嵌入映射．$e(X)$ 在 I^F 中的闭包记为 βX，则 βX 是 X 的紧化，称为斯通-切赫紧化．它是一个极大紧化．切赫(Čech，E.)和斯通(Stone，A. H.)于 1937 年发表的论文以及斯通于 1948 年发表的论文包含了斯通-切赫紧化的所有基本结果．涉及斯通-切赫紧化的问题是一般拓扑学的许多有趣问题之一．该紧化可用不同方法构成，有许多有趣的性质，应用在构造许多有趣的例子中以及某些定理的证明中．

瓦勒曼紧化(Wallman compactification)　一种特殊的紧化．对于每个 T_1 空间 X，可构造一个以 X 为稠密子空间的紧 T_1 空间 wX，使得对于任意紧 T_2 空间 Z 与任意连续映射 $f:X\to Z$，f 可扩张为连续映射 $F:wX\to Z$．空间 wX 称为 X 的瓦勒曼紧化．wX 是 T_2 空间当且仅当 X 为 T_4 空间．在这种情形下，wX 等价于 X 的斯通-切赫紧化 βX．

玉野定理(Tamano theorem)　用紧化刻画仿紧性的定理．该定理断言：对于吉洪诺夫空间 X，下列条件是等价的：

1. 空间 X 是仿紧的．
2. 对于空间 X 的任意紧化 $c(X)$，$X\times c(X)$ 是正规的．
3. 设 βX 为 X 的斯通-切赫紧化，则 $X\times\beta X$ 是正规的．
4. 存在 X 的紧化 $c(X)$，使得 $X\times c(X)$ 是正规的．

条件 1 与 3 的等价性是玉野(Tamano，H.)于 1960 年建立的，条件 1 与 4 的等价性是森田纪一(Morita，K.)和玉野于 1962 年独立取得的．

切赫完备空间(Čech complete space)　一类特殊的拓扑空间．设 X 为吉洪诺夫空间．若 X 在 βX 中是 G_δ 集，则称 X 为切赫完备空间，这个概念是切赫(Čech，E.)于 1937 年提出的．切赫完备空间的任意 G_δ 集及闭集是切赫完备的．切赫完备性是可数可积的．切赫完备仿紧空间的可数积是仿紧的．切赫完备空间是可数型空间．切赫完备空间是 k 空间．查伯(Chaber，J.)于 1972 年举出开完全映射将非正则空间变换为正规切赫完备空间的例子．设 X，Y 为吉洪诺夫空间．若存在 X 到 Y 上的完全映射，则 X 是切赫完备的充分必要条件是 Y 是切赫完备的．

可数型空间(countable type space)　一类特殊的拓扑空间．设 X 为拓扑空间．若对于 X 的任意紧子集 H，存在包含 H 的紧子集 F，使得 F 具有有限或可数特征，则称 X 为可数型空间．度量空间及切赫完备空间是可数型空间．可数型空间是可数可积的．

一致结构(uniformity)　集合上的一种结构．设 X 为集合，$\mathscr{U}$ 为 $X\times X$ 的非空子集族．若 $\mathscr{U}$ 满足下列条件，则称 $\mathscr{U}$ 是 X 上的一致结构：

1. $\mathscr{U}$ 的每一个元包含对角线 Δ．
2. 若 $U\in\mathscr{U}$，则 $U^{-1}\in\mathscr{U}$，其中
$$U^{-1}=\{(x,y)\mid(y,x)\in U\}.$$
3. 若 $U\in\mathscr{U}$，则存在 $V\in\mathscr{U}$ 使得 $V\circ V\subset U$，其中
$$V\circ V=\{(x,z)\mid 存在\ y\ 使得(x,y)\in V\ 且(y,z)\in V\}.$$
4. 若 $U,V\in\mathscr{U}$，则 $U\cap V\in\mathscr{U}$．
5. 若 $U\in\mathscr{U}$ 并且 $U\subset V\subset X\times X$，则 $V\in\mathscr{U}$．

具有一致结构 $\mathscr{U}$ 的集合 X 称为一致空间，记为 $(X,\mathscr{U})$．一致空间的概念是韦伊(Weil，A.)于 1938 年引入的．布尔巴基(Bourbaki，N.)于 1940 年首先给予系统的论述．图基(Tukey，J. W.)于 1940 年用覆盖族定义并研究了一致空间的等价的概念．艾斯贝尔(Isbell，J. R.)于 1964 年出版的书中，包含了用覆盖叙述的一致空间理论的重要发展．一致空间也可用伪度量族来描述，它是由布尔巴基于 1948 年给出的．

一致空间(uniform space)　见"一致结构"．

一致拓扑(uniform topology)　由一致结构诱导的拓扑．设 $(X,\mathscr{U})$ 为一致空间，T 是 X 的子集，满足：对于任意 $x\in T$，存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得 $U(x)\subset T$，其中 $U(x)=\{y\mid(x,y)\in U\}$．所有这种 T 组成的集族 $\mathscr{T}$ 是 X 上的一个拓扑，称为由一致结构 $\mathscr{U}$ 诱导的拓扑或一致拓扑．当由一致结构 $\mathscr{U}$ 诱导的拓扑空间 X 为紧空间时，则和 X 的拓扑一致的一致结构是惟一确定的．一致空间是完全正则的，并且完全正则空间具有和它的拓扑一致的一致拓扑．即有下述结果：集合 X 上的拓扑 $\mathscr{T}$ 为 X 上的某个一致结构的一致拓扑的充分必要条件是，$(X,\mathscr{T})$ 为完全正则空间．

一致结构的基(base for a uniformity)　与一致结构有关的概念．设 $\mathscr{U}$ 是 X 上的一致结构，$\mathscr{B}\subset\mathscr{U}$．若 $\mathscr{U}$ 的每一元都包含有 $\mathscr{B}$ 的一个元，则称 $\mathscr{B}$ 是一致结构 $\mathscr{U}$ 的基．又设 $\mathscr{S}\subset\mathscr{U}$．若 $\mathscr{S}$ 的元的所

有有限交的族是 $\mathscr{U}$ 的基，则称 $\mathscr{S}$ 是一致结构 $\mathscr{U}$ 的子基. $\mathscr{U}$ 的所有开对称元组成 $\mathscr{U}$ 的一个基，$\mathscr{U}$ 的所有闭对称元也组成 $\mathscr{U}$ 的基，其中 $\mathscr{U}$ 中的开元(或闭元)是关于 X 上的一致拓扑生成的 $X\times X$ 上的积拓扑而言的. $\mathscr{U}$ 中的元 U 称为对称的，若 $(x,y)\in U$ 当且仅当 $(y,x)\in U$.

一致结构的子基(subbase for a uniformity) 见"一致结构的基".

一致覆盖族(collection of uniform covers) 一类特殊的覆盖族. 设 $\mathscr{S}=\{\mathscr{U}_\alpha\}$ 是集合 X 的覆盖族. 称 $\mathscr{S}$ 为 X 上的一致覆盖族，若 $\mathscr{S}$ 满足下列条件：

1. 对于 X 的任意覆盖 $\mathscr{U}$，若存在 $\mathscr{U}_\alpha\in\mathscr{S}$，使得 $\mathscr{U}_\alpha$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细，则 $\mathscr{U}\in\mathscr{S}$.

2. 对于任意 $\mathscr{U}_\alpha,\mathscr{U}_\beta\in\mathscr{S}$，存在 $\mathscr{U}_\gamma\in\mathscr{S}$ 使得 $\mathscr{U}_\gamma$ 是 $\mathscr{U}_\alpha$ 与 $\mathscr{U}_\beta$ 的共同加细.

3. 对于任意 $\mathscr{U}_\alpha\in\mathscr{S}$，存在 $\mathscr{U}_\beta\in\mathscr{S}$，使得 $\mathscr{U}_\beta$ 是 $\mathscr{U}_\alpha$ 的星加细.

当 X 的覆盖族 $\mathscr{S}$ 满足条件 3 时，称 $\mathscr{S}$ 为一致覆盖族的子基. 又当 $\mathscr{S}$ 满足条件 2 与 3 时，称 $\mathscr{S}$ 为一致覆盖族的基. 设 $\mathscr{S}$ 为 X 上的一致覆盖族，对于任意 $x\in X$，若把

$$\{\mathscr{U}_\alpha(x)\mid\mathscr{U}_\alpha\in\mathscr{S}\}$$

确定为 x 的邻域系，则在 X 上可诱导出拓扑，称此拓扑为由 $\mathscr{S}$ 诱导的 X 上的拓扑. 由 X 上的一致覆盖族 $\mathscr{S}$ 可惟一确定 X 上某个一致结构 $\mathscr{U}$，使得由 $\mathscr{S}$ 诱导的 X 上的拓扑恰好是由 $\mathscr{U}$ 诱导的 X 上的一致拓扑. 上述 $\mathscr{U}$ 的基是所有形如

$$\bigcup\{A\times A\mid A\in\mathscr{A}\}$$

的集族，其中 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{S}$ 中的元.

一致覆盖族的子基(subbase for a collection of uniform covers) 见"一致覆盖族".

一致覆盖族的基(base for a collection of uniform covers) 见"一致覆盖族".

一致覆盖(uniform cover) 一致空间 X 上的一类特殊的覆盖. 设 $\mathscr{U}$ 是 X 上的一致结构. 对于每一 $U\in\mathscr{U}$，若

$$\mathscr{C}(U)=\{U(x)\mid x\in X\},$$

其中 $U(x)=\{y\mid(x,y)\in U\}$，则 $\mathscr{C}(U)$ 是 X 的一个覆盖. X 上的覆盖 $\mathscr{C}$ 称为关于 $\mathscr{U}$ 的一致覆盖，若 $\mathscr{C}$ 是某一 $\mathscr{C}(U)$ 的加细，其中 $U\in\mathscr{U}$. 若 $\mathscr{S}$ 是 X 上的一致覆盖族，$\mathscr{S}$ 诱导的 X 上的一致结构为 $\mathscr{U}$，则 $\mathscr{S}$ 中的元恰好是关于 $\mathscr{U}$ 的所有一致覆盖.

分离的一致覆盖族(separated collection of uniform covers) 一类特殊的覆盖族. 设 $\mathscr{S}=\{\mathscr{U}_\alpha\}$ 是集合 X 上的一致覆盖族. 若对于任意 $x,y\in X$，$x\neq y$，存在 $\mathscr{U}_\alpha\in\mathscr{S}$ 使得 $y\notin\mathscr{U}_\alpha(x)$，则称 $\mathscr{S}$ 是分离的一致覆盖族. $\mathscr{S}$ 是分离的一致覆盖族当且仅当 $\mathscr{S}$ 诱导的一致结构 $\mathscr{U}$ 满足

$$\bigcap\{U\mid U\in\mathscr{U}\}=\Delta,$$

其中 $\Delta=\{(x,x)\mid x\in X\}$ 是对角线. 此时称 $(X,\mathscr{U})$ 为分离的一致空间. 分离的一致空间诱导的拓扑空间是吉洪诺夫空间.

分离的一致空间(separated uniform space) 见"分离的一致覆盖族".

由度量诱导的一致结构(uniformity induced by a metric) 一类特殊的一致结构. 设 (X,d) 为度量空间. 对于每一正实数 r，若

$$V_r=\{(x,y)\mid d(x,y)<r\},$$

则所有形如 V_r 的集合的族是 X 上某个一致结构 $\mathscr{U}$ 的基，称 $\mathscr{U}$ 为由度量 d 诱导的一致结构.

一致空间的子空间(subspace of a uniform space) 一类特殊的一致空间. 设 $(X,\mathscr{U})$ 为一致空间，$M\subset X$. 若

$$\mathscr{U}_M=\{(M\times M)\cap V\mid V\in\mathscr{U}\},$$

则 $\mathscr{U}_M$ 是 M 上的一致结构. 一致空间 $(M,\mathscr{U}_M)$ 称为一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 的子空间. 由 $\mathscr{U}_M$ 诱导的 M 上的拓扑恰好是由 $\mathscr{U}$ 诱导的 X 上的拓扑的子空间拓扑.

一致连续映射(uniformly continuous mapping) 一致空间上的一类重要映射. 设 $(X,\mathscr{U})$，$(Y,\mathscr{V})$ 是两个一致空间，$f:X\to Y$. 若对于任意 $V\in\mathscr{V}$，存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得当 $(x,y)\in U$ 时有 $(f(x),f(y))\in V$，则称 f 关于 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 是一致连续的，简称 f 是一致连续映射. 两个一致连续映射的复合映射是一致连续的. 每个一致连续映射关于一致拓扑是连续的. 若 $(X,\mathscr{U})$ 关于一致拓扑是紧的，则所有连续映射 $f:X\to Y$ 是一致连续的.

一致同构(uniform isomorphism) 一致空间之间的同构. 设 $(X,\mathscr{U})$，$(Y,\mathscr{V})$ 是两个一致空间. 若 $f:X\to Y$ 是单满映射，且 f 和 f^{-1} 都是一致连续的，则称 f 为一致同构，并且称空间 X 和 Y 为一致等价的. 两个一致同构的合成，一个一致同构的逆以及一个空间到它自身上的恒等映射均为一致同构. 所有一致空间的全体可以分成由一致等价的空间所组成的等价类. 一个性质，若当它为某个一致空间 X 所具有时，也为每个与 X 一致等价的空间所具有，则称这个性质为一致不变性.

一致等价(uniform equivalence) 见"一致同构".

一致不变性(uniform invariance) 见"一致同构".

拟一致结构(quasiuniformity) 集合上的一种结构. 设 X 为集合，$\mathscr{U}$ 为 $X\times X$ 的非空子集族. 若满足：

1. 对于任意 $U\in\mathscr{U}$，有 $\Delta\subset U$，其中 Δ 为 $X\times X$ 的对角线；

2. 对于任意 $V\subset X\times X$，若存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得 $U\subset V$，则 $V\in\mathscr{U}$；

3. 若 $U\in\mathscr{U}$，$V\in\mathscr{U}$，则 $U\cap V\in\mathscr{U}$；

4. 若 $U\in\mathscr{U}$，则存在 $V\in\mathscr{U}$ 使得 $V\circ V\subset U$；

则称 $\mathscr{U}$ 为 X 上的一个拟一致结构. 具有拟一致结构 $\mathscr{U}$ 的集合 X 称为拟一致空间，记为 $(X,\mathscr{U})$. 一致结构必是拟一致结构，但是反之不成立. 类似于一致结构的情形，由 X 上的拟一致结构 $\mathscr{U}$ 可诱导 X 上的拓扑，称为由 $\mathscr{U}$ 诱导的拟一致拓扑.

拟一致空间(quasiuniform space)　见“拟一致结构”.

拟一致拓扑(quasiuniform topology)　见“拟一致结构”.

拟一致结构基(base for a quasiuniformity)　与拟一致结构有关的概念. 设 $\mathscr{U}$ 为 X 上的拟一致结构，$\mathscr{B}\subset\mathscr{U}$. 若对于任意 $U\in\mathscr{U}$，存在 $B\in\mathscr{B}$，使得 $B\subset U$，则称 $\mathscr{B}$ 为拟一致结构 $\mathscr{U}$ 的一个基. 又设 $\mathscr{S}\subset\mathscr{U}$. 若 $\mathscr{S}$ 中元素的所有有限交的族构成 $\mathscr{U}$ 的一个基，则称 $\mathscr{S}$ 为拟一致结构 $\mathscr{U}$ 的一个子基.

拟一致结构的子基(subbase for a quasiuniformity)　见“拟一致结构基”.

拟一致连续映射(quasiuniformly continuous mapping)　拟一致空间上的一类重要映射. 设 $(X,\mathscr{U})$，$(Y,\mathscr{V})$ 为两个拟一致空间，$f:X\to Y$. 若对于任意 $V\in\mathscr{V}$，存在 $U\in\mathscr{U}$，使得当 $(x,y)\in U$ 时有 $(f(x),f(y))\in V$，则称 f 为拟一致连续映射. 每个拟一致连续映射关于拟一致拓扑是连续的.

积一致结构(product uniformity)　积空间上的一致结构. 设对于任意 $\alpha\in\Lambda$，$(X_\alpha,\mathscr{U}_\alpha)$ 为一致空间. $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 上的积一致结构是使得到每一个坐标空间 $(X_\alpha,\mathscr{U}_\alpha)$ 内的射影为一致连续的 $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 上的最小一致结构，记为 $\prod_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{U}_\alpha$. 一致空间

$$\left(\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha,\prod_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{U}_\alpha\right)$$

称为 $\{(X_\alpha,\mathscr{U}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的积一致空间. 积一致结构 $\prod_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{U}_\alpha$ 诱导的拓扑恰好是每个 $\mathscr{U}_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ 诱导的拓扑的积拓扑. 一致空间的子空间和积一致空间的有关结果是韦伊(Weil, A.)于 1938 年给出的.

积一致空间(product uniform space)　见“积一致结构”.

柯西滤子(Cauchy filter)　一致空间上的一类滤子. 设 $(X,\mathscr{U})$ 为一致空间，$\mathscr{F}$ 是 X 的子集组成的滤子. 若对于任意 $U\in\mathscr{U}$，存在 $F\in\mathscr{F}$ 使得当 $x,y\in F$ 时 $(x,y)\in U$，则称 $\mathscr{F}$ 为 X 上的柯西滤子.

柯西网(Cauchy net)　一致空间上的一类网. 设 $(X,\mathscr{U})$ 为一致空间，$\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$ 为 X 中的网. 若对于 $\mathscr{U}$ 的每一元 U，存在 $\alpha_0\in D$，当 $\alpha\geqslant\alpha_0,\beta\geqslant\alpha_0$ 时有 $(S_\alpha,S_\beta)\in U$，则称网 $\{S_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$ 为 X 中的柯西网. 关于一致拓扑收敛于某点的网是柯西网. 柯西网收敛于它的任意聚点.

完备一致空间(completely uniform space)　一类特殊的一致空间. 设 $(X,\mathscr{U})$ 是一致空间. 若 X 中的任意柯西网均收敛于 X 的某点，则称 $(X,\mathscr{U})$ 为完备一致空间. 完备一致空间的闭一致子空间是完备的. 一致空间的完备性具有可积性. T_2 一致空间的完备子集必为闭子集. 可伪度量化的一致空间是完备的充分必要条件是，空间中任意柯西序列都收敛于一点. 若 X 上的度量 d 诱导的一致结构为 $\mathscr{U}$，则一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 是完备的当且仅当度量空间 (X,d) 是完备的. 完备一致空间的概念及一些结果都是韦伊(Weil, A.)于 1938 年给出的.

一致空间的完备化(completion of a uniform space)　构造完备一致空间的一种方法. 设 $(X,\mathscr{U})$ 为一致空间. 若存在完备一致空间 $(\tilde{X},\tilde{\mathscr{U}})$，使得空间 $(X,\mathscr{U})$ 一致同构于 $(\tilde{X},\tilde{\mathscr{U}})$ 的子空间 $(A,\tilde{\mathscr{U}}_A)$，其中 A 是 $\tilde{X}$ 的一个稠密子集，则称 $(\tilde{X},\tilde{\mathscr{U}})$ 为一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 的完备化. 每个一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 都存在完备化，并且一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 的完备化在一致同构的意义下是惟一的. 一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 的完备化是紧的当且仅当 $(X,\mathscr{U})$ 是全有界的.

全有界一致空间(totally bounded uniform space)　亦称准紧一致空间. 设 $(X,\mathscr{U})$ 为一致空间. 若 X 的任意一致覆盖都有有限子覆盖，则称 $(X,\mathscr{U})$ 为全有界一致空间. $(X,\mathscr{U})$ 为全有界的当且仅当对于任意 $U\in\mathscr{U}$，存在 X 中有限个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得

$$X=\bigcup\{U(x_i)\mid i=1,2,\cdots,n\}.$$

一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 是紧的当且仅当 $(X,\mathscr{U})$ 是完备的与全有界的. 一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 是全有界的当且仅当 $(X,\mathscr{U})$ 中的任意网均有柯西子网.

准紧一致空间(precompact uniform space)　即“全有界一致空间”.

由伪度量族诱导的一致结构(uniformity induced by a family of pseudo-metrics)　一类特殊的一致结构. 设 P 是集合 X 上的一个伪度量族. 对于任意 $p\in P$ 与正数 r，若

$$V_{p,r}=\{(x,y)\in X\times X\mid p(x,y)<r\},$$

则所有 $V_{p,r}$ 的族是 X 上的某个一致结构 $\mathscr{U}$ 的子基. 该一致结构 $\mathscr{U}$ 称为由伪度量族 P 诱导的一致结构. 由伪度量族 P 诱导的一致结构 $\mathscr{U}$ 是使得 P 的每一个元 p 在 $X\times X$ 上关于由 $\mathscr{U}$ 所诱导的积一致结构为一致连续的最小一致结构. 另一方面，若 $(X,\mathscr{U})$ 是一致空间，P 是所有在 $X\times X$ 上为一致连续的 X 上的伪度量族，则由 P 诱导的一致结构恰好是 $\mathscr{U}$. 若 X 上的一致结构 $\mathscr{U}$ 是由伪度量族 P 诱导

的，则该空间$(X,\mathscr{U})$一致同构于伪度量空间的乘积的某个子空间，并且当 X 为豪斯多夫空间时，$(X,\mathscr{U})$一致同构于度量空间的乘积的某个子空间.

格集(gage)　一类特殊的伪度量族. 设 P 是集合 X 上的一个伪度量族. 若存在 X 上的一个一致结构 $\mathscr{U}$，使得 P 恰好就是所有在 $X\times X$ 上关于由 $\mathscr{U}$ 所诱导的积一致结构为一致连续的伪度量族，则称族 P 为一致结构 $\mathscr{U}$ 的格集，称 $\mathscr{U}$ 为 P 的一致结构. 由于 X 上每个伪度量 P 都诱导 X 上的一个一致结构 $\mathscr{U}$，所以一致结构 $\mathscr{U}$ 的格集 Q 称为由伪度量族 P 生成的格集. 若 Q 是由 P 生成的格集，则 $q\in Q$ 当且仅当对于每一个正数 s，存在正数 r 与 P 的有限子族$\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$，使得

$$\bigcap\{V_{p_i,r}\mid i=1,2,\cdots,n\}\subset V_{q,s},$$

其中

$$V_{p,r}=\{(x,y)\in X\times X\mid p(x,y)<r\}.$$

每一个建立在一致结构基础上的概念都可以借助于一个格集加以描述. 例如，若 P 为一致结构 $\mathscr{U}$ 的格集，则一致空间$(X,\mathscr{U})$到一致空间$(Y,\mathscr{V})$的映射 f 是一致连续的，当且仅当对于 $\mathscr{V}$ 的格集 Q 的每一个元 q，有 $q\circ f_2\in P$，其中

$$f_2(x,y)=(f(x),f(y))$$

对于任意 $x,y\in X$ 成立.

由伪度量族生成的格集(gage generated by a family of pseudo-metrics)　见“格集”.

邻近(proximity)　集合上的一类构造. 集合 X 的子集之间满足下述条件的关系 δ 称为 X 上的一个邻近:

1. $A\delta B$，当且仅当 $B\delta A$.
2. $(A\cup B)\delta C$，当且仅当 $A\delta C$ 或 $B\delta C$.
3. 对于任意 $x,y\in X$，$\{x\}\delta\{y\}$当且仅当 $x=y$.
4. $X\bar{\delta}\varnothing$.
5. 若 $A\bar{\delta}B$，则存在 $C,D\subset X$ 使得 $X=C\cup D$，且

$$A\bar{\delta}D,\quad B\bar{\delta}C,$$

这里 A,B,C,D 都表示 X 的子集，$\bar{\delta}$ 表示关系 δ 的否定. 若 δ 为 X 上的邻近，则称(X,δ)为 δ 空间或邻近空间. 对于任意 $A,B\subset X$，当 $A\bar{\delta}(X-B)$时，称 B 为 A 的 δ 邻域，记为 $A\Subset B$，$\Subset$亦称强包含关系. 邻近关系的概念是叶非莫夫(Ефимов, Б.)于 1951 年引入的. 有些结果是斯米尔诺夫(Смирнов, Ю. М.)于 1952 年给出的.

δ 空间(δ-space)　见“邻近”.

邻近空间(proximity space)　见“邻近”.

δ 邻域(δ-neighbourhood)　见“邻近”.

强包含关系(relation of strong inclusion)　见“邻近”.

由邻近诱导的拓扑(topology induced by a proximity)　亦称 δ 拓扑. 一种特殊的拓扑. 设(X,δ)为邻近空间. 对于任意 $A\subset X$，定义

$$\bar{A}=\{x\in X\mid\{x\}\delta A\},$$

则上式定义了集合 X 上的一个闭包算子. 由这个闭包算子确定的 X 上的拓扑称为由邻近 δ 诱导的 X 上的拓扑. 在这种意义下，一个邻近空间也是拓扑空间，并且，集合 X 上的拓扑可由 X 上的一个邻近诱导出，当且仅当 X 是吉洪诺夫空间. 若 X 是紧 T_2 空间，则集合 X 上存在惟一的邻近 δ，使得由 δ 诱导的拓扑与 X 的原有拓扑是一致的.

δ 拓扑(δ-topology)　即“由邻近诱导的拓扑”.

邻近连续映射(proximally continuous mapping)　邻近空间上的一类重要映射. 设(X,δ)与(Y,δ')是两个邻近空间，映射 $f:X\to Y$. 若对于任意 $A,B\subset X$，由 $A\delta B$ 可推出 $f(A)\delta' f(B)$，则称 f 关于 δ 与 δ'是邻近连续的，简称 f 是邻近连续映射. 邻近连续映射关于由邻近诱导的拓扑是连续的. 若 f 是单满映射，且 f 和 f^{-1}都是邻近连续的，则称 f 是邻近同构映射. 存在邻近同构映射的两个邻近空间称为是邻近同构的. 设 X 为紧 T_2 空间，Y 为邻近空间，则任意连续映射 $f:X\to Y$ 都是邻近连续的. 在邻近同构映射下的不变性质称为邻近不变性. 邻近连续映射亦称 δ 映射，邻近同构亦称 δ 同胚，邻近不变性亦称 δ 不变性.

邻近同构映射(proximally isomorphic mapping)　见“邻近连续映射”.

邻近同构空间(proximally isomorphic spaces)　见“邻近连续映射”.

邻近不变性(proximal invariant)　见“邻近连续映射”.

δ 映射(δ-mapping)　见“邻近连续映射”.

δ 同胚(δ-homeomorphism)　见“邻近连续映射”.

δ 不变性(δ-invariant)　即“邻近不变性”.

由度量诱导的邻近(proximity induced by a metric)　一类特殊的邻近. 设(X,d)为度量空间. 对于任意 $A,B\subset X$，定义 $A\delta B$，当且仅当 $d(A,B)=0$，则 δ 是 X 上的一个邻近，称为由度量 d 诱导的邻近. 在上述意义下，一个度量空间一定是邻近空间.

由一致结构诱导的邻近(proximity induced by a uniformity)　一类特殊的邻近. 设 $\mathscr{U}$ 是集合 X 上的一致结构，对于 X 的任意两个子集 A,B，定义 $A\delta B$，当且仅当对于任意 $V\in\mathscr{U}$，有

$$V\cap(A\times B)\neq\varnothing,$$

则 δ 是 X 上的一个邻近. 该邻近 δ 称为由一致结构 $\mathscr{U}$ 诱导的邻近. 一致空间$(X,\mathscr{U})$到一致空间$(Y,\mathscr{V})$的映射 f 是一致连续的，当且仅当 f 关于由 $\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{V}$ 诱导的邻近 δ 与 δ'是邻近连续的.

δ一致覆盖(δ-uniform cover) 邻近空间上的一类覆盖.设 δ 是集合 X 上的一个邻近,$\{A_i\}_{i=1}^k$是 X 的一个有限覆盖.若存在 X 的覆盖$\{B_i\}_{i=1}^k$,使得每一 A_i 强包含 B_i,即 $B_i\bar{\delta}(X-A_i)$对所有 $i=1,2,\cdots,k$ 成立,则称$\{A_i\}_{i=1}^k$是 X 上的 δ 一致覆盖.

由邻近诱导的一致结构(uniformity induced by a proximity) 一类特殊的一致结构.设 δ 是集合 X 上的一个邻近,X 上具有 δ 一致覆盖加细的所有覆盖的族是 X 上的一致覆盖族.由这个一致覆盖族确定的 X 上的一致结构 $\mathscr{U}$ 称为由邻近 δ 诱导的一致结构.由邻近诱导的一致结构是全有界的.若 $\mathscr{U}$ 是由邻近 δ 诱导的一致结构,则一致结构 $\mathscr{U}$ 的邻近就是 δ,并且由 $\mathscr{U}$ 诱导的拓扑与由 δ 诱导的拓扑是相同的.

δ紧化(δ-compactification) 亦称斯米尔诺夫紧化.一种特殊的紧化.对于邻近空间 X,惟一地存在 X 的紧化 $u(X)$,使得 X 邻近同构于 $u(X)$的一个稠密子空间.这时 $u(X)$称为 X 的 δ 紧化.

斯米尔诺夫紧化(Smirnov compactification) 即"δ 紧化".

边缘紧空间(peripherally compact space) 一类特殊的拓扑空间.设 X 为拓扑空间.若对于任意点 $x\in X$ 与 x 的任意邻域 V,存在包含于 V 的 x 的开邻域 U,使得 U 的边界是紧集,则称 X 为边缘紧空间.局部紧 T_2 空间以及满足 $\operatorname{ind}X=0$ 的空间 X 都是边缘紧空间.

π基(π-base) 边缘紧空间的一种特殊的基.设 X 为边缘紧 T_2 空间.称 $\mathscr{B}$ 为 X 的一个 π 基,若 X 的基 $\mathscr{B}$ 满足:

1. 对于任意 $U\in\mathscr{B}$,U 的边界是紧的.
2. 若 $U_i\in\mathscr{B}$ $(i=1,2,\cdots,k)$,则

$$X-\overline{U_i},\ \bigcup_{i=1}^k U_i,\ \bigcap_{i=1}^k U_i,\ U_i-\overline{U_j}$$

都属于 $\mathscr{B}$.

X 的所有边界为紧的开集组成的族构成 X 的 π 基,称为 X 的极大 π 基.

极大π基(maximal π-base) 见"π 基".

π紧化(π-compactification) 一类特殊的紧化.设 $\mathscr{B}$ 为边缘紧 T_2 空间 X 的 π 基.若对于任意 $A,B\subset X$,定义 $A\delta B$,当且仅当存在 $U\in\mathscr{B}$,使得

$$\overline{A}\subset U\subset\overline{U}\subset X-\overline{B}$$

成立,则(X,δ)是邻近空间.这个邻近空间的斯米尔诺夫紧化称为 $\mathscr{B}$ 的 π 紧化,记为 $u_{\mathscr{B}}(X)$,该邻近空间称为由 π 基 $\mathscr{B}$ 诱导的邻近空间.若 $\mathscr{B}$ 是边缘紧 T_2 空间 X 的极大 π 基,则 $u_{\mathscr{B}}(X)$是 X 的完全紧化.

由π基诱导的邻近空间(proximity space induced by a π-base) 见"π 紧化".

近性边缘紧空间(near peripherally compact space) 一类特殊的拓扑空间.设(X,δ)为邻近空间.若对于任意满足 $E\bar{\delta}F$ 的 $E,F\subset X$,存在紧集 C,使得:

1. $X-C=U\cup V$,其中 U,V 是开集,并且满足
$$E\subset U,\quad F\subset V,\quad U\cap V=\varnothing;$$
2. 对于 C 的任意开邻域 W,有
$$(U-W)\bar{\delta}(V-W);$$

则称 X 为近性边缘紧空间.

δ滤子(δ-filter) 一类特殊的滤子.设(X,δ)为邻近空间,ξ 为 X 上的滤子.若对于任意 $A\in\xi$,存在 $B\in\xi$ 使得 $B\Subset A$,则称 ξ 为 X 上的 δ 滤子.若 δ 滤子 ξ 不是其他 δ 滤子的真子集,则称 ξ 为 X 上的极大 δ 滤子.极大 δ 滤子可以用来构造邻近空间(X,δ)的 δ 紧化.

极大δ滤子(maximal δ-filter) 见"δ 滤子".

点型空间(point type space) 一类特殊的拓扑空间.若拓扑空间 X 的任意连通紧子集均为仅由一点组成的集合,则称 X 为点型空间.若 A 作为 X 的子空间是点型空间,则称 A 为 X 的点型子集.

点型子集(point type subset) 见"点型空间".

连续映射(continuous mapping) 拓扑空间之间的一类重要映射.设$(X,\mathscr{T})$与$(Y,\mathscr{U})$是两个拓扑空间,$f:X\to Y$ 是映射,$x\in X$.若 $f(x)$的每一邻域关于 f 的原像是 x 的邻域,则称 f 在点 x 处是连续的.若 f 在 X 的任意点是连续的,则称 f 是$(X,\mathscr{T})$到$(Y,\mathscr{U})$的连续映射.f 为连续映射的等价条件有很多,例如:

1. Y 的每一开集的原像是 X 的开集.
2. Y 的每一闭集的原像是 X 的闭集.
3. 对于任意 $x\in X$ 和 $f(x)$的任意邻域 U,存在 x 的邻域 V 使得 $f(V)\subset U$.
4. 对于 X 的每一子集 A,有 $f(\operatorname{cl}A)\subset\operatorname{cl}f(A)$.
5. 对于 Y 的每一子集 B,有
$$\operatorname{cl}f^{-1}(B)\subset f^{-1}(\operatorname{cl}B).$$
6. 对于任意 $s\in X$ 和 X 中每一收敛于 s 的网$\{S_n,n\in D,\leqslant\}$,Y 中的网$\{f(S_n),n\in D,\leqslant\}$收敛于
$$f(s).$$

抽象空间的连续映射是弗雷歇(Fréchet,M.-R.)于 1910 年开始考虑的.

开映射(open mapping) 一类特殊的映射.若 f 是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$到拓扑空间$(Y,\mathscr{U})$的映射.若对于 X 的任意开集 A,$f(A)$都是 Y 的开集,则称 f 为开映射.拓扑空间的开映射的概念首先是由阿龙扎扬(Aronszajn,N.)于 1931 年引入的.早在 1913 年,外尔(Weyl,(C. H.)H.)已讨论过平面之间的开映射.

闭映射(closed mapping) 一类特殊的映射.设 f 是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$到拓扑空间$(Y,\mathscr{U})$的映

射.若对于 X 的任意闭集 A,$f(A)$都是 Y 的闭集,则称 f 是闭映射.闭映射与开映射是相互独立的.即开映射未必是闭映射,闭映射也未必是开映射.闭映射的概念是由赫维茨(Hurewicz,W.)于 1926 年,亚历山德罗夫(Александров,П. С.)于 1927 年分别引入的.

同胚(homeomorphism) 拓扑空间之间的一种变换.若 f 是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$到$(Y,\mathscr{U})$的单满映射,并且 f 与 f^{-1}都是连续的,则称 f 为同胚映射或拓扑变换.存在同胚映射的两个拓扑空间称为同胚的或拓扑等价的.同胚关系是等价关系.抽象空间的同胚是弗雷歇(Fréchet,M.-R.)于 1910 年开始研究的.在狭窄的意义下同胚的概念早已被庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)引入.

同胚映射(homeomorphic mapping) 见"同胚".

拓扑变换(topological transformation) 即"同胚映射".

拓扑等价(topological equivalence) 见"同胚".

粘接引理(pasting lemma) 构造或证明连续映射的一种方法.设 X,Y 是拓扑空间,$\{X_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$是 X 的一族子集,并且

$$X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda.$$

若对于每一 $\lambda\in\Lambda$ 有连续映射 $f_\lambda:X_\lambda\to Y$,对于 $\lambda,\mu\in\Lambda$,当 $x\in X_\lambda\cap X_\mu$ 时,有 $f_\lambda(x)=f_\mu(x)$.定义 $f:X\to Y$ 如下:对于任意 $x\in X$ 时,当 $x\in X_\lambda$ 时,$f(x)=f_\lambda(x)$.则当下列条件之一满足时 f 是连续映射:

1.所有 X_λ 是 X 的开集.

2.Λ 是有限集,并且所有 X_λ 是 X 的闭集.

诱导拓扑(induced topology) 构造拓扑的一种方法.设 f 是集合 X 到拓扑空间$(Y,\mathscr{U})$的映射.在 X 上的所有使得 f 连续的拓扑中,最粗的拓扑 $\mathscr{T}$ 称为由$(Y,\mathscr{U})$及 f 确定的诱导拓扑.实际上,

$$\mathscr{T}=f^{-1}(\mathscr{U})=\{f^{-1}(G)|G\in\mathscr{U}\}.$$

反之,若 f 是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$到集合 Y 上的映射.在 Y 上的所有使得 f 连续的拓扑中,最细的拓扑 $\mathscr{U}$ 称为由$(X,\mathscr{T})$及 f 确定的诱导拓扑.也称为由 f 与 X 上的拓扑确定的 Y 的商拓扑.实际上,

$$\mathscr{U}=\{G|G\subset Y,f^{-1}(G)\in\mathscr{T}\}.$$

商拓扑(quotient topology) 见"诱导拓扑".

零集(zero set) 亦称函数闭集.拓扑空间的一类子集.设 A 为拓扑空间 X 的子集.若存在 X 上的实值连续函数 g,使得

$$A=\{x\in X|g(x)=0\},$$

则称 A 为 X 中的零集.零集一定是闭集,反之不成立.有限多个零集的并与可数多个零集的交是零集.零集在连续映射下的逆像是零集.在正规空间中零集与 G_δ 集是一致的.零集的补集称为补零集或函数开集.

函数闭集(functionally closed set) 即"零集".

函数开集(functionally open set) 见"零集".

补零集(complementary zero set) 见"零集".

弱连续映射(weakly continuous mapping) 一类广义连续映射.设 X,Y 为拓扑空间,$f:X\to Y$,$x\in X$.若对于 $f(x)$的任意邻域 V,存在 x 的邻域 U,使得 $f(U)\subset\mathrm{cl}V$,其中 $\mathrm{cl}V$ 表示 V 的闭包,则称 f 在点 x 是弱连续的.若 f 在 X 的任意点都是弱连续的,则称 f 是 X 上的弱连续映射.$f:X\to Y$ 是弱连续映射当且仅当对于 Y 的任意开集 V,

$$f^{-1}(V)\subset\mathrm{int}\ f^{-1}(\mathrm{cl}\ V),$$

其中 int 表示内部算子.若 $f:X\to Y$ 是弱连续映射,Y 是正则空间,则 f 是连续的.若 f 是 X 到 T_2 空间 Y 的弱连续映射,则 f 的图像

$$G(f)=\{(x,y)\in X\times Y|f(x)=y\}$$

是 $X\times Y$ 中的闭集.

次弱连续映射(subweakly continuous mapping) 一类广义连续映射.设 X,Y 为拓扑空间,$f:X\to Y$.若存在 Y 的拓扑基 $\mathscr{B}$,使得对于任意 $V\in\mathscr{B}$,有

$$\mathrm{cl}\ f^{-1}(V)\subset f^{-1}(\mathrm{cl}\ V),$$

则称 f 为次弱连续映射.弱连续映射是次弱连续的.次弱连续映射未必是弱连续的.到 T_2 空间的次弱连续映射有闭图像.

概连续映射(almost continuous mapping) 亦称几乎连续映射.一类广义连续映射.设 X,Y 为拓扑空间,$f:X\to Y$.若对于任意 $x\in X$ 及 $f(x)$的任意邻域 V,$\mathrm{cl}\,f^{-1}(V)$是 x 的邻域,则称 f 为概连续映射.映射 $f:X\to Y$ 是概连续的当且仅当对于 Y 的任意开集 V,

$$f^{-1}(V)\subset\mathrm{int\ cl}f^{-1}(V).$$

概连续性没有遗传性,即空间 X 上定义的概连续映射在 X 的子空间上未必是概连续的.弱连续映射未必是概连续的.开的弱连续映射是概连续的.次弱连续的概连续映射是弱连续的.

概开映射(almost open mapping) 一类广义开映射.设 X,Y 为拓扑空间,$f:X\to Y$.若对于 X 的任意开集 U,

$$f(U)\subset\mathrm{int\ cl}f(U),$$

则称 f 是概开映射.f 是概开映射当且仅当对于 Y 的任意开集 V,$f^{-1}(\mathrm{cl}V)\subset\mathrm{cl}f^{-1}(V)$.开映射是概开的,反之,概开映射未必是开的.概开且弱连续的映射是近乎连续的且概连续的.

近乎连续映射(nearly continuous mapping) 一类广义连续映射.设 X,Y 为拓扑空间,$f:X\to Y$.若对于任意 $x\in X$ 及 $f(x)$的任意邻域 V,存在 x 的

邻域 U，使得

$$f(U)\subset \mathrm{int\ cl}\ V,$$

则称 f 是近乎连续映射. 弱连续映射、概连续映射、近乎连续映射是互相独立的. 开的近乎连续映射是概连续的.

图像连续映射(graphically continuous mapping) 一类广义连续映射. 设 X,Y 为拓扑空间，$f: X\to Y$. 若对于包含 f 的图像 $G(f)$ 的任意开集 W，存在连续映射 $g:X\to Y$，使得 $G(g)\subset W$，则称 f 为图像连续映射. 图像连续映射是闭遗传的.

半连续映射(semicontinuous mapping) 一类广义连续映射. 设 X,Y 为拓扑空间，映射 $f:X\to Y$. 若对于 Y 的任意开集 V，$f^{-1}(V)$ 是 X 的半开集，则称 f 为半连续映射.

拟连续映射(quasi continuous mapping) 一类广义连续映射. 设 X,Y 为拓扑空间，$x\in X$，$f:X\to Y$. 若对于 $f(x)$ 的任意开邻域 V 和 x 的任意开邻域 U，存在开集 $G\neq\varnothing$，使得 $G\subset U$ 与 $f(G)\subset V$，则称 f 在点 x 是拟连续的. 若 f 在 X 的任意点都是拟连续的，则称 f 为拟连续映射.

微连续映射(faintly continuous mapping) 一类广义连续映射. 设 X,Y 为拓扑空间，映射 $f:X\to Y$. 若 Y 的任意 θ 开集的原像是 X 的开集，则称 f 为微连续映射. 设 $V\subset Y$. 若 V 包含它的每点的一个闭邻域，则称 V 为 Y 的 θ 开集.

θ 开集(θ-open set) 见“微连续映射”.

θ 连续映射(θ-continuous mapping) 一类广义连续映射. 设 X,Y 为拓扑空间，映射 $f:X\to Y$. 若对于任意 $x\in X$ 及 $f(x)$ 的任意邻域 V，存在 x 的邻域 U，使得

$$f(\mathrm{cl}\ U)\subset \mathrm{cl}\ V,$$

则称 f 为 θ 连续映射. 连续映射是近乎连续的. 近乎连续映射是 θ 连续的. θ 连续映射是弱连续的. 反之一般不成立. 若像空间 Y 为正则空间，则四者一致.

C 连续映射(C-continuous mapping) 一类广义连续映射. 设 X,Y 为拓扑空间，映射 $f:X\to Y$. 若对于任意 $x\in X$ 及 $f(x)$ 的任意具有紧补的开邻域 V，存在 x 的开邻域 U，使得 $f(U)\subset V$，则称 f 是 C 连续映射. f 是 C 连续映射当且仅当对于 Y 的任意闭紧子集 C，$f^{-1}(C)$ 是 X 的闭集. 有闭图像的映射必是 C 连续的.

α 集(α-set) 开集的一种推广. 设 S 是拓扑空间 X 的子集. 若 $S\subset \mathrm{int\ cl\ int}S$，则称 S 是 X 的 α 集. 每个开集是 α 集，反之未必成立. X 的 α 集的全体形成 X 上的拓扑，记为 $\alpha(X)$. 映射 $f:X\to Y$ 称为 α 连续的，若 Y 的每个开集的原像是 X 的 α 集. 连续映射是 α 连续的，反之未必成立. 映射 $f:X\to Y$ 称为弱 α 连续的，若对于任意 $x\in X$ 与 $f(x)$ 的任意开邻域 V，存在包含 x 的 α 集 U，使得 $f(U)\subset \mathrm{cl}V$. 弱连续映射是弱 α 连续的，其逆不真. 弱 α 连续映射有可积性、开遗传性，是保通映射.

α 连续映射(α-continuous mapping) 见“α 集”.

弱 α 连续映射(weakly α-continuous mapping) 见“α 集”.

半连通映射(semiconnected mapping) 一类映射. 设 X,Y 为拓扑空间，映射 $f:X\to Y$. 若对于 Y 的任意闭连通子集 C，$f^{-1}(C)$ 在 X 中是闭连通的，则称 f 为半连通映射.

保通映射(connected mapping) 一类映射. 设 X,Y 为拓扑空间，映射 $f:X\to Y$. 若 X 的任意连通子集的像是 Y 的连通子集，则称 f 为保通映射.

单调映射(monotone mapping) 一类映射. 设 X,Y 为拓扑空间，映射 $f:X\to Y$. 若对于任意 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 是 X 的连通子集，则称 f 为单调映射. 单调映射首先由穆尔(Moore, R. L.)于 1925 年在连续统上定义. 怀伯恩(Whyburn, G. T.)于 1934 年引入了单调映射类.

连通映射(connectivity mapping) 一类映射. 设 X,Y 为拓扑空间，由映射 $f:X\to Y$ 可确定映射

$$g:\ X\to X\times Y,$$

使得对于任意 $x\in X$ 有

$$g(x)=(x,f(x)).$$

若对于 X 的任意连通子集 A，$g(A)$ 是 $X\times Y$ 的连通子集，则称 f 为连通映射. 连通映射是使连通集的图像是连通集的映射.

边缘连续映射(peripherally continuous mapping) 一类映射. 设 X,Y 为拓扑空间，映射 $f:X\to Y$. 若对于任意 $x\in X$，x 的任意开邻域 U 与 $f(x)$ 的任意开邻域 V，存在包含于 U 的 x 的开邻域 G，使得

$$f(b(G))\subset V,$$

其中 $b(G)$ 表示 G 的边界，则称 f 为边缘连续映射.

完全映射(perfect mapping) 亦称完备映射. 一类重要的映射. 设 X,Y 为拓扑空间，映射 $f:X\to Y$. 若对于任意 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 是 X 的紧集，则称 f 为紧映射. 若 f 是紧的、闭的且连续的映射，则称 f 为完全映射. 紧空间到豪斯多夫空间的连续映射是完全映射. 在完全映射下紧集的原像是紧集. 两个完全映射的复合映射是完全映射. 完全映射在闭集上的限制是完全映射. 若 $f_s:X_s\to Y_s(s\in D)$ 的直积为

$$f=\prod_{s\in D}f_s,$$

则 f 是完全映射的充分必要条件是，所有 f_s 是完全映射. 在完全映射下，拓扑空间的 $T_i(i=2,3,4,5,6)$ 分离性是不变性. 局部紧性与可度量性也是完全映射的不变性. 正则性、紧性、局部紧性是完全映射的

逆不变性.完全映射首先由维因希捷依(Вайнштейн,И. А.)于1947年对于度量空间的情形引入的.勒雷(Leray,J.)与布尔巴基(Bourbaki,N.)于1950—1951年对于局部紧空间情形独立地引入并研究了完全映射.

完备映射(perfect mapping) 即"完全映射".

紧映射(compact mapping) 见"完全映射".

拟完全映射(quasi perfect mapping) 完全映射的一种推广.设X,Y是拓扑空间,映射$f:X\to Y$.若f是闭的连续映射,并且对于任意$y\in Y$,$f^{-1}(y)$是X的可数紧子集,则称f是拟完全映射.完全映射是拟完全映射,反之一般不成立.

胶垫加细(cushion refinement) 两个集族之间的一种关系.设

$$\mathscr{U}=\{U_\alpha|\alpha\in A\} \quad 与 \quad \mathscr{V}=\{V_\beta|\beta\in B\}$$

为拓扑空间X的两个子集族.若存在映射$f:B\to A$,使得对于任意$B'\subset B$,有

$$\mathrm{cl}\,(\bigcup\{V_\beta|\beta\in B'\})\subset\bigcup\{U_\alpha|\alpha\in f(B')\},$$

则称$\mathscr{V}$是$\mathscr{U}$的胶垫加细或者$\mathscr{V}$胶垫加细$\mathscr{U}$.此时称f为$\mathscr{V}$到$\mathscr{U}$的胶垫加细.迈克尔(Michael,E.)于1959年用胶垫加细给出仿紧T_2空间的一个充分必要条件.

商映射(quotient mapping) 一类连续映射.设X,Y为拓扑空间,$f:X\to Y$为满射.若f满足下列条件:U是Y的开集当且仅当$f^{-1}(U)$是X的开集,则称f为商映射.商映射是连续映射.两个商映射的复合映射是商映射.若复合映射gf是商映射,则g是商映射.单的商映射是同胚映射.商映射的概念是比尔(Bear,R. W.)和列维(Levi,E. E.)于1932年引入的.布尔巴基(Bourbaki,N.)于1940年与1951年对商映射进行了系统的论述.

遗传商映射(hereditarily quotient mapping) 一类连续映射.设X,Y为拓扑空间,$f:X\to Y$是满射.若对于Y的任意子集S,f的限制$f|_{f^{-1}(S)}$是商映射,则称f为遗传商映射.空间X的遗传商映射的像称为X的遗传商空间.X到Y的满射f是遗传商映射的充分必要条件是:对于Y的任意子集B,$f[\overline{f^{-1}(B)}]$是Y的闭集.一个等价的条件是:对于任意$y\in Y$和X中$f^{-1}(y)$的任意开邻域U,有$y\in\mathrm{int}\,f(U)$.两个遗传商映射的复合映射是遗传商映射.阿尔汉盖路斯基(Архангельский,A.)等人对遗传商映射进行过深入的讨论.

遗传商空间(hereditarily quotient space) 见"遗传商映射".

双商映射(biquotient mapping) 一类连续映射.设X,Y是拓扑空间,$f:X\to Y$是满的连续映射.若f满足下列条件:对于任意$y\in Y$及满足

$$\mathscr{U}^{\#}\supset f^{-1}(y)$$

的X的任意开集族$\mathscr{U}$,存在$\mathscr{U}$的有限子族$\mathscr{V}$,使得$f(\mathscr{V}^{\#})$是y的邻域,其中

$$\mathscr{U}^{\#}=\bigcup\{U|U\in\mathscr{U}\},\quad \mathscr{V}^{\#}=\bigcup\{V|V\in\mathscr{V}\},$$

则称f是双商映射.两个双商映射的复合映射是双商映射.双商映射是遗传商映射.存在遗传商映射而非双商映射.双商映射之积是双商映射.

映射空间(mapping space) 亦称函数空间.拓扑学的一个基本概念.一类重要的拓扑空间.设X,Y是集合,$\mathscr{F}$为X到Y的映射组成的族.在$\mathscr{F}$上引入拓扑使之成为拓扑空间,则称$\mathscr{F}$为映射空间.在映射空间理论中常见的拓扑有点态收敛拓扑、紧开拓扑、一致收敛拓扑、紧收敛拓扑等.

函数空间(function space) 即"映射空间".

点态收敛拓扑(topology of pointwise convergence) 亦称点开拓扑.映射空间上一类常见的拓扑.设$\mathscr{F}$为集合X到拓扑空间$(Y,\mathscr{U})$的映射族.若

$$W(x,V)=\{f\in\mathscr{F}|f(x)\in V\},$$

则以集族

$$\{W(x,V)|x\in X,V\in\mathscr{U}\}$$

为子基在$\mathscr{F}$上生成的拓扑称为$\mathscr{F}$上的点态收敛拓扑.若将$\mathscr{F}$看做积空间Y^X的子空间,则点态收敛拓扑是积拓扑在$\mathscr{F}$上的相对拓扑.若值域空间Y是豪斯多夫空间或正则空间,则$\mathscr{F}$上赋予点态收敛拓扑也是豪斯多夫空间或正则空间.但当Y是局部紧空间、第一可数空间、第二可数空间时,$\mathscr{F}$未必具有相应的性质.

点开拓扑(point open topology) 即"点态收敛拓扑".

紧开拓扑(compact open topology) 映射空间上一类常见的拓扑.设$\mathscr{F}$为拓扑空间X到拓扑空间Y的映射族,若

$$W(K,U)=\{f\in\mathscr{F}|f(K)\subset U\},$$

则以集族$\{W(K,U)|K$为X的紧子集,U为Y的开集$\}$为子基在$\mathscr{F}$中生成的拓扑称为$\mathscr{F}$上的紧开拓扑.由于单点集为紧集,所以$\mathscr{F}$上的紧开拓扑细于$\mathscr{F}$上的点态收敛拓扑.若值域空间Y是豪斯多夫空间,则$\mathscr{F}$上赋予紧开拓扑也是豪斯多夫空间.若Y是正则空间且$\mathscr{F}$中每一元都是连续的,则$\mathscr{F}$上赋予紧开拓扑也是正则空间.

分离函数族(separating family of functions) 一类特殊的函数族.用$C(X)$表示拓扑空间X上的所有连续实值函数的全体,$\mathscr{F}\subset C(X)$.若对于X的任意相异的两点x,y,存在$f\in\mathscr{F}$使得$f(x)\neq f(y)$,则称$\mathscr{F}$是X上的分离函数族.

联合连续拓扑(jointly continuous topology) 映射空间上一类常见的拓扑.若$\mathscr{F}$为拓扑空间X到拓扑空间Y的映射族,映射$p:\mathscr{F}\times X\to Y$定义为

$$p(f,x) = f(x),$$

则使得 p 为连续映射的 $\mathscr{F}$ 上的拓扑，称之为 $\mathscr{F}$ 上的联合连续拓扑. 点态收敛拓扑通常不是联合连续的. 离散拓扑为联合连续的. 若 $\mathscr{F}$ 上的某个拓扑为联合连续的，则比它细的拓扑亦为联合连续的. 一个自然的问题是，寻找 $\mathscr{F}$ 上最粗的联合连续拓扑. $\mathscr{F}$ 上的拓扑称为在紧集上联合连续，若对于 X 中每一紧集 A，映射 $p:\mathscr{F}\times A\to Y$ 是连续的. 每一个在紧集上联合连续的拓扑细于紧开拓扑. 若 X 为正则空间或豪斯多夫空间，并且 $\mathscr{F}$ 的每一个元在 X 的每一个紧集上连续，则紧开拓扑是最粗的在紧集上联合连续的拓扑.

一致收敛拓扑(topology of uniform convergence)　映射空间上的一类常见拓扑. 设 $\mathscr{F}$ 为集合 X 到一致空间 $(Y,\mathscr{V})$ 的映射族. 对于任意 $V\in\mathscr{V}$，若 $W(V)=\{(f,g)\in\mathscr{F}\times\mathscr{F}\mid$ 对于任意 $x\in X$，$(f(x),g(x))\in V\}$，则以集族 $\mathscr{B}=\{W(V)\mid V\in\mathscr{V}\}$ 为基在 $\mathscr{F}$ 上生成的一致结构 $\mathscr{U}$ 称为 $\mathscr{F}$ 上的一致收敛的一致结构. 由 $\mathscr{U}$ 诱导的拓扑称为 $\mathscr{F}$ 上的一致收敛拓扑. 一致收敛拓扑细于点态收敛拓扑. 若 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 到一致空间 $(Y,\mathscr{V})$ 的所有连续映射的族，则 $\mathscr{F}$ 上的一致收敛拓扑是联合连续的.

一致收敛的一致结构(uniformity of uniform convergence)　见“一致收敛拓扑”.

紧收敛拓扑(topology of compact convergence)　映射空间上一类常见的拓扑. 设 $\mathscr{F}$ 为集合 X 到一致空间 $(Y,\mathscr{V})$ 的映射族，$\mathscr{A}$ 为 X 的非空子集族. 对于 $A\in\mathscr{A}$，$V\in\mathscr{V}$，若

$$W_A(V)=\{(f,g)\in\mathscr{F}\times\mathscr{F}\mid \text{对于任意 } x\in A,(f(x),g(x))\in V\},$$

则以集族

$$\{W_A(V)\mid A\in\mathscr{A},V\in\mathscr{V}\}$$

为子基在 $\mathscr{F}$ 上生成的一致结构称为在 $\mathscr{A}$ 的成员上一致收敛的一致结构. 特别地，当 $\mathscr{F}$ 为拓扑空间 X 到一致空间 $(Y,\mathscr{V})$ 的所有连续映射的族，并且 $\mathscr{A}$ 为 X 的所有紧子集的族时，上述一致结构称为在紧集上的一致收敛的一致结构. 它的拓扑称为紧收敛拓扑. 紧收敛拓扑就是紧开拓扑.

在紧集上一致收敛的一致结构(uniformity of uniform convergence on compacta)　见“紧收敛拓扑”.

等度连续函数族(family of equicontinuous functions)　一类特殊的函数族. 设 $\mathscr{F}$ 为拓扑空间 X 到一致空间 $(Y,\mathscr{V})$ 的映射族，$x\in X$. 若对于任意 $V\in\mathscr{V}$，存在 x 的邻域 U，使得对于任意

$$f\in\mathscr{F},\quad f(U)\subset V[f(x)],$$

则称 $\mathscr{F}$ 在 x 是等度连续的. 若 $\mathscr{F}$ 在 X 的每点都是等度连续的，则称 $\mathscr{F}$ 是等度连续函数族. 若 $\mathscr{F}$ 是等度连续函数族，则 $\mathscr{F}$ 上的点态收敛拓扑是联合连续的. 若 $\mathscr{F}$ 关于联合连续拓扑为紧的，则 $\mathscr{F}$ 是等度连续的.

齐连续函数族(evenly continuous family of functions)　一类特殊的函数族. 设 $\mathscr{F}$ 为拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射族. 若对于任意 $x\in X$，$y\in Y$ 和 y 的任意邻域 U，存在 x 的邻域 V 和 y 的邻域 W，使得当 $f\in\mathscr{F}$，$f(x)\in W$ 时，有 $f(V)\subset U$，则称 $\mathscr{F}$ 是齐连续函数族. 设 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 到一致空间 $(Y;\mathscr{V})$ 的映射族. 若 $\mathscr{F}$ 是等度连续的，则 $\mathscr{F}$ 是齐连续的. 反之，若 $\mathscr{F}$ 是齐连续的，并且对于任意 $x\in X$，$\{f(x)\mid f\in\mathscr{F}\}$ 在 Y 中有紧的闭包，则 $\mathscr{F}$ 为等度连续的.

一致收敛的映射网(uniformly convergent net of mappings)　一类特殊的映射网. 设 X 是集合，$(Y,\mathscr{V})$ 是一致空间，$\{f_\alpha,\alpha\in D\}$ 是 X 到 Y 的映射网，$f:X\to Y$. 若对于任意 $V\in\mathscr{V}$，存在 $\alpha_0\in D$，使得当 $\alpha\geqslant\alpha_0$，$x\in X$ 时有 $(f(x),f_\alpha(x))\in V$，则称映射网 $\{f_\alpha,\alpha\in D\}$ 在 X 上一致收敛于 f.

收敛集列(convergent sequence of sets)　一类特殊的集列. 设 $\{U_i\}$ 为拓扑空间 X 的集列. 若 $\{U_i\}$ 满足条件：

1. $U_1\supset U_2\supset\cdots$.

2. 若 $K=\bigcap_{i=1}^{\infty}U_i$，则 K 为非空紧集.

3. K 的任意邻域含有某个 U_i，

则称集列 $\{U_i\}$ 收敛于 K. 当条件 2 中的 K 为非空可数紧集时，称集列 $\{U_i\}$ 拟收敛于 K. 设 $\{U_i\}$ 是空间 X 的(拟)收敛集列，若集列 $\{G_i\}$ 满足 $\varnothing\neq G_i\subset U_i$ 与 $\overline{G_{i+1}}\subset G_i$(对于任意 i)，则 $\{G_i\}$ 是(拟)收敛集列. (拟)收敛集列的连续像是(拟)收敛集列.

拟收敛集列(quasi-convergent sequence of sets)　见“收敛集列”.

点可数型空间(space of pointwise countable type)　一类特殊的拓扑空间. 若对于拓扑空间 X 的任意点 x，存在收敛的或拟收敛的 x 的开邻域列，则称 X 为点可数型空间或拟点可数型空间. X 是点可数型空间的充分必要条件是：对于任意 $x\in X$，存在 X 的具有可数特征的紧集 F，使得 $x\in F$. 可数型空间是点可数型的. 点可数型空间是拟点可数型的. 紧豪斯多夫空间与第一可数的豪斯多夫空间是点可数型的. 点可数型空间的闭子空间与 G_δ 子空间是点可数型的. 但正规空间未必是点可数型的.

拟点可数型空间(space of quasi-pointwise countable type)　见“点可数型空间”.

完全紧化(perfect compactification)　一类特殊的紧化. 设 αX 为完全正则空间 X 的紧化，δ 为 αX 上的一个邻近. 若对于 X 的任意开集 U 与任意

$A \subset U$，有 $A\bar{\delta}(X-U)$，当且仅当 $A\bar{\delta}(\mathrm{bry}_X U)$，则称 αX 为 X 的完全紧化，其中 $\mathrm{bry}_X U$ 表示 U 在 X 中的边界. 完全紧化是由斯克雅列柯(Скляренко, Е. Г.)引入的，它有许多有趣的性质.

q 空间(q-space)　一类特殊的拓扑空间. 设 X 是拓扑空间. 若对于任意 $x \in X$，存在 x 的邻域列 $\{U_i\}$，使得对于任意 $x_i \in U_i$，$i \in \mathbb{N}$，序列 $\{x_i\}$ 具有聚点，则称 X 为 q 空间. 拟点可数型空间是 q 空间. T_3 的 q 空间是拟点可数型的.

外延基(outer base)　一类特殊的开集族. 设 X 为拓扑空间，$S \subset X$，$\mathscr{B}$ 为 X 的开集族. 若对于任意 $x \in S$ 与 x 的任意开邻域 U，存在 $\mathscr{B}$ 的元 B 使得 $x \in B \subset U$，则称 $\mathscr{B}$ 为 S 在 X 的外延基. S 的外延基的基数的最小者以 $\omega_X(S)$ 表示，称为 S 在 X 的外权. 若 X 为点可数型的完全正则空间，BX 为 X 的 T_2 紧化，则 $\omega_{BX}(X) \leqslant |X|$. 若 X 为 T_2 空间，K 为 X 的紧集，则

$$\omega_X(K) = \max[\chi_X(K), \omega(K)],$$

其中 $\chi_X(K)$ 是 K 在 X 中的特征，$\omega(K)$ 是 K 的权.

外权(outer weight)　见"外延基".

p 空间(p-space)　一类特殊的拓扑空间. 设拓扑空间 X 是吉洪诺夫空间 Y 的子空间，$\{\mathscr{U}_i\}$ 是 Y 的一列开集族. 若每个 $\mathscr{U}_i$ 覆盖 X，并且对于任意 $x \in X$，有

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{U}_i(x) \subset X,$$

其中 $\mathscr{U}_i(x) = \bigcup\{V \mid x \in V \in \mathscr{U}_i\}$，则称 $\{\mathscr{U}_i\}$ 是 X 在 Y 中的一个 p 构造. 若 X 是吉洪诺夫空间，并且 X 在 βX 中有 p 构造，则称 X 为 p 空间，其中 βX 是 X 的斯通-切赫紧化. 切赫完备空间是 p 空间. X 是 p 空间，当且仅当 X 在它的任意 T_2 紧化中具有 p 构造. p 空间 X 在其任意 T_2 紧化中的外权不超过 X 的网络权(阿尔汉盖路斯基外延基定理). 在仿紧 T_2 空间范围内，p 空间与 M 空间是一致的，这一结果是阿尔汉盖路斯基(Архангельский, А.)与森田纪一(Morita, K.)分别独立发现的.

p 构造(p-construction)　见"p 空间".

严格 p 空间(strict p-space)　一类特殊的拓扑空间. 设 X 是 p 空间，$\{\mathscr{U}_i\}$ 是 X 在其斯通-切赫紧化 βX 中的 p 构造. 若 $\{\mathscr{U}_i\}$ 满足：对于任意 $x \in X$，

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{U}_i(x) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{cl}_{\beta X} \mathscr{U}_i(x),$$

则称 X 是严格 p 空间. 此时称 $\{\mathscr{U}_i\}$ 是 X 在 βX 中的一个严格 p 构造. X 是严格 p 空间，当且仅当 X 是吉洪诺夫空间且存在 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_i\}$，对于任意 $x \in X$，$\{\mathscr{U}_i(x)\}$ 是收敛的集列. 在 θ 可加细空间的范围内，p 空间与严格 p 空间是一致的.

严格 p 构造(strict p-construction)　见"严格 p 空间".

M 空间(M-space)　一类特殊的拓扑空间. 设 X 为拓扑空间. 称 X 为 M 空间，若存在 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_i\}$ 满足：

1. 对于任意 i，$\mathscr{U}_{i+1}$ 是 $\mathscr{U}_i$ 的星加细.

2. 对于任意 $x \in X$ 与任意 i，$x_i \in \mathscr{U}_i(x)$，点列 $\{x_i\}$ 在 X 中有聚点.

空间 X 是 M 空间，当且仅当 X 是某度量空间在拟完全映射下的原像. X 是仿紧 M 空间，当且仅当 X 是某度量空间在完全映射下的原像. M 空间不是有限可积的，但可数多个仿紧 M 空间的积空间是仿紧 M 空间. 若 X 同时是 M 空间与 σ 空间，则 X 是可度量化的.

可数深度空间(countably depth space)　一类特殊的拓扑空间. 设 $\{U_i\}$ 是一列集合. 若对于任意 i，有 $U_{i+1} \subset U_i$ 且 $U_{i+1} \neq U_i$，则称集列 $\{U_i\}$ 是严格单调递减的. 设 $\mathscr{B}$ 是拓扑空间 X 的基. 若对于由 $\mathscr{B}$ 中成员组成的严格单调递减的任意集列 $\{U_i\}$，当

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$$

时，$\{U_i\}$ 是 x 的邻域基，则称 $\mathscr{B}$ 是 X 的可数深度基. 具有可数深度基的空间称为可数深度空间. 可数深度的全体正规空间是可度量化的. 空间 X 是可展空间的充分必要条件是，X 是 θ 可加细的可数深度空间.

k 空间(k-space)　一类特殊的拓扑空间. 设 $\mathscr{C}$ 为拓扑空间 X 的子集族. 若 X 的子集 G 在 X 中是开的，当且仅当对于任意 $K \in \mathscr{C}$，$G \cap K$ 在 K 中是开的，则称 X 关于 $\mathscr{C}$ 具有弱拓扑. 特别地，取 $\mathscr{C}$ 为 X 的所有紧子集的族，则当 X 关于 $\mathscr{C}$ 具有弱拓扑时，称 X 为 k 空间. 设 A 为空间 X 的子集. 若对于任意紧集 K，$A \cap K$ 为 K 的闭集，则称 A 为 k 闭集. 第一可数空间是 k 空间. 局部紧空间是 k 空间. k 空间的商空间是 k 空间. 空间 X 是 k 空间的充分必要条件是，X 为局部紧空间的商空间. 点可数型 T_2 空间是 k 空间. p 空间是 k 空间. 若 X 的任意子空间都是 k 空间，则称 X 为遗传 k 空间. 对于 T_2 空间 X，X 是遗传 k 空间的充分必要条件是，X 是弗雷歇空间.

k 闭集(k-closed set)　见"k 空间".

遗传 k 空间(hereditary k-space)　见"k 空间".

k 先导(k-leader)　一类特殊的拓扑空间. 设 X 为 T_2 空间. 若存在 k 空间 $\widetilde{X}$ 和单满连续映射 k_X：$\widetilde{X} \to X$，使得 X 的任意紧集 K 的原像 $k_X^{-1}(K)$ 在 $\widetilde{X}$ 中是紧的，则称 $\widetilde{X}$ 为 X 的 k 先导，称 k_X 为 k 射影. 任意 T_2 空间 X 都存在 k 先导. 对于 X 的任意紧集 K，使得 $U \cap K$ 在 K 中是开的 U 的全体作为基，在 X 中导入新拓扑的空间就是 X 的 k 先导 $\widetilde{X}$. $\widetilde{X}$ 是 T_2 空间. 对于 T_2 空间，k 先导在同胚意义下是惟一

确定的. 当 X 为 k 空间时, $\widetilde{X}$ 和 X 是同胚的.

k 射影(k-projection)　见"k 先导".

k 映射(k-mapping)　一类特殊的映射. 设 X,Y 是两个拓扑空间, $f:X\to Y$ 是连续映射. 若对于 Y 的任意紧集 K, $f^{-1}(K)$ 在 X 中为紧集, 则称 f 为 k 映射. k 映射是紧覆盖映射. 完全映射与 k 射影都是 k 映射. 到非 k 的 T_2 空间的 k 射影, 是 k 映射而非完全映射的例子.

k 网络(k-network)　拓扑空间的一类特殊的集族. 拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 k 网络, 若 $\mathscr{P}$ 满足: 设 K 为 X 的任意紧子集, U 为 X 的任意开集, 当 $K\subset U$ 时, 存在 $P\in\mathscr{P}$, 使得 $K\subset P\subset U$ 成立. 设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射. 若 Y 的任意紧子集都是 X 的某紧子集在 f 下的像, 则称 f 为紧覆盖映射. 设 $f:X\to Y$ 为满的紧覆盖连续映射, 若 X 具有可数 k 网络, 则 Y 也具有可数 k 网络. T_2 空间 X 具有可数 k 网络的充分必要条件是, X 的 k 先导 $\widetilde{X}$ 具有可数 k 网络.

紧覆盖映射(compact covering mapping)　见"k 网络".

$\aleph_0$ 空间($\aleph_0$-space)　一类特殊的拓扑空间. 具有可数 k 网络的 T_3 空间称为 $\aleph_0$ 空间. $\aleph_0$ 空间是仿紧空间. 若 $\aleph_0$ 空间 X 为 r 空间, 则 X 是可分可度量化空间. $\aleph_0$ 空间在闭连续映射下的像亦为 $\aleph_0$ 空间. $\aleph_0$ 空间具有遗传性. 对于 T_3 空间 X, X 是 $\aleph_0$ 空间的充分必要条件是, X 是可分度量空间的紧覆盖连续映射的像.

τ 映射(τ-mapping)　一类映射. 设 X,Y 是拓扑空间, $f:X\to Y$, τ 是任意基数. 若 Y 中任意点在 f 下的原像的基数小于或等于 τ, 则称 f 是 τ 映射.

r 空间(r-space)　一类特殊的拓扑空间. 设 X 为拓扑空间, $x\in X$. 若存在 x 的邻域列 $\{U_i\}$, 当 $x_i\in U_i$ 时, 点列 $\{x_i\}$ 包含于 X 的某紧集内, 则称 x 为 r 点. 若 X 中每一点均为 r 点, 则 X 称为 r 空间. 在仿紧 T_2 空间的范围内, r 空间、q 空间、点可数型空间三者是一致的.

r 点(r- point)　见"r 空间".

蝶空间(butterfly space)　一个特殊的拓扑空间. 它是点集拓扑中一个重要的反例. 设 X 为上半平面, $A\subset X$ 为 x 轴. $X-A$ 的点具有普通的邻域基. 又设过 A 的点 P 斜率为 $\varepsilon,-\varepsilon(\varepsilon>0)$ 的直线分别为 $l_\varepsilon,l_{-\varepsilon}$. L_ε 为 X 的在 l_ε 下方的点的全体, 同样地设 $L_{-\varepsilon}$ 为 X 的在 $l_{-\varepsilon}$ 下方的点的全体, $S_\varepsilon(P)$ 表示以 P 为中心, ε 为半径的开球. 记

$$U_\varepsilon(P)=\{P\}\cup(S_\varepsilon(P)\cap(L_\varepsilon\cup L_{-\varepsilon})),$$

取 P 的邻域基为 $\{U_\varepsilon(P)\mid\varepsilon>0\}$, 如此拓扑化了的 X 是一个吉洪诺夫空间, 称之为蝶空间. $U_\varepsilon(P)$ 称为 P 的蝶邻域. 亚历山德罗夫(Александров, П. С.)和乃米茨基(Niemytzki, Y.)于 1938 年, 麦克奥内(McAuley, L. F.)于 1956 年曾讨论过这个空间. 蝶空间具有可数网络但不是 $\aleph_0$ 空间.

蝶邻域(butterfly neighbourhood)　见"蝶空间".

M_1 空间(M_1-space)　一类特殊的拓扑空间. 具有 σ 保闭的基的 T_3 空间称为 M_1 空间. 度量空间一定是 M_1 空间. M_1 空间具有可数可积性与开遗传性. 度量空间的闭连续像是 M_1 空间. M_1 空间在既约的完全映射下的像是 M_1 空间. M_1 空间是塞德(Ceder, J.)于 1961 年引入的.

M_2 空间(M_2-space)　一类特殊的拓扑空间. 设 $\mathscr{B}$ 为拓扑空间 X 的子集族. 若对于任意 $x\in X$ 与 x 的任意开邻域 U, 存在 $B\in\mathscr{B}$ 使得

$$x\in\operatorname{int}B\subset B\subset U,$$

则称 $\mathscr{B}$ 为 X 的拟基. 具有 σ 保闭的拟基的 T_3 空间称为 M_2 空间. M_1 空间是 M_2 空间. M_2 空间具有可数可积性. M_2 空间的闭连续像是 M_2 空间. M_2 空间是否为 M_1 空间, 这是一个至今尚未解决的问题.

拟基(quasi-base)　见"M_2 空间".

可层化空间(stratifiable space)　亦称 M_3 空间. 一类特殊的拓扑空间. 拓扑空间 X 称为半可层化空间, 若 X 是 T_3 的, 并且对于任意自然数 n 与 X 的闭集 H, 存在开集 $G(n,H)$, 满足:

1. $H=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G(n,H)$;

2. 若 $H\subset K$, 则 $G(n,H)\subset G(n,K)$;

若再满足条件

3. $H=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{G(n,H)}$;

则称 X 为可层化空间. 可层化空间是仿紧的、完全正规的 σ 空间. σ 空间是半可层化空间. 可层化空间与半可层化空间是遗传的与可数可积的. 可层化空间的闭连续像是可层化空间. 格鲁海基(Gruenhage, G.)于 1976 年、朱里勒(Junnila, H.)于 1978 年分别独立地证明了 X 是可层化空间, 当且仅当 X 是 M_2 空间. M_3 空间是由塞德(Ceder, J.)于 1961 年引入的, 波基斯(Borges, C. R.)采用可层化空间这一名称. 半可层化空间是由克瑞德(Creede, G.)于 1970 年引入并研究的.

半可层化空间(semi-stratifiable space)　见"可层化空间".

M_3 空间(M_3-space)　即"可层化空间".

单调正规空间(monotonically normal space)　一类特殊的拓扑空间. 设 X 是拓扑空间. 若对于 X 的任意两个不相交闭集 H 与 K, 存在开集 $G(H,K)$ 满足:

1. $H\subset G(H,K)\subset\overline{G(H,K)}\subset X-K$;

2. 若 $H\subset H'$, $K'\subset K$, 且

$$G(H,K)\subset G(H',K');$$

则称 X 为单调正规空间. 单调正规空间是族正规空间. 单调正规空间的任意子空间是单调正规的. 空间 X 是可层化空间,当且仅当 X 是半可层化的单调正规空间. 单调正规空间的闭连续像是单调正规的.

σ 空间(σ-space) 一类特殊的拓扑空间. 具有 σ 离散网络的 T_3 空间称为 σ 空间. 度量空间与可层化空间是 σ 空间. 可数紧 σ 空间是可度量化的. σ 空间的闭连续像是 σ 空间. T_3 空间 X 为 σ 空间,当且仅当 X 有 σ 局部有限网络,当且仅当 X 有 σ 保闭网络. X 为 Moore 空间,当且仅当 X 同时为 σ 空间与 p 空间. 可数多个(仿紧)σ 空间的积空间是(仿紧)σ 空间. σ 空间是奥山(Okuyama, A.)于 1967 年引入的.

Σ 空间(Σ-space) 一类特殊的拓扑空间. 设 X 是 T_3 空间,若存在 X 的 σ 离散族 $\mathscr{F}$ 与由闭可数紧(紧)集组成的 X 的覆盖 $\mathscr{C}$,使得对于任意 $C\in\mathscr{C}$ 与包含 C 的开集 U,存在 $F\in\mathscr{F}$ 使得 $C\subset F\subset U$,则称 X 为 Σ 空间(强 Σ 空间). X 是强 Σ 空间,当且仅当 X 是次仿紧的 Σ 空间. σ 空间是强 Σ 空间. 反之,具有 G_δ 对角线的 Σ 空间是 σ 空间. σ 空间的拟完全映射的原像是 Σ 空间. 永见(Nagami, K.)于 1969 年证明了 Σ 空间的类严格大于 σ 空间的拟完全映射的原像的类. 强 Σ 空间的可数积空间是强 Σ 空间.

强Σ 空间(strong Σ-space) 见"Σ 空间".

Σ 网络(Σ-network) 一类特殊的覆盖族. 设 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 的覆盖. 对于任意 $x\in X$,记

$$C(x,\mathscr{F})=\bigcap\{F\mid x\in F\in\mathscr{F}\}.$$

拓扑空间 X 的局部有限闭覆盖列$\{\mathscr{F}_i\}$称为 Σ 网络,若满足:对于 X 的非空闭集列 $K_1\supset K_2\supset\cdots$,若存在 $x\in X$,对于任意 i 有 $K_i\subset C(x,\mathscr{F}_i)$,则

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}K_i\neq\varnothing.$$

对此 Σ 网络,若记

$$C(x)=\bigcap_{i=1}^{\infty}C(x,\mathscr{F}_i),$$

则对于任意 $x\in X$, $C(x)$是可数紧的. 当 $C(x)$是紧的时,$\{\mathscr{F}_i\}$称为空间 X 的强 Σ 网络. 具有 Σ 网络的空间 X 是 Σ 空间. 具有强 Σ 网络的空间是强 Σ 空间. Σ 空间是森田纪一空间. M 空间是 Σ 空间. Σ 空间和紧空间的积是 Σ 空间. 若 $f:X\to Y$ 为满的拟完全映射,则 X 是 Σ 空间的充分必要条件是 Y 是 Σ 空间.

强Σ 网络(strong Σ-network) 见"Σ 网络".

森田纪一空间(Morita space) 一类特殊的拓扑空间. 考虑集合 Ω 与拓扑空间 X. X 的子集族 $\{G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i)\mid\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i\in\Omega,i\in\mathbf{N}\}$ (关于 Ω) 是单调增加的,若对于任意 i 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i+1}\in\Omega$,

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i)\subset G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i,\alpha_{i+1})$$

成立. 集族

$$\{F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i)\mid\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i\in\Omega,i\in\mathbf{N}\}$$

是集族

$$\{G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i)\mid\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i\in\Omega,i\in\mathbf{N}\}$$

的同调加细,如果前者是后者的一一加细,并且满足下述条件:若

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i)=X,$$

则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i)=X.$$

若对于任意 Ω 和 X 的单调增加开集族

$$\{G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i)\mid\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i\in\Omega,i\in\mathbf{N}\},$$

存在同调加细闭集族

$$\{F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i)\mid\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i\in\Omega,i\in\mathbf{N}\},$$

则称 X 为 P 空间或森田纪一空间. 完全正规空间是森田纪一空间. 正规森田纪一空间是可数仿紧的. 森田纪一空间的闭连续像是森田纪一空间. 森田纪一空间的拟完全映射的原像也是森田纪一空间. 可数紧空间是森田纪一空间. M 空间是森田纪一空间. 森田纪一空间与紧空间的积是森田纪一空间.

***P* 空间**(P-space) 即"森田纪一空间".

权(weight) 拓扑空间的一个基数函数. 设 X 为拓扑空间, X 的拓扑基的最小基数称为 X 的权,记为 $w(X)$. X 为第二可数空间,当且仅当 $w(X)\leqslant\aleph_0$. 若 X 为紧空间,则 $w(X)=|X|$,其中$|X|$为 X 的基数. 若 Y 为吉洪诺夫空间 X 的紧化,则

$$w(Y)=w(X)\leqslant\exp d(X),$$

其中 $d(X)$为 X 的稠密度.

伪基(pseudo base) 亦称 ψ 基. 拓扑空间的一类开集族. 设 $\mathscr{B}$ 是拓扑空间 X 的开集族. 若对于任意 $x\in X$ 有

$$\{x\}=\bigcap\{B\in\mathscr{B}\mid x\in B\},$$

则称 $\mathscr{B}$ 为 X 的伪基. X 有伪基,当且仅当 X 是 T_1 空间. X 的伪基的最小基数称为 X 的伪权或 ψ 权,记为 $\psi w(X)$.

ψ 基(ψ-base) 即"伪基".

伪权(pseudo weight) 见"伪基".

ψ 权(ψ-weight) 即"伪权".

网络(network) 拓扑空间中的一类集族. 设 X 为拓扑空间, $\mathscr{B}$ 为 X 的子集族. 若对于任意 $x\in X$ 及 x 的任意邻域 U,存在 $\mathscr{B}$ 的元素 B 使得 $x\in B\subset U$,则称 $\mathscr{B}$ 为 X 的网络. X 的网络的最小基数称为 X 的网络权,记为 $nw(X)$. X 的任意基是网络. 另外,$\{\{x\}\mid x\in X\}$也是 X 的网络,所以 $nw(X)$不超过 X 的权 $w(X)$及 X 的基数$|X|$. 对于紧 T_2 空间

X，有 $nw(X)=w(X)$. 网络的概念是阿尔汉盖路斯基(Архангельский,А.)于 1959 年提出的.

网络权(network weight) 见"网络".

稠密度(density) 拓扑空间的一个基数函数. 拓扑空间 X 的稠密度是 X 的稠密子集的最小基数，记为 $d(X)$. 可分空间的稠密度不超过 $\aleph_0$. 对于任意拓扑空间 X，X 的稠密度不超过 X 的权，即 $d(X)\leqslant w(X)$. 对于任意豪斯多夫空间 X，有

$$|X|\leqslant \exp\exp d(X) \quad 与 \quad |X|\leqslant[d(X)]^{d(X)},$$

其中 $|X|$ 表示 X 的基数. 对于任意 T_3 空间 X，有

$$w(X)\leqslant \exp d(X).$$

遗传稠密度(hereditary density) 拓扑空间的一个基数函数. 设 X 为拓扑空间. X 的所有子空间的稠密度的上确界称为 X 的遗传稠密度，记为 $hd(X)$. 斯库拉(Skula,L.)于 1965 年证明：对于任意线性序空间 X，遗传稠密度与稠密度是相等的，即

$$hd(X)=d(X).$$

胞腔度(cellularity) 亦称苏斯林数. 拓扑空间 X 的一个基数函数. 拓扑空间 X 中两两不相交的非空开集族的基数的上确界称为 X 的胞腔度，记为 $C(X)$. 若 $C(X)\leqslant\aleph_0$，即 X 中两两不相交的非空开集族是至多可数的，则称拓扑空间 X 为苏斯林空间或具有苏斯林性质. 可分空间具有苏斯林性质.

苏斯林数(Suslin number) 即"胞腔度".

苏斯林性质(Suslin property) 见"胞腔度".

苏斯林空间(Suslin space) 见"胞腔度".

林德勒夫数(Lindelöf number) 拓扑空间的一个基数函数. 满足以下条件的最小基数 m 称为拓扑空间 X 的林德勒夫数：X 的每一开覆盖具有基数不超过 m 的开加细. 拓扑空间 X 的林德勒夫数记为 $l(X)$. X 是林德勒夫空间，当且仅当 $l(X)\leqslant\aleph_0$. 对于任意拓扑空间 X，$l(X)$ 不超过 X 的网络权

$$nw(X).$$

遗传林德勒夫数(hereditary Lindelöf number) 拓扑空间的一个基数函数. 设 X 为拓扑空间. X 的所有子空间的林德勒夫数的上确界称为 X 的遗传林德勒夫数，记为 $hl(X)$，即

$$hl(X)=\sup\{l(Y)\mid Y\subset X\},$$

其中 $l(Y)$ 为子空间 Y 的林德勒夫数. 对于每一豪斯多夫空间 X，$|X|\leqslant\exp hl(X)$ 成立，其中 $|X|$ 表示 X 的基数. 这一结果是斯米尔诺夫(Смирнов,Ю.М.)于 1950 年证明的.

特征(character) 拓扑空间的一个基数函数. 设 X 为拓扑空间，A 是 X 的非空子集. A 在 X 中的邻域基的最小基数称为 A 在 X 中的特征，记为 $\chi(A,X)$. 当 A 为单点集 $\{p\}$ 时，称 $\chi(\{p\},X)$ 为点 p 的特征，简记为 $\chi(p,X)$. 若

$$\chi(X)=\sup\{\chi(p,X)\mid p\in X\},$$

则 $\chi(X)$ 称为空间 X 的特征. X 为第一可数空间，当且仅当 $\chi(X)\leqslant\aleph_0$.

伪特征(pseudo charactor) 拓扑空间的一个基数函数. 设 X 为 T_1 空间，$x\in X$. 满足条件

$$\bigcap\{U\mid U\in\mathscr{U}\}=\{x\}$$

的开集族 $\mathscr{U}$ 的最小基数称为空间 X 在点 x 的伪特征，记为 $\psi(x,X)$. X 在所有点的伪特征 $\psi(x,X)$ 的上确界称为空间 X 的伪特征，记为 $\psi(X)$. 对于任意 T_1 空间 X 有 $\psi(X)\leqslant\chi(X)$，其中 $\chi(X)$ 为 X 的特征. 对于任意紧 T_2 空间 X 有 $\psi(X)=\chi(X)$. 对于任意豪斯多夫空间 X 有 $\psi(X)\leqslant\exp d(X)$，其中 $d(X)$ 为 X 的稠密度. 对于任意 T_3 空间 X 有

$$|X|\leqslant\exp[d(X)\psi(X)],$$

其中 $|X|$ 表示 X 的基数.

紧密度(tightness) 拓扑空间的一个基数函数. 设 X 为拓扑空间，$x\in X$. 空间 X 在点 x 的紧密度是满足以下条件的最小基数 m：若 $x\in\overline{S}$，则存在 $S_0\subset S$，使得 $|S_0|\leqslant m$ 且 $x\in\overline{S_0}$. 空间 X 在点 x 的紧密度记为 $\tau(x,X)$. 又定义

$$\tau(X)=\sup\{\tau(x,X)\mid x\in X\},$$

$\tau(X)$ 称为 X 的紧密度. 对于任意拓扑空间 X 与任意 $x\in X$，有

$$\tau(x,X)\leqslant\chi(x,X) \quad 与 \quad \tau(X)\leqslant\chi(X),$$

其中 $\chi(x,X)$ 为点 x 在 X 中的特征，$\chi(X)$ 为 X 的特征. 对于任意线性序空间 X 有 $\tau(X)=\chi(X)$. 紧密度概念是由阿尔汉盖路斯基(Архангельский,А.)和波罗马勒夫(Пономарев,А.В.)于 1968 年提出的.

展形(spread) 拓扑空间的一个基数函数. 设 X 为拓扑空间. 定义 $s(X)=\sup\{|D|\mid D$ 为 X 的离散子空间$\}$，则称 $s(X)$ 为 X 的展形.

阶数(order) 集族的一种基数. 若 $\mathscr{M}$ 为集合 X 的子集族，$p\in X$，则

$$\operatorname{ord}(p,\mathscr{M})=|\{M\in\mathscr{M}\mid p\in M\}|$$

称为集族 $\mathscr{M}$ 在点 p 的阶数，

$$\operatorname{ord}\mathscr{M}=\sup\{\operatorname{ord}(p,\mathscr{M})\mid p\in X\}$$

称为集族 $\mathscr{M}$ 的阶数.

维数论(dimension theory) 欧几里得空间的维数概念的推广. 对于某些拓扑空间指定一个非负整数，称为该空间的维数. 此外，对空集 $\varnothing$ 指定为 -1，而对"无限维"空间指定为 ∞. 拓扑空间的维数有三种不同方式定义，即覆盖维数(dim)、小归纳维数(ind)和大归纳维数(Ind). 它们都具有维数的特征，但适用的范围不同，分别是吉洪诺夫空间、正则空间和正规空间. 维数最初是对紧可度量化空间引入的，其后扩张到可分可度量化空间. 对于可分可度量化空间维数论的基本定理，在所有度量空间或紧空间中并不成立. 因此，对于一般拓扑空间有三个维数论. 庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)于 1912 年略述了维

数的归纳性定义. 维数函数的第一个精确定义是由布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)于1913年叙述的. 布劳威尔的维数函数与维数 Ind 在局部连通紧可度量化空间中是一致的. 但是布劳威尔的维数函数仅是用来证明"若 $m\neq n$,则空间 $\mathbf{R}^m$ 与 $\mathbf{R}^n$ 不同胚"的一个辅助工具. 维数理论是由门杰(Menger,K.)和乌雷松(Урысон,П. С.)首创的. ind 的定义是乌雷松于1922年和门杰于1923年给出的. Ind 的定义是切赫(Čech,E.)于1931年给出的. 覆盖维数 dim 定义于切赫于1933年的论文中. 由切赫给出的 dim 定义仅适用于正规空间. 卡切托夫(Катетов,М.)于1950年修改了这个定义. 斯米尔诺夫(Смирнов,Ю. М.)于1956年研究了另一类覆盖导出同样的维数函数. 吉洪诺夫空间的维数论最早系统的讲解是在吉尔曼(Gillman,L.)和杰里逊(Jerison,M.)于1960年的著作中.

维数(dimension) 见"维数论".

覆盖维数(covering dimension) 拓扑空间的一种维数. 首先定义一个集族阶的概念. 设 $\mathscr{A}$ 是集合 X 的子集族. 若 $\mathscr{A}$ 中存在具有非空交的 $n+1$ 个集合,则上述 n 的最大值称为 $\mathscr{A}$ 的阶;若上述 n 的最大值不存在,则称 $\mathscr{A}$ 的阶为 ∞. 设 X 为吉洪诺夫空间,n 表示大于或等于 -1 的整数. 则:

1. 当 X 的任意有限的函数开覆盖都具有阶数不超过 n 的有限的函数开加细时,规定 $\dim X\leqslant n$.

2. 当 $\dim X\leqslant n$,并且 $\dim X\leqslant n-1$ 不成立时,规定 $\dim X=n$.

3. 当对于任意自然数 n,$\dim X\leqslant n$ 皆不成立时,规定 $\dim X=\infty$.

于是对于任意吉洪诺夫空间 X 确定的 $\dim X$,称为 X 的切赫-勒贝格维数或覆盖维数. 若空间 X 与 Y 同胚,则 $\dim X=\dim Y$.

集族的阶(order of a family of sets) 见"覆盖维数".

切赫-勒贝格维数(Čech-Lebesgue dimension) 见"覆盖维数".

大归纳维数(large inductive dimension) 拓扑空间的一种维数. 设 X 为正规空间,n 表示非负整数. 大归纳维数可如下确定:

1. 当且仅当 $X=\varnothing$ 时,规定 $\operatorname{Ind} X=-1$.

2. 若对于 X 的任意闭集 A 和包含 A 的 X 的任意开集 V,存在 X 的开集 U,使得 $A\subset U\subset V$,并且 $\operatorname{Ind}(\overline{U}-\operatorname{int} U)\leqslant n-1$,则规定 $\operatorname{Ind} X\leqslant n$.

3. 若 $\operatorname{Ind} X\leqslant n$,并且 $\operatorname{Ind} X\leqslant n-1$ 不成立,则规定 $\operatorname{Ind} X=n$.

4. 若对于任意自然数 n,不等式 $\operatorname{Ind} X\leqslant n$ 皆不成立,则规定 $\operatorname{Ind} X=\infty$.

于是对于任意正规空间 X 确定的 $\operatorname{Ind} X$,称为 X 的布劳威尔-切赫维数或大归纳维数. 若空间 X 与 Y 同胚,则 $\operatorname{Ind} X=\operatorname{Ind} Y$.

布劳威尔-切赫维数(Brouwer-Čech dimension) 见"大归纳维数".

小归纳维数(small inductive dimension) 拓扑空间的一种维数. 设 X 为正则空间,n 表示非负整数. 小归纳维数可如下确定:

1. 当且仅当 $X=\varnothing$ 时,规定 $\operatorname{ind} X=-1$.

2. 若对于 X 的任意点 x 及 x 的任意邻域 V,存在 x 的开邻域 U,使得 $U\subset V$,并且 $\operatorname{ind}(\overline{U}-\operatorname{int} U)\leqslant n-1$,则规定 $\operatorname{ind} X\leqslant n$.

3. 若 $\operatorname{ind} X\leqslant n$,并且 $\operatorname{ind} X\leqslant n-1$ 不成立,则规定 $\operatorname{ind} X=n$.

4. 若对于任意自然数 n,不等式 $\operatorname{ind} X\leqslant n$ 皆不成立,则规定 $\operatorname{ind} X=\infty$.

于是对于任意正则空间 X 确定的 $\operatorname{ind} X$,称为 X 的门杰-乌雷松维数或小归纳维数. 若空间 X 与 Y 同胚,则 $\operatorname{ind} X=\operatorname{ind} Y$.

门杰-乌雷松维数(Menger-Urysohn dimension) 见"小归纳维数".

维数基本定理(fundamental theorem of dimensions) 关于欧几里得空间维数关系的定理. 该定理断言:对于任意自然数 n 有

$$\operatorname{ind}\mathbf{R}^n=\operatorname{Ind}\mathbf{R}^n=\dim\mathbf{R}^n=n.$$

$\dim\mathbf{R}^n=n$ 是勒贝格(Lebesgue,H. L.)于1911年,布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)于1913年分别证明的. $\operatorname{Ind}\mathbf{R}^n=n$ 是布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)于1913年证明的. $\operatorname{ind}\mathbf{R}^n=n$ 是门杰(Menger,K.)于1924年,乌雷松(Урысон,П. С.)于1925年分别证明的.

集族膨胀(swelling of family of subsets) 讨论覆盖维数的一个工具. 设 $\{A_\alpha|\alpha\in D\}$,$\{B_\alpha|\alpha\in D\}$ 是拓扑空间 X 的两个子集族. 若对于任意 $\alpha\in D$ 有 $A_\alpha\subset B_\alpha$,并且对于任意有限个指标 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in D$,

$$A_{\alpha_1}\cap A_{\alpha_2}\cap\cdots\cap A_{\alpha_m}=\varnothing$$

当且仅当

$$B_{\alpha_1}\cap B_{\alpha_2}\cap\cdots\cap B_{\alpha_m}=\varnothing,$$

则称集族 $\{B_\alpha|\alpha\in D\}$ 为集族 $\{A_\alpha|\alpha\in D\}$ 的膨胀.

覆盖收缩(shrinking of cover) 讨论覆盖维数的一个工具. 设 $\{A_\alpha|\alpha\in D\}$,$\{B_\alpha|\alpha\in D\}$ 是拓扑空间 X 的两个覆盖. 若对于任意 $\alpha\in D$,有 $B_\alpha\subset A_\alpha$,则称覆盖 $\{B_\alpha|\alpha\in D\}$ 是覆盖 $\{A_\alpha|\alpha\in D\}$ 的收缩. 若 B_α 皆为 X 的开(闭)集,则称覆盖 $\{B_\alpha|\alpha\in D\}$ 是覆盖 $\{A_\alpha|\alpha\in D\}$ 的开(闭)收缩. 覆盖 $\mathscr{A}$ 的任何收缩的阶不大于 $\mathscr{A}$ 的阶.

覆盖的开收缩(open shrinking of cover) 见"覆盖的收缩".

覆盖的闭收缩(closed shrinking of cover) 见“覆盖的收缩”.

子空间维数定理(dimension theorem of subspace) 关于部分和整体维数之间关系的定理.若X是拓扑空间,$M\subset X$,则有下述结论:

1.若X为正则空间,则$\operatorname{ind}M\leqslant\operatorname{ind}X$.这是乌雷松(Урысон, П. С.)于1922年和门杰(Menger, K.)于1923年分别证明的.

2.若X为正规空间,M为X的闭子空间,则$\operatorname{Ind}M\leqslant\operatorname{Ind}X$.这是切赫(Čech, E.)于1932年证明的.

3.若X为正规空间,M为X的闭子空间,则$\dim M\leqslant\dim X$.这是切赫于1933年证明的.

4.若X为吉洪诺夫空间,并且任意连续函数$f:M\to[0,1]$都可连续扩张到X上,则$\dim M\leqslant\dim X$.这是卡切托夫(Катетов, М.)于1950年证明的.

维数重合定理(coincidence theorem of dimension) 关于维数的定理.该定理断言:对于任意可分可度量化空间X,有$\operatorname{ind}X=\operatorname{Ind}X=\dim X$.该定理是赫维茨(Hurewicz, W.)于1927年提出的.

卡切托夫-森田纪一定理(Katětov-Morita theorem) 关于维数的重要定理.该定理断言:对于任意可度量化空间X,有$\operatorname{Ind}X=\dim X$.该定理是由卡切托夫(Катетов, М.)于1952年和森田纪一(Morita, K.)于1954年分别独立证明的.关于紧可度量化空间X,布劳威尔(Brouwer, L. E. J.)于1924年证明$\operatorname{ind}X=\operatorname{Ind}X$.关于可分可度量化空间$X$,$\operatorname{ind}X=\operatorname{Ind}X$是由图马基(Tumarkin, L. A.)于1926年和赫维茨(Hurewicz, W.)于1927年证明的.关于紧可度量化空间X,$\operatorname{ind}X=\dim X$是由乌雷松(Урысон, П. С.)于1926年建立的.

维数加法定理(addition theorem of dimension) 关于维数的一组定理:

1.若X,Y为可度量化空间的可分子空间,则

$$\operatorname{ind}(X\cup Y)\leqslant\operatorname{ind}X+\operatorname{ind}Y+1.$$

这是图马基(Tumarkin, L. A.)于1926年,赫维茨(Hurewicz, W.)于1927年提出的.

2.若X,Y为完全正规空间的子空间,则

$$\operatorname{Ind}(X\cup Y)\leqslant\operatorname{Ind}X+\operatorname{Ind}Y+1.$$

3.若X,Y为完全正规空间的子空间,则

$$\dim(X\cup Y)\leqslant\dim X+\dim Y+1.$$

定理2与3是斯米尔诺夫(Смирнов, Ю. М.)于1951年提出的.

维数的可数和定理(countable sum theorem of dimension) 关于维数的一组定理:

1.设X为正规空间,闭集列$\{F_i\}$是X的覆盖.若满足$\dim F_i\leqslant n\ (i=1,2,\cdots)$,则$\dim X\leqslant n$.这是切赫(Čech, E.)于1933年提出的.

2.设X为可度量化空间,闭集列$\{F_i\}$是X的覆盖.若满足$\operatorname{Ind}F_i\leqslant n\ (i=1,2,\cdots)$,则$\operatorname{Ind}X\leqslant n$.这是切赫于1932年提出的.

3.设X为可分可度量化空间,闭集列$\{F_i\}$是X的覆盖.若满足$\operatorname{ind}F_i\leqslant n\ (i=1,2,\cdots)$,则$\operatorname{ind}X\leqslant n$.这是门杰(Menger, K.)于1924年和乌雷松(Урысон, П. С.)于1922年就紧度量空间证明的.图马基(Tumarkin, L. A.)于1926年和赫维茨(Hurewicz, W.)于1927年推广到可分可度量化空间.

维数的局部有限和定理(locally finite sum theorem of dimension) 关于维数的一组定理:

1.设X为正规空间,$\{F_\alpha|\alpha\in D\}$为X的局部有限闭覆盖.若对于任意$\alpha\in D$有$\dim F_\alpha\leqslant n$,则$\dim X\leqslant n$.这是森田纪一(Morita, K.)于1950年,卡切托夫(Катетов, М.)于1952年证明的.

2.设X为可度量化空间,$\{F_\alpha|\alpha\in D\}$为X的局部有限闭覆盖.若对于任意$\alpha\in D$有$\operatorname{Ind}F_\alpha\leqslant n$,则$\operatorname{Ind}X\leqslant n$.这是木村(Kimura, N.)于1967年证明的.

维数直积定理(Cartesian product theorem of dimension) 关于维数的一组定理:

1.若X,Y为可分可度量化空间,则

$$\operatorname{ind}(X\times Y)\leqslant\operatorname{ind}X+\operatorname{ind}Y.$$

这是门杰(Menger, K.)于1928年证明的.

2.若X,Y为可度量化空间,则

$$\operatorname{Ind}(X\times Y)\leqslant\operatorname{Ind}X+\operatorname{Ind}Y.$$

这是卡切托夫(Катетов, М.)于1952年和森田纪一(Morita, K.)于1954年分别证明的.

维数第一分解定理(first decomposition theorem of dimension) 关于维数的一组定理:

1.若X为可度量化空间,则$0\leqslant\operatorname{Ind}X\leqslant n$的充分必要条件是$X$可表示为子空间$Y$和$Z$的并,使得$\operatorname{Ind}Y\leqslant n-1$并且$\operatorname{Ind}Z\leqslant 0$.

2.若X为可分可度量化空间,则$0\leqslant\operatorname{ind}X\leqslant n$的充分必要条件是$X$可表示为子空间$Y$和$Z$的并,使得$\operatorname{ind}Y\leqslant n-1$并且$\operatorname{ind}Z\leqslant 0$.

维数第二分解定理(second decomposition theorem of dimension) 关于维数的一组定理:

1.若X为可度量化空间,则$0\leqslant\operatorname{Ind}X\leqslant n$的充分必要条件是$X$可表示为$n+1$个子空间$Z_1,Z_2,\cdots,Z_{n+1}$的并,使得对于$i=1,2,\cdots,n+1$,$\operatorname{Ind}Z_i\leqslant 0$.

2.若X为可分可度量化空间,则$0\leqslant\operatorname{ind}X\leqslant n$的充分必要条件是$X$可表示为$n+1$个子空间$Z_1,Z_2,\cdots,Z_{n+1}$的并,使得对于$i=1,2,\cdots,n+1$,

$$\operatorname{ind}Z_i\leqslant 0.$$

维数扩大定理(enlargement theorem of dimen-

sion） 关于维数的一组定理：

1. 若 X 为可度量化空间，M 为 X 的任意可分子空间. 若 $\operatorname{ind} M \leqslant n$，则存在 X 的 G_δ 集 M^*，使得 $M \subset M^*$ 并且 $\operatorname{ind} M^* \leqslant n$. 这是图马基（Tumarkin, L. A.）于 1926 年证明的.

2. 若 X 为可度量化空间，M 为 X 的任意子空间. 若 $\operatorname{Ind} M \leqslant n$，则存在 X 的 G_δ 集 M^*，使得 $M \subset M^*$ 并且 $\operatorname{Ind} M^* \leqslant n$. 这是永见（Nagami, K.）于 1959 年证明的.

紧化维数（dimension of compactification） 关于维数的一组定理：若 βX 为 X 的斯通-切赫紧化，则有下述结果：

1. 当 X 为 T_4 空间时，$\operatorname{Ind} \beta X = \operatorname{Ind} X$.

2. 当 X 为吉洪诺夫空间时，$\dim \beta X = \dim X$.

3. 当 X 为吉洪诺夫空间时，$\operatorname{ind} \beta X \geqslant \operatorname{ind} X$，其中等式未必成立.

超空间（hyperspace） 在集族上引入的一类拓扑空间. 设 $(X, \mathscr{T})$ 为拓扑空间，$\mathscr{H}$ 为 X 的非空子集族. 若在 $\mathscr{H}$ 上引入拓扑，使之构成拓扑空间，则称 $\mathscr{H}$ 为以 X 为基本空间的超空间. 在超空间的各种拓扑中，有限拓扑是最为重要的. 在豪斯多夫（Hausdorff, F.）建立了拓扑空间理论后不久，20 世纪 20 年代，菲托里斯（Vietoris, I.）开始研究超空间. 1930 年，超空间的基本理论已经建成. 20 世纪 50 年代以后，超空间理论已广泛地应用到微分方程、泛函分析、凸性理论、巴拿赫空间几何学、不动点理论、选择理论中，成为一般拓扑学的一个重要分支.

超空间上拓扑（upper topology of hyperspace） 超空间上的一类拓扑. 设 $(X, \mathscr{T})$ 为拓扑空间，$\mathscr{H}$ 为 X 的非空子集族. 若

$$\langle U \rangle = \{E \in \mathscr{H} \mid E \subset U\},$$
$$\rangle U \langle = \{E \in \mathscr{H} \mid E \cap U \neq \varnothing\},$$

则以 $\{\langle U \rangle \mid U \in \mathscr{T}\}$ 为基在 $\mathscr{H}$ 中确定的拓扑称为超空间的上拓扑，记为 $\mathscr{T}_k$；以 $\{\rangle U \langle \mid U \in \mathscr{T}\}$ 为子基在 $\mathscr{H}$ 中确定的拓扑称为超空间的下拓扑，记为 $\mathscr{T}_\lambda$.

超空间下拓扑（lower topology of hyperspace） 见"超空间的上拓扑".

超空间的有限拓扑（finite topology of hyperspace） 亦称指数拓扑. 超空间上的一类拓扑. 设 $(X, \mathscr{T})$ 为拓扑空间，$\mathscr{H}$ 为 X 的非空子集族. 若

$$\langle A_1, A_2, \cdots, A_n \rangle = \{E \in \mathscr{H} \mid E \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i, E \cap A_i \neq \varnothing, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

则在 $\mathscr{H}$ 中以

$$\{\langle U_1, U_2, \cdots, U_n \rangle \mid U_i \in \mathscr{T}, i \leqslant n, n \in \mathsf{N}\}$$

为基的拓扑称为超空间的有限拓扑，记为 $2^{\mathscr{T}}$.

指数拓扑（exponential topology） 即"超空间的有限拓扑".

豪斯多夫度量（Hausdorff metric） 在集族上引入的一种度量. 若 (X, d) 为度量空间，在 X 的所有非空有界的闭子集的族上定义

$$H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\},$$

则 H 是 X 的所有非空有界闭子集族上的一个度量，称这个度量为豪斯多夫度量.

维他内映射（Whitney mapping） 超空间上的一类映射. 设 X 为连续统（即紧连通度量空间）. X 的子连续统的超空间具有豪斯多夫度量，记为 $C(X)$. 若连续映射 $\mu: C(X) \to [0,1]$ 具有下列性质：

1. 对于任意 $x \in X$，$\mu(\{x\}) = 0$；

2. $\mu(X) = 1$；

3. 若 $A \subset B$，$A \neq B$，则 $\mu(A) < \mu(B)$；

则称 μ 为维他内映射. 对于任意 $t \in [0,1]$，$\mu^{-1}(t)$ 称为维他内连续统. 若当 X 具有性质 P 时，维他内连续统在 $C(X)$ 中也具有性质 P，则称性质 P 为维他内性质.

维他内连续统（Whitney continuum） 见"维他内映射".

维他内性质（Whitney property） 见"维他内映射".

逆极限（inverse limit） 由一族拓扑空间确定的一类拓扑空间. 设 $(A, \leqslant)$ 为定向集，$\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ 为一族拓扑空间. 若对于任意 $\alpha, \beta \in A$，$\alpha < \beta$，存在连续映射 $\pi_\alpha^\beta: X_\beta \to X_\alpha$ 使得对于任意满足 $\alpha < \beta < \gamma$ 的 $\alpha, \beta, \gamma \in A$，$\pi_\alpha^\gamma = \pi_\alpha^\beta \pi_\beta^\gamma$ 成立，则 $S = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, A\}$ 称为空间族 $\{X_\alpha\}$ 的逆系. 对于逆系 $S = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, A\}$，考虑积空间

$$\tilde{X} = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha.$$

对于任意 $\alpha \in A$，若 $\tilde{\pi}_\alpha: \tilde{X} \to X_\alpha$ 为射影，则 $\tilde{X}$ 的子空间

$$X = \{x \in \tilde{X} \mid \text{对于任意 } \alpha < \beta, \alpha, \beta \in A, \pi_\alpha^\beta \pi_\beta(x) = \tilde{\pi}_\alpha(x)\}$$

称为逆系 $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, A\}$ 的逆极限，记为 $\varprojlim \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, A\}$，简记为 $\varprojlim S$ 或 $\varprojlim X_\alpha$. 对于逆系 $S = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, A\}$，若空间 X 和 $\varprojlim S$ 同胚，则称 X 可展开为逆系 $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, A\}$.

逆系（inverse system） 见"逆极限".

逆极限中的基本开集（basic open set of an inverse limit） 一类开集. 设 $(A, \leqslant)$ 为定向集，$\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ 是一族拓扑空间，X 为逆系 $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, A\}$ 的逆极限. 对于任意 $\alpha \in A$，记 $\pi_\alpha = \tilde{\pi}_\alpha \mid X: X \to X_\alpha$，其中 $\tilde{\pi}_\alpha$ 为积空间 $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ 到 X_α 的射影. 若 $\alpha < \beta$，则 $\pi_\alpha = \pi_\alpha^\beta \pi_\beta$. 当 U_α 为 X_α 的开集时，形如 $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 的集合称为逆极限 X 中的基本开集. 当 $\mathscr{U}_\alpha$ 为 X_α 的开覆盖时，形如

$\pi_\alpha^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$的覆盖称为 X 的基本开覆盖. 逆极限 X 的基本开集族构成 X 的基. 若所有 X_α 是 T_2 的,则 X 是 $\coprod_{\alpha\in A} X_\alpha$ 的闭集. 若所有 X_α 是紧 T_2 的且非空,则 X 是紧 T_2 的且非空,并且 X 的任意开覆盖被某基本开覆盖加细.

逆极限中的基本开覆盖(basic open cover of an inverse limit) 见"逆极限中的基本开集".

有向构造(directed contructure) 拓扑空间中一类特殊的构造. 设给定拓扑空间 X 的开覆盖列 $\{\mathscr{U}_i=\{U(\alpha_i)\mid\alpha_i\in A_i\}\}$ 和逆系 $\{A_i,\varphi_i^{i+1},\mathbb{N}\}$,其中 A_i 为离散空间,$\mathbb{N}$ 为自然数集. 若满足条件

$$U(\alpha_i)=\bigcup\{U(\alpha_{i+1})\mid\varphi_i^{i+1}(\alpha_{i+1})=\alpha_i\},$$

其中 $\alpha_i\in A_i$,$i\in\mathbb{N}$,则称 $\{\mathscr{U}_i,\varphi_i^{i+1}\}$ 为 X 的有向构造.

单调 p 空间(monotone p-space) 一类特殊的拓扑空间. 设 $\{\mathscr{U}_i,\varphi_i^{i+1}\}$ 为正则空间 X 的有向构造,其中 $\mathscr{U}_i=\{U(\alpha_i)\mid\alpha_i\in A_i\}(i=1,2,3,\cdots)$. 若由 $(\alpha_i)\in\varprojlim A_i$ 可推出 $\{U(\alpha_i)\mid i\in\mathbb{N}\}$ 是收敛的或

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}}U(\alpha_i)=\varnothing,$$

则称 X 为单调 p 空间. 单调 p 空间的完全像是单调 p 空间. 单调 p 空间的正则的完全逆像是单调 p 空间. 若单调 p 空间 X 是点有限仿紧的,则 X 是 p 空间.

集值映射(set-valued mapping) 亦称多值映射. 拓扑学的一个基本概念. 从集合 X 到集合 Y 的集值映射是一个对应关系 F,使得 X 的每个元素 x 对应着 Y 的一个非空子集 $F(x)$. $F(x)$称为 x 在 F 下的像,记为 $F:X\to Y$. 特别地,当每点的像都恰由一点组成时,F 是单值映射,即通常的映射. 当

$$\bigcup_{x\in X}F(x)=Y$$

时,称 F 为 X 到 Y 上的集值映射.

自冯·诺伊曼(von Neumann, J.)将集值映射不动点理论应用于博弈论之后,集值映射理论在邻近学科中的应用日益广泛. 近 50 年来一直是十分活跃的邻域. 1969 年 5 月在纽约州的布法罗市召开了集值映射的国际会议,更引起了邻近学科工作者的广泛重视.

多值映射(multivalued mapping) 即"集值映射".

集值映射的大像(great image of a set-valued mapping) 与集值映射相关的一个概念. 设 $F:X\to Y$ 为集值映射,$A\subset X$. 若

$$F_-(A)=\{y\in Y\mid\text{存在 }x\in A\text{ 使得 }y\in F(x)\},$$

$$F_+(A)=\{y\in Y\mid F^{-1}(y)\subset A\},$$

则 $F_-(A)$与 $F_+(A)$分别称为在映射 F 下 A 的大像与小像.

集值映射的小像(small image of a set-valued mapping) 见"集值映射的大像".

集值映射的大原像(great inverse image of a set valued mapping) 与集值映射相关的一个概念. 设 $F:X\to Y$ 为集值映射,$B\subset Y$. 若

$$F^-(B)=\{x\in X\mid F(x)\cap B\neq\varnothing\},$$

$$F^+(B)=\{x\in X\mid F(x)\subset B\},$$

则 $F^-(B)$与 $F^+(B)$分别称为在映射 F 下 B 的大原像与小原像.

集值映射的小原像(small inverse image of a set-valued mapping) 见"集值映射的大原像".

集值映射的诱导映射(induced mapping of a set-valued mapping) 由集值映射确定的一种单值映射. 设 $F:X\to Y$ 为集值映射,由 F 诱导 X 到 Y 的超空间 $\mathscr{A}(Y)$的单值映射 $f_F:X\to\mathscr{A}(Y)$使得

$$F(x)=f_F(x)\in\mathscr{A}(Y),$$

则称 f_F 为集值映射 F 的诱导映射. 若 $M(X,Y)$为 X 到 Y 的集值映射集,$m(X,\mathscr{A}(Y))$为 X 到$\mathscr{A}(Y)$的单值映射集,则由 F 对应 f_F 构成 $M(X,Y)$到 $m(X,\mathscr{A}(Y))$上的单满映射. 因此,集值映射的某些问题可以通过诱导的单值映射予以解决.

集值映射的图像(graph of a set-valued mapping) 与集值映射相关的一个概念. 集值映射的定义域空间与值域空间的笛卡儿乘积上的一个子集. 设 $F:X\to Y$ 为集值映射. 若

$$G(F)=\{(x,y)\mid x\in X,y\in F(x)\},$$

则 $G(F)$称为集值映射 F 的图像. 若 $A\subset X$,则

$$G(F\mid A)=\{(x,y)\mid x\in A,y\in F(x)\}$$

称为集值映射 F 在 A 上的图像.

点闭映射(point closed mapping) 一类特殊的集值映射. 设 $F:X\to Y$ 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的集值映射. 若对于任意 $x\in X$,$F(x)$恒为 Y 的闭集,则称 F 为点闭映射. 若对于任意 $y\in Y$,

$$F^{-1}(y)=\{x\mid y\in F(x)\}$$

恒为 X 的闭集,则称 F 为点逆闭映射.

点逆闭映射(point inverse closed mapping) 见"点闭映射".

点紧映射(point compact mapping) 一类特殊的集值映射. 设 $F:X\to Y$ 为拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的集值映射. 若对于任意 $x\in X$,$F(x)$恒为 Y 的紧子集,则称 F 为点紧映射. 若对于任意 $y\in Y$,$F^{-1}(y)=\{x\mid y\in F(x)\}$恒为 X 的紧子集,则称 F 为点逆紧映射.

点逆紧映射(point inverse compact mapping) 见"点紧映射".

点连通映射(point connected mapping) 一类特殊的集值映射. 设 $F:X\to Y$ 为集合 X 到拓扑空间 Y 的集值映射. 若对于任意 $x\in X$,$F(x)$恒为 Y 的连通子集,则称 F 为点连通映射.

开集值映射(open set-valued mapping)　一类特殊的集值映射. 设 X,Y 为拓扑空间, $F:X\to Y$ 为集值映射. 若对于 X 的任意开集 U,

$$F_{-}(U)=\{y\in Y \mid 存在\ x\in U\ 使得\ y\in F(x)\}$$

恒为 Y 的开集,则称 F 为开集值映射. 当 F 为单值映射时,上述开集值映射概念与单值映射的开映射概念是一致的.

闭集值映射(closed set-valued mapping)　一类特殊的集值映射. 设 X,Y 为拓扑空间, $F:X\to Y$ 为集值映射. 若对于 X 的任意闭集 B,

$$F_{-}(B)=\{y\in Y \mid 存在\ x\in B\ 使得\ y\in F(x)\}$$

恒为 Y 的闭集,则称 F 为闭集值映射. 当 F 为单值映射时,上述闭集值映射概念与单值映射的闭映射概念是一致的.

连续集值映射(continuous set-valued mapping)　一类特殊的集值映射. 设 X,Y 为拓扑空间, $F:X\to Y$ 为集值映射, $x\in X$. 若对于 $F(x)$ 的任意邻域 V,存在 x 的邻域 U,使得当 $z\in U$ 时有 $F(z)\subset V$,则称 F 在点 x 是上半连续的. 若 F 在 X 的任意点都是上半连续的,则称 F 为 X 上的上半连续集值映射. 若对于 Y 的任意开集 V,当 $F(x)\cap V\neq\varnothing$ 时,存在 x 的邻域 U,使得当 $z\in U$ 时有 $F(z)\cap V\neq\varnothing$,则称 F 在点 x 是下半连续的. 若 F 在 X 的任意点都是下半连续的,则称 F 为 X 上的下半连续集值映射. 上半连续且下半连续的集值映射称为连续集值映射. 这个定义是库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)于 1932 年给出的.

上半连续集值映射(upper semicontinuous set-valued mapping)　见"连续集值映射".

下半连续集值映射(lower semicontinuous set-valued mapping)　见"连续集值映射".

集网的极限(limit of a net of sets)　一类特殊的网的极限. 设 $\{A_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$ 是拓扑空间 X 的集网, $x\in X$. 若对于 x 的任意邻域 U,存在 $\alpha_0\in D$,当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时, $A_\alpha\cap U\neq\varnothing$,则称 x 为集网

$$\{A_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$$

的极限. 集网 $\{A_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$ 的所有极限的集合称为集网 $\{A_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$ 的等终极限.

集网的等终极限(eventual limit of a net of sets)　见"集网的极限".

集网的聚点(cluster point of a net of sets)　一类特殊的网的聚点. 设 $\{A_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$ 是拓扑空间 X 的集网, $x\in X$. 若对于 x 的任意邻域 U 与任意 $\alpha\in D$,存在 $\beta\in D,\beta>\alpha$,使得 $A_\beta\cap U\neq\varnothing$,则称 x 为集网 $\{A_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$ 的聚点. 集网 $\{A_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$ 的所有聚点的集合称为集网 $\{A_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$ 的共尾极限.

集网的共尾极限(cofinal limit of a net of sets)　见"集网的聚点".

集网的极限集(limit set of a net of sets)　一类特殊的网的极限集. 若集网 $\{A_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$ 的共尾极限 A 等于等终极限,则称 A 为集网 $\{A_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$ 的极限集,亦称集网 $\{A_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$ 收敛于 A.

收敛集网(convergent net of sets)　见"集网的极限".

等终连续的集值映射(eventually continuous set-valued mapping)　一类特殊的集值映射. 设 X, Y 为拓扑空间, $F:X\to Y$ 为集值映射, $x\in X$. 若对于任意收敛于 x 的网 $\{x_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$, $F(x)$ 包含于集网 $\{F(x_\alpha),\alpha\in D,\leqslant\}$ 的等终极限内,则称 F 在点 x 是等终连续的.

共尾连续的集值映射(cofinally continuous set-valued mapping)　一类特殊的集值映射. 设 X,Y 为拓扑空间, $F:X\to Y$ 为集值映射, $x\in X$. 若对于任意收敛于 x 的网 $\{x_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$, $F(x)$ 包含于集网 $\{F(x_\alpha),\alpha\in D,\leqslant\}$ 的共尾极限内,则称 F 在点 x 是共尾连续的.

完全集值映射(completely set-valued mapping)　一类特殊的集值映射. 设 X,Y 为拓扑空间, $F:X\to Y$ 为集值映射. 若 F 是点紧闭映射且是上半连续的,则称 F 是 Y 完全集值映射. 若 F 是点逆紧闭映射且是上半连续的,则称 F 是 X 完全集值映射. 若 F 既是 X 完全又是 Y 完全的,则称 F 是完全集值映射.

Y 完全集值映射(Y-completely set-valued mapping)　见"完全集值映射".

X 完全集值映射(X-completely set-valued mapping)　见"完全集值映射".

拟连续集值映射(quasi continuous set-valued mapping)　一类特殊的集值映射. 设 F 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的集值映射, $x\in X$. 若对于 Y 中满足条件 $F(x)\subset U$ 的任意开集 U 与 x 的任意邻域 V,存在非空开集 $G\subset V$,使得 $F(G)\subset U$,则称 F 在点 x 是拟上半连续的. 若对于 Y 中满足 $U\cap F(x)\neq\varnothing$ 的任意开集 U 与 x 的任意邻域 V,存在非空开集 $G\subset V$,对于任意 $z\in G$,有 $F(z)\cap U\neq\varnothing$,则称 F 在点 x 是拟下半连续的. 若 F 在点 x 既是拟上半连续的又是拟下半连续的,则称 F 在点 x 是拟连续的.

上半拟连续集值映射(quasi upper semi-continuous set-valued mapping)　见"拟连续集值映射".

下半拟连续集值映射(quasi lower semi-continuous set-valued mapping)　见"拟连续集值映射".

概连续集值映射(almost continuous set-valued mapping)　亦称几乎连续集值映射. 一类特殊的集值映射. 设 F 为拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的集值映射, $x\in X$. 若对于 Y 中满足条件 $F(x)\subset U$ 的任意开集 U, $\overline{F^{+}(U)}$ 是 x 的邻域,则称 F 在点 x 是概上半

连续的.若对于 Y 中满足 $F(x)\cap U\neq\varnothing$ 的任意开集 U，$\overline{F^{-}(U)}$ 是 x 的邻域，则称 F 在点 x 是概下半连续的.若 F 在点 x 既是概上半连续的又是概下半连续的，则称 F 在点 x 是概连续的.

几乎连续集值映射(nearly continuous set-valued mapping) 即"概连续集值映射".

概上半连续集值映射(almost upper semi-continuous set-valued mapping) 见"概连续集值映射".

概下半连续集值映射(almost lower semi-continuous set-valued mapping) 见"概连续集值映射".

弱连续集值映射(weakly continuous set-valued mapping) 一类特殊的集值映射.设 F 为拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的集值映射，$x\in X$.若对于 Y 中包含 $F(x)$ 的任意开集 U，存在 x 的邻域 G 使得 $F(G)\subset\overline{U}$，则称 F 在点 x 是弱上半连续的.若对于 Y 中满足

$$F(x)\cap U\neq\varnothing$$

的任意开集 U，存在 x 的邻域 G，使得对于任意 $y'\in G$ 必有 $F(y')\cap\overline{U}\neq\varnothing$，则称 F 在点 x 是弱下半连续的.若 F 在点 x 既是弱上半连续的又是弱下半连续的，则称 F 在点 x 是弱连续的.

弱上半连续集值映射(weakly upper semi-continuons set-valued mapping) 见"弱连续集值映射".

弱下半连续集值映射(weakly lower semi-continuons set-valued mapping) 见"弱连续集值映射".

θ 连续集值映射(θ-continuous set-valued mapping) 一类特殊的集值映射.设 X,Y 为拓扑空间，$F:X\rightarrow Y$ 为集值映射，$x\in X$.若对于 Y 中包含 $F(x)$ 的任意开集 V，存在 x 的开邻域 U，使得 $F(\overline{U})\subset\overline{V}$，则称 F 在点 x 是 θ 上半连续的.若对于 Y 中满足

$$F(x)\cap V\neq\varnothing$$

的任意开集 V，存在 x 的开邻域 U，使得对于任意 $z\in\overline{U}$，有 $F(z)\cap\overline{V}\neq\varnothing$，则称 F 在点 x 是 θ 下半连续的.若 F 在点 x 既是 θ 上半连续的又是 θ 下半连续的，则称 F 在点 x 是 θ 连续的.

θ 上半连续集值映射(θ-upper semi-continuous set-valued mapping) 见"θ 连续集值映射".

θ 下半连续集值映射(θ-lower semi-continuous set-valued mapping) 见"θ 连续集值映射".

集值映射空间(set-valued mapping space) 将映射空间推广到集值映射的情形所得的拓扑空间.设 X,Y 为集合，$M(X,Y)$ 为 X 到 Y 的集值映射的全体，$\mathscr{F}\subset M(X,Y)$.若在 $\mathscr{F}$ 上引入拓扑使之成为拓扑空间，则称 $\mathscr{F}$ 为集值映射空间.在集值映射空间理论中常见的拓扑有点态收敛拓扑、紧开拓扑、一致收敛拓扑、紧收敛拓扑等.

集值点态收敛拓扑(set-valued pointwise convergence topology) 亦称集值点开拓扑.集值映射族上的一种拓扑.设 $M(X,Y)$ 表示集合 X 到拓扑空间 Y 的集值映射全体，$\mathscr{F}\subset M(X,Y)$.对于任意 $x\in X$ 与 Y 的任意开集 U，若

$$(x,U)=\{F\in\mathscr{F}\mid F(x)\subset U\},$$

$$)x,U(=\{F\in\mathscr{F}\mid F(x)\cap U\neq\varnothing\},$$

$$S_1=\{(x,U)\mid x\in X,U\text{ 为 }Y\text{ 的开集}\},$$

$$S_2=\{)x,U(\mid x\in X,U\text{ 为 }Y\text{ 的开集}\},$$

则以 S_1 为子基在 $\mathscr{F}$ 上生成的拓扑称为 $\mathscr{F}$ 上的集值上半点态收敛拓扑，记为 $\mathscr{P}_k$；以 S_2 为子基在 $\mathscr{F}$ 上生成的拓扑称为 $\mathscr{F}$ 上的集值下半点态收敛拓扑，记为 $\mathscr{P}_\lambda$；以 $S_1\cup S_2$ 为子基在 $\mathscr{F}$ 上生成的拓扑称为 $\mathscr{F}$ 上的集值点态收敛拓扑，记为 $\mathscr{P}$.映射空间(指单值映射的空间)的分离性和空间 Y 的分离性有密切关系.当 Y 为 T_1,T_2，正则、完全正则空间时，映射空间也分别具有同样性质.但集值映射空间关于集值点态收敛拓扑不再具有相应的性质.设 $\mathscr{F}\subset M(X,Y)$.若 $\mathscr{F}$ 为点紧映射族，则当 Y 为 T_2、正则、完全正则、离散、零维、完全不连通、局部紧 T_2、紧空间时，$\mathscr{F}$ 关于集值点态收敛拓扑的集值映射空间 $(\mathscr{F},\mathscr{P})$ 也具有相应的性质.若 $\mathscr{F}$ 为点闭映射族，则 $(\mathscr{F},\mathscr{P})$ 为 T_0 空间.当 Y 为 T_1、正则、正规空间时，$(\mathscr{F},\mathscr{P})$ 分别为 T_1,T_2，完全正则空间.

集值点开拓扑(set-valued point open topology) 即"集值点态收敛拓扑".

集值上半点态收敛拓扑(set-valued upper semi-pointwise convergence topology) 见"集值点态收敛拓扑".

集值下半点态收敛拓扑(set-valude lower semi-pointwise convergence topology) 见"集值点态收敛拓扑".

集值紧开拓扑(set-valued compact open topology) 集值映射族上的一种拓扑.设 $M(X,Y)$ 表示拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的集值映射全体，$\mathscr{F}\subset M(X,Y)$，$K$ 为 X 的紧集，U 为 Y 的开集.若

$$(K,U)=\{F\in\mathscr{F}\mid F(K)\subset U\},$$

$$)K,U(=\{F\in\mathscr{F}\mid F(K)\cap U\neq\varnothing\},$$

$$\mathscr{C}_1=\{(K,U)\mid K\text{ 为 }X\text{ 的紧集},U\text{ 为 }Y\text{ 的开集}\},$$

$$\mathscr{C}_2=\{)K,U(\mid K\text{ 为 }X\text{ 的紧集},U\text{ 为 }Y\text{ 的开集}\},$$

则以 $\mathscr{C}_1$ 为子基在 $\mathscr{F}$ 上生成的拓扑称为 $\mathscr{F}$ 上的集值上半紧开拓扑，记为 $\mathscr{C}_k$；以 $\mathscr{C}_2$ 为子基在 $\mathscr{F}$ 上生成的拓扑称为 $\mathscr{F}$ 上的集值下半紧开拓扑，记为 $\mathscr{C}_\lambda$；以 $\mathscr{C}_1\cup\mathscr{C}_2$ 为子基在 $\mathscr{F}$ 上生成的拓扑称为 $\mathscr{F}$ 上的集值紧开拓扑，记为 $\mathscr{C}$.$\mathscr{P}\subset\mathscr{C}$，其中 $\mathscr{P}$ 为集值

点开拓扑.在集值紧开拓扑的定义中,若"紧"字都改为"闭"字,则有集值闭开拓扑,记为$\mathscr{C}'$.若X为T_1空间,则$\mathscr{P}\leqslant\mathscr{C}'$.若$X$为$T_2$空间,则$\mathscr{C}\leqslant\mathscr{C}'$.若$X$为紧空间,则$\mathscr{C}'\leqslant\mathscr{C}$.

集值上半紧开拓扑(set-valued upper semicompact open topology) 见"集值紧开拓扑".

集值下半紧开拓扑(set-valued lower semicompact open topology) 见"集值紧开拓扑".

集值闭开拓扑(set-valued closed open topology) 见"集值紧开拓扑".

集值族状连续族(set-valued familywise continuous family) 一类特殊的集值映射族.设$M(X,Y)$表示拓扑空间X到拓扑空间Y的集值映射的全体,$\mathscr{F}\subset M(X,Y)$.若对于$Y$的任意闭集$B$,

$$\bigcup\{F^+(B)|F\in\mathscr{F}\}\quad 与\quad \bigcup\{F^-(B)|F\in\mathscr{F}\}$$

都是X的闭集,则称$\mathscr{F}$为集值族状连续族.

集值图像拓扑(set-valued graph topology) 集值映射族上的一种拓扑.设X,Y为拓扑空间,$U\subset X\times Y$,$M(X,Y)$为X到Y的集值映射全体,$\mathscr{F}\subset M(X,Y)$.若

$$T_U^-=\{F\in\mathscr{F}|对于任意 x\in X,(\{x\}\times F(x))\cap U\neq\varnothing\},$$
$$T_U^+=\{F\in\mathscr{F}|G(F)\subset U\},$$

其中$G(F)$为集值映射F的图像,则以集族$\{T_U^-,T_U^+|U 为 X\times Y 的开集\}$为子基在$\mathscr{F}$上生成的拓扑称为$\mathscr{F}$上的集值图像拓扑,记为$\Gamma$.集值图像拓扑细于集值闭开拓扑$\mathscr{C}'$.当$X$为紧$T_2$空间,$\mathscr{F}$为点紧映射族时,在$\mathscr{F}$上有

$$\mathscr{C}'=\Gamma=\mathscr{C}.$$

集值拟图像拓扑(set-valued quasi graph topology) 集值映射族上的一种拓扑.设$M(X,Y)$表示拓扑空间X到拓扑空间Y的集值映射的全体,I为指标集.对于任意$i\in I,U_i\subset X\times Y$,令

$$U_I^-=\{F\in M(X,Y)|对于任意 x\in X,[\{x\}\times F(x)]\cap\bigcup\{U_i|i\in I\}\neq\varnothing,并且对于任意 i\in I,存在 x_i\in X 使得 [\{x_i\}\times F(x_i)]\cap U_i\neq\varnothing\},$$
$$U_I^+=\{F\in M(X,Y)|G(F)\subset\bigcup\{U_i|i\in I\},并且对于任意 i\in I,存在 x_i\in X 使得 [\{x_i\}\times F(x_i)]\subset U_i\},$$

则以集族$\{U_I^-,U_I^+|I 为有限集,对于任意 i\in I,U_i 为 X\times Y 的开集\}$为子基在$M(X,Y)$上生成的拓扑称为$M(X,Y)$上的集值拟图像拓扑,记为$\Gamma'$;以集族$\{U_I^-,U_I^+|\{U_i|i\in I\}为 X\times Y 的局部有限开集族\}$为子基在$M(X,Y)$上生成的拓扑称为$M(X,Y)$上的集值次图像拓扑,记为$\Gamma^0$.由集值图像拓扑$\Gamma$和$\Gamma',\Gamma^0$之间的定义,有

$$\Gamma\leqslant\Gamma'\leqslant\Gamma^0.$$

那姆派里(Naimpally,S. A.)和派瑞克(Pareek,C. H.)于1970年曾指出三者是互不相同的.

集值次图像拓扑(set-valued subgraph topology) 见"集值拟图像拓扑".

σ拓扑(σ-topology) 集值映射族上的一种拓扑.若X,Y为拓扑空间,σ为X的开覆盖,$\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$为含于$\sigma$的某个成员的$X$的所有闭集的族,则以集族$\{(A_\alpha,U),)A_\alpha,U(|\alpha\in\Lambda,U 为 Y 的开集\}$为子基在$M(X,Y)$上生成的拓扑称为$M(X,Y)$上的$\sigma$拓扑.若$X\in\sigma$,则$\sigma$拓扑就是闭开拓扑$\mathscr{C}'$.所以$\mathscr{C}'$是最细的$\sigma$拓扑.

集值一致收敛拓扑(set-valued uniformly convergent topology) 集值映射族上的一种拓扑.设X为拓扑空间,$(Y,\mathscr{V})$为一致空间,$M(X,Y)$表示X到Y的集值映射的全体,$\mathscr{F}\subset M(X,Y)$.对于任意$V\in\mathscr{V}$,若$W(V)=\{(F,G)\in\mathscr{F}\times\mathscr{F}|对于任意 x\in X,y\in F(x),y'\in G(x),(y,G(x))\cap V\neq\varnothing,(F(x),y')\cap V\neq\varnothing\}$,$\mathscr{W}$为由$\{W(V)|V\in\mathscr{V}\}$在$\mathscr{F}$上生成的一致结构,则由$\mathscr{W}$确定的拓扑称为$\mathscr{F}$上的集值一致收敛拓扑,记为$\mathscr{U}$.在点紧映射族$\mathscr{F}$上$\mathscr{U}\geqslant\mathscr{P}$(集值点开拓扑).若$\mathscr{F}$为紧空间到一致空间的点紧映射族,则在$\mathscr{F}$上$\mathscr{U}=\mathscr{C}$(集值紧开拓扑).设网$\{F_\alpha,\alpha\in D,\leqslant\}$一致收敛于$F_0$,$F_0$是点紧的,并且每一个$F_\alpha$是集值上(下)半连续的,则$F_0$也是集值上(下)半连续的.

集值等度连续族(set-valued equicontinuous family) 一类特殊的集值映射族.设X为拓扑空间,$(Y,\mathscr{V})$为一致空间,$M(X,Y)$为X到Y的集值映射全体,$\mathscr{F}\subset M(X,Y)$,$x\in X$.若对于任意$V\in\mathscr{V}$,存在$x$的邻域$U$,使得对于任意$F\in\mathscr{F}$,满足:

1. $F(U)\subset V[F(x)]$;
2. 对于任意$z\in U$与任意$y\in F(x)$,有
$$F(z)\cap V(y)\neq\varnothing;$$

则称$\mathscr{F}$在点x是集值等度连续的.若$\mathscr{F}$在X上任意点x都是集值等度连续的,则称$\mathscr{F}$是集值等度连续族.若$\mathscr{F}$是点紧等度连续族,则$\mathscr{F}$上集值点开拓扑是联合连续的.若X是紧空间,$\mathscr{F}$是点紧等度连续族,则$\mathscr{F}$上集值点开拓扑、集值紧开拓扑及集值一致收敛拓扑是相同的.

集值映射的不动点(fixed point of a set-valued mapping) 与集值映射有关的一个概念.设F是集合X到自身的集值映射,则集值映射F的不动点有三种不同类型:

1. 若$K\subset X$满足$F(K)=K$,则称K为F的不动点.

2. 若$x_0\in X$满足$x_0\in F(x_0)$,则称x_0为F的不动点.

3. 若 $x_0 \in X$ 满足 $F(x_0)=\{x_0\}$，则称 x_0 为 F 的不动点.

其中第二类不动点是最重要的，应用也是广泛的. 集值映射的不动点理论早在 20 世纪 30 年代，由冯·诺伊曼(von Neumann, J.)在对策论的研究中就已涉及. 60 年来一直是引人关注的课题. 不动点问题依赖于空间结构和映射特征，现在已有众多结果.

集值压缩映射(set-valued contraction mapping)　一类特殊的集值映射. 若 (X,d) 为完备度量空间，$CB(X)$ 表示 X 的所有非空有界闭子集族，δ_X 表示 $CB(X)$ 上的豪斯多夫度量，则 $(CB(X),\delta_X)$ 是度量空间. 设 (Y,d_1) 是完备度量空间，$F:X\to Y$ 为点有界闭的集值映射. 若对于任意 $x,y\in X$，存在常数 k 使得

$$\delta_Y(F(x),F(y))\leqslant kd(x,y)$$

成立，则称 F 为集值李普希茨映射. 当 $k<1$ 时，称 F 为集值压缩映射；当 $k=1$ 时，称 F 为集值非扩展映射.

集值李普希茨映射(set-valued Lipschitz mapping)　见“集值压缩映射”.

集值非扩展映射(set-valued nonexpansive mapping)　见“集值压缩映射”.

集值扩展映射(set-valued expansive mapping)　一类特殊的集值映射. 设 (X,d) 为度量空间，$F:X\to X$ 为集值映射. 若对于任意 $x,y\in X$，$x\neq y$，当

$$u\in F(x),\quad v\in F(y)$$

时必有 $d(u,v)>d(x,y)$，则称 F 为集值扩展映射.

殆不动点(almost fixed point)　一类特殊的集值映射不动点. 设 X 为拓扑空间，$F:X\to X$ 为集值映射，$x\in X$. 若对于 x 的任意邻域 U 有 $U\cap F(U)\neq\varnothing$，则称 x 为集值映射 F 的殆不动点.

连续选择(continuous selection)　一类特殊的选择函数. 设 $\Omega=\{S_\alpha\mid\alpha\in D\}$ 为非空集族，D 上的函数

$$C:D\to\bigcup_{\alpha\in D}S_\alpha$$

若满足：对于任意 $\alpha\in D$，$C(\alpha)\in S_\alpha$，则称 C 为选择函数. 选择公理断言任一非空集族都存在选择函数. 当 D 为有限集时选择函数存在. 当 D 为无限集时无法判定选择函数是否存在，也无法按一种规则构造选择函数. 在一定的数学结构下常对选择函数加以限制，例如，在拓扑学中考虑连续选择，在测度理论中考虑可测选择等. 选择问题开始于选择公理. 策梅洛(Zermelo, E. F. F.)为了证明良序原理在 1904 年提出了选择公理，对于现代数学的发展和逻辑上的严密性起了很大作用.

选择公理的直接发展是超空间的选择问题. 主要讨论的课题是什么样的超空间存在连续选择以及借助于存在连续选择的特征来刻画超空间的结构. 例如：零维完备度量空间的非空闭子集空间关于有限拓扑存在连续选择；线性序拓扑空间的良序子空间族关于有限拓扑存在连续选择；度量连续统 X 关于有限拓扑存在连续选择的充分必要条件为 X 是弧；紧度量空间 X 的闭连通子空间族关于有限拓扑存在连续选择的充分必要条件为 X 是广义树等.

超空间上连续选择的一般化为集值映射的连续选择. 设 X,Y 为拓扑空间，$F:X\to Y$ 为集值映射. 若单值映射 $g:X\to Y$ 满足：

1. 对于任意 $x\in X$，$g(x)\in F(x)$；

2. g 是连续函数；

则称 g 为 F 的连续选择. 连续选择理论开始于迈克尔(Michael, E.)，他自 1956 年以来的系统工作奠定了选择理论的基础. 集值映射的连续选择问题主要涉及其定义域空间、值域空间及映射特性等几个方面. 即什么样的空间对什么样的映射存在什么样的选择，以及由存在选择的特征来刻画空间结构等问题. 这一问题与连续扩张、连续逼近等问题密切相关，它们在优化理论、数理经济学、博弈论等学科中有广泛的应用.

选择函数(selection function)　见“连续选择”.

连续扩张(continuous extension)　与集值映射有关的一个概念. 设 X,Y 为拓扑空间，$A\subset X$，$F:A\to Y$ 为集值连续映射. 若集值映射 $G:X\to Y$ 满足：

1. 对于任意 $x\in A$，$F(x)=G(x)$；

2. G 为连续映射；

则称 G 为 F 在 X 上的连续扩张，F 称为 G 在 A 上的限制.

连续格(continuous lattice)　一类特殊的完全格. 设 L 是完全格(亦称完备格)，在 L 上可以定义一个二元关系 $\ll$ 如下：对于任意 $x,y\in L$，$x\ll y$，当且仅当对于 L 的任意定向子集 D，若 $y\leqslant\sup D$，则存在 $d\in D$，使得 $x\leqslant d$. 称 $\ll$ 为 L 上的“方向小于”关系. 当 $x\ll x$ 时，称 x 为 L 的紧元. L 的所有紧元的集合记为 $K(L)$. 由 $x\ll y$ 可推出 $x\leqslant y$. 若 $w\leqslant x\ll y\leqslant z$，则 $w\ll z$. 记

$$\Downarrow x=\{y\in L\mid y\ll x\},$$

$$\Uparrow x=\{y\in L\mid x\ll y\}.$$

若对于任意 $x\in L$，有 $x=\sup\Downarrow x$，则称 L 是连续格. L 是连续格，当且仅当 L 满足以下定向分配律：设 J 是任意指标集，$\{K(j)\mid j\in J\}$ 是任意指标集族，$\{x_{j,k}\mid j\in J,k\in K(j)\}$ 是 L 的任意子集. 若对于任意 $j\in J$，$\{x_{j,k}\mid k\in K(j)\}$ 是 L 的定向子集，则下式成立

$$\bigwedge_{j\in J}\bigvee_{k\in K(j)}x_{j,k}=\bigvee_{f\in M}\bigwedge_{j\in J}x_{j,f(j)},$$

其中 M 定义为 $\prod_{j\in J}K(j)$，即指标集 $K(j)$ 的笛卡儿乘积. 在上述等价条件中，将“$\{x_{j,k}\mid k\in K(j)\}$ 是 L

的定向子集”减弱为“$\{x_{j,k}|k\in K(j)\}$是 L 的任意子集”，就得到完全分配格的定义. 由此推出完全分配格是连续格. 连续格 L 是交连续格，即 L 满足以下分配律：对于任意 $x\in L$ 与 L 的任意定向子集 D，有

$$x\wedge\bigvee D=\bigvee(x\wedge d|d\in D).$$

连续格不一定是分配格. 连续格 L 是分配格，当且仅当 L 是完全赫廷代数，即 L 是完全格，并且 L 满足以下无限分配律：对于任意 $x\in L, Y\subset L$，有

$$x\wedge\bigvee Y=\bigvee\{x\wedge y|y\in Y\}.$$

完全赫廷代数又称为 frame. 完全格 L 是完全分配格当仅当 L 是分配格且 L 与 L^{op}都是连续格，其中 L^{op}表示 L 的对偶格. 完全格 L 是连续格，当且仅当 L 序同构于单位区间$[0,1]$的某个幂的一个对定向并与任意交关闭的子集.

连续格的概念可以推广到连续偏序集的情况. 设$(A,\leqslant)$是偏序集. 若对于 A 的任意定向子集 D，在 A 中存在 D 的上确界，则称 A 是定向完全偏序集. 定向完全偏序集简记为 dcpo. 类似于连续格的情形，在定向完全偏序集$(A,\leqslant)$上可以定义 way-below 关系$\ll$以及$\Downarrow x$，从而$\Downarrow x$是$(A,\leqslant)$的定向子集. 若对于任意 $x\in A$ 有 $x=\sup\Downarrow x$，则称$(A,\leqslant)$是连续偏序集. 连续偏序集亦称为连续语义域.

连续格理论是在 20 世纪 70 年代初期由几位在不同领域中工作的数学家几乎同时建立与发展起来的. 其中英国数学家斯科特(Scott, D. S.)于 1972 年发表的论文“连续格”对这一理论的发展起了极大的推动作用. 目前连续格理论(以及一般的连续偏序集理论或语义域理论)与理论计算机科学的关系极为密切，并且有许多新的理论和实际问题有待解决. 从数学的角度看，连续格可以成为多个学科的研究对象. 例如，从格论观点看，它是满足一种特定分配律的完全格，是完全分配格的自然推广；从拓扑观点看，它是 T_0 空间的范畴中的入射对象；从拓扑代数观点看，它是紧的劳森交半格；从范畴观点看，连续格范畴与 Topos 理论，特别是 Locale 理论有着密切的联系. 正因为其为多学科的研究特点，所以从 20 世纪 70 年代初期到 20 世纪 80 年代初期连续格理论的发展十分迅速，取得了一系列深刻的结果，文献相当丰富. 特别值得重视的是由吉尔斯(Gierz, G.)等 6 位著名数学家合作的专著《A Compendium of Continuous Lattices》. 这本书包含了该时期在连续格理论方面十分系统而完整的结果.

方向小于关系(way-below relation)　见“连续格”.

紧元(compact element)　见“连续格”.

完全分配格(completely distributive lattice)　见“连续格”.

交连续格(meet-continuous lattice)　见“连续格”.

完全赫廷代数(complete Heyting algebra)　见“连续格”.

定向完全偏序集(directed complete partial order set)　见“连续格”.

连续偏序集(continuous partial order set)　见“连续格”.

连续语义域(continuous domain)　见“连续格”.

斯科特拓扑(Scott topology)　完全格上的一类常用拓扑. 设 L 是完全格，U 是 L 的子集. 若 U 满足以下条件：

1. $U=\uparrow U$，其中$\uparrow U=\{x\in L|\exists\ u\in U, x\geqslant u\}$；

2. 对于任意定向集 D，若 $\sup D\in U$，且

$$D\cap U\neq\varnothing;$$

则称 U 为 L 的斯科特开集. L 的所有斯科特开集的集族是 L 上的一个拓扑，称为 L 上的斯科特拓扑，记为 $\sigma(L)$. 若 $U\in\sigma(L)$，则称 $L-U$ 为斯科特闭集. A 是斯科特闭集，当且仅当 $A=\downarrow A$，其中

$$\downarrow A=\{x\in L|\exists\ u\in A, x\leqslant u\},$$

并且 A 对于定向上确界关闭，即，若 D 是定向集且 $D\subset A$，则 $\sup D\in A$. $(L,\sigma(L))$是一个 T_0 拓扑空间. 对于任意 $x\in L$，$\{x\}^-=\downarrow x$，其中$\downarrow x=\downarrow\{x\}$. 当 L 是连续格时，$\{\Uparrow x|x\in L\}$是 $\sigma(L)$的拓扑基，并且对于任意 $x\in L, X\subset L$，有

$$\operatorname{int}\uparrow x=\Uparrow x,\quad \operatorname{int}X=\bigcup\{\Uparrow u|\Uparrow u\subset X\},$$

其中 int 表示内部运算. 当 L 是连续格时，$(L,\sigma(L))$是局部紧的索伯空间. 若 L 是完全格，则 L 是连续格，当且仅当 $\sigma(L)$是完全分配格. 利用斯科特拓扑 $\sigma(L)$可以刻画 L 的格论性质，这是研究连续格与连续格上的拓扑的一个重要动力. 在完全格上引入拓扑的最早陈述是丹伊(Day, B. J.)和凯利(Kelly, G. M.)于 1970 年对于拓扑空间的开集格情况提出的. 英国数学家斯科特(Scott, D. S.)于 1972 年的论文“连续格”中定义的拓扑最为有用. 艾斯贝尔(Isbel, J. R.)于 1975 年称这个拓扑为斯科特拓扑. 在对斯科特拓扑的研究中，劳森(Lawson, J. D.)、霍夫曼(Hofmann, K. H.)、斯特拉克(Stralka, A.)等人做出了重要的贡献. 斯科特拓扑的定义可以自然地推广到 L 是定向完全偏序集的情况，此时 L 上的斯科特拓扑仍记为 $\sigma(L)$.

斯科特开集(Scott open set)　见“斯科特拓扑”.

斯科特闭集(Scott closed set)　见“斯科特拓扑”.

斯科特连续函数(Scott continuous function)　相对于斯科特拓扑而言的连续函数. 设 L, S 是两个完全格，$f:L\to S$ 是函数. 若对于任意 $U\in\sigma(S)$，有

$f^{-1}(U)\in\sigma(L)$，则称 f 是 L 到 S 的斯科特连续函数. $f:L\to S$ 是斯科特连续的充分必要条件是，f 保定向上确界，即，对于 L 中任意定向子集 D，有

$$f(\sup D)=\sup f(D).$$

以连续格为对象，斯科特连续函数为态射的范畴称为连续格范畴，记为 CONT. 范畴 CONT 是一个笛卡儿闭范畴.

连续格范畴(continuous lattices category)　见"斯科特连续函数".

劳森拓扑(Lawson topology)　完全格上一类常用拓扑. 设 L 是完全格，以

$$\{L-\uparrow x\mid x\in L\}$$

为子基生成的拓扑称为 L 上的下拓扑，记为 $\omega(L)$. 斯科特拓扑与下拓扑的公共加细(即以 $\sigma(L)\cup\omega(L)$ 为子基的拓扑)称为 L 上的劳森拓扑，记为 $\lambda(L)$. 拓扑空间 $(L,\lambda(L))$ 是紧的 T_1 空间. 当 L 是连续格时，$(L,\lambda(L))$ 是紧豪斯多夫拓扑空间. 设 $f:L\to S$ 是完全格 L 到完全格 S 的函数. 若对于任意 $U\in\lambda(S)$，有 $f^{-1}(U)\in\lambda(L)$，则称 f 为劳森连续函数. 函数 $f:L\to S$ 是劳森连续的，当且仅当 f 保任意下确界与定向上确界. 早在 1961 年，费尔(Fell，J. M. G.)对于局部紧空间的开集格考虑过劳森拓扑. 但劳森拓扑的明确定义是在 1976 年首届半格的连续性讨论班(Seminar on Continuity in Semilattices，缩写为 SCS)上提出的. 劳森拓扑这一名称是在 1977 年首先被使用的.

下拓扑(lower topology)　见"劳森拓扑".

劳森连续函数(Lowson continuous function)　见"劳森拓扑".

下极限拓扑(lim-inf topology)　完全格上一类常用拓扑. 设 L 是完全格，$(x_j)_{j\in J}$ 是 L 中的网. 定义 $(x_j)_{j\in J}$ 的下极限如下：

$$\underline{\lim}_j\, x_j=\sup_j \inf_{i\geqslant j}x_i.$$

记 $\Gamma=\{((x_j)_{j\in J},x)\mid (x_j)_{j\in J}$ 是 L 中的网，$x\in L$，并且满足：若 $(x_{f(k)})_{k\in K}$ 是 $(x_j)_{j\in J}$ 任意子网，则 $x=\underline{\lim}_k x_{f(k)}\}$. 定义 $\xi(L)=\{U\subset L\mid$ 若 $((x_j)_{j\in J},x)\in\Gamma$，$x\in U$，则网 $(x_j)_{j\in J}$ 终于 $U\}$，从而 $\xi(L)$ 是 L 上的拓扑，称为 L 上的下极限拓扑. 由 $((x_j)_{j\in J},x)\in\Gamma$ 可推出网 $(x_j)_{j\in J}$ 关于拓扑 $\xi(L)$ 收敛于 x. 若 U 是上集，则 $U\in\xi(L)$，当且仅当 $U\in\sigma(L)$，其中 $\sigma(L)$ 是 L 上的斯科特拓扑. 拓扑空间 $(L,\xi(L))$ 是紧的 T_1 空间. 劳森拓扑细于下极限拓扑，即 $\lambda(L)\subset\xi(L)$. 当 $\lambda(L)$ 是豪斯多夫拓扑时，$\lambda(L)=\xi(L)$. 特别地，当 L 是连续格时，

$$\lambda(L)=\xi(L).$$

区间拓扑(interval topology)　完全格上一类常用拓扑. 设 L 是完全格，以

$$\{L-\downarrow x\mid x\in L\}$$

为子基生成的拓扑称为 L 上的上拓扑，记为 $\nu(L)$，其中

$$\downarrow x=\{a\in L\mid a\leqslant x\}.$$

上拓扑 $\nu(L)$ 与下拓扑 $\omega(L)$ 的公共加细称为 L 上的区间拓扑. 完全格关于区间拓扑是紧的. 完全分配格关于区间拓扑是豪斯多夫的. 在完全分配格上，区间拓扑与劳森拓扑是一致的.

上拓扑(upper topology)　见"区间拓扑".

索伯空间(Sober space)　一类特殊的拓扑空间. 设 X 是拓扑空间，A 是 X 的非空闭集. 若对于 X 的任意闭集 B 与 C，由 $A=B\cup C$ 可推出 $A=B$ 或 $A=C$，则称 A 是 X 的既约闭集. 若对于 X 的任意既约闭集 A，存在 A 的惟一的稠点 a，即存在惟一的 $a\in A$，使得 $A=\{a\}^-$，则称 X 是索伯空间. 豪斯多夫空间是索伯空间. 索伯空间是 T_0 空间. 存在 X 是 T_1 空间但不是索伯空间的例子. 若 L 是完全格，$\sigma(L)$ 是 L 上的斯科特拓扑，上确界算子

$$\sup:(L,\sigma(L))\times(L,\sigma(L))\to(L,\sigma(L))$$

是连续的，则 $(L,\sigma(L))$ 是索伯空间. 特别地，当 L 是连续格时，$(L,\sigma(L))$ 是索伯空间. 索伯空间在连续格的谱理论中有重要的作用.

既约闭集(irreducible closed set)　见"索伯空间".

稠点(dense point)　见"索伯空间".

斯通空间(Stone space)　一类特殊的拓扑空间. 设 L 是完全赫廷代数. 若 L 的全体紧元的集合 $K(L)$ 是 L 的子格，并且 L 的元都可以表示为 $K(L)$ 中元的并，则称 L 是凝聚的. 设 $(X,\Omega(X))$ 是拓扑空间. 若 $(X,\Omega(X))$ 是索伯空间，并且 $\Omega(X)$ 作为完全赫廷代数是凝聚的，则称 $(X,\Omega(X))$ 是凝聚空间. 设 $(X,\Omega(X))$ 与 $(Y,\Omega(Y))$ 是两个拓扑空间，

$$f:(X,\Omega(X))\to(Y,\Omega(Y))$$

是连续映射，对于任意 $U\in\Omega(Y)$，有 $f^{-1}(U)\in\Omega(X)$，记 $f^{-1}:\Omega(Y)\to\Omega(X)$. 若 f^{-1} 是保有限交与任意并的，并且将 $\Omega(Y)$ 中的紧元映为 $\Omega(X)$ 中的紧元，则称 f 为凝聚映射. 若拓扑空间 X 是凝聚的豪斯多夫空间，则称 X 是斯通空间. 拓扑空间 X 是斯通空间，当且仅当 X 是紧的、零维的 T_0 空间，当且仅当 X 是紧的、豪斯多夫和全不连通的. 斯通空间在研究布尔代数的表示定理中起着重要的作用. 以斯通空间为对象，凝聚映射为态射的范畴称为斯通空间范畴. 以布尔代数为对象，格同态为态射的范畴称为布尔代数范畴. 关于布尔代数的斯通表示定理断言：布尔代数范畴与斯通空间范畴是对偶等价的.

凝聚空间(coherent space)　见"斯通空间".

凝聚映射(coherent mapping)　见"斯通空间".

斯通空间范畴(category of Stone spaces)　见

“斯通空间”.

布尔代数范畴(category of Boolean algebras) 见“斯通空间”.

布尔代数的斯通表示定理(Stone's representation theorem for Boolean algebras) 见“斯通空间”.

特殊化序(specialization order) 拓扑空间上一类特殊的序.若$(X,\Omega(X))$是T_0拓扑空间,$x,y\in X$.定义$x\leqslant y$,当且仅当$x\in\{y\}^-$,则$\leqslant$是X上的一个自反、反对称、传递的关系,称$\leqslant$为拓扑空间X上的特殊化序,或$\leqslant$是由$\Omega(X)$诱导的特殊化序.当X是T_1空间时,X上的特殊化序是平凡序(即$x\leqslant y$,当且仅当$x=y$).若$f:X\to Y$是连续函数,则f保特殊化序,即由$x\leqslant_X y$可推出$f(x)\leqslant_Y f(y)$,其中$\leqslant_X$与$\leqslant_Y$分别是X与Y上的特殊化序.当L是定向完全偏序集时,L上的斯科特拓扑$\sigma(L)$诱导的特殊化序是L上的原有的序.定向完全偏序集L上的不同的拓扑可以诱导同一个特殊化序$\leqslant$,并且$\leqslant$是L上的原有的序.在这些拓扑中,最粗的拓扑是上拓扑$\nu(L)$,最细的拓扑是亚历山德罗夫拓扑$\gamma(L)$,其中$\gamma(L)$是由L的所有上集(即满足条件$A=\uparrow A$的集合A)组成的拓扑.若$(X,\Omega(X))$是索伯空间,并且$(X,\leqslant)$是定向完全偏序集,则由$\Omega(X)$诱导的特殊化序是$\leqslant$,当且仅当$\Omega(X)$细于$(X,\leqslant)$上的上拓扑,并且粗于$(X,\leqslant)$上的斯科特拓扑.

亚历山德罗夫拓扑(Alexandrov topology) 见“特殊化序”.

饱和集(saturated set) 拓扑空间中一类特殊的子集.设X是拓扑空间,A是X的子集.若A等于A的所有邻域的交,即$A=\bigcap\{U\mid U$是A的邻域$\}$,则称A是X的饱和集.A是饱和集,当且仅当对于任意$x\in X$,若$\{x\}^-\cap A=\varnothing$,则$x\in A$.$T_1$空间的任意子集都是饱和的.因此,饱和集的概念仅对于T_0空间才是有意义的.若A是X的任意子集,则集合$\bigcap\{U\mid U$是A的邻域$\}$称为A的饱和化.A的饱和化是包含A的最小饱和集.在X的特殊化序下,A的饱和化等于$\uparrow A$.任意紧集的饱和化是紧的.

饱和化(saturation) 见“饱和集”.

入射空间(injective space) 一类特殊的拓扑空间.设X是T_0拓扑空间.若对于任意拓扑空间Z与任意连续映射$f:Z\to X$,f可连续延拓到以Z为子空间的任意空间Y上,则称X是入射空间.最简单的入射空间是谢尔品斯基空间.设$S=\{0,1\}$是两点集,S上的拓扑

$$\Omega(S)=\{\varnothing,\{1\},S\},$$

则$(S,\Omega(S))$称为谢尔品斯基空间.T_0空间X是入射空间,当且仅当X是谢尔品斯基空间S的某个幂S^M的收缩核,即,存在连续函数$f:S^M\to S^M$使得$f^2=f$且f的值域同胚于X.入射空间的收缩核是入射空间.入射空间的乘积是入射空间.入射空间与连续格有密切的联系.若L是连续格,则$(L,\sigma(L))$是入射空间,其中$\sigma(L)$是L上的斯科特拓扑.反之,若$(X,\Omega(X))$是入射空间,$\leqslant$是由$\Omega(X)$诱导的特殊化序,则$(X,\leqslant)$是连续格,并且$\Omega(X)$等于X上的斯科特拓扑$\sigma(X)$.

谢尔品斯基空间(Sierpiński space) 见“入射空间”.

收缩核(retract) 见“入射空间”.

单调收敛空间(monotone convergence space) 一类特殊的拓扑空间.设X为T_0拓扑空间,$\leqslant$是X上的特殊化序.若$(X,\leqslant)$的任意定向子集D有上确界,并且对于X的任意开集U,由$\sup D\in U$可推出$D\cap U\neq\varnothing$,则称X为单调收敛空间.X是单调收敛空间,当且仅当$(X,\leqslant)$中每一定向网都有上确界,并且收敛于此上确界,其中$\leqslant$是X上的特殊化序.若L是完全格,则$(L,\sigma(L))$是单调收敛空间,其中$\sigma(L)$是L上的斯科特拓扑.入射空间是单调收敛空间.若$f:X\to Y$是单调收敛空间X到拓扑空间Y的连续函数,则关于X与Y的特殊化序,f是保定向上确界的.

序拓扑空间(order topological space) 与序有关的一类拓扑空间.设X是拓扑空间,$\leqslant$是X上的偏序.若$\leqslant$的图像

$$G(\leqslant)=\{(x,y)\in X\times X\mid x\leqslant y\}$$

是$X\times X$中的闭集,其中$X\times X$上赋予积拓扑,则称X是序拓扑空间.在吉尔斯(Gierz,G.)等人的专著(参见“连续格”)中序拓扑空间记为pospace.序拓扑空间是豪斯多夫空间.在任意豪斯多夫空间X上,若取平凡序,则X是序拓扑空间.若X是序拓扑空间,A是X的紧子集,则$\downarrow A$,$\uparrow A$与$\downarrow A\cap\uparrow A$都是$X$的闭集.设$X$是序拓扑空间,若对于满足条件$A\cap B=\varnothing$的任意两个闭上集$A$与$B$,存在开上集$U$与$V$使得

$$A\subset U,\quad B\subset V\quad 与\quad U\cap V=\varnothing,$$

则称X是单调正规的.若X是紧的序拓扑空间,则X是单调正规的.序拓扑空间由纳赫宾(Nachbin,L.)于1960年首先定义并研究.这一概念在泛函分析的某些领域,拓扑代数,特别是在拓扑半格的研究中是十分有用的.

单调正规的序拓扑空间(monotone normal pospace) 见“序拓扑空间”.

撰 稿 干丹岩 王戈平 方嘉琳 阎长明 陈立中 侯吉成 高印珠 潘春亮

审 阅 方嘉琳 郑崇友

代数拓扑学与流形拓扑学

代数拓扑学(Algebraic Topology)　简称代数拓扑.拓扑学的重要分支.在 20 世纪的早期被称为组合拓扑学,它是通过代数方法,如群、环、同态与同构等方法的应用来对图形(一般的拓扑空间或多面体)拓扑性质进行研究的学科,同调和同伦的理论是代数拓扑学的两大支柱.

早在 18 世纪,欧拉(Euler,L.)就得到有关凸多面体的公式:顶点数－棱数＋面数＝2,这是最早的组合拓扑学不变量.19 世纪黎曼(Riemann,G.F.B.)在函数论的许多研究中运用了拓扑方法,其中利用代数函数对紧黎曼面的研究实际上是有关闭曲面的分类.庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)从分析学的需要出发,从 19 世纪 90 年代起连续发表多篇论文,引进组合方法,建立同调概念,定义贝蒂(Betti,E.)数、基本群和挠系数,发现对偶律,并提出庞加莱猜测,这一系列重要进展为代数拓扑学奠定了基础.由于其组合方法之特征,世称组合拓扑学.后来因抽象代数方法之渗透,代数化的特点发挥得淋漓尽致,而展开为内容极其丰富而深刻的代数拓扑学.按其议题又可分为两个大的主要方面:同调论与同伦论.

同调论继承庞加莱的精神,建立了上同调群,引进乘法使成为上同调环,进而引进其他上同调运算;将组合方法引申而对一般拓扑空间定义了奇异同调论和切赫(Čech,E.)同调论;德·拉姆(de Rham,G.-W.)定理的证明意味着代数拓扑学回归其初衷;同调论的公理化标志着同调论的成熟,并启发了代数学中同调代数分支的建立;K 理论的产生及更一般的广义同调论的出现加深和扩大了同调论的深度和广度,并在更高层次上向其他学科渗透.同伦论发展了庞加莱在基本群定义中的同伦思想.同伦是连续形变的数学描写,有关概念有明显的直观涵义而易于被理解,但其不变量的计算或某些问题的解决则往往极为困难.这种强烈的对比激励着拓扑学家们巨大的热情,使同伦问题的研究一直成为代数拓扑学的核心部分.这方面主要有:发现了 3 维球面到 2 维球面存在不零伦的映射;开展了映射的同伦分类及扩张和空间的同伦型的研究;建立了高维同伦群;开展了球面同伦群的计算,特别是运用谱序列而取得的成就令世人瞩目.同调论与同伦论有密切关系,主要表现在由于同调有较强的可计算性而提供解决同伦问题之工具,同伦问题则反过来刺激着同调论的发展.而广义同调论的出现使同调论的问题又可转化为同伦论的问题.不论同伦或同调从几何向代数的过渡总是通过函子来实现,用范畴和函子的话说,代数拓扑学主要内容是构造从拓扑学范畴到代数学范畴的各种函子进而用代数方法解决拓扑学问题的学科.当前代数拓扑学研究的内容除本身问题外,和其他拓扑学分支(如微分拓扑学等)有着密切联系,同时它的发展深刻影响着其他数学分支,诸如微分几何、复变函数、代数几何、数论、代数、泛函分析、动力系统、微分方程、运筹学等,并且在自然科学和工程技术中有日益重要的应用.

组合拓扑学(combinatorial topology)　见"代数拓扑学".

流形拓扑学(Topology on manifold)　简称流形拓扑.拓扑学的一个重要分支.流形是拓扑学中最重要的研究对象,它是曲线和曲面概念的推广,主要包括微分流形、组合流形和拓扑流形.其实,庞加莱(Poincaré,(J.-)H)当初建立组合拓扑学时,他心目中的主要研究对象就是流形,或微分流形.流形自然产生于数学的其他分支学科及某些自然科学(如力学、物理学等)中,因此流形拓扑学的研究和应用具有极重要的意义.

20 世纪 30 年代开始对微分流形系统研究,是从嵌入与浸入理论入手的.伴随着纤维丛理论和示性类理论的发展,由于它与代数拓扑学的密切关系,所以早期它是被当作代数拓扑学的一部分来看待的.到了 20 世纪 50 年代后,由于在协边理论、微分结构和高维庞加莱猜测等几方面突破性的成就,从而产生了微分拓扑学这个分支.此后的 30 多年,研究硕果累累,在整个现代数学蓬勃发展的总背景下呈现出极为壮丽辉煌的场面.主要成果有:各类流形结构之间的关系;各种协边理论的建立和计算;嵌入和浸入理论的深入;扭结理论的深刻进展及其应用;奇点理论和突变理论及其应用;动力系统理论;3 维流形理论及双曲几何之应用;单连通 4 维流形之分类和 4 维庞加莱猜测的解决;唐纳森(Donaldson,S.)定理的证明及其推论;拓扑量子场论的提出.

几何拓扑学通常是指那些强调几何方法来研究拓扑性质的有关理论.或继承发展经典的组合方法,或利用点集方法参照欧氏空间中点集性质进行几何性研究,或运用双曲度量几何学于拓扑问题之讨论.这些方法对于低维流形拓扑学的研究有特殊贡献.

流形拓扑学有广泛而深刻的应用.近代数学中不少突出的成果是将某些分析不变量表为拓扑不变量,体现了代数拓扑学和流形拓扑学的新成就对数

学现代发展的深刻影响.低维流形拓扑学的最新成就揭示出的神秘性质,正说明现实的物理空间或空-时空间的内涵之丰富,这点还有极重要的哲学意义.

代数拓扑学

同伦映射(homotopic maps) 拓扑学的重要概念.直观地说,从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射 f,g 是同伦的,是指在 Y 中可将 f 连续形变成 g.设 $f,g:X\to Y$ 都是连续映射,$I=[0,1]$,若存在连续映射 $H:X\times I\to Y$,使得对所有 $x\in X$,

$$H(x,0)=f(x),\quad H(x,1)=g(x),$$

则称 f 和 g 是同伦的映射,记为 $f\simeq g:X\to Y$,称 H 为从 f 到 g 的一个同伦或伦移,该同伦也可记为 $H:f\simeq g$.有时记 $H(x,t)\equiv f_t(x)$,这时的 $f_0=f,f_1=g$,若对所有 t,同伦 f_t 都是 X 到 Y 的同胚,则称 f 合痕于 g.应该指出,映射的同伦关系是从拓扑空间 X 到 Y 的所有连续映射所成集合 $C(X,Y)$ 上的一个等价关系,它将这些映射分成一些等价类,称每个等价类为一个同伦类.研究映射的同伦分类问题是同伦论的基本内容之一.

同伦(Homotopy) 见"同伦映射".

伦移(Homotopy) 见"同伦".

合痕(isotopy) 见"同伦映射".

零伦映射(null-homotopic map) 一类特殊的映射.设 X,Y 都是拓扑空间,若映射 $f:X\to Y$ 同伦于某常值映射 $f_0:X\to Y$,则它称为零伦的.从映射同伦观点看,最简单的映射是零伦映射.

相对于某子集的同伦(homotopic relative to a subset) 拓扑学的重要概念.设 X 和 Y 为拓扑空间,映射 $f\simeq g:X\to Y$,并且在 X 的子集 A 上取值相同,若在 f 到 g 的形变过程中在 A 上的值始终不变,即同伦 $H:X\times I\to Y$ 还满足补充条件,对于所有 $a\in A$ 和 $t\in I$,$H(a,t)=f(a)=g(a)$,则称 f 和 g 为相对于 A 同伦,记为

$$f\simeq g:\ X\to Y \text{ rel } A \quad 或 \quad H:\ f\simeq g \text{ rel } A.$$

它在研究基本群和一般同伦理论中常用到.

同伦等价空间(homotopy equivalent spaces) 利用映射的同伦关系给出的拓扑空间的另一种分类,在拓扑学中是重要的.若两个拓扑空间 X 和 Y 之间存在一对连续映射 $f:X\to Y,g:Y\to X$,使得复合映射 $g\circ f\simeq 1_X$ 和 $f\circ g\simeq 1_Y$,其中 1_X 和 1_Y 分别为 X 和 Y 到自身的恒同映射,则 f 称为同伦等价,g 称为 f 的一个同伦逆,此时拓扑空间 X 和 Y 称为是同伦等价的,或称为具有相同的同伦型,记为 $X\simeq Y$.同伦等价的关系是全体拓扑空间族上的一个等价关系.特别地,同胚的两个空间一定是同伦等价的,但其逆一般不成立.

同伦逆(Homotopy inverse) 见"同伦等价空间".

同伦型(Homotopy type) 见"同伦等价空间".

可缩空间(contractible space) 一类特殊的空间.在同伦型的意义下,最简单的空间是和由一个点组成的空间(即单点空间)有相同的同伦型的拓扑空间,称为可缩空间.它和零伦映射有着密切关系,下面的命题是有趣的:拓扑空间 X 上的恒同映射 1_X:$X\to X$ 是零伦映射的充分必要条件是拓扑空间 X 是可缩空间.

同伦型不变性质(homotopy type invariance) 拓扑学的一种重要不变性质.具有相同同伦型的拓扑空间所共有的性质称为同伦型不变性质.因为同胚的拓扑空间一定是同伦等价的,所以同伦型不变性质一定是拓扑不变性质,但反之不一定成立.例如,3 维闭球体 D^3 与 3 维欧氏空间 R^3 具有相同同伦型,但 D^3 是紧致空间而 R^3 则不是.紧致性是拓扑不变性质,但不是同伦型不变性质.在代数拓扑学中讨论的性质,如同调群、同伦群等都是同伦型不变性质.

闭路(loop) 亦称环道.一类特殊的连续映射.设 X 为拓扑空间,连续映射 $\alpha:I=[0,1]\to X$ 称为连结 $x_0=\alpha(0)$ 和 $x_1=\alpha(1)$ 的道路,x_0 和 x_1 分别称为道路的起点和终点.为了方便,道路 α 也记为

$$\alpha:\ (I,0,1)\to(X,x_0,x_1).$$

当 $\alpha(0)=\alpha(1)=x_0$ 时,称 α 为 X 中以 x_0 为基点的闭道路,简称闭路.

环道(loop) 即"闭路".

道路(path) 见"闭路".

闭路同伦类(homology class of loops) 闭路的一种分类.设 α_0 和 α_1 是拓扑空间 X 中以 x_0 为基点的两条闭路,α_0 和 α_1 相对于 $\partial I=\{0,1\}$ 的同伦关系(定端同伦)$\alpha_0\simeq\alpha_1\text{rel}\{0,1\}$ 是以 x_0 为基点的闭路集合的等价关系,相应的等价类称为闭路同伦类,简称闭路类,并且记 α 所属的闭路类为 $[\alpha]$.

闭路类(class of loops) 见"闭路同伦类".

基本群(fundamental group) 亦称一维同伦群.对一个拓扑空间联系一个群的代数结构.在拓扑空间 X 中对于以同一点 x_0 为基点的两条闭道路 α 和 β 可引入乘法 $*$:

$$\alpha*\beta(s)=\begin{cases}\alpha(2s) & \left(0\leqslant s\leqslant\dfrac{1}{2}\right),\\ \beta(2s-1) & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1\right),\end{cases}$$

$\alpha*\beta$ 是一条以 x_0 为基点的闭道路.这种乘法不一定满足结合律,无法引入群结构.但是,在以 x_0 为基

点所有闭路同伦类中，引入乘法

$$[\alpha]\circ[\beta]=[\alpha*\beta],$$

这种定义是有意义的，并且以 x_0 为基点的全体闭路同伦类在引入这种乘法后构成一群，称为 X 的以 x_0 为基点的基本群，记为 $\pi_1(X,x_0)$. 基本群可以不是交换群. 对于道路连通空间 X，其基本群与基点的选取无关，记为 $\pi_1(X)$. 对于两个拓扑空间 X 与 Y 之间的连续映射 $f:(X,p)\to(Y,q)$，它与 X 内以 p 为基点的闭路 α 的复合映射 $f\circ\alpha$ 是 Y 内以 q 为基点的闭路，并且两条同伦的闭路与 f 的复合得出两条同伦的闭路，因此，按照 $f_*([\alpha])=[f\circ\alpha]$定义映射

$$f_*:\pi_1(X,p)\to\pi_1(Y,q),$$

于是 f_* 为同态，称为 f 诱导的同态. 由此得出基本群是拓扑不变量，进而基本群也是同伦型不变量.

计算基本群常常是将所讨论的空间"归结"或"分解"为更简单的空间以算出其基本群，这些常见的方法有：

1. 利用基本群的同伦型不变性.

2. 对于乘积空间可利用结论：当 X 和 Y 为道路连通空间时，$\pi_1(X\times Y)\cong\pi_1(X)\times\pi_1(Y)$.

3. 利用覆叠空间理论.

4. 利用范卡彭定理：若 K 是连通的复形，K_0，K_1，K_2 都是 K 的连通的子复形，使得

$$K=K_1\cup K_2,\quad K_1\cap K_2=K_0,$$

α_0 是 K_0 的一个顶点，i_1 和 i_2 分别是 K_0 的多面体 $|K_0|$ 到 K_1 和 K_2 的多面体 $|K_1|$ 和 $|K_2|$ 的包含映射，则 $|K|$ 的基本群 $\pi_1(|K|,a_0)$ 可从 $\pi_1(|K_1|,a_0)$ 与 $\pi_1(|K_2|,a_0)$ 的自由乘积中添加关系 $i_{1*}(z)=i_{2*}(z)$得到，其中 z 取遍 $\pi_1(|K_0|,a_0)$的一切元素.

范卡彭定理适用于可剖分空间，并可推广到更一般的加一定限制的拓扑空间. 例如，用以上方法可得到圆周 S^1 的基本群为 $\pi_1(S^1)\cong\mathbb{Z}$，可缩空间的基本群为平凡群，默比乌斯(Möbius，A. F.)带 M 的基本群$\pi_1(M)\cong\mathbb{Z}$，环面 T 的基本群为 $\pi_1(T)\cong\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，$n$ 维球面 $S^n(n\geqslant2)$的基本群 $\pi_1(S^n)$为平凡群，以及克莱因瓶 K 的基本群 $\pi_1(K)\cong\{t,u\,|\,tut=u\}$(或$\{a,b\,|\,a^2=b^2\}$)，这里 $\mathbb{Z}$ 表示整数加群.

一维同伦群(1th homotopy group)　即"基本群".

范卡彭定理(Van Kampen's Theorem)　见"基本群".

单连通空间(simply connected space)　一类重要的拓扑空间. 基本群为平凡群的道路连通空间称为单连通空间. 从而可推出可缩空间是单连通空间，但是其逆不一定成立. 例如，欧氏空间中的凸集和 n 维球面 $S^n(n\geqslant2)$都是单连通空间，但 n 维球面 $S^n(n\geqslant2)$不是可缩空间. 道路连通空间是单连通的充分必要条件是，此空间中任意两条起点和终点分别相同的道路是同伦的.

同伦群(homotopy groups)　基本群的高维推广. 基本群是从单位闭区间 I 到拓扑空间 X 的闭路的同伦等价类和其运算得到的. 考虑 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的 n 维方体

$$I^n=\{t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,0\leqslant t_i\leqslant1\},$$

∂I^n 是 I^n 的边界，即

$$\partial I^n=\{t\in I^n\,|\,\exists\ i\ 使得\ t_i(1-t_i)=0\},$$

设 X 为拓扑空间，$x_0\in X$，用$M_n(X,x_0)$表示全体连续映射 $\alpha:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$所成的集合，$\alpha$ 和 α' 相对于 ∂I^n 的同伦关系 $\alpha\simeq\alpha'$是$M_n(X,x_0)$上的一个等价关系，它把 $M_n(X,x_0)$的元素分成一些同伦等价类，用 $\pi_n(X,x_0)$表示这些等价类所成的集合. 定义映射 $\alpha*\beta:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$，使得

$$\alpha*\beta(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}\alpha(2t_1,t_2,\cdots,t_n) & \left(0\leqslant t_1\leqslant\frac{1}{2}\right),\\ \beta(2t_1-1,t_2,\cdots,t_n) & \left(\frac{1}{2}\leqslant t_1\leqslant1\right),\end{cases}$$

从而，$\alpha*\beta\in M_n(X,x_0)$，并且，若 $\alpha\simeq\alpha'$，$\beta\simeq\beta'$，则

$$\alpha*\beta\simeq\alpha'*\beta'.$$

因此，可在 $\pi_n(X,x_0)$中定义运算

$$[\alpha]\circ[\beta]=[\alpha*\beta],$$

并且关于这一运算使它构成群，仍记为 $\pi_n(X,x_0)$，称为拓扑空间 X 的以 x_0 为基点的 n 维同伦群. 1 维同伦群就是基本群$\pi_1(X,x_0)$. 同伦群还有一种等价定义方式，它是用 n 维球面 S^n 代替 n 维方体 I^n，这种定义给讨论同伦群的性质有时带来方便. 类似基本群的讨论，同伦群具有性质：当拓扑空间是道路连通空间时，其同伦群与基点选取无关；利用连续映射诱导的同伦群之间同态的一些性质得出，同伦群是同伦型不变量(更是拓扑不变的)；当 $n\geqslant2$ 时，同伦群 $\pi_n(X,x_0)$是交换群，因而有时把运算写成$[\alpha]+[\beta]$. 同伦群与同调群的一些基本关系：对于连通复形 K 的多面体 $|K|$，1 维同调群同构于基本群的交换化，即

$$\pi_1(|K|)/[\pi_1(|K|),\pi_1(|K|)]\cong H_1(K),$$

这里$[\pi_1(|K|),\pi_1(|K|)]$表示基本群 $\pi_1(|K|)$的换位子群. 高维同伦群与同调群之间的关系，由赫莱维茨(Hurewicz，W.)的同构定理给出：设 $|K|$是连通复形 K 的多面体，当 $n\geqslant2$ 时，若$|K|$的 $1,2,\cdots,n-1$ 维同伦群都是平凡群，则 $\pi_n(|K|)\cong xH_n(K)$.

收缩核(retract)　具有特殊性质的子空间. 设 X 为拓扑空间，A 是 X 的子空间，若存在连续映射 $r:X\to A$ 使得当 $x\in A$ 时，$r(x)=x$，即 $r|A=1_A$(1_A 为 A 上恒同映射)，则称 A 为 X 的收缩核，称 r 为收缩映射或保核收缩. 实际上，收缩映射 r 是 A 上恒

同映射 1_A 在 X 上的扩张. 若 A 是它的在 X 中的某个邻域 U 的收缩核,则称 A 为 X 的邻域收缩核.

收缩映射(retraction) 见"收缩核".

保核收缩(retraction) 见"收缩核".

邻域收缩核(neighborhood retract) 见"收缩核".

形变收缩核(deformation retract) 一类特殊的收缩核. 设 X 为拓扑空间,$A\subset X$,若存在收缩映射 $r:X\to A$ 和包含映射 $i:A\to X$ 使得

$$1_X\overset{H}{\simeq}i\circ r:\ X\to X\ (1_X\text{ 为恒同映射}),$$

则称 A 为 X 的形变收缩核,伦移 H 称为 X 到 A 的形变收缩. 设 A 为 X 的形变收缩核,$H:X\times I\to X$ 是形变收缩,若对于 $x\in A$ 和 $t\in I$ 有 $H(x,t)=x$,则称 A 为 X 的强形变收缩核. 直观地说,A 是 X 的形变收缩核是指 X 可以连续形变成 A,当形变过程中 A 的点都不变动时,A 就是 X 的强形变收缩核.

形变收缩(deformation retraction) 见"形变收缩核".

强形变收缩核(strong deformation retraction) 见"形变收缩核".

轨道空间(orbit space) 一类特殊的商空间. 若 G 是拓扑群,X 是拓扑空间,G 中每一元素 g 诱导一个从 X 到自身的同胚映射,$x\mapsto g(x)$,其中 $x\in X$,对于任意 $g,h\in G$,满足 $h\circ g(x)=h[g(x)]$,对于群 G 中单位元 e 满足 $e(x)=x$,并且由 $(g,x)\mapsto g(x)$ 定义的 $G\times X$ 到 X 的映射是连续映射,则称 G 为 X 的拓扑变换群. 对于 X 中的点 x,称子集 $O(x)=\{g(x)\mid g\in G\}$ 为通过点 x 的轨道,所有轨道的集合 $\{O(x)\mid x\in X\}$ 构成 X 的一个分解(实际上,X 中两点 x,y 属于同一轨道这一关系是一等价关系). 由这个分解得出的商空间记为 X/G,称为轨道空间. 例如,取拓扑群 Z 为具有离散拓扑的整数加群,R^1 为实数空间,对于每一个 $n\in\mathrm{Z}$ 取从 R^1 到自身的同胚为平移,$x\mapsto x+n$,这时得到的轨道空间 R^1/Z 是圆周 S^1.

拓扑变换群(topological transformation group) 见"轨道空间".

覆叠空间(covering space) 亦称覆盖空间. 同伦论中一个重要概念. 设 $\widetilde{X}$ 是道路连通空间,X 是连通且局部道路连通空间,$p:\widetilde{X}\to X$ 是连续满映射,若对于 X 中每一点 x 都有一个道路连通开邻域 U,使得对于 $p^{-1}(U)$ 的每个连通分支 V,p 在 V 上的限制 $p|V:V\to U$ 是同胚,则称 $(\widetilde{X},p)$ 为 X 的覆叠空间,称 p 为覆叠映射,称 X 为底空间,这样的邻域 U 称为 x 的可允许的邻域. 例如,指数映射 $\pi:\mathrm{R}^1\to S^1$,把 $t\in\mathrm{R}^1$ 映为 $e^{2\pi i t}\in S^1$,则 (R^1,π) 是 S^1 的覆叠空间. 若对于 $1\in S^1$,取

$$U=S^1-\{-1\},$$

$$\pi^{-1}(U)=\bigcup_{n\in\mathrm{Z}}\left(n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right),$$

则

$$\pi|_{\left(n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right)}:\quad\left(n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}\right)\to U$$

为同胚.

覆叠空间理论包括映射提升定理,覆叠空间的分类定理,以及万有覆叠空间的存在性等内容. 例如道路提升定理:设 $(\widetilde{X},p)$ 是 X 的覆叠空间,$p:\widetilde{X}\to X$ 为覆叠映射,若 $a\in X$,$b\in p^{-1}(a)$,v 为 X 的以 a 为起点的道路,则 $\widetilde{X}$ 内有惟一的以 b 点为起点的道路 $\tilde{v}$,满足 $p\circ\tilde{v}=v$,$\tilde{v}$ 称为道路 v 的提升. 类似地,有闭路同伦提升定理:设 $(\widetilde{X},p)$ 是 X 的覆叠空间,若 $F:I\times I\to X$ 为连续映射,满足条件

$$F(0,t)=F(1,t)=a,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,b\in p^{-1}(a),$$

则存在惟一的连续映射 $\widetilde{F}:I\times I\to\widetilde{X}$ 满足条件

$$p\circ\widetilde{F}=F,\quad \widetilde{F}(0,t)=\widetilde{F}(1,t)=b,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$\widetilde{F}$ 称为 F 的提升. 根据上述提升定理可知:覆叠映射 p 的诱导同态 $p_*:\pi_1(\widetilde{X},b)\to\pi_1(X,a)$ 是单同态.

覆盖空间(covering space) 即"覆叠空间".

道路提升定理(path lifting theorem) 见"覆叠空间".

闭路同伦提升定理(loop homotopy lifting theorem) 见"覆叠空间".

映射提升定理(map lifting theorem) 关于覆叠空间的一条定理. 设 $(\widetilde{X},p)$ 是 X 的覆叠空间,对于连续映射 $f:Y\to X$,若存在连续映射 $\tilde{f}:Y\to\widetilde{X}$,满足条件 $p\circ\tilde{f}=f$,则称 $\tilde{f}$ 为 f 的提升. 映射提升定理:若 Y 是连通且局部道路连通空间,$r\in Y$,$(\widetilde{X},p)$ 是 X 的覆叠空间,$a\in X$,$b\in p^{-1}(a)$,则连续映射 $f:(Y,r)\to(X,a)$ 存在提升 $\tilde{f}:(Y,r)\to(\widetilde{X},b)$ 的充分必要条件为 $f_*(\pi_1(Y,r))\subset p_*(\pi_1(\widetilde{X},b))$,并且当提升 $\tilde{f}$ 存在时它是惟一的. 这里 f_* 和 p_* 分别为连续映射 f 和覆叠映射 p 对应的基本群之间的诱导同态.

覆叠空间分类定理(classification theorem of covering spaces) 关于覆叠空间等价的一条重要命题. 设 $(\widetilde{X},p)$ 是 X 的覆叠空间,则诱导同态

$$p_*:\ \pi_1(\widetilde{X},b)\to\pi_1(X,a)$$

是单同态. $\pi_1(X,a)$ 的子群 $p_*(\pi_1(\widetilde{X},b))$ 不仅依赖于 p,而且也依赖于点 b,对于 $p^{-1}(a)$ 中的不同点 $\tilde{x}$,

$$\{p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}))\mid\tilde{x}\in p^{-1}(a)\}$$

构成群 $\pi_1(X,a)$ 的一个子群共轭类. 对于同一个底空间 X 上两个覆叠空间 $(\widetilde{X}_1,p_1)$ 和 $(\widetilde{X}_2,p_2)$,若存在一个同胚 $h:\widetilde{X}_1\to\widetilde{X}_2$ 使得 $p_2\circ h=p_1$,则称覆叠空间 $\widetilde{X}_1$ 和 $\widetilde{X}_2$ 为等价的. 覆叠空间分类定理:设 $(\widetilde{X}_1,p_1)$ 和 $(\widetilde{X}_2,p_2)$ 是拓扑空间 X 的两个覆叠空间,则 $(\widetilde{X}_1,$

p_1)和($\tilde{X}_2, p_2$)等价的充分必要条件是，它们确定 X 的基本群 $\pi_1(X,a)$ 中同一个子群共轭类.

泛覆叠空间(universal covering space) 亦称万有覆叠空间. 同伦论中一个重要的概念. 设($\tilde{X}, p$)是拓扑空间 X 的覆叠空间，若 $\tilde{X}$ 是单连通空间，则称 $\tilde{X}$ 为 X 的泛覆叠空间. 设($\tilde{X}, p$)是拓扑空间 X 的泛覆叠空间，若($\tilde{X}', p'$)是 X 的任意一个覆叠空间，则存在覆叠映射 $q:\tilde{X}\to\tilde{X}'$ 使得($\tilde{X}, q$)是 $\tilde{X}'$ 的覆叠空间. 这是称 $\tilde{X}$ 为泛覆叠空间的原因. 为了使拓扑空间有一个泛覆叠空间存在，需要对其加一些限制. 若拓扑空间 X 的每一点 x 都有一邻域 U，使得 U 内任何环道在 X 内是零伦的，也就是包含映射 $i: U\to X$ 的诱导同态 $i_*:\pi_1(U,x)\to\pi_1(X,x)$ 是平凡同态，则称 X 为半局部单连通的空间. 泛覆叠空间的存在性定理：若 X 为连通、局部道路连通与半局部单连通的拓扑空间，则一定存在 X 的泛覆叠空间.

万有覆叠空间(universal covering space) 即"泛覆叠空间".

覆叠变换群(covering transformation group) 一种特殊的变换群. 设($\tilde{X}, p$)是拓扑空间 X 的覆叠空间，$\tilde{X}$ 的一个覆叠变换是满足 $p\circ h=p$ 的 $\tilde{X}$ 到自身的同胚 $h:\tilde{X}\to\tilde{X}$. 在自同胚的映射复合下，$\tilde{X}$ 的全体覆叠变换构成一个群，称为覆叠变换群，记为 $A(\tilde{X}, p)$. 对于覆叠映射 p 的诱导同态

$$p_*: \pi_1(\tilde{X},b)\to\pi_1(X,a),$$

若 $p_*(\pi_1(\tilde{X},b))$ 是 $\pi_1(X,a)$ 的正规子群，则称($\tilde{X}$, p)是正则覆叠空间. 对于正则覆叠空间有下述结论：若($\tilde{X}, p$)是拓扑空间 X 的正则覆叠空间，则覆叠变换群 $A(\tilde{X}, p)$ 同构于商群

$$\pi_1(X,a)/p_*(\pi_1(\tilde{X},b)).$$

泛覆叠空间是正则覆叠空间. 当($\tilde{X}, p$)为拓扑空间 X 的泛覆叠空间时，覆叠变换群 $A(\tilde{X}, p)$ 同构于基本群 $\pi_1(X,a)$.

正则覆叠空间(regular covering space) 见"覆叠变换群".

悬垂同态(suspension homomorphism) 一种特殊的映射. 若 $f:S^{r-1}\to S^{n-1}$ 为映射，将 S^{r-1} 和 S^{n-1} 分别视为 S^r 和 S^n 的赤道，并把 f 扩张成映射 $f':S^r\to S^n$，使得 f' 把 S^r 的北半球和南半球分别映入 S^n 的北半球和南半球，则 f' 的同伦类不依赖于扩张的选择而只依赖于 f 的同伦类. 于是可得映射

$$E: \pi_{r-1}(S^{n-1})\to\pi_r(S^n),$$

此映射为同态，称为悬垂同态，或简称悬垂. 当 $r<2n-1$ 时，悬垂为同构.

球面的同伦群(homotopy groups of spheres) 一类特殊的同伦群. 简单(如 n 维球面 S^n)的拓扑空间，其同伦群也是极难计算出的. 这个问题成为同伦论发展中的一个主要问题，到 20 世纪 90 年代初，仍未能完全解决. 1950 年计算的几个球面同伦群是：

$\pi_i(S^1)=0\ (i>1)$；$\pi_i(S^n)=0\ (i<n)$；$\pi_3(S^2)\cong\mathbf{Z}$；$\pi_{n+1}(S^n)\cong\mathbf{Z}_2\ (n\geqslant3)$；$\pi_{n+2}(S^n)\cong\mathbf{Z}_2\ (n\geqslant2)$，

此处 $\mathbf{Z}$ 为整数加群.

***p* 素分支**(p-primary component) 一类特殊同伦群的子群. 同伦群 $\pi_i(S^n)$ 中，阶为素数 p 的方幂的元素构成的子群称为 $\pi_i(S^n)$ 的 p 素分支，并记为 $\pi_i(S^n;p)$. 当 $p=2$ 时，最初步的一些结果为：

$$\pi_6(S^3;2)\cong\mathbf{Z}_4;\quad \pi_7(S^4;2)\cong\mathbf{Z}_4;$$
$$\pi_{n+3}(S^n;2)\cong\mathbf{Z}_8,\quad n\geqslant5;$$
$$\pi_6(S^2;2)\cong\mathbf{Z}_4;\quad \pi_7(S^3;2)\cong\mathbf{Z}_2;$$
$$\pi_8(S^4;2)\cong\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_2;\quad \pi_9(S^5;2)\cong\mathbf{Z}_2;$$
$$\pi_{n+4}(S^n;2)=0,\quad n\geqslant6.$$

在谱序列等工具引入同伦论后，塞尔(Serre, J. P.)发现许多同伦问题可以按不同的素数 p 分开讨论. 例如，同伦群的计算，可对不同的 p 分别计算其 p 素分支. 这里 $\mathbf{Z}$ 表示整数加群，$\mathbf{Z}_p$ 表示模 p 整数加群.

奇 *p* 素分支(odd p-primary component) 一类特殊同伦群的子群. 当 p 为奇素数时的同伦群 $\pi_i(S^n)$ 的 p 素分支. 对于奇数维球面 S^{2m+1}，其同伦群的奇 p 素分支有

$$\pi_{2m+1+2i(p-1)-2}(S^{2m+1};p)\cong\mathbf{Z}_p$$
$$(1\leqslant m<i, i=2,\cdots,p-1);$$
$$\pi_{2m+1+2i(p-1)-1}(S^{2m+1};p)\cong\mathbf{Z}_p$$
$$(1\leqslant m, i=1,2,\cdots,p-1);$$

对于其余的情形，有

$$\pi_{2m+1+k}(S^{2m+1};p)=0\ \ (k<2p(p-1)-2).$$

关于奇 p 素分支，成立所谓塞尔同构

$$\pi_{i-1}(S^{2m-1};p)+\pi_i(S^{4m-1};p)\cong\pi_i(S^{2m};p).$$

从而，偶数维球面的 p 素分支的计算可归结为对奇数维球面的 p 素分支的计算.

塞尔同构(Serre isomorph) 见"奇 p 素分支".

霍普夫映射(Hopf maps) 一类重要的球面映射. 若 4 维欧氏空间的点用有序复数对(z_1, z_2)表示，则单位 3 维球面可表示为 $S^3: z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2=1$，其中 $\bar{w}$ 表示 w 的共轭复数. 复平面添加∞成为 2 维球面 S^2，若 $\eta:S^3\to S^2$ 为映射使得 $\eta(z_1,z_2)=z_1/z_2$，则 η 连续，光滑. 两点(z_1,z_2)，(z'_1,z'_2)$\in S^3$ 满足

$$\eta(z_1,z_2)=\eta(z'_1,z'_2)$$

当且仅当存在复数 λ，$|\lambda|=1$，使得

$$(z'_1,z'_2)=(\lambda z_1,\lambda z_2).$$

从而对于 $q\in S^2$，$\eta^{-1}(q)$是一个 1 维球面 S^1，η 使得 S^3 成为 S^2 上的纤维丛，以 S^1 为纤维. 若将复数换成四元数与凯莱(Cayley, A.)数，则类似地可得映射

$\gamma: S^7 \to S^4, \sigma: S^{15} \to S^8$，这些映射统称为霍普夫映射. 20 世纪 30 年代初期，人们曾认为从 S^{n+k} 到 S^n 的连续映射当 $k>0$ 时全都同伦于零. 对于 $n=1$ 的情形，当时已知这个结论成立. 因此，当霍普夫(Hopf,H.)给出第一个反例 $\eta: S^3 \to S^2$ 时，颇使人感到意外.

稳定同伦群(stable homotopy group)　一种特殊的同伦群. 由于悬垂同态

$$E: \pi_{n+k}(S^n) \to \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$$

当 $n>k+1$ 时为同构，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\pi_{n+k}(S^n)$ 存在. 此极限称为球面的第 k 个稳定同伦群，记为 G_k.

H 空间(H-space)　一类特殊的拓扑空间. 指具有乘法运算和双边同伦单位元的带基点的拓扑空间. 设 (X,e) 是带基点的拓扑空间，1 是 X 上的恒同映射，$i_1, i_2: X\to X\times X$ 分别定义为 $i_1(x)=(x,e)$ 和 $i_2(x)=(e,x)$. 若存在保持基点的映射 $m: X\times X\to X$ 使得 $m\circ i_1$ 和 $m\circ i_2$ 都与 1 相对于基点同伦，则称 (X,e) 为 H 空间，并称 e 为其同伦单位元，m 为乘法运算. 若映射 $m\circ(m\times 1)$ 与 $m\circ(1\times m)$ 也相对于基点同伦，则称 m 是同伦可结合的乘法运算，并称 (X,e) 是同伦可结合的 H 空间. 若又存在保持基点的映射 $\mu: X\to X$，使得映射 $m\circ(1\times\mu)\circ\Delta$ 与 $m\circ(\mu\times 1)\circ\Delta$ 都和 X 上映入基点 e 的常值映射 $e: X\to X$ 相对于基点同伦，则称 (X,e) 是具有同伦逆元的 H 空间，其中 $\Delta: X\to X\times X$ 是由 $\Delta(x)=(x,x)$ 定义的对角映射. 若 $T: X\times X\to X\times X$ 是由 $T(x_1,x_2)=(x_2,x_1)$ 定义的交换映射，并且映射 m 和 $m\circ T$ 相对于基点同伦，则映射 m 和 H 空间 (X,e) 分别称为同伦可交换的乘法运算和同伦可交换的 H 空间. 凡拓扑群都是 H 空间，可除代数 **C**,**Q**,**K** 中的单位球面是 H 空间. 若 Y 是任意带基点的拓扑空间，则 Y 上的闭路空间 ΩY 是 H 空间，并且是具有同伦逆元的同伦可结合 H 空间；当 $n\geqslant 2$ 时，$\Omega^n Y$ 还是同伦可交换的. H 空间的重要性质是：若 (X,e) 是 H 空间，则同调群 $H_*(X)$ 是具有单位元的分次代数，并且 $H_*(X)$ 和 $H^*(X)$ 是对偶霍普夫代数. H 空间的概念是霍普夫(Hopf,H.)于 1941 年提出的.

同伦单位元(homotopy unit element)　见"H 空间".

H 群(H-group)　亦称群式空间. 一类特殊的拓扑空间. 具有同伦逆元的同伦可结合的 H 空间，即在同伦的意义下满足群公理的拓扑空间，同伦可交换的 H 群称为交换 H 群. 所有拓扑群都是 H 群. 任何带基点的拓扑空间 Y 上的闭路空间 ΩY 是 H 群，并且在 $n\geqslant 2$ 时 $\Omega^n Y$ 是交换 H 群. H 群的重要性在于：对于任何带基点的拓扑空间 X，保持基点的映射的同伦类的集合 $[X,Y]$ 成为群的充分必要条件是 Y 为 H 群. 因此，若 Y 是 H 群，则 Y 诱导出一个从带基点的拓扑空间范畴 $\mathscr{PT}$ 到群范畴 $\mathscr{L}$ 的反变函子 π^Y. 对于每个 $X\in\mathscr{PT}$，$\pi^Y(X)=[X,Y]$，对于 $\mathscr{PT}$ 中的每个态射

$$f: X\to X',\quad \pi^Y(f): [X',Y]\to[X,Y]$$

是由 $\pi^Y(f)[g]=[g\circ f]$ 定义的群同态，并且，若 Y 是交换 H 群，则 π^Y 是从范畴 $\mathscr{PT}$ 到交换群范畴 $\mathscr{AL}$ 的反变函子. 此外，若 $h: Y\to Y'$ 是 H 群同态，则 h 诱导出群同态 $h_*: [X,Y]\to[X,Y']$，使得 $h_*[f]=[h\circ f]$，从而 h 诱导出从反变函子 π^Y 到反变函子 $\pi^{Y'}$ 的一个自然变换.

群式空间(group like space)　即"H 群".

H 同态(H-homomorphism)　亦称 H 群同态. 一类特殊的同态. H 群之间或者 H 余群之间在同伦意义下的同态. 设 X 和 X' 都是 H 群，分别有乘法运算 m 和 m'，$h: X\to X'$ 是保持基点的映射，若映射 $h\circ m$ 和 $m'\circ(h\times h)$ 相对于基点同伦，则称 h 为 H 群 X 到 H 群 X' 的 H 同态或 H 群同态. 设 X 和 X' 是 H 余群，m 和 m' 分别是它们的余乘法，$h: X\to X'$ 是保持基点的映射，若使得映射 $m'\circ h$ 与 $(h\vee h)\circ m$ 相对于基点同伦，则称 h 为 H 余群 X 到 H 余群 X' 的 H 同态或 H 余群同态.

H 群同态(H-group homomorphism)　即"H 同态".

H 余群(H-cogroup)　一类特殊的拓扑空间. 设 (X,e) 是带基点的拓扑空间，若存在保持基点的映射 $\beta: X\to X\vee X$ 和 $j: X\to X$ 使得有下列相对于基点的同伦：

1. $(\beta\vee 1)\circ\beta\simeq(1\vee\beta)\circ\beta$.

2. $\nabla\circ(e\vee 1)\circ\beta\simeq 1$，其中 $\nabla: X\vee X\to X$ 定义为

$$\nabla(x,e)=\nabla(e,x)=x,$$

$e: X\to X$ 为映入基点 e 的常值映射.

3. $\nabla\circ(j\vee 1)\circ\beta\simeq e$，

则称 (X,e) 为 H 余群，β 为其余乘法，常值映射 e 为其同伦单位元，j 为求同伦逆元的运算.

若还存在相对于基点的同伦：

4. $T\circ\beta\simeq\beta$，其中 $T: X\vee X\to X\vee X$ 定义为

$$T(x_1,x_2)=(x_2,x_1),$$

则称 (X,e) 为交换 H 余群.

若 $(X,*)$ 是任意带基点的拓扑空间，则它的悬垂 SX 是 H 余群，其中，

$$\beta: SX\to SX\vee SX$$

定义为

$$\beta[t,x]=\begin{cases}([2t,x],*) & \left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2}\right),\\[2mm] (*,[2t-1,x]) & \left(\dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\right);\end{cases}$$

$j: SX\to SX$ 定义为 $j[t,x]=[1-t,x]$.

H 余群的重要性在于：对于任何带基点的拓扑空间 Y，保持基点的映射的同伦类的集合 $[X,Y]$ 成为群的充分必要条件是 X 为 H 余群. 因此，若 X 是 H 余群，则 X 诱导出一个从带基点的拓扑空间范畴 $\mathscr{PT}$ 到群范畴 $\mathscr{L}$ 的共变函子 π_X. 对于每个 $Y\in\mathscr{PT}$，$\pi_X(Y)=[X,Y]$；对于 $\mathscr{PT}$ 中每个态射

$$f: Y\to Y',\quad \pi_X(f): [X,Y]\to[X,Y']$$

是由 $\pi_X(f)[g]=[f\circ g]$ 定义的群同态，并且当 X 是交换 H 余群时，π_X 在交换群范畴中取值. 特别地，当 X 是 n 维球面 S^n 时，对于每个空间 (Y,y_0)，$\pi_{S^n}(Y,y_0)$ 是 Y 的第 n 个同伦群或 n 维同伦群 $\pi_n(Y,y_0)$. 此外，若 $h:X\to X'$ 是 H 余群同态，则 h 诱导出同态

$$h_*: \pi_{X'}(Y)\to\pi_X(Y),\quad h_*[g]=[g\circ h],$$

从而诱导出函子 $\pi_{X'}$ 到函子 π_X 的一个自然变换.

相对同伦(relative homotopy)　同伦群的推广. 若 (X,A,x_0) 是有基点的空间偶，定义

$$P(X;x_0,A)=(X,A,x_0)^{(I,1,0)}$$

是 X 中以 x_0 为始点，终点在 A 中的所有道路的空间，带有紧开拓扑，则有自然的连续映射 π：$P(X;x_0,A)\to A$，定义如下：对于 $\omega\in P(X,x_0,A)$，$\pi(\omega)=\omega(1)$. 若 $n\geqslant1$ 是整数，则 (X,A,x_0) 的第 n 个相对同伦集 $\pi_n(X,A,x_0)$ 定义为

$$\pi_n(X,A,x_0)=\pi_0(\Omega^{n-1}(P(X;x_0,A)),\omega_0),$$

其中 Ω 是定义在有基点的拓扑空间范畴上的闭路函子，$\pi_0(\Omega^{n-1}(P(X;x_0,A)),\omega_0)$ 是 $\Omega^{n-1}(P(X;x_0,A))$ 中包含常值闭路 ω_0 的道路连通分支作为基点的所有道路连通分支的集合. 由函子 Ω 的性质可知，$\pi_n(X,A,x_0)=\pi_{n-1}(P(X;x_0,A),\omega_0)$. 对于 $n\geqslant2$，$\pi_n(X,A,x_0)$ 是一个群；对于 $n\geqslant3$，它是一个交换群；对于一切 $n\geqslant1$，π_n 是定义在有基点的拓扑空间偶上的一个函子. 若 $f:(X,A,x_0)\to(Y,B,y_0)$ 是空间偶之间的保基点连续映射，则记

$$f_*=\pi_n(f): \pi_n(X,A,x_0)\to\pi_n(Y,B,y_0).$$

相对同伦有一些与相对同调相类似的性质，例如，相对同伦的正合同伦序列等.

正合同伦序列(exact homotopy sequence)　同伦的重要性质之一. 联系(绝对)同伦与相对同伦的一种关系. 设 (X,A,x_0) 是有基点的空间偶，则有自然的连续映射 $\pi:P(X;x_0,A)\to(A,x_0)$，从而得到一个映射

$$\pi_{n-1}(\pi): \pi_{n-1}(P(X;x_0,A))\to\pi_{n-1}(A,x_0),$$

用 ∂ 记这个映射，即有

$$\partial: \pi_{n-1}(P(X;x_0,A))=\pi_n(X,A,x_0)\to\pi_{n-1}(A,x_0).$$

类似地，可以定义映射

$$j_*: \pi_n(X,x_0)\to\pi_n(X,A,x_0),$$
$$i_*: \pi_n(A,x_0)\to\pi_n(X,A,x_0),$$

它们分别是由包含映射

$$j: (X,\varnothing,x_0)\to(X,A,x_0),$$
$$i: (A,\varnothing,x_0)\to(X,A,x_0)$$

诱导的映射. 这些集合及映射有如下关系定理：对于带有基点的空间偶 (X,A,x_0)，下列序列是正合的：

$$\cdots\to\pi_{n+1}(X,A,x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_n(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_n(X,x_0)$$
$$\xrightarrow{j_*}\pi_n(X,A,x_0)\to\cdots\to\pi_1(X,A,x_0)$$
$$\xrightarrow{\partial}\pi_0(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_0(X,x_0).$$

此定理中的序列称为空间偶 (X,A,x_0) 的正合同伦序列. 正合同伦序列还有几种其他形式的变体，例如：映射的正合同伦序列、空间三元组(triple)的正合同伦序列等.

空间偶的正合同伦序列(exact homotopy sequence of pair)　见"正合同伦序列".

弱同伦等价(weak homotopy equivalence)　同伦等价的推广. 设 $f:X\to Y$ 是拓扑空间之间的连续映射，$n\geqslant0$ 是整数，若对于一切 $x_0\in X$，当 $r<n$ 时，$f_*:\pi_r(X,x_0)\to\pi_r(Y,y_0)$ 是双射，$f_*:\pi_n(X,x_0)\to\pi_n(Y,y_0)$ 是满射，则 f 称为 n 阶等价；若对于一切整数 $n\geqslant0$，f 都是 n 阶等价，则称 f 是弱同伦等价. 它是同伦等价概念的一种弱化. 事实上，由同伦群的基本性质(同伦型不变性)可知，每个同伦等价是弱同伦等价，但是反向的蕴涵一般是不对的. 怀特海(Whitehead, J. H. C)的一个著名的结果表明，通过对拓扑空间的种类加以合理的限制，上述蕴涵的逆成立.

n 阶等价(n-equivalence)　见"弱同伦等价".

艾伦伯格-麦克莱恩空间(Eilenberg-MacLane space)　在同伦论与上同调运算中起着重要作用的一类空间. 一个弧连通的空间，若具有性质：除去某一个维数的同伦群以外，其他维数的同伦群均为平凡群，则称它为艾伦伯格-麦克莱恩空间. 若 Y 为艾伦伯格-麦克莱恩空间，有

$$\pi_i(Y)=0\ (i\neq n,\pi_n(Y)=\pi),$$

则可记为 $K(\pi,n)$. 例如，1 维球面 S^1 为 $K(\mathbf{Z},1)$ 型空间；无限维射影空间 $\mathbf{R}P(\infty)$ 为 $K(\mathbf{Z}_2,1)$ 型空间；无限维复射影空是 $\mathbf{C}P(\infty)$ 为 $K(Z,2)$ 型空间. 关于艾伦伯格-麦克莱恩空间，有以下结果：若 n 为正整数，π 为给定的群(当 $n>1$ 时，π 为交换群)，则存在一个艾伦伯格-麦克莱恩空间 $K(\pi,n)$，并且这样的两个空间是弱同伦等价的.

三联组的正合同伦序列(exact homotopy sequence of triad)　同伦群的重要性质之一. 若 X 是拓扑空间，A,B 都是 X 的子空间，$x_0\in A\cap B$ 与 $X=A\cup B$，则 $(X;A,B,x_0)$ 称为空间三联组(triad). 注意这与空间三元组(triple)是不同的. 若 $(X;A,$

$B,x_0)$是空间三联组，$n\geqslant 2$为整数，则它的第n个三联组同伦集定义为

$$\pi_n(X;A,B,x_0) = \pi_{n-1}(P(X;x_0,B),P(A;x_0,A\cap B),\omega_0).$$

应用空间偶的正合同伦序列以及

$$\pi_n(X;,B,x_0)=\pi_{n-1}(P(X;x_0,B),\omega_0),$$

$$\pi_n(A,A\cap B,x_0)=\pi_{n-1}(P(x_0,A\cap B,\omega_0)),$$

可得空间三联组$(X;A,B,x_0)$的正合同伦序列：

$$\cdots\to\pi_{n+1}(X;A,B,x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_n(A,A\cap B,x_0)\xrightarrow{j_*}\pi_n(X,B,x_0)\xrightarrow{k_*}\pi_n(X,A,B,x_0)\to\cdots,$$

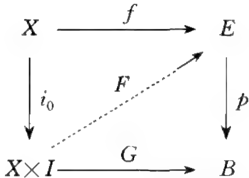
这里的∂,j_*,k_*都是由正合同伦序列中的相应映射经适当的变更而得到的.

空间三联组(triad of a space)　见“三联组的正合同伦序列”.

***n* 连通空间偶**(n-connected pair)　单连通性的高维情形. 设(X,A)是空间偶，若X的每个道路连通分支都与A相交，则称(X,A)是0连通的. 设空间偶(X,A)是0连通的，若对于$1\leqslant r\leqslant n$和任意$a\in A,\pi_r(X,A,a)=0$，则称(X,A)是n连通的. 设X为道路连通的拓扑空间，若对于$1\leqslant k\leqslant n$和任意$x\in X,\pi_k(X,x)=0$，则称X为n连通的. 1连通空间恰好就是单连通空间.

***n* 连通空间**(n-connected space)　见“n连通空间偶”.

同伦提升问题(homotopy lift problem)　同伦论的基本问题之一. 设连续映射$p:E\to B$，若对于每个连续映射$f:X\to E$和$p\circ f$的同伦映射$G:X\times I\to B$，存在同伦$F:X\times I\to E$，满足$f=F|X\times\{0\}$与$p\circ F=G$，即：B中的任何同伦都可“提升”为E中的同伦，则称连续映射f关于空间X有同伦提升性质. 用图示的形式是说，以下图形可以用F来完成并使之交换，



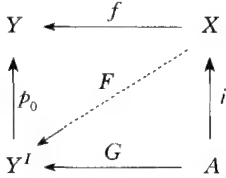
其中$i_0:X\to X\times I$是由$i_0(x)=(x,0)(x\in X)$定义的映射. 同伦提升问题就是关于同伦映射是否有提升以及对什么样的空间有同伦提升性质等这样一些相关的问题. 此问题与纤维丛理论有十分密切的关系. 设映射$p:E\to B$，若它对于一切空间X都有同伦提升性质，则称为纤维映射.

纤维映射(fibre mapping)　见“同伦提升问题”.

同伦扩张问题(homotopy extension problem)　同伦提升问题的对偶形式，为同伦论中的另一个基本问题. 设映射$i:A\to X$(通常设为包含映射)，若对于每个连续映射$f:X\to Y$及$f|A$的同伦

$$G:A\times I\to Y,$$

存在f的同伦$F:X\times I\to Y$使得F是G的扩张，即可以用F来完成下列交换图形，



其中$p_0:Y^I\to Y$是由$p_0(\omega)=\omega(0)(\omega\in Y^I)$定义的映射，则称$i:A\to X$关于空间$Y$有同伦扩张性质. 若映射$i:A\to X$关于一切空间$Y$有同伦扩张性质，则称$i$为余纤维映射. 所谓同伦扩张问题就是判别一个映射是否有同伦扩张性质及相对于哪些空间有同伦扩张性质等相关的问题.

同伦扩张性质(homotopy extension property)　见“同伦扩张问题”.

余纤维映射(cofiber mapping)　见“同伦扩张问题”.

同伦切除定理(homotopy excision theorem)　同伦论的一个重要定理. 同伦群与同调群有很多相似的性质，如同伦型不变性、正合序列等. 但是两者也有一些本质区别. 例如，关于(奇异)同调群的切除性质对于同伦群来讲一般不成立. 这也是使同伦群难以计算的重要原因之一. 然而，通过对涉及的空间做一些限制，仍可以得到某种形式的切除性质. 同伦切除定理：若$(X;A,B,x_0)$是空间的三联组，使得$(A,A\cap B)$是n连通的相对CW复形$(n\geqslant 1)$，$(B,A\cap B)$是m连通的相对CW复形，则由包含映射

$$j:(A,A\cap B,x_0)\to(X,B,x_0)$$

诱导的映射

$$j_*:\pi_r(A,A\cap B,x_0)\to\pi_r(X,B,x_0)$$

对于$1\leqslant r<m+n$是同构，对于$r=n+m$是满同态.

怀特海定理(Whitehead theorem)　同伦论中一条重要的定理. 怀特海定理断言：若X,Y都是CW复形，则连续映射$f:X\to Y$是同伦等价当且仅当它是弱同伦等价. 该定理表明，在CW复形的范畴中讨论同伦论问题是非常合适的.

胞腔逼近定理(cellular approximation theorem)　代数拓扑学的一条重要定理. 与单纯逼近类似，CW复形之间的连续映射可以用胞腔映射来逼近. 相对CW复形之间的连续映射

$$f:(X,A)\to(Y,B)$$

称为胞腔的，若对于每个$n\geqslant -1,f((X,A)^n)\subset(Y,B)^n$. 胞腔逼近定理断言：相对CW复形之间的任何连续映射$f:(X,A)\to(Y,B)$都相对于A同伦于一个胞腔映射，并且相对于A同伦的任何两个胞腔映射的同伦都可以通过一个胞腔同伦来做到.

几何无关点组(geometrical independent points)　亦称占有最广位置点组. n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中具有特定性质的一些点的集合. 设给定n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的$q+1$个点$A=\{a_0,a_1,\cdots,a_q\}$，若向量组$\{a_1$

$-a_0, a_2-a_0, \cdots, a_q-a_0\}$线性无关，则 A 称为几何无关点组. 并约定单点集 $A=\{a_0\}$总是几何无关的. 几何无关点组的定义与点组排列次序无关.

占有最广位置点组(geometrical independent points)　见“几何无关点组”.

单形(simplex)　点、线段、三角形和四面体的高维推广. 它是构成多面体的“砖块”. 设 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_q$ 是 n 维欧氏空间 R^n 中几何无关点组，R^n 中点集

$$\left\{x=\sum_{i=0}^{q}\lambda_i a_i \,\middle|\, \sum_{i=0}^{q}\lambda_i=1, \lambda_i \geqslant 0, \lambda_i \in \mathrm{R}\right\}$$

称为以 $a_0, a_1, \cdots, a_q$ 为顶点的 q 维单纯形，简称 q 维单形，记为 $\underline{s}^q=(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_q)$，有序数组$(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$称为点 x 在 q 维单形中的重心坐标，记为 $x=(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$. 设 $\underline{s}^q=(a_0, a_1, \cdots, a_q)$是 q 维单形，重心坐标为

$$\left(\frac{1}{q+1}, \frac{1}{q+1}, \cdots, \frac{1}{q+1}\right)$$

的点 s^* 称为单形 $\underline{s}^q$ 的重心. 1 维单形的重心是线段的中点，2 维单形的重心是三角形的三条中线的交点. 若单形 $\underline{s}^q=(a_0, a_1, \cdots, a_q)\subset \mathrm{R}^n$，$\{i_0, i_1, \cdots, i_r\}\subset\{0, 1, 2, \cdots, q\}$，则 $a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_r}$是几何无关点组. 从而 R^n 中有 r 维单形，$\underline{s}^r=(a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r})$，$\underline{s}^r$ 称为单形 $\underline{s}^q$ 的一个 r 维面，记为 $\underline{s}^r \leqslant \underline{s}^q$. 当 $r<q$ 时，$\underline{s}^r$ 称为 $\underline{s}^q$ 的真面，1 维面也称为棱. 设 $\underline{s}^q$ 为 n 维欧氏空间 R^n 中的 q 维单形，$\underline{s}^q$ 中重心坐标全为正数的点称为单形 $\underline{s}^q$ 的内点，至少有一个重心坐标为零的点称为单形的边缘点. q 维单形 $\underline{s}^q$ 的全体内点的集合称为一个 q 维开单形，或称为单形 $\underline{s}^q$ 的内部，记为 $\mathrm{int}\,\underline{s}^q$.

开单形(open simplex)　见“单形”.

标准单形(standard simplex)　一类特殊的单形. 它在研究复形性质及奇异同调理论时都要用到. 设$\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$是 $n+1$ 维欧氏空间 R^{n+1}的一组标准正交基. 从而$\{e_0, e_1, \cdots, e_q\}$是几何无关点组($q\leqslant n$)，单形 $\Delta^q=(e_0, e_1, \cdots, e_q)$称为标准 q 维单形或自然 q 维单形. 其优点是在 Δ^q 中点的重心坐标和直角坐标是一致的.

单纯复形(simplicial complex)　亦称几何单纯复形. 单纯同调论中的一个基本概念. 用单形构造的并且按一定规则组成的图形. 它是定义一类拓扑空间的工具. 设 K 是 n 维欧氏空间 R^n 中单形的有限集合，称 K 为单纯复形，简称复形，若它满足：

1. 若 $\underline{s}$ 是 K 中的单形，则 $\underline{s}$ 的任意面都属于 K.

2. 若 $\underline{s_1}$ 和 $\underline{s_2}$ 为 K 中任意两个单形，则 $\underline{s_1}\cap \underline{s_2}$ 或者是空集，或者是 $\underline{s_1}$ 与 $\underline{s_2}$ 的一个公共面.

K 中单形维数的最大值称为复形 K 的维数，记为 $\dim K$. 这里定义的复形是由有限个单形构成的有限复形，根据需要还可推广定义无穷复形. 若 K 是一个复形，则 K 的全体维数不大于 r 的单形组成一个复形，称为 K 的 r 维骨架，记为 K^r. K^0 即是 K 的顶点集合. 若 $\underline{s}^q$ 是一个 q 维单形，则它的全体面组成一个 q 维复形，称为单形 $\underline{s}^q$ 的闭包复形，记为 $\mathrm{cl}\,\underline{s}^q$；而 $\underline{s}^q$ 的全体真面组成一个 $q-1$ 维复形，称为 $\underline{s}^q$ 的边缘复形，记为 $\mathrm{Bd}\,\underline{s}^q$.

几何单纯复形(geometrical simplicial complex)　即“单纯复形”.

复形的维数(dimension of simplicial complex)　见“单纯复形”.

复形的 r 维骨架(r-dimensional skeleton of simplicial complex)　见“单纯复形”.

闭包复形(closure complex)　见“单纯复形”.

边缘复形(boundary complex)　见“单纯复形”.

复形的多面体(polyhedron of complex)　亦称复形的基础空间. 一类特殊的拓扑空间. 复形是代数拓扑中的基本概念，以它作为工具进行研究，而最终目的是得出它所给出的拓扑空间，也就是多面体的拓扑性质. 若 K 是 n 维欧氏空间 R^n 中的复形，则 K 中全体单形的所有点组成的集合

$$\bigcup_{\underline{s}\in K} \underline{s},$$

作为 R^n 的子空间称为 K 的多面体，记为$|K|$，K 称为多面体$|K|$的一个单纯剖分或三角剖分. 一般地，多面体可以有不同的单纯剖分. 有限复形的多面体是紧致空间.

复形的基础空间(basic space of complex)　即“复形的多面体”.

单纯剖分(simplicial dissection)　见“复形的多面体”.

三角剖分(triangulation)　见“复形的多面体”.

复形偶(pair of complexes)　特殊的一对复形. 若 K 和 L 都是单纯复形，$L\subset K$，则称 L 为 K 的子复形，$|L|$ 称为 $|K|$ 的子多面体，(K, L) 与 $(|K|, |L|)$分别称为复形偶与多面体偶.

多面体偶(pair of polyhedron)　见“复形偶”.

子复形(subcomplex)　见“复形偶”.

子多面体(subpolyhedron)　见“复形偶”.

可剖分空间(triangulated space)　亦称弯曲多面体. 一类拓扑空间. 为了使复形的研究结果适用于更广范围的拓扑空间，如球面、环面等，可做如下推广. 设 X 是拓扑空间，若存在单纯复形 K 与同胚映射 $f: |K|\to X$，则称 X 为可剖分空间，(K, f)或 K 称为 X 的一个剖分或单纯剖分. 为了和多面体$|K|$加以区别，X 称为弯曲多面体，K 中单形的同胚像称为弯曲单形，全体弯曲单形的集合称为弯曲复形.

弯曲多面体(curved polyhedron)　即“可剖分

空间”.

剖分(dissection) 见“可剖分空间”.

弯曲单形(curved simplex) 见“可剖分空间”.

弯曲复形(curved complex) 见“可剖分空间”.

球面的剖分(dissection of sphere) 利用单纯剖分概念对球面进行剖分. 设 S^2 为 2 维球面,取其上四个几何无关点,做成 3 维单形 $\underline{s}$(如取球面的内接正四面体),若 K 为单形 $\underline{s}$ 的边缘复形,以单形 $\underline{s}$ 的重心 $\hat{s}$ 为中心做向径投影 $\pi:|K|\to S^2$,则 π 是同胚映射,(K,π)称为球面 S^2 的四面形剖分. 推广到 n 维球面 S^n,只需在 S^n 上取 $n+2$ 个几何无关点,类似上面步骤可得 n 维球面 S^n 上推广的四面形剖分.

球面还有一种八面形剖分. 设 S^2 为 3 维欧氏空间 R^3 中以原点为中心的 2 维球面,考虑其上的三点组 $\{\varepsilon_0e_0,\varepsilon_1e_1,\varepsilon_2e_2\}$,$\varepsilon_i=\pm1$ $(i=0,1,2)$,其中$\{e_0,e_1,e_2\}$为 R^3 中标准正交基,这样共得到八个 2 维单形 $(\varepsilon_0e_0,\varepsilon_1e_1,\varepsilon_2e_2)$,这八个 2 维单形及其面组成 2 维复形 K,若以原点为中心做向径投影 $\pi:|K|\to S^2$,则 π 是同胚映射,(K,π)称为球面 S^2 的八面形剖分. 这结果直接可推广到 n 维球面 S^n 上,得到 n 维球面 S^n 上推广的八面形剖分.

四面形剖分(tetrahedroid dissection) 见“球面的剖分”.

八面形剖分(octahedral dissection) 见“球面的剖分”.

同构复形(isomorphic complexes) 本质上没有差别的两个复形. 设 K 和 L 是两个复形,若 K 的全体顶点集 $K^0=\{a_i|i=0,1,2,\cdots,r\}$和 L 的全体顶点集 $L^0=\{b_i|i=0,1,\cdots,l\}$之间存在一个一一对应(因而 K 和 L 的顶点个数相同,设是 $r+1$ 个),

$$\Phi:K^0\to L^0,\quad a_i\mapsto b_i\ (i=0,1,2,\cdots,r),$$

使得$(a_{i_0},a_{i_1},\cdots,a_{i_q})$是 K 的一个 q 维单形当且仅当$(b_{i_0},b_{i_1},\cdots,b_{i_q})$是 L 的一个 q 维单形,则称 K 与 L 是同构复形. 复形的同构是一个等价关系,它把全体复形分为若干个同构类. 若复形 K 与 L 同构,则记为 $K\cong L$. 同构的复形有一个重要性质:若两个复形同构,则它们的多面体同胚. 用记号表示,即,若 $K\cong L$,则$|K|\cong|L|$.

抽象复形(abstract complex) 几何复形的一种抽象. 将几何单纯复形的一些良好性质,利用同构复形的思想,加以抽象化就得到抽象复形的概念. 同构的复形对应同一个抽象复形. 设 $A=\{a_0,a_1,\cdots,a_m\}$是非空的有限集合,$\mathscr{K}$ 是 A 中某些指定的非空子集组成的子集族,称 $\mathscr{K}$ 为抽象复形,若 $\mathscr{K}$ 满足:

1. 单点集$\{a_i\}$,$i=0,1,2,\cdots,m$ 都属于 $\mathscr{K}$.

2. 对于 A 的每一个指定子集的非空子集还是一个指定子集,即,如果 S,S'是 A 的子集,并且 $S\in\mathscr{K}$,$S'\subset S$,那么 $S'\in\mathscr{K}$.

设 $\mathscr{K}$ 是抽象复形,若 $S\in\mathscr{K}$,则称 S 为抽象单形;当 S 中有 $q+1$ 个元素时,称 S 为 q 维抽象单形;零维抽象单形称为顶点;$\mathscr{K}$ 中诸抽象单形的维数最大值,称为抽象复形 $\mathscr{K}$ 的维数.

抽象单形(abstract simplex) 见“抽象复形”.

抽象复形的维数(dimension of abstract complex) 见“抽象复形”.

抽象复形的几何实现(realization of an abstract complex) 抽象复形的几何意义. 设 $\mathscr{K}$ 是抽象复形,L 是几何单纯复形,若存在 $\mathscr{K}$ 的顶点集与 L 的顶点集之间的一一对应,并且在此对应下,使得 $\mathscr{K}$ 的顶点集组成为抽象单形当且仅当 L 中对应顶点集组成为 L 的单形,则称几何单纯复形 L 为抽象复形 $\mathscr{K}$ 的一个几何实现. 同一个抽象复形的各个几何实现互相同构,它们的多面体互相同胚,并且有几何实现定理:任何 n 维抽象复形都存在 $2n+1$ 维欧氏空间 R^{2n+1}中的一个几何实现. 确实存在 n 维抽象复形不能在 R^{2n}中几何实现,例如,五个顶点的完全图 K_5(完全图为每对顶点都有边相连的图)这个 1 维复形就不能在平面 R^2 中几何实现;还有完备二分图 $K_{3,3}$也是一个 1 维复形,它也不能在平面 R^2 中几何实现. 图论中著名的库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)定理给出了 1 维(抽象)复形在 R^2 中可以几何实现的充分必要条件,用图论的术语说就是:图 G 是平面的(在平面上可嵌入的)充分必要条件是图 G 不包含 K_5 或 $K_{3,3}$的剖分(参见本卷《组合学》的图论部分).

几何实现定理(realization theorem) 见“抽象复形的几何实现”.

有向单形(oriented simplex) 建立同调群的重要概念. 一个 q 维单形 $\underline{s}^q=(a_0,a_1,\cdots,a_q)$,它的 $q+1$ 个顶点有$(q+1)!$ 个不同次序的排列. 当 $q>0$ 时,这些排列可分成两组,同组的任意两个排列相差偶数个对换,不同组的任意两个排列相差奇数个对换,这两组排列称为单形 $\underline{s}^q$ 的两个定向. 换言之,根据顶点次序是奇排列还是偶排列分成两组,称为 $\underline{s}^q$ 的两个定向,并且称为互为相反的定向. 指定一个定向的单形称为有向单形. 例如,排列 $a_1,a_0,\cdots,a_q$ 与 $a_0,a_1,\cdots,a_q$ 就确定了 $\underline{s}^q$ 的两个相反定向,相应的两个有向单形分别记为$\langle a_0,a_1,\cdots,a_q\rangle$与$\langle a_1,a_0,\cdots,a_q\rangle$,若把一个记为 s^q,则另一个就记为$-s^q$. 对于零维单形只有一个顶点,为统一起见用$+\langle a_i\rangle$与$-\langle a_i\rangle$表示它的两个定向. 有向单形在 $q=1,2$ 时分别是有向线段和有向三角形. 为区别起见,原来的单形可称

为无向单形．单纯复形是几何对象，而群是代数对象，从复形过渡到它的同调群，关键是单形的定向与边缘算子这两个概念．

无向单形(non-oriented simplex)　见“有向单形”．

链群(chain group)　建立同调群的重要概念．设 K 是一个 n 维复形，它的全体 q 维单形的集合记为 $\{\underline{s}_i^q \mid i=1,2,\cdots,\alpha_q, q=0,1,\cdots,n\}$．设 s_i^q 是 q 维单形 $\underline{s}_i^q$ 任意选定了一个定向后形成的有向单形，当 $q=0$ 时，记 $s_i^0=+\langle a_i\rangle$，则这样的有向单形组

$$\{s_i^q \mid i=1,2,\cdots,\alpha_q, q=0,1,2,\cdots,n\}$$

称为复形 K 的有向单形的一个基本组．对于整数加群 Z 中的整数 g_i，约定 $g_i s_i^q=(-g_i)(-s_i^q)$，则以整数为系数的任意一个线性组合

$$x_q = g_1 s_1^q + g_2 s_2^q + \cdots + g_{\alpha_q} s_{\alpha_q}^q = \sum_{i=1}^{\alpha_q} g_i s_i^q$$

称为 K 的一个 q 维链；当其系数全为零时，这个链用 0 表示．若另有 q 维链

$$y_q = \sum_{i=1}^{\alpha_q} h_i s_i^q,$$

定义它们的和为

$$x_q + y_q = \sum_{i=1}^{\alpha_q} (g_i + h_i) s_i^q,$$

则对这样的加法，K 的全体 q 维链形成一个自由交换群，称为 K 的 q 维链群，记为 $C_q(K;\mathrm{Z})$，或简记为 $C_q(K)$．基本组 $\{s_i^q\}$ 为这链群的一组基．为了方便也可将 q 推广到所有整数，当 $q<0$ 或 $q>n$ 时，规定 $C_q(K)=0$．

***q* 维链**(q-dimensional chain)　见“链群”．

边缘算子(boundary operator)　亦称边缘同态．建立同调群的重要概念．它是有向三角形的边缘为三条有向棱的推广．按下列方式定义的 n 维复形 K 的从 q 维链群到$(q-1)$维链群的同态

$$\partial_q: C_q(K) \to C_{q-1}(K) \quad (0 \leqslant q \leqslant \dim K = n),$$

称为 q 维边缘算子：

1. 对于有向单形 $s^q=\langle a_0,a_1,\cdots,a_q\rangle$，

$$\partial_q s^q = \begin{cases} 0 & (q=0), \\ \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle a_0,a_1,\cdots,\hat{a}_i,\cdots,a_q\rangle, & (q=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

(这里 $\hat{a}_i$ 表示将顶点 a_i 除去)．

2. 对于任意 q 维链

$$x_q = \sum_{i=1}^{\alpha_q} g_i S_i^q, \quad \partial_q x_q = \sum_{i=1}^{\alpha_q} g_i \partial_q S_i^q.$$

对于 $q<0$ 或 $q>n$，约定 $\partial_q=0$，即为零同态．

边缘算子最重要的性质是，对于任意整数 q，有

$$\partial_{q-1} \circ \partial_q: C_q(K) \to C_{q-2}(K)$$

是零同态，也记为 $\partial^2=0$．

边缘同态(boundary homomorphism)　见“边缘算子”．

闭链群(group of cycles)　链群的一个子群．若复形 K 的一个 q 维链 x_q 的边缘链 $\partial_q x_q=0$，则称 x_q 为 q 维闭链．K 的所有 q 维闭链的集合就是边缘同态 ∂_q的核 $\ker\partial_q$称为复形 K 的 q 维闭链群，记为 $Z_q(K,\mathrm{Z})$或简记为$Z_q(K)$，这里 Z 为整数加群．$Z_q(K)$是 $C_q(K)$的子群．

***q* 维闭链**(q-dimensional cycle)　见“闭链群”．

边缘链群(group of boundary chain)　链群的一个子群．若复形 K 的一个 q 维链 x_q 是 K 的一个$(q+1)$维链 x_{q+1}的边缘，即 $x_q=\partial_{q+1}x_{q+1}$，则 x_q 称为 q 维边缘链．所有 K 的 q 维边缘链的集合是 $C_{q+1}(K)$在边缘同态 ∂_{q+1}下的像 $\mathrm{Im}\,\partial_{q+1}$，称为复形 K 的 q 维边缘链群，记为 $B_q(K,\mathrm{Z})$或简记为$B_q(K)$，这里 Z 为整数加群．$B_q(K)$是 $C_q(K)$的子群，由边缘同态性质得出，$B_q(K)$也是 $Z_q(K)$的子群，即

$$B_q(K) \subset Z_q(K) \subset C_q(K).$$

根据群的同态的定理，由 $\partial_q: C_q(K) \to C_{q-1}(K)$可得满同态 $\partial_q: C_q(K) \to B_{q-1}(K)$，其核为 $Z_q(K)$，再由同构定理得

$$C_q(K)/Z_q(K) \cong B_{q-1}(K).$$

***q* 维边缘链**(q-boundary chain)　见“边缘链群”．

单纯同调群(simplicial homology group)　一个重要的拓扑不变量，它也是同伦型不变量．复形 K 的链群、闭链群和边缘链群与多面体 $|K|$ 的单纯剖分有关，因此它们不可能是拓扑不变量．然而闭链群关于边缘链群的商群 $Z_q(K)/B_q(K)$是与剖分无关的，称这个商群为 K 的 q 维单纯同调群，简称 q 维同调群，记为 $H_q(K)$．同调群是交换群．当 $q<0$ 或 $q>\dim K$ 时，按照链群推广到所有整数维数的规定，有 $H_q(K)=0$．同调群的重要性在于 $H_q(K)$是多面体 $|K|$ 的同伦型不变量，更是拓扑不变量．它有很多重要应用．同调群中的元素是闭链群中的元素按边缘链群的陪集分解的等价类．精确地描述如下：设 z 和 z' 为两个 q 维闭链，若 $z-z' \in B_q(K)$，则称它们是同调的，记为 $z\sim z'$．若 z 为边缘链，即 z 为 $B_q(K)$ 的元素，则称在 K 上 z 同调于 0 或称 z 是 K 上的零调链，记为在 K 上 $z\sim 0$．这种同调关系是$Z_q(K)$上一个等价关系，按同调关系分成的等价类称为同调类，并且用$[z]$表示闭链 z 所属的同调类．

同调(homology)　见“单纯同调群”．

同调类(homology class)　见“单纯同调群”．

单纯复形的连通性(connectivity of simplicial complex)　拓扑空间的连通性在复形上的推广．若复形 K 不是两个非空不相交的子复形的并集，则称复形 K 是连通的．若 L 是复形 K 的连通子复形，并

且 L 不是任何其他连通子复形的真子复形(实际上 L 是 K 的极大的连通子复形),则称 L 为 K 的一个连通分支.复形 K 的连通性等价于下列各条件:

1. 对于复形 K 中任意顶点 a 与 b,存在 K 的一系列顶点 $a=a_0,a_1,\cdots,a_{p-1},a_p=b$,使得$(a_i,a_{i+1})$都是 K 的 1 维单形($i=0,1,2,\cdots,p-1$).

2. 复形 K 的多面体$|K|$是道路连通的.

3. 复形 K 的多面体$|K|$是连通的.

任意复形 K 都是有限个互不相交的连通分支 $K_1,K_2,\cdots,K_r$ 的并,因此多面体$|K|$是相同个数互不相交的连通分支$|K_1|,|K_2|,\cdots,|K_r|$的并.若单纯复形 K 是 r 个连通分支 $K_1,K_2,\cdots,K_r$ 的并集,则各维同调群 $H_q(K)$有下列直和分解

$$H_q(K)\cong H_q(K_1)\oplus H_q(K_2)\oplus\cdots\oplus H_q(K_r).$$

对于零维同调群,当复形 K 是连通复形时,$H_0(K)\cong\mathbb{Z}$,这里 $\mathbb{Z}$ 是整数加群.而当复形 K 是 r 个连通分支的并集时,$H_0(K)$是 r 个整数加群 $\mathbb{Z}$ 的直和.即

$$H_0(K)\cong\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{r个}.$$

复形的连通分支(components of complex) 见"单纯复形的连通性".

零维同调群的结构(structure of 0-dimensional homology group) 见"单纯复形的连通性".

***n* 维射影空间**(n-dimensional projective space) 一类重要的拓扑空间.n 维射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 有几种拓扑等价的描述方法,常见的有:

1. 把 $\mathbb{R}P^n$ 看做叠合 n 维单位球面 S^n 的对径点得到的空间.

2. 把 $\mathbb{R}P^n$ 看做从 n 维单位球体 D^n 出发,将其边界球面上的对径点叠合而得到的空间.

3. 设 $\mathbb{R}^{n+1}$为 $n+1$ 维欧氏空间,把 $\mathbb{R}P^n$ 看做从 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$出发,将在同一条过原点的直线上的点叠合在一起所得到的空间.

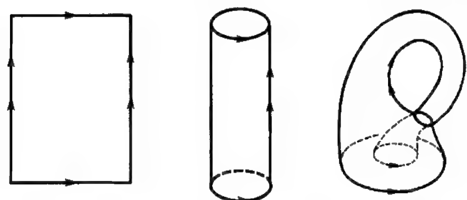
以上三种方式所描述的 n 维射影空间是同胚的.例如,射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 可看做是叠合圆域的边界上对径点得到的空间,并取定它的一个剖分 K,通过计算得到它的整系数同调群为

$$H_0(K)\cong\mathbb{Z},\quad H_1(K)\cong\mathbb{Z}_2,\quad H_2(K)=0.$$

这里 $\mathbb{Z}$ 是整数加群,$\mathbb{Z}_2$ 是整数模 2 加群.

克莱因瓶(Klein bottle) 一种重要的曲面.它是具有封闭性和单侧性的曲面.它看做由一个长方形按附图中箭头方向叠合左右两边和上下两边而得到.它无法在 3 维空间内表现出来,附图是在通常 3 维空间中描绘的示意图,图中它自身相交于一个小圆周.但是克莱因瓶完全可以在 4 维空间内避免自己相交而表示出来.经过剖分可得到复形 K,并且计算它的整系数同调群为

$$H_0(K)\cong\mathbb{Z},\quad H_1(K)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2,\quad H_2(K)=0,$$

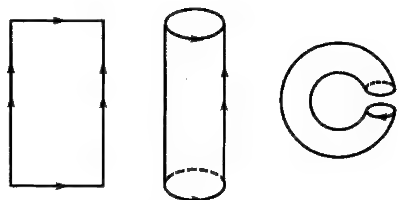


这里 $\mathbb{Z}$ 为整数加群,$\mathbb{Z}_2$ 为整数模 2 加群.

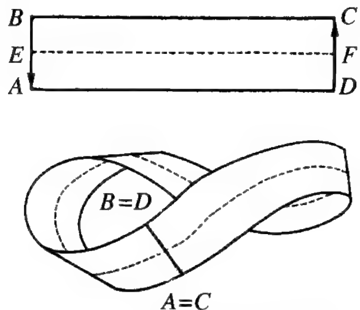
环面(torus) 一种重要的曲面.通常的环面,它可以看做由一个长方形按照附图中箭头方向叠合左右两边和上下两边而得到的.经过剖分可得到复形 K,并且计算其整系数同调群为

$$H_0(K)\cong\mathbb{Z},\quad H_1(K)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z},\quad H_2(K)\cong\mathbb{Z},$$

这里 $\mathbb{Z}$ 是整数加群.



默比乌斯带(Möbius strip) 拓扑学研究的一种曲面.可用下列方法构成,如附图所示将长方形 $ABCD$ 沿其水平中线 EF 扭转 180°,然后再将它的两条垂直边 BA 与 DC 按箭头方向叠合起来.这曲面具有单侧性,经过剖分可得到复形 K,计算出其整系数同调群为 $H_0(K)\cong\mathbb{Z},H_1(K)\cong\mathbb{Z},H_2(K)=0$,这里 $\mathbb{Z}$ 为整数加群.



锥形(cone) 一种特殊的复形.设 K 是一个复形,v 是一个点,使得对于任意单形 $\underline{s}\in K$,v 与 $\underline{s}$ 的顶点集为几何无关点组,当 $\underline{s}=(a_{i_0},a_{i_1},\cdots,a_{i_q})$时,记单形 $v\underline{s}=(v,a_{i_0},a_{i_1},\cdots,a_{i_q})$,则复形

$$vK=\{v\}\cup K\cup\{v\underline{s}\,|\,\underline{s}\in K\},$$

称为 K 上以 v 为顶点的锥形.它的整系数同调群为

$$H_q(vK)=\begin{cases}\mathbb{Z} & (q=0),\\ 0 & (q\neq 0).\end{cases}$$

这里 $\mathbb{Z}$ 为整数加群,

假流形(pseudo-manifold) 一类重要的复形.对于球面 S^n、环面 T、射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 以及克莱因瓶等,从单纯剖分的结构这个角度概括它们的共同特点,而得到闭假流形概念.设 M 是一个 n 维复形(n

>0)，若它满足下述条件，则称 M 为 n 维闭假流形：

1. M 中每一个单形都是 M 的至少一个 n 维单形的面，这性质称为 M 的纯粹性.

2. M 的每一个 $n-1$ 维单形恰是 M 的两个 n 维单形的公共面，这性质称为 M 的无分支性.

3. M 的任意两个 n 维单形 s_1^n 和 s^n，存在一串互相间隔的 n 维单形与 $n-1$ 维单形：

$$s_1^n, s_1^{n-1}, s_2^n, s_2^{n-1}, \cdots, s_k^n, s_k^{n-1}, s^n = s_{k+1}^n$$

使得 s_i^{n-1} 是 s_i^n 和 s_{i+1}^n 的公共面，$1 \leqslant i \leqslant k$，这性质称为 M 的强连通性.

以上三条件虽然是对复形 M 而言的，但实质上反映出它的多面体 $|M|$ 的拓扑性质. n 维闭假流形 M 能否定向是这样规定的：若 M 存在一个有向单形的基本组，使得每个 $n-1$ 维有向单形恰是这基本组中一个 n 维有向单形的顺向面及另一个 n 维有向单形的逆向面，则称 M 是能定向的. 这时称这组 n 维有向单形 $\{s_i^n | i=1,2,\cdots,\alpha_n\}$ 为 M 的一个定向，否则称 M 为不能定向的. n 维球面 S^n 和环面 T 的单纯剖分都是能定向的，射影平面 $\mathrm{R}P^2$ 和克莱因瓶的单纯剖分都是不能定向的；反映在整系数同调群上为

$$H_n(M) \cong \begin{cases} \mathrm{Z} & (\text{当 } M \text{ 能定向时}), \\ 0 & (\text{当 } M \text{ 不能定向时}). \end{cases}$$

类似地，还可讨论带边缘假流形，如平环、默比乌斯带等的单纯剖分. n 维闭假流形 M 的多面体 $|M|$ 不一定是 n 维流形.

闭假流形(closed pseudomanifold)　见“假流形”.

定向性(orientability)　见“假流形”.

带边缘假流形(pseudomanifold with boundary)　见“假流形”.

整系数同调群的结构(structure of homology groups with integral coefficients)　同调群的一种分解. 若 K 是单纯复形，当取整数加群 Z 为系数群时，则 $H_q(K)$ 称为整同调群. 由于 $C_q(K)$，$Z_q(K)$ 和 $B_q(K)$ 都是有限维自由交换群，所以商群 $H_q(K) = Z_q(K)/B_q(K)$ 是有限生成的交换群. 根据有限生成的交换群基本定理可知，n 维复形 K 的 q 维整同调群惟一地分解为下述直和

$$H_q(K) \cong \underbrace{\mathrm{Z} \oplus \mathrm{Z} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Z}}_{R_q \uparrow} \oplus \mathrm{Z}_{\theta_q^1} \oplus \mathrm{Z}_{\theta_q^2} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Z}_{\theta_q^{\tau_q}},$$

这里的 $R_q, \tau_q \geqslant 0$，当 $\tau_q > 0$ 时，$\theta_q^i > 1$，并且 θ_q^i 整除 θ_q^{i+1}. R_q 与 $\{\theta_q^i | i=1,2,\cdots,\tau_q\}$ 是 $H_q(K)$ 的不变量完全组，R_q 是同调群 $H_q(K)$ 的秩，称为复形 K 的 q 维贝蒂数. $H_q(K)$ 的挠子群记为 $T_q(K)$，并且 $\{\theta_q^i | i=1,2,\cdots,\tau_q\}$ 称为复形 K 的 q 维挠系数. 为了用代数方法计算整同调群，求出复形 K 的贝蒂数和挠系数，引入复形 K 的关联矩阵. 设取定 K 的有向单形的基本组为 $\{s_i^q | q=0,1,\cdots,n, i=1,2,\cdots,\alpha_q\}$，$s_i^q$ 与 s_j^{q-1} 的关联系数为

$$[s_i^q : s_j^{q-1}] = \begin{cases} 0 & (\text{当 } s_j^{q-1} \text{ 不是 } s_i^q \text{ 的面时}), \\ +1 & (\text{当 } s_j^{q-1} \text{ 是 } s_i^q \text{ 的顺向面时}), \\ -1 & (\text{当 } s_j^{q-1} \text{ 是 } s_i^q \text{ 的逆向面时}) \end{cases}$$

(对于有向单形 $s^q = \langle a_0, a_1, \cdots, a_q \rangle$，

$$t_i^{q-1} = (-1)^i \langle a_0, a_1, \cdots, \hat{a}_i, \cdots, a_q \rangle$$

称为 s^q 的 $q-1$ 维顺向面，$-t_i^{q-1}$ 称为 s^q 的 $q-1$ 维逆向面). 对于固定 q，链群 $C_q(K)$ 的基 $\{s_i^q | i=1,2,\cdots,\alpha_q\}$ 称为自然基，记关联系数 $[s_i^{q+1} : s_j^q] = a_{ij}^q$，可得矩阵 $A_q = (a_{ij}^q)$，称为对于 $C_{q+1}(K)$ 与 $C_q(K)$ 的自然基而言的关联矩阵，简称复形 K 的关联矩阵. 利用关联矩阵可直接计算复形 K 的贝蒂数与挠系数，因此可编出用计算机求同调群的程序，用一种固定格式把任何复形的整同调群计算出来. 其结论是：设 K 是 n 维有限复形，α_q 是 K 的 q 维单形的个数，A_q $(q=0,1,2,\cdots,n-1)$ 是 K 的关联矩阵，若 β_q 是矩阵 A_q 的秩，$\theta_q^1, \theta_q^2, \cdots, \theta_q^{\tau_q}$ 是矩阵 A_q 的大于 1 的不变因子，并且 θ_q^i 整除 θ_q^{i+1}，则 K 的 q 维贝蒂数是

$$R_q = \alpha_q - \beta_q - \beta_{q-1} \ (0 \leqslant q \leqslant n)(\beta_{-1} = \beta_n = 0),$$

K 的 q 维挠系数是 $\theta_q^1, \theta_q^2, \cdots, \theta_q^{\tau_q} (1 \leqslant q \leqslant n-1)$，并且 K 无零维的与 n 维的挠系数.

整同调群(integral homology groups)　见“整系数同调群的结构”.

贝蒂数(Betti number)　见“整系数同调群的结构”.

挠系数(torsion coefficient)　见“整系数同调群的结构”.

复形的关联矩阵(related matrix of complex)　见“整系数同调群的结构”.

欧拉示性数(Euler characteristic)　一个重要的拓扑不变量. 它也是一个同伦型不变量. 若 K 是 n 维复形，α_q 是 K 的 q 维单形的个数，则

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \alpha_q$$

称为复形 K 的欧拉示性数. 从表面上看似乎欧拉示性数与复形 K 的剖分有关，但是根据欧拉-庞加莱公式，可利用同调群的拓扑不变性，看出它的拓扑不变性. 欧拉示性数可推广到可剖分空间等范围中去. 常见的可剖分空间，如平环、默比乌斯带、环面、射影平面、克莱因瓶、n 维球面等的贝蒂数、挠系数与欧拉示性数可参见附表.

若 K 是一个 n 维复形，它的 q 维单形个数为 α_q，q 维贝蒂数为 R_q，则下述欧拉-庞加莱公式成立：

$$\sum_{q=0}^{n} (-1)^q \alpha_q = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q R_q.$$

或用欧拉示性数表示为

$$\chi(K)=\sum_{q=0}^{n}(-1)^q R_q,$$

也称为欧拉-庞加莱定理.

名 称	贝蒂数	挠系数	示性数
平 环	$R_0=1\quad R_1=1\quad R_2=0$	无	0
默比乌斯带	$R_0=1\quad R_1=1\quad R_2=0$	无	0
环 面	$R_0=1\quad R_1=2\quad R_2=1$	无	0
射影平面	$R_0=1\quad R_1=0\quad R_2=0$	一维挠系数 2	1
克莱因瓶	$R_0=1\quad R_1=1\quad R_2=0$	一维挠系数 2	0
球面 S^2	$R_0=1\quad R_1=0\quad R_2=1$	无	2
n 维球面 $S^n(n>0)$	$R_0=1\quad R_n=1$ $R_q=0\quad 0<q<n$	无	$1+(-1)^n$

欧拉-庞加莱公式(Euler-Poincaré formula) 见"欧拉示性数".

欧拉多面体定理(Euler theorem on polyhedra) 确立简单多面体的顶点、棱和面的个数之间的关系的定理. 若 S 是一个简单多面体,有 V 个顶点,E 条棱和 F 个面,则它们满足

$$V-E+F=2.$$

这就是欧拉多面体定理. 应用这个定理可推出只有五种正多面体:正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体. 该定理是 18 世纪 50 年代由欧拉(Euler,L)发现的.

任意系数(单纯)同调群(simplicial homology groups with general coefficients) 整系数同调群的推广. 在定义同调群过程中,实际上只利用了链群、边缘同态 ∂ 和 $\partial^2=0$ 等性质,在链群 $C_q(k)$ 定义中出现整数加群 $\mathbf{Z}$,但除个别性质外,只涉及交换群的性质,因此关于同调群的讨论也适用于以任意交换群 G 代替整数加群 $\mathbf{Z}$ 的情况,从而得到以 G 为系数群的链群 $C_q(K;G)$,闭链群 $Z_q(K;G)$,边缘链群 $B_q(K;G)$和同调群$H_q(K;G)$. 比较常用的系数群除整数加群 $\mathbf{Z}$ 外,还有整数模 p 加群 $\mathbf{Z}_p$(这里 p 为素数),特别是 $\mathbf{Z}_2$ 群,以及有理数加群 $\mathbf{Q}$,因此把

$$H_q(K;\mathbf{Z}),\ H_q(K;\mathbf{Z}_p),\ H_q(K;\mathbf{Z}_2),H_q(K;\mathbf{Q})$$

分别称为整同调群、模 p 同调群、模 2 同调群和有理同调群. 把整数加群 $\mathbf{Z}$ 改为交换群 G 并非只是形式上的推广,而有其实际意义和应用. 例如 $H_q(K;\mathbf{Z}_2)$ 就有很好几何意义,因为$(+1)$和(-1)在 $\mathbf{Z}_2$ 中相等,所以定向不起作用,同时 $H_2(K;\mathbf{Z}_2)$在某种程度上反映了曲面的封闭性,另外还可定义复形 K 的 q 维模 p 贝蒂数 $R_q^{(p)}$ 等. 但是整同调群特别重要,$H_q(K;G)$可由 $H_q(K)$,$H_{q-1}(K)$与交换群 G 完全决定,这就是说整同调群决定任意系数群的同调群,其具体关系为:若 K 为有限单纯复形,G 为交换群,则有表达式(称为同调群的泛系数定理)

$$H_q(K;G)\cong H_q(K)\otimes G\oplus \mathrm{Tor}(H_{q-1}(K),G),$$

这里$\otimes$,$\oplus$,Tor,分别表示群的张量积、直和、挠积.

模 p 同调群(mod p homology groups) 见"任意系数(单纯)同调群".

模 2 同调群(mod 2 homology groups) 见"任意系数(单纯)同调群".

有理同调群(rational homology groups) 见"任意系数(单纯)同调群".

链映射(chain map) 联系复形的链群之间的一种系列同态. 为了使复形的链群之间的同态能诱导出同调群之间的同态,因而它应将闭链与边缘链分别映成闭链与边缘链. 设 K 与 L 都是复形,

$$f=\{f_q:C_q(K)\to C_q(L)\,|\,q\in\mathbf{Z}\}$$

是一系列同态,若满足条件:$\partial_q\circ f_q=f_{q-1}\circ\partial_q$,则称 $f=\{f_q\}$为从 K 到 L 的链映射. 它可理解为下图具

$$\begin{array}{ccc} C_q(K) & \xrightarrow{f_q} & C_q(L) \\ \downarrow{\partial_q} & & \downarrow{\partial_q} \\ C_{q-1}(K) & \xrightarrow{f_{q-1}} & C_{q-1}(L) \end{array}$$

有交换性,即链映射具有将闭链映为闭链和将边缘链映为边缘链的性质,因此它诱导出同调群之间的一系列同态

$$f_*=\{f_{q*}:H_q(K)\to H_q(L)\,|\,q\in\mathbf{Z}\},$$

称为链映射 f 的诱导同态. 同时具有性质,若

$$f=\{f_q:C_q(K)\to C_q(L)\,|\,q\in\mathbf{Z}\},$$
$$g=\{g_q:C_q(L)\to C_q(M)\,|\,q\in\mathbf{Z}\}$$

为链映射,则复合映射

$$g\circ f=\{g_q\circ f_q:C_q(K)\to C_q(M)\,|\,q\in\mathbf{Z}\}$$

也是链映射,并且诱导同态:

$$(g\circ f)_{q*}=g_{q*}\circ f_{q*}:\ H_q(K)\to H_q(M),q\in\mathbf{Z}.$$

这些概念可推广到系数群为任意交换群 G 的情形.

链同伦(chain homotopy) 考虑在什么条件下,两个链映射诱导的同态相同而引入的一个概念. 设 $f=\{f_q\}$和 $g=\{g_q\}$是从 $C_q(K)$到 $C_q(L)$的两个链映射,若存在一系列同态

$$D=\{D_q:C_q(K)\to C_{q+1}(L)\,|\,q\in\mathbf{Z}\},$$

使得 $\partial_{q+1}\circ D_q+D_{q-1}\circ\partial_q=g_q-f_q$,则称 f 与 g 是链同伦的,记为

$$D:\ f\simeq g\quad 或\quad f\overset{D}{\simeq}g,$$

并且称 D 是从 f 到 g 的一个链伦移. 也可用下图来理解,但应注意此图一般不具有交换性. 有链同伦的两个链映射诱导出同调群之间的相同的同态的性质,即,若

$$f\simeq g:\ C_q(K)\to C_q(L),$$

$$\begin{array}{ccc} & & C_{q+1}(L) \\ & \nearrow^{D_q} & \downarrow{\scriptstyle \partial_{q+1}} \\ C_q(K) & \xrightarrow{g_q-f_q} & C_q(L) \\ \downarrow{\scriptstyle \partial_q} & \nearrow_{D_{q-1}} & \\ C_{q-1}(K) & & \end{array}$$

则

$$f_* = g_*: H_q(K) \to H_q(L).$$

单纯映射(simplicial map) 联系复形的多面体之间的一类重要映射. 它是从复形 K 的多面体 $|K|$ 到复形 L 的多面体 $|L|$ 的连续映射,任何连续映射在某种意义下可用它逼近. 设 K 和 L 是两个复形,$f: |K| \to |L|$ 是映射,若它满足条件:

1. 对于任意顶点 $a \in K^0$,有 $f(a) \in L^0$(即 L 的顶点).

2. 对于任意单形 $(a_0, a_1, \cdots, a_q) \in K$,$\{f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_q)\}$ 是 L 中某单形的顶点集(可能有重复).

3. 对于任意 $(a_0, a_1, \cdots, a_q) \in K$,

$$x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i a_i \in |K|,$$

有

$$f(x) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i f(a_i),$$

则称 f 为单纯映射,也可简记为 $f: K \to L$(省去多面体 $|K|$,$|L|$ 的记号). 单纯映射是连续映射;单纯映射由限制在顶点集上的映射

$$f^0 = f|K^0: K^0 \to L^0$$

完全决定. 反之,对于顶点集之间的任意映射 f^0,只要 f^0 把 K 中任意单形的顶点集映成 L 中某单形的顶点集,它就惟一地确定一个单纯映射 $f: K \to L$.

单纯链映射(simplicial chain map) 由单纯映射决定的链映射. 设 $f: K \to L$ 是一个单纯映射,定义同态如下:

1. 若 $s^q = \langle a_0, a_1, \cdots, a_q \rangle$ 是 K 的一个有向单形,当 $f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_q)$ 不相同时,记

$$f_q(s^q) = t^q = \langle f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_q) \rangle;$$

当存在 $f(a_i) = f(a_j)$ 且 $i \neq j$ 时,记 $f_q(s^q) = 0$.

2. 对于任意链 $x_q = \sum g_i s_i^q \in C_q(K)$,记

$$f_q(x_q) = \sum g_i f_q(s_i^q),$$

当 $q < 0$ 或 $q > \dim K$ 时,规定 $f_q = 0$;则这一系列同态

$$f = \{f_q: C_q(K) \to C_q(L) \mid q \in \mathbf{Z}\}$$

是链映射,并把 $f = \{f_q\}$ 称为单纯链映射(详细地,是由单纯映射诱导的链映射),这里仍用 f 记单纯映射 f 诱导的链映射,一般不会引起混淆.

承载单形(carrier) 具有特殊性质的单形. 若 K 是复形,对于单形 $\underline{s} \in K$,用 $\mathrm{int}\,\underline{s}$ 表示其对应开单形,则对于复形 K 有性质:

1. 多面体 $|K|$ 是 K 的全体开单形的并集.

2. 若 $\underline{s}_1, \underline{s}_2$ 为 K 的两个不同单形,则有

$$\mathrm{int}\,\underline{s}_1 \cap \mathrm{int}\,\underline{s}_2 = \varnothing.$$

因此,$|K|$ 的任意一点 x 必属于 K 的惟一的一个开单形 $\mathrm{int}\,\underline{s}$. 于是称这个与 x 相对应的单形 $\underline{s}$ 为 x 在 K 中的承载单形,记为 $\mathrm{Car}_K x$ 或 $\mathrm{Car}\,x$. 实际上,承载单形是 K 中含点 x 的维数最低的单形.

单纯逼近(simplicial approximation) 与连续映射相关的单纯映射. 设 K 与 L 是两个复形,$\varphi: |K| \to |L|$ 是连续映射,$f: K \to L$ 是单纯映射,若对于 $|K|$ 的每一点 x,$f(x)$ 落在 $\varphi(x)$ 在 L 上的承载单形中,即 $f(x) \in \mathrm{Car}\,\varphi(x)$,则称 f 是 φ 的一个单纯逼近. 单纯逼近的含意是 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 总落在 L 的同一个单形 $\mathrm{Car}\,\varphi(x)$ 中,L 中单形的直径的最大值刻画了逼近的程度. 需要注意,并不是任何两个复形的多面体之间的连续映射都存在单纯逼近. 关于单纯逼近存在性有下列结果:若 K 和 L 都是复形,则

1. 连续映射 $\varphi: |K| \to |L|$ 有单纯逼近的充分必要条件是映射 φ 具有星形性质.

2. 若 $\varphi: |K| \to |L|$ 是连续映射,则存在非负整数 m 使得 $\varphi: |\mathrm{Sd}^{(m)} K| \to |L|$ 具有星形性质,因而有单纯逼近 $f: \mathrm{Sd}^{(m)} K \to L$.

星形性质(star shaped property) 与复形的多面体之间的连续映射相关的一种性质. 设 a 为复形 K 的一个顶点,K 中以 a 为顶点的全体开单形的并集称为顶点 a 在 K 中的开星形,记为 $\mathrm{st}_K a$ 或 $\mathrm{st}\,a$. 设 K 和 L 是两个复形,$\varphi: |K| \to |L|$ 是一个连续映射,若对于 K 的每一个顶点 a,存在 L 的至少一个顶点 b,使得 $\varphi(\mathrm{st}\,a) \subset \mathrm{st}\,b$,则称映射 φ 具有星形性质.

开星形(open star) 见"星形性质".

复形的重分(subdivision of simplicial complex) 一类特殊的复形. 复形 L 是复形 K 的重分,是指 L 的每个单形都是 K 的一个单形的子集,而 K 的每个单形是 L 的若干个单形的并集. 自然它蕴涵 $|K| = |L|$. 常用的复形的重分是重心重分,还有其他重分,如辐式重分等.

重心重分(barycentric subdivision) 复形的一种特殊的重分. 单形 $\underline{s}$ 的重心用 $\mathring{s}$ 表示,复形 K 的重心重分是按下面方式定义的复形 $\mathrm{Sd}\,K$:

1. $\mathrm{Sd}\,K$ 的顶点集 $(\mathrm{Sd}\,K)^0 = \{\mathring{s} \mid \underline{s} \in K\}$.

2. 若 $\underline{s}_0 < \underline{s}_1 < \cdots < \underline{s}_r$ 是 K 的单形的一个真面序列,则 $(\mathring{s}_0, \mathring{s}_1, \cdots, \mathring{s}_r) \in \mathrm{Sd}\,K$,并称 $\mathring{s}_r$ 为这单形的主导顶点.

这样得到的 Sd K 为一个复形，$|\mathrm{Sd}\,K|=|K|$，$\dim\mathrm{Sd}\,K=\dim K$. 同时可用归纳地定义复形 K 的第 m 次重心重分复形. 复形经过重心重分后虽然单形变小了，但单形大小的变化有一定规律. 首先单形 $\underline{s}=(a_0,a_1,\cdots,a_q)$ 的直径

$$\mathrm{diam}\ \underline{s}=\max_{i,j}\{\|a_i-a_j\|\}$$

变小了；其次，若 K 为 n 维复形，复形的网径指复形中各个单形直径的最大值，即是网径

$$\mathrm{mesh}\ K=\max_{\underline{s}\in K}\{\mathrm{diam}\ \underline{s}\},$$

则

$$\mathrm{mesh}(\mathrm{Sd}^{(m)}K)\leqslant\left(\frac{n}{n+1}\right)^m\mathrm{mesh}\ K,$$

从而当 m 充分大时，$\mathrm{Sd}^{(m)}K$ 的网径可任意小，即

$$\lim_{m\to\infty}\mathrm{mesh}(\mathrm{Sd}^{(m)}K)=0.$$

重分链映射(subdivision chain map) 由复形的重心重分诱导的链映射. 复形 K 重心重分后，对应同一个多面体有两个单纯剖分，复形 K 和 Sd K. 如下引进从 K 的链群到 Sd K 的链群的一个系列同态是链映射. 定义系列同态

$$\mathrm{Sd}=\{\mathrm{Sd}_q:C_q(K)\to C_q(\mathrm{Sd}K)\,|\,q\in\mathbf{Z}\}$$

如下：

1. 对于 $q<0$ 或 $q>\dim K$，$\mathrm{Sd}_q=0$.

2. 对于任意顶点 $a\in K^0$，$\mathrm{Sd}_0(a)=a$，做线性扩张得 $\mathrm{Sd}_0:C_0(K)\to C_0(\mathrm{Sd}\,K)$.

3. 设 $0<q\leqslant\dim K$，并假定已定义

$$\mathrm{Sd}_{q-1}:\ C_{q-1}(K)\to C_{q-1}(\mathrm{Sd}\ K),$$

对于任意 q 维有向单形 s，$\mathrm{Sd}_q s=\mathring{s}\mathrm{Sd}_{q-1}\partial s$ 式中右端是一个 q 维链(例如，若 $\mathrm{Sd}_{q-1}\partial s=g\langle b_i,\cdots,b_j\rangle+\cdots$，则 $\mathrm{Sd}_q s=g\langle\mathring{s},b_i,\cdots,b_j\rangle+\cdots$). 做线性扩张，若 $x_q=\sum g_i s_i$，则 $\mathrm{Sd}_q x_q=\sum g_i\mathrm{Sd}_q s_i$，这样就得到同态

$$\mathrm{Sd}_q:\ C_q(K)\to C_q(\mathrm{Sd}\ K).$$

这样定义的系列同态

$$\mathrm{Sd}=\{\mathrm{Sd}_q\,|\,q\in\mathbf{Z}\}$$

是一个链映射，称为重分链映射. 还可归纳定义

$$\mathrm{Sd}^{(m)}=\{\mathrm{Sd}_q^{(m)}:C_q(K)\to C_q(\mathrm{Sd}^{(m)}K)\,|\,q\in\mathbf{Z}\},$$

其中 $\mathrm{Sd}_q^{(m)}=\mathrm{Sd}\circ\mathrm{Sd}_q^{(m-1)}$. 因为 Sd_q 为重分链映射，所以它诱导的同态为

$$\mathrm{Sd}_{q*}:\ H_q(K)\to H_q(\mathrm{Sd}\ K)(q\in\mathbf{Z}),$$

称为同调群之间的重分同态.

重分同态(subdivision homomorphism) 见“重分链映射”.

标准链映射(standard chain map) 一类特殊链映射. 因为有了复形 K 及其重心重分 Sd K，所以有必要建立 Sd K 的链群到 K 的链群之间的同态. 利用单纯映射定义如下：若用 $\{\underline{s}_i\}$ 表示 K 的全体无向单形的集合，则重心重分 Sd K 的全体顶点集为

$$(\mathrm{Sd}\,K)^\circ=\{\mathring{s}_i\,|\,\underline{s}_i\in K\},$$

定义顶点之间的对应 π° 使得 $\mathring{s}_i\mapsto\underline{s}_i$ 的任意选定的一个顶点，若 $\underline{t}=(\mathring{s}_i,\cdots,\mathring{s}_j)\in\mathrm{Sd}\,K$，则由重心重分定义保证 π° 把 $\underline{t}$ 的顶点映到 K 的同一个单形的顶点，因此 π° 决定一个单纯映射 $\pi:\mathrm{Sd}\,K\to K$ 与一个单纯链映射

$$\pi=\{\pi_q:C_q(\mathrm{Sd}\,K)\to C_q(K)\,|\,q\in\mathbf{Z}\},$$

分别把它们称为标准映射与标准链映射. 值得指出的是，π° 有不同取法，因而得到不同的标准链映射

$$\pi=\{\pi_q\}\quad 和\quad \pi'=\{\pi'_q\},$$

但是，它们诱导的同态是相同的，即

$$\pi_{q*}=\pi'_{q*}:\ H_q(\mathrm{Sd}\,K)\to H_q(K)(q\in\mathbf{Z}),$$

所以把 $\pi_*=\{\pi_{q*}\}$ 称为由重分所决定的同调群之间的标准同态.

标准同态(standard homomorphism) 见“标准链映射”.

连续映射的诱导同态(induced homomorphism of continuous map) 由多面体之间的连续映射所决定的同调群之间的一种同态. 设 K 与 L 是两个复形，$\varphi:|K|\to|L|$ 是连续映射，m 为非负整数使得

$$\varphi:\ |\mathrm{Sd}^{(m)}K|\to|L|$$

具有星形性质，因此有单纯逼近

$$f:\ \mathrm{Sd}^{(m)}K\to L,$$

所以有同调群之间的同态

$$f_{q*}\circ\mathrm{Sd}_{q*}^{(m)}:\ H_q(K)\to H_q(L).$$

它不依赖于重分次数 m 和单纯逼近 f 的选取，由 φ 惟一决定，记 $\varphi_{q*}=f_{q*}\circ\mathrm{Sd}_{q*}^{(m)}$，并称 $\varphi_*=\{\varphi_{q*}\}$ 为连续映射 φ 的诱导同态，它反映了连续映射的同调性质. 此外，还具有下面一些重要性质：

1. 若 $\varphi:|K|\to|L|$ 和 $\psi:|L|\to|M|$ 是连续映射，则 $(\psi\circ\varphi)_{q*}=\psi_{q*}\circ\varphi_{q*}:H_q(K)\to H_q(M)$，即复合映射的诱导同态是诱导同态的复合.

2. 同伦的映射 $\varphi\simeq\psi:|K|\to|L|$ 诱导出同一个同态，即 $\varphi_{q*}=\psi_{q*}:H_q(K)\to H_q(L)$.

3. 若 $\varphi:|K|\to|L|$ 为同胚映射，则

$$\varphi_*=\{\varphi_{q*}:H_q(K)\to H_q(L)\,|\,q\in\mathbf{Z}\}$$

为同调群之间的同构.

单纯同调群的重分不变性(subdivision invariance of simplicial homology groups) 单纯同调群的重要性质. 指复形 K 的各维同调群 $H_q(K)$ 与 K 的重分复形 Sd K 的同维同调群同构，即

$$H_q(K)\cong H_q(\mathrm{Sd}\ K)\quad(q\in\mathbf{Z}).$$

单纯同调群的拓扑不变性(topological invariance of simplicial homology groups) 单纯同调群的重要性质. 设 K 与 L 为两个复形，若它们的多面体是同胚的，则它们的各维同调群分别同构. 即，若 $|K|\cong|L|$，则 $H_q(K)\cong H_q(L)$ $(q\in\mathbf{Z})$. 因此同调群、贝蒂数、挠系数、欧拉示性数等都是拓扑不变量.

单纯同调群的同伦型不变性(homotopy type invariance of simplicial homology groups) 单纯同调群的一种重要性质.它指的是,设 K 和 L 为两个复形,若多面体 $|K|$ 与 $|L|$ 具有相同同伦型,则复形 K 与 L 的同维同调群同构.即,若 $|K|\simeq|L|$,则

$$H_q(K)\cong H_q(L)\ (q\in\mathbf{Z}).$$

利用同调群的同伦型不变性可以计算一些可剖分空间的同调群,还可判断一些可剖分空间互相不同伦等价或互相不同胚等.

环绕复形(linked complex) 一类特殊的复形.为刻画复形的多面体在一点附近的性质引进的局部同调群,需要引入环绕复形概念.设 K 是复形,对于任意点 $x\in|K|$,x 点的单纯邻域 $N(x)$ 是由 K 中包含 x 点的单形及其面组成的子复形;x 点的在 K 中的环绕复形 $L_K(x)$ 是 $N(x)$ 中不含 x 点的单形组成的子复形,即

$$L_K(x)=\{\underline{t}\in N(x)\mid x\notin\underline{t}\}.$$

若 (K,φ) 与 (L,ψ) 是同一个可剖分空间 X 的两个剖分,则对于任意 $x\in X$,有

$$H_q(L_K(\varphi^{-1}(x)))\cong H_q(L_L(\psi^{-1}(x)))\ (q\in\mathbf{Z}).$$

局部同调群(local homology groups) 一种特殊的同调群.若 X 是可剖分空间,(K,φ) 是 X 的一个剖分,则对于 $x\in X$,环绕复形的同调群

$$H_q(L_K(\varphi^{-1}(x)))\ (q\in\mathbf{Z})$$

称为 X 在点 x 处的 q 维局部同调群,记为

$$LH_q(x;X)\ (q\in\mathbf{Z}).$$

若 $f:X\to Y$ 是两个可剖分空间 X 和 Y 之间的同胚映射,对于 $x\in X$,则

$$LH_q(x;X)\cong LH_q(f(x);Y)\quad(q\in\mathbf{Z}).$$

利用局部同调群可以证明,若两个复形 K 与 L 的多面体同胚,即 $|K|\cong|L|$,则

$$\dim K=\dim L.$$

所以对于可剖分空间 $X=(K,\varphi)$,当 $\dim K=n$ 时,可以定义多面体 $|K|$ 和可剖分空间 X 是 n 维的,同时由局部同调群可以看出,这样定义的维数是拓扑不变的.

上同调群(cohomology groups) 一种重要的拓扑不变性质.可仿照线性空间的对偶空间的定义方式引入上同调群.若 K 是一个 n 维单纯复形,$C_q(K)$ 是 q 维整系数链群,则同态 $c^q:C_q(K)\to\mathbf{Z}$(整数加群)称为 K 的一个 q 维上链.对于任意两个 q 维上链 c^q 和 d^q,它们的和是这样的上链,它在任意 $x_q\in C_q(K)$ 上取值

$$(c^q+d^q)(x_q)=c^q(x_q)+d^q(x_q),$$

所有 q 维上链在上述加法下成为一个交换群,它就是同态群 $\mathrm{Hom}(C_q(K),\mathbf{Z})$,称为 K 的 q 维上链群,记为 $C^q(K)$.为区别起见可把原来的链群 $C_q(K)$ 称为下链群.对于原来的边缘同态可用对偶同态来定义上边缘同态算子,设

$$\partial_{q+1}:C_{q+1}(K)\to C_q(K),$$

定义 $\delta^q:C^q(K)\to C^{q+1}(K)$,对于 K 的 q 维上链 c^q,$\delta^q c^q$ 是一个 $q+1$ 维上链,它在任意 $x_{q+1}\in C_{q+1}(K)$ 上取值为

$$\delta^q c^q(x_{q+1})=c^q(\partial_{q+1}x_{q+1}).$$

从而 $\delta\circ\delta=0$(或写成 $\delta^{q+1}\circ\delta^q=0$).由此可定义 $C^q(K)$ 的子群

$$Z^q(K)=\ker\delta^q\quad 与\quad B^q(K)=\mathrm{Im}\,\delta^{q-1},$$

分别称为 q 维上闭链群与上边缘链群.商群

$$H^q(K)=Z^q(K)/B^q(K)\ (q\in\mathbf{Z})$$

称为复形 K 的 q 维上同调群,这些群中元素分别称为上闭链、上边缘链与上同调类.相应原来的同调群可称为下同调群.

设 $f:K\to L$ 是单纯映射,$f=\{f_q:C_q(K)\to C_q(L)\mid q\in\mathbf{Z}\}$ 是这单纯映射诱导的链映射,f_q 的对偶同态 $f^q:C^q(L)\to C^q(K)\ (q\in\mathbf{Z})$ 定义为,对于任意 $c^q\in C^q(L)$,$f^q(c^q)$ 是 K 的 q 维上链,在 K 的 q 维链 x_q 上取值 $(f^q(c^q))(x_q)=c^q(f_q(x_q))$.它满足 $\delta^q\circ f^q=f^{q+1}\circ\delta^q$,称 f^q 为上链映射,因此 f^q 诱导出上同调群之间的同态:$f^{q*}:H^q(L)\to H^q(K)\ (q\in\mathbf{Z})$(注意与 $f:K\to L$ 方向相反).同样地,可研究链同伦、连续映射用单纯逼近定理得到的诱导同态和类似于下同调群之间诱导同态的性质,所以上同调群也具有拓扑不变性、同伦型不变性.设 K 是 n 维单纯复形,其上、下同调群 $H^q(K)$ 与 $H_q(K)$ 的秩分别记为 R^q 与 R_q,它们的挠子群分别记为 $T^q(K)$ 与 $T_q(K)$ $(q\in\mathbf{Z})$,则上、下同调群之间有关系

$$R^q=R_q,\quad T^q(K)\cong T_{q-1}(K)\quad(q=0,1,\cdots,n),$$

其中 $T_{-1}(K)$ 理解为零群.这表明上同调群由下同调群完全决定.

下同调群(homology groups) 见“上同调群”.

相对单纯同调群(relative simplicial homology groups) 空间偶的同调群.设 K 是复形,L 是 K 的子复形,用同调理论的思想描述多面体 $|K|$ 的拓扑性质而引入相对(单纯)同调群.设复形 L 为复形 K 的子复形,(K,L) 称为复形偶,包含映射 $i:|L|\to|K|$ 是单纯映射,它诱导的链映射

$$i_q:C_q(L)\to C_q(K)\ (q\in\mathbf{Z})$$

是同态,把 $C_q(L)$ 看做 $C_q(K)$ 的子群,

$$i_q:C_q(L)\to C_q(K)$$

就是包含同态,

$$C_q(K,L)=C_q(K)/C_q(L)$$

称为复形偶 (K,L) 的 q 维相对链群,它的任意元素为 $\bar{c}_q=c_q+C_q(L)$,这里 c_q 是 $C_q(K)$ 的元素,边缘同态算子 $\partial_q:C_q(K)\to C_{q-1}(K)$ 满足

$$\partial_q(C_q(L)) \subset C_{q-1}(L),$$

因此诱导出商群之间同态

$$\hat{\partial}_q: C_q(K,L) \to C_{q-1}(K,L).$$

于是

$$\hat{\partial}_{q-1} \circ \hat{\partial}_q: C_q(K,L) \to C_{q-2}(K,L)$$

是零同态，$\hat{\partial}_q$ 称为相对边缘同态，记为 $\hat{\partial}$. 又 $C_q(K,L)$的子群

$$Z_q(K,L)=\ker \hat{\partial}_q \quad 和 \quad B_q(K,L)=\mathrm{Im}\ \hat{\partial}_{q+1}$$

分别称为复形偶(K,L)的 q 维相对闭链群和相对边缘链群，并且 $B_q(K,L)$是 $Z_q(K,L)$的子群，商群

$$H_q(K,L)=Z_q(K,L)/B_q(K,L) \ (q\in \mathbf{Z})$$

称为复形偶(K,L)的 q 维相对(单纯)同调群. 当 $L=\varnothing$时，$H_q(K,\varnothing)=H_q(K)$ $(q\in \mathbf{Z})$.

相对链群的几何背景是，设 $C_q(K-L)$表示 K 的不包含 L 中单形的 q 维链的集合，它是 $C_q(K)$的子群，并且 $C_q(K)=C_q(L)\oplus C_q(K-L)$，因此有

$$C_q(K,L)=C_q(K)/C_q(L)\cong C_q(K-L).$$

这个同构表明(K,L)的相对链实质上是对应于 K 的那些不包含 L 中单形的链. 通过定义多面体偶$(|K|,|L|)$的同伦型，可以得到相对同调群 $H_g(K,L)$是多面体偶$(|K|,|L|)$的同伦型不变量等结论. 类似地，可定义相对上同调群$H^q(K,L)$，上面定义的相对(单纯)同调群$H_q(K,L)$也可称为相对下同调群.

相对上同调群(relative cohomology groups) 见“相对单纯同调群”.

相对下同调群(relative homology groups) 见“相对单纯同调群”.

单纯同调序列(simplicial homology sequence) 同调群所具有的一种性质. 复形偶(K,L)与 K 和 L 的各种同调关系表现为它们的同调群组成的一个正合的序列，即单纯同调序列，它在单纯同调论中有很多应用. 设(K,L)是复形偶，其中 K 是 n 维复形，定义三种同态(为方便省去下标 q)：

1. 包含映射 $i:|L|\to|K|$诱导出同态

$$i_*: H_q(L) \to H_q(K).$$

2. 包含映射 $j:(|K|,\varnothing)\to(|K|,|L|)$诱导出同态 $j_*:H_q(K)\to H_q(K,L)$.

3. 联系同态 $\partial_*:H_q(K,L)\to H_{q-1}(L)$，其定义为，设 $\bar{z}=z+C_q(L)\in Z_q(K,L)$，其中 $z\in C_q(K)$，$\partial z\in C_{q-1}(L)$，$\bar{z}$ 的相对同调类记为$[\bar{z}]$，$\partial z\in Z_{q-1}(L)$，∂z 在 $H_{q-1}(L)$中的同调类记为$[\partial z]$，若

$$\partial_*([\bar{z}]) = [\partial z],$$

则 ∂_*是一个同态，称为(K,L)的同调联系同态，简称联系同态.

同调群与同态的序列：

$$0 \to H_n(L) \xrightarrow{i_*} H_n(K) \xrightarrow{j_*} H_n(K,L) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(L) \xrightarrow{i_*} \cdots$$
$$\xrightarrow{\partial_*} H_q(L) \xrightarrow{i_*} H_q(K) \xrightarrow{j_*} H_q(K,L) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(L) \xrightarrow{i_*} \cdots$$
$$\xrightarrow{\partial_*} H_0(L) \xrightarrow{i_*} H_0(K) \xrightarrow{j_*} H_0(K,L) \xrightarrow{\partial_*} 0$$

称为复形偶(K,L)的(单纯)同调序列(或称下同调序列). 它的重要特性是复形偶(K,L)的同调序列是正合的序列. 类似可建立复形偶(K,L)的上同调序列，它也是正合的序列.

下同调序列(homolgy sequence) 见“单纯同调序列.

上同调序列(cohomology sequence) 见“单纯同调序列.

同调联系同态(homology phism) 见“单纯同调序列”.

闭曲面(closed surface) 一类重要的拓扑空间. 用同调理论研究曲面，可以完全解决闭曲面的拓扑分类问题. 若 S 是紧致的连通的豪斯多夫空间，并且它的每点都有一个开邻域同胚于 2 维欧氏空间 $\mathbf{R}^2$，则称 S 为闭曲面. 实际上，闭曲面就是紧致的无边的连通 2 维流形，也可称 2 维闭流形. 根据拉多(Radó,T.)的结果，闭曲面是可剖分的. 球面、环面、射影平面、克莱因瓶等都是闭曲面. 闭曲面是否能定向可以这样规定，当 S 是包含有默比乌斯带的闭曲面时，称为不能定向的；否则称为能定向的，并且这种规定与其单纯剖分选取无关. 反映在整同调群上，当 S 能定向时，$H_2(S)\cong\mathbf{Z}$；当 S 不能定向时，$H_2(S)=0$. 于是，射影平面是不能定向的，环面是能定向的.

2 维闭流形(2-dimensional closed manifolds) 见“闭曲面”.

能定向闭曲面(orientable closed surface) 见“闭曲面”.

不能定向闭曲面(nonorientable closed surface) 见“闭曲面”.

闭曲面的同胚分类(homeomorphic classification of closed surfaces) 闭曲面按照同胚进行的分类. 任何闭曲面必同胚于下列曲面之一：

1. 球面 S^2.

2. 球面上添加 m 个环柄，或 m 个环面的连通和.

3. 球面上挖掉 n 个圆盘而补上 n 个默比乌斯带，即球面上添加 n 个交叉帽，或 n 个射影平面的连通和. 同时，这些闭曲面中的任意两个都是不同胚的. 闭曲面的拓扑分类完全可由同调群决定，因为有结论：两个闭曲面 S_1 和 S_2 同胚的充分必要条件是：

1. 欧拉示性数相等，即$\chi(S_1)=\chi(S_2)$.

2. 两个闭曲面 S_1 和 S_2 同时是能定向的，或同

时是不能定向的．即

$$H_2(S_1)\cong H_2(S_2)\cong \mathbf{Z},$$

或

$$H_2(S_1)\cong H_2(S_2)=0,$$

这里 Z 为整数加群．

布劳威尔度(Brouwer's degree)　亦称映射度或拓扑度．对一类连续映射的一种刻画．对 n 维球面 S^n 到自身的每一连续映射联系一个整数．设 $f:S^n\to S^n(n\geqslant 1)$ 是连续映射，(K,φ) 是 S^n 的一个剖分，同调群 $H_n(S^n)\cong \mathbf{Z}$，这里 Z 表示整数加群，以 $[z]$ 记同调群 $H_n(K)$ 的生成元，若

$$\mathcal{F}=\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi:\ |K|\to|K|,$$

则有整数 m 使得 $\mathcal{F}$ 的诱导同态 $\mathcal{F}_{n*}([z])=m[z]$，这个 m 称为 f 的布劳威尔度，记为 $\deg f$．映射度 $\deg f$ 与 S^n 的剖分 (K,φ) 和 $H_n(K)$ 的生成元的选取无关．根据诱导同态的性质，可得到下述结论：若 $f,g:S^n\to S^n$ 都是连续映射，则：

1．若 $f\simeq g$，则 $\deg f=\deg g$．

2．$\deg(f\circ g)=\deg f\circ\deg g$．

3．对于 S^n 上的恒同映射 1_{S^n}，有 $\deg 1_{S^n}=1$，对于常值映射 $c:S^n\to S^n$，有 $\deg c=0$．

根据以上性质，可以定义对应

$$\deg_{\#}:\ [S^n,S^n]\to \mathbf{Z},$$

使得对于 f 所属同伦类 $[f]$ 规定

$$\deg_{\#}([f])=\deg f.$$

根据霍普夫(Hopf，H.)的度数定理，$\deg_{\#}$ 是一一对应．它表明 S^n 到自身的连续映射从同伦观点看由其映射度惟一决定．映射度理论应用广泛，如研究球面上向量场以及博苏克-乌拉姆定理等．关于映射度还可推广到能定向闭假流形以及其他领域中去．讨论 n 维球面 S^n 到自身连续映射的同伦类构成的集合 $[S^n,S^n]$，是映射的同伦分类问题中最基本的内容，并且很多几何问题的解决都有赖于对这个集合性质的了解．研究这个集合结构的一种方法，就是对每个连续映射 $f:S^n\to S^n$ 联系一个整数，即所谓映射度，它是由布劳威尔(Brouwer，L．E．J．)首先提出的．

拓扑度(topological degree)　即“布劳威尔度”．

映射度(degree of map)　即“布劳威尔度”．

对径映射(antipodal map)　一种特殊的映射．设 S^n 为 n 维球面，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$ 为球面上任意一点，映射 $r:S^n\to S^n$ 定义为 $r(x)=-x$，称为对径映射；映射 $r_i:S^n\to S^n$ 定义为

$$r_i(x)=(x_1,x_2,\cdots,-x_i,\cdots,x_{n+1}),$$

称为关于第 i 个坐标平面的反射．n 维球面 S^n 上的点 x 与 $-x$ 称为一对对径点．上面的定义可以推广到 $n+1$ 维欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中去．关于反射 r_i 的映射度 $\deg r_i=-1$，对径映射 r 的映射度

$$\deg r=(-1)^{n+1}.$$

保径映射(antipodal preserving map)　一种特殊的映射．若 S^n 为 n 维球面，$f:S^n\to S^n$ 是保持对径点不变的连续映射，即对于 S^n 上的任意点 x 有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 f 为保径映射．这个定义还可推广到 n 维欧氏空间中去．有关保径映射的重要定理是：若 $f:S^n\to S^n$ 是保径映射，则 f 的映射度是奇数．

博苏克-乌拉姆定理(Borsuk-Ulam theorem)　关于球面的连续映射的一个重要性质．定理断言：从 n 维球面 S^n 到 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的任何连续映射 $f:S^n\to\mathbf{R}^n$ 都可将 S^n 的一对对径点映为 $\mathbf{R}^n$ 中同一点，即存在 x_0 和 $-x_0$ 使得 $f(x_0)=f(-x_0)$．由此可知球面 S^n 不可嵌入到 $\mathbf{R}^n$ 中，即 S^n 与 $\mathbf{R}^n$ 的任何子集不同胚．该定理还可写成下列等价形式：

1．不存在保径映射 $f:S^n\to S^{n-1}$，换言之，若 $f:S^m\to S^n$ 为保径映射，则 $m\leqslant n$．

2．若 $g:S^n\to\mathbf{R}^n$ 是保径映射，则必存在 n 维球面 S^n 上的点 x_0 使得 $g(x_0)=0$．

布劳威尔不动点定理(Brouwer fixed point theorem)　利用同调理论研究不动点的定理．该定理断言：任何 n 维实心球 D^n 到自身的连续映射 $f:D^n\to D^n$ 至少存在一个不动点，即至少有一点 $z\in D^n$，使得 $f(z)=z$．

弱同调群(weak homology groups)　同调群的一种弱化．设 K 是复形，z 和 z' 为 K 的两个闭链，若存在非零整数 m 使得 $m(z-z')$ 同调于 0，则称 z 和 z' 弱同调．同调的两个闭链一定是弱同调的．闭链群 $Z_q(K)$ 中同调于 0 的元素组成边缘链群 $B_q(K)$，而弱同调于 0 的全体元素就是 $B_q(K)$ 在 $Z_q(K)$ 中的除闭包 $\overline{B}_q(K)$，称为 q 维弱边缘链群．商群

$$Z_q(K)/\overline{B}_q(K)$$

称为复形 K 的 q 维弱同调群，记为 $\overline{H}_q(K)$．根据群论知识，可知 $\overline{H}_q(K)$ 是一个有限维自由交换群．这为引入自由交换群自同态的迹数创造了条件．

弱同调(weak homology)　见“弱同调群”．

莱夫谢茨数(Lefschetz number)　对多面体到自身的连续映射的一种刻画．为叙述莱夫谢茨不动点定理，引入莱夫谢茨数．若有限维自由交换群 G 的自同态 $f:G\to G$，G 的一组基为

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\},$$

则有

$$f(x_i)=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_i,$$

其中 $A=(a_{ij})$ 是 m 阶整数矩阵，矩阵 A 的对角线上元素的和

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ii}$$

称为自同态 f 的迹数，记为 $\mathrm{Tr}(f,G)$. 对于弱同调群，连续映射的诱导同态性质仍然成立. 即，若 K 与 L 是两个复形，对于任意连续映射 $\varphi:|K|\to|L|$，有非负整数 m 使得 $\varphi:|\mathrm{Sd}^{(m)}K|\to|L|$ 具有星形性质，并且 $f:\mathrm{Sd}^{(m)}K\to L$ 是 φ 的一个单纯逼近，则弱同调群之间的同态为

$$f_{q*}\circ\overline{\mathrm{Sd}}_{q*}^{(m)}:\overline{H}_q(K)\to\overline{H}_q(L)\quad(q\in\mathbf{Z}),$$

它不依赖于重分次数 m 和单纯逼近 f 的选取，由 φ 惟一决定，记为

$$\overline{\varphi}_{q*}=\overline{f}_{q*}\circ\overline{\mathrm{Sd}}_{q*}^{(m)}\quad(q\in\mathbf{Z}).$$

因为弱同调群是有限维自由交换群，所以，若 φ 是 n 维复形 K 的多面体到自身的一个连续映射，则 φ 的莱夫谢茨数 $L(\varphi)$ 定义为

$$L(\varphi)=\sum_{q=0}^{n}(-1)^q\mathrm{Tr}(\overline{\varphi}_{q*},\overline{H}_q(K)).$$

当 φ 取作 $|K|$ 上的恒同映射 $1_{|K|}$ 时，$L(1_{|K|})$ 等于欧拉示性数 $\chi(K)$.

自同态的迹数(trace of autohomomorphism) 见“莱夫谢茨数”.

莱夫谢茨不动点定理(Lefschetz fixed point theorem) 布劳威尔不动点定理的推广. 若复形 K 的多面体 $|K|$ 到自身的连续映射 $\varphi:|K|\to|K|$ 的莱夫谢茨数 $L(\varphi)\neq0$，则 φ 至少有一个不动点. 注意，$L(\varphi)\neq0$ 是 φ 有不动点的充分条件，但非必要条件.

奇异同调(singular homology) 一种同调群. 若 Δ^q 为标准 q 维单形，X 为拓扑空间，q 为非负整数，则连续映射 $\sigma:\Delta^q\to X$ 称为 X 的 q 维奇异单形，所有 q 维奇异单形集合记为 $S_q(X)$，而所有奇异单形集合称为 X 的奇异复形. 对于映射 $c_q:S_q(X)\to\mathbf{Z}$，若 c_q 仅在 $S_q(X)$ 中有限个奇异单形上取非零值，则称为 X 的一条 q 维奇异链，用线性组合形式记为

$$c_q=\sum_j g_j\sigma_j\quad(\sigma_j\in S_q(X),g_j\in\mathbf{Z}),$$

其中只有有限个 g_j 非零. 然后对于任意两个 q 维奇异链 c_q 和 d_q 定义加法

$$(c_q+d_q)(\sigma)=c_q(\sigma)+d_q(\sigma),$$

则 X 的全体 q 维奇异链构成一个交换群，称为 X 的 q 维奇异链群，记为 $C_q(X)$. 当 $q<0$ 时，规定 $C_q(X)=0$. 对于拓扑空间 X 的 q 维奇异单形 σ，定义 $\sigma^{(i)}:\Delta^{q-1}\to X$ 为

$$\sigma^{(i)}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{q-1})=\sigma(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{i-1},0,\lambda_i,\cdots,\lambda_{q-1}),$$

则 $\sigma^{(i)}$ 称为 σ 的第 i 个面，记

$$\partial_q\sigma=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sigma^{(i)},$$

称为 q 维奇异单形 σ 的边缘. 若

$$c_q=\sum_j g_j\sigma_j\in C_q(X),$$

记 $\partial_q c_q=\sum_j g_j\partial_q\sigma_j$，则得同态 $\partial_q:C_q(X)\to C_{q-1}(X)$，它满足 $\partial_q\circ\partial_{q+1}=0$，称为 q 维奇异边缘同态算子. 把 $C_q(X)$ 的子群 $Z_q(X)=\ker\partial_q$ 与 $B_q(X)=\mathrm{Im}\partial_{q+1}$ 分别称为 X 的 q 维奇异闭链群与 q 维奇异边缘链群，并且 $B_q(X)\subset Z_q(X)$，商群

$$H_q(X)=Z_q(X)/B_q(X)\quad(q\in\mathbf{Z})$$

称为 X 的 q 维奇异同调群. 若 X 为道路连通空间，则 $H_0(X)\cong\mathbf{Z}$. 设连续映射 $f:X\to Y$，则有诱导同态

$$f_{q*}:H_q(X)\to H_q(Y)\quad(q\in\mathbf{Z}).$$

于是，奇异同调群具有拓扑不变性、同伦型不变性. 奇异同调论和单纯同调论的联系还体现在下列结论：对于复形 K 的多面体 $|K|$，它的奇异同调群与单纯同调群同构，即 $H_q(K)\cong H_q(|K|)(q\in\mathbf{Z})$. 在奇异同调论中有另一种重要应用的同调序列，通常称为迈尔-菲托里斯序列，它也是正合的同调序列.

单纯同调理论是借助于可剖分空间的单纯复形结构建立起来的，它仅适用于可剖分空间，已有很多方法把这一理论推广使之适用于更广泛的一类空间，从而得到各种同调理论. 其中常用的是奇异同调理论，它可适用于任何拓扑空间，它是以称为奇异单形的标准单形到拓扑空间的连续映射代替单形，进一步采用类似方法定义奇异链群、奇异边缘同态算子、奇异同调群、相对奇异同调群、奇异同调序列以及奇异上同调群等概念.

奇异单形(singular simplex) 见“奇异同调”.

奇异复形(singular complex) 见“奇异同调”.

奇异链(singular chain) 见“奇异同调”.

奇异链群(group of singular chain) 见“奇异同调”.

奇异边缘链群(group of singular boundary chain) 见“奇异同调”.

奇异同调群(singular homology groups) 见“奇异同调”.

链复形(chain complex) 一种抽象的复形. 设 $\{C_q\}_{q\in\mathbf{Z}}$ 是一族交换群和满足 $\partial_q\circ\partial_{q+1}=0$ 的一族同态 $\{\partial_q:C_q\to C_{q-1}\}_{q\in\mathbf{Z}}$，则由它们组成的 $C=\{C_q,\partial_q\}_{q\in\mathbf{Z}}$ 称为一个链复形. 同态 ∂_q 称为链复形的边缘算子，群 C_q 及其子群

$$Z_q(C)=\ker\partial_q,\quad B_q(C)=\mathrm{Im}\,\partial_{q+1}$$

分别称为链复形 C 的 q 维链群及 q 维闭链群，q 维边缘链群，商群 $H_q(C)=Z_q(C)/B_q(C)$ $(q\in\mathbf{Z})$ 称为链复形 C 的 q 维同调群. 类似地可定义和讨论与链复形有关的链映射、链同伦以及链复形的同调序列等同调理论.

从单纯同调群和奇异同调群的理论可看出这些对象有许多共同特征. 比如它们都有一系列交换群，以及满足 $\partial_q\circ\partial_{q+1}=0$ 的一系列边缘同态算子. 为了

深入研究同调理论，有必要抽象出这些代数的概念.

链复形的边缘算子(boundary operator of chain complex)　见"链复形".

链复形的 q 维链群(group of q-chain of chain complex)　见"链复形".

链复形的 q 维闭链群(group of q-cycles of chain complex)　见"链复形".

链复形的 q 维边缘链群(group of boundary q-chain of chain complex)　见"链复形".

链复形的 q 维同调群(q-homology group of chain complex)　见"链复形".

相对奇异同调群(relative singular homology group)　亦称空间偶的奇异同调群. 一种空间偶同调群. 若 X 为拓扑空间，A 是 X 的子空间，则存在 A 的 q 维奇异链群$C_q(A)$到 X 的 q 维奇异链群$C_q(X)$的包含映射$C_q(A)\to C_q(X)$. 相对奇异链群定义为

$$C_q(X,A)=C_q(X)/C_q(A),$$

并且边缘算子 $\partial_q:C_q(X)\to C_{q-1}(X)$诱导出相对奇异链群之间的边缘同态

$$\partial_q:\ C_q(X,A)\to C_{q-1}(X,A).$$

于是，交换群与同态的族$\{C_q(X,A),\partial_q\,|\,q\in\mathbf{Z}\}$构成一个链复形. 该链复形的同调群称为空间偶$(X,A)$的奇异同调群，又称为 X 对 A 的相对奇异同调群，记为 $H_q(X,A)$. 设 $f:(X,A)\to(Y,B)$是连续映射，同态 $f_\#:C_q(X)\to C_q(Y)$使得对于 q 维奇异单形 $T:\Delta_q\to X$ 有

$$f_\#(T)=f\circ T:\ \Delta_q\to Y.$$

从而，$f_\#$诱导出同调群之间的同态

$$f_*:\ H_q(X,A)\to H_q(Y,B)\quad(q\in\mathbf{Z}).$$

空间偶的奇异同调群(singular homology groups of pair)　见"相对奇异同调群".

迈尔-菲托里斯序列(Mayer-Vietoris sequence)　一个重要的正合序列. 它是反映两个空间以及它们的并与交的奇异同调之间关系的正合序列，它是计算同调群的有效工具. 若$\{X_1,X_2\}$是切除对，则存在正合序列

$$\begin{array}{ccc} X_1\cap X_2 & \xrightarrow{\ i\ } & X_1 \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ X_2 & \xrightarrow{\ l\ } & X_1\cup X_2 \end{array}$$

$$\cdots\to H_q(X_1\cap X_2)\xrightarrow{\varphi_*}H_q(X_1)\oplus H_q(X_2)$$
$$\xrightarrow{\psi_*}H_q(X_1\cup X_2)\to H_{q-1}(X_1\cap X_2)\to\cdots,$$

此处，φ_*与ψ_*分别定义为

$$\varphi_*(a)=(i_*(a),-j_*(a)),$$
$$\psi_*(x_1,x_2)=k_*(x_1)+l_*(x_2),$$

其中映射 i,j,k 与 l 均是包含映射. 这个正合序列称为切除对$\{X_1,X_2\}$的迈尔-菲托里斯序列. 对于空间偶的切除对$\{(X_1,A_1),(X_2,A_2)\}$，存在一正合序列

$$\cdots\to H_q(X_1\cap X_2,A_1\cap A_2)$$
$$\xrightarrow{\varphi_*}H_q(X_1,A_1)\oplus H_q(X_2,A_2)$$
$$\xrightarrow{\psi_*}H_q(X_1\cup X_2,A_1\cup A_2)$$
$$\to H_{q-1}(X_1\cap X_2,A_1\cap A_2)\to\cdots,$$

它称为切除对$\{(X_1,A_1),(X_2,A_2)\}$的相对迈尔-菲托里斯序列.

相对迈尔-菲托里斯序列(relative Mayer-Vietoris sequence)　见"迈尔-菲托里斯序列".

切除对(excisive couple)　同调群的一个重要性质. 设 X_1 与 X_2 都是某拓扑空间的子空间，$C(X_1)$,$C(X_2)$和 $C(X_1\cup X_2)$分别表示空间 X_1,X_2 与 $X_1\cup X_2$ 的奇异链复形，若包含映射

$$C(X_1)+C(X_2)\to C(X_1\cup X_2)$$

诱导出各维同调群之间的同构，则称$\{X_1,X_2\}$为切除对. 此处链复形 $C(X_1)+C(X_2)$的 q 维链群是

$$C_q(X_1)+C_q(X_2),$$

q 维边缘算子是 $C(X_1)$与 $C(X_2)$的 q 维边缘算子之和. 对于空间偶(X_1,A_1)与(X_2,A_2)，若$\{X_1,X_2\}$与$\{A_1,A_2\}$都是切除对，则称$\{(X_1,A_1),(X_2,A_2)\}$是切除对. $\{X_1,X_2\}$是切除对的充分必要条件是，包含映射

$$(X_1,X_1\cap X_2)\to(X_1\cup X_2,X_2)$$

诱导出各维奇异同调群之间的同构. 若

$$X_1\cup X_2=\mathrm{Int}_{X_1\cup X_2}X_1\cup\mathrm{Int}_{X_1\cup X_2}X_2,$$

则$\{X_1,X_2\}$是切除对.

同调公理(the axioms for homology)　一组刻画同调群性质的公理. 设 $\mathscr{A}$ 是拓扑空间偶(X,A)的类. 若：

1. (X,A)属于 $\mathscr{A}$ 蕴涵(X,X),$(X,\varnothing)$,(A,A)与$(A,\varnothing)$都属于 $\mathscr{A}$；

2. (X,A)属于 $\mathscr{A}$ 蕴涵$(X\times I,A\times I)$属于 $\mathscr{A}$，此处 I 是单位区间；

3. 存在单点集 P，使得$(P,\varnothing)$属于 $\mathscr{A}$；

则称 $\mathscr{A}$ 是空间的容许类.

设 $\mathscr{A}$ 是空间的容许类，$\mathscr{A}$ 上的同调理论由以下条件组成：

1. 对于每个整数 p，有一个函数 H_p 将 $\mathscr{A}$ 中每个空间偶(X,A)映为一个交换群 $H_p(X,A)$.

2. 对于每个整数 p，有一个函数将每个连续映射 $h:(X,A)\to(Y,B)$映为同态

$$(h_*)_p:\ H_p(X,A)\to H_p(Y,B).$$

3. 对于每个整数 p，有一个函数将 $\mathscr{A}$ 中每个空间偶(X,A)映为一个同态

$$(\partial_*)_p:\ H_p(X,A)\to H_{p-1}(A),$$

此处 A 表示空间偶$(A,\varnothing)$. 要求这些函数满足下述七条公理：

1. 若 i 是恒同映射，则 i_* 是恒同映射.

2. $(k\circ h)_*=k_*\circ h_*$.

3. 若 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 是连续映射，则下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} H_p(X,A) & \xrightarrow{f_*} & H_p(Y,B) \\ \downarrow \partial_* & & \downarrow \partial_* \\ H_{p-1}(A) & \xrightarrow{(f|A)_*} & H_{p-1}(B) \end{array}$$

4.（正合公理）群与同态的序列

$$\cdots\to H_p(A)\xrightarrow{i_*}H_p(X)\xrightarrow{j_*}H_p(X,A)$$
$$\xrightarrow{\partial_*}H_{p-1}(A)\to\cdots$$

是正合序列，此处，$i:A\to X$ 与 $j:X\to(X,A)$ 均是包含映射.

5.（同伦公理）若 h 与 k 是同伦的映射，则

$$h_*=k_*.$$

6.（切除公理）对于空间偶 (X,A)，设 U 是 X 的开子集，$\overline{U}\subseteq\operatorname{Int}A$，若 $(X-U,A-U)$ 是容许的（即在 $\mathscr{A}$ 中），则包含映射 $(X-U,A-U)\to(X,A)$ 诱导出同构 $H_p(X-U,A-U)\to H_p(X,A)$.

7.（维数公理）若 P 是单点空间，则对于整数 $p\neq0$，$H_p(P)=0$ 与 $H_0(P)\cong Z$.

除了满足公理 1—7 外，还满足下列公理 8 的同调理论称为具有紧支集的.

8.（紧支集公理）若 $\alpha\in H_p(X,A)$，则存在容许的空间偶 (X_0,A_0)，使得 X_0 与 A_0 都是紧致空间，并且 α 是由包含映射诱导出同态 $H_p(X_0,A_0)\to H_p(X,A)$ 的像.

此处，若将上述维数公理改为 $H_p(P)\cong G$，其中 G 是任意交换群，则所得同调理论称为系数在 G 中的同调理论. 若一种同调理论满足除维数公理以外的所有同调公理，则称之为广义同调理论. 注意：

1. 空间偶 $(A,\varnothing)$ 常记为 A.

2. 上述公理中的群同态均省略了维数下标.

3. 上述公理中涉及的空间偶均是容许的空间偶，即是 $\mathscr{A}$ 中的空间偶.

同调公理是艾伦伯格（Eilenberg，S.）和斯廷罗德（Steenrod，N. E.）于 1945 年提出的，它概括了单纯同调、奇异同调及其他一些同调理论的最基本共同特征.

广义同调理论（generalized homology theory） 见“同调公理”.

胞腔复形（cell complex） 拓扑空间的一种剖分法. 设 X 为豪斯多夫空间，

$$K=\{e_\alpha^n\mid n=0,1,2,\cdots;\alpha\in J_n\}$$

为 X 的子空间族，其中 J_n 为标号集合. 记

$$K^n=\{e_\alpha^r\mid r\leqslant n,\alpha\in J_r\},$$
$$|K^n|=\bigcup_{r\leqslant n,\alpha\in J_r}e_\alpha^r,\quad \dot{e}_\alpha^n=e_\alpha^n\cap|K^{n-1}|,$$
$$\mathring{e}_\alpha^n=e_\alpha^n-\dot{e}_\alpha^n.$$

称 K 为 X 上的胞腔复形，若 K 满足下列条件：

1. $X=\bigcup\limits_{n,\alpha}e_\alpha^n=|K|$.

2. $\mathring{e}_\alpha^n\cap\mathring{e}_\beta^m\neq\varnothing$ 蕴涵 $\alpha=\beta,m=n$.

3. 对于任意一对 α,n，存在映射

$$\varphi_\alpha^n:(D^n,S^{n-1})\to(e_\alpha^n,\dot{e}_\alpha^n),$$

使得 φ_α^n 为满射并且将 D^n-S^{n-1} 同胚地映为 $\mathring{e}_\alpha^n$，其中 D^n 为 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体，S^{n-1} 为 D^n 的边界球面.

这时称 K 是 X 的一个胞腔剖分，e_α^n 称为 n 维胞腔，φ_α^n 称为示性映射. 对于胞腔 e_β^m 与 e_α^n，若

$$\mathring{e}_\beta^m\cap e_\alpha^n\neq\varnothing,$$

则称 e_β^m 为 e_α^n 的一个直接面. 对于胞腔 e_β^m 与 e_α^n，若存在一个有限个胞腔的序列

$$e_\beta^m=e_{\beta_0}^{m_0},\ e_{\beta_1}^{m_1},\ \cdots,\ e_{\beta_s}^{m_s}=e_\alpha^n,$$

使得 $e_{\beta_i}^{m_i}$ 是 $e_{\beta_{i+1}}^{m_{i+1}}$ 的一个直接面 $(i=0,1,\cdots,s-1)$，则称 e_β^m 是 e_α^n 的一个面. 例如，在 n 维球面 S^n 中，任取一点 $P\in S^n$，若 $e^0=\{P\}$，$e^n=S^n$，则 $\{e^0,e^n\}$ 是 S^n 上的一个胞腔剖分. 同一个空间可以有不同的胞腔剖分. 一般地，胞腔剖分比单纯剖分所含胞腔数目可以少得多，这是胞腔剖分的一大优点.

胞腔剖分（cellular decomposition） 见“胞腔复形”.

***n* 维胞腔**（*n*-cell） 见“胞腔复形”.

示性映射（characteristic map） 见“胞腔复形”.

CW 复形（CW-complex） 一类重要的拓扑空间. 设 $K=\{e_\alpha^n\mid n=0,1,2,\cdots,;\alpha\in J_n\}$ 是豪斯多夫空间 X 上的一个胞腔复形. 若 K 满足下列条件：

条件 C：K 是闭包有限的，即 K 的每一个胞腔只有有限个（直接）面；

条件 W：X 有由 K 诱导的弱拓扑，即 X 的子集 E 为闭集当且仅当对于所有的 n 与 α，$E\cap e_\alpha^n$ 是 e_α^n 中的闭集，则称 K 为 X 上的 CW 复形. 例如，一个单纯复形 K 是它的多面体 $|K|$（即 K 的基础空间）上的 CW 复形.

CW 复形的同调（the homology of CW-complexes） 一类特殊空间的同调群. 设

$$K=\{e_\alpha^n\mid n=0,1,2,\cdots,\alpha\in J_n\}$$

是空间 X 上的 CW 复形，记

$$X^q=\bigcup_{r\leqslant q,\alpha\in J_r}e_\alpha^r.$$

若 $D_q(X)=H_q(X^q,X^{q-1})$，$\partial_q:D_q(X)\to D_{q-1}(X)$ 定

义为复合

$$H_q(X^q,X^{q-1})\xrightarrow{(\partial_*)_q}H_{q-1}(X^{q-1})\xrightarrow{j_*}H_{q-1}(X^{q-1},X^{q-2}),$$

此处 $j:X^{q-1}\to(X^{q-1},X^{q-2})$是包含映射,则

$$\mathscr{D}(X)=\{D_q(X),\partial_q|q\in\mathbf{Z}\}$$

是链复形,称为 X 的胞腔链复形. 拓扑空间 X 的胞腔链复形的同调群$H_q(\mathscr{D}(X))$与 X 的奇异同调群 $H_q(X)$是自然同构的.

同调泛系数定理(the universal coefficients theorem for homology) 阐明一般系数群的同调群与整系数同调群之间关系的定理. 若 $C=\{C_p,\partial_p\}$是链复形,G 是任意交换群,则有

$$C\otimes G=\{C_p\otimes G,\partial_p\otimes 1_G\}$$

是链复形,其中 $C_p\otimes G$ 是交换群 C_p 与 G 的张量积,1_G 表示 G 上的恒同映射,链复形 $C\otimes G$ 的 q 维同调群称为 C 的系数在 G 中的 q 维同调群,记为

$$H_q(C;G).$$

设(X,A)是空间偶,G 是任意交换群,(X,A)的奇异链复形 $C(X,A)$的系数在 G 中的 q 维同调群称为(X,A)的系数在 G 中的 q 维奇异同调群,记为

$$H_q(X,A;G).$$

于是,系数在任意交换群 G 中的奇异同调满足系数在 G 中的同调论的所有公理. 若(X,A)是空间偶,则存在分裂的正合序列

$$0\to H_p(X,A)\otimes G\to H_p(X,A;G)$$
$$\to H_{p-1}(X,A)*G\to 0,$$

它对于由连续映射诱导的同态是自然的,其中,$H_{p-1}(X,A)*G$ 表示交换群 $H_{p-1}(X,A)$与 G 的挠积. 该定理称为同调泛系数定理.

艾伦伯格-齐贝尔定理(Eilenberg-Zilber theorem) 关于积空间的奇异同调群的定理. 该定理断言:对于拓扑空间 X 与 Y,存在链映射

$$C(X)\otimes C(Y)\underset{\gamma}{\overset{\mu}{\rightleftharpoons}}C(X\times Y),$$

其中 $C(X)\otimes C(Y)$是奇异链复形 $C(X)$与 $C(Y)$的张量积,μ 与 γ 互为链同伦逆. 它们对于由连续映射诱导的链映射是自然的. 于是,积空间 $X\times Y$ 的各维数的奇异同调群 $H_q(X\times Y)$与链复形 $C(X)\otimes C(Y)$的相应同调群 $H_q(C(X)\otimes C(Y))$是同构的. 它表明两个拓扑空间 X 与 Y 的积空间 $X\times Y$ 的奇异同调群可以利用奇异链复形的张量积来计算.

克奈定理(Künneth theorem) 描述两个拓扑空间的积空间的奇异同调群与每个因子空间奇异同调群之间关系的定理. 该定理断言:对于拓扑空间 X 与 Y,存在一个分裂的正合序列:

$$0\to\bigoplus_{p+q=m}H_p(X)\otimes H_q(Y)\to H_m(X\times Y)$$
$$\to\bigoplus_{p+q=m}H_{p-1}(X)*H_q(Y)\to 0,$$

它对于由连续映射诱导的同态是自然的. 这里$\oplus$,$\otimes$与 $*$ 分别表示交换群的直和、张量积和挠积运算.

上同调公理(the axioms for cohomology) 一组刻画上同调性质的公理. 设 $\mathscr{A}$ 是空间偶(X,A)的容许类,G 是交换群. $\mathscr{A}$ 上的系数在 G 中的上同调理论由以下条件组成:

1. 对于每个整数 p,有一个函数 H^p 将 $\mathscr{A}$ 中每个空间偶(X,A)映为一个交换群 $H^p(X,A;G)$.

2. 对于每个整数 p,有一个函数将每个连续映射 $h:(X,A)\to(Y,B)$映为同态

$$(h^*)_p:H^p(Y,B;G)\to H^p(X,A;G).$$

3. 对于每个整数 p,有一个函数将 $\mathscr{A}$ 中的每个空间偶(X,A)映为同态

$$(\delta^*)_p:H^{p-1}(A;G)\to H^p(X,A;G).$$

要求这些函数满足下述七条公理:

1. 若 i 是恒同映射,则 i^*是恒同映射.

2. $(k\circ h)^*=h^*\circ k^*$.

3. 若 $f:(X,A)\to(Y,B)$是连续映射,则下图可交换:

$$\begin{array}{ccc}H^p(X,A;G) & \xleftarrow{f^*} & H^p(Y,B;G)\\ \uparrow\delta^* & & \uparrow\delta^*\\ H^{p-1}(A;G) & \xleftarrow{(f|A)^*} & H^{p-1}(B;G)\end{array}$$

4. 群与同态的序列

$$\cdots\leftarrow H^p(A;G)\xleftarrow{i^*}H^p(X;G)\xleftarrow{j^*}$$
$$H^p(X,A;G)\xleftarrow{\delta^*}H^{p-1}(A;G)\leftarrow\cdots$$

是正合序列,此处 i 与 j 都是包含映射.

5. 若 h 与 k 是同伦的,则 $h^*=k^*$.

6. 对于空间偶(X,A),设 U 是 X 的开子集,$\overline{U}\subseteq\operatorname{Int}A$,若$(X-U,A-U)$是容许的,则包含映射 j 诱导出上同调的同构

$$H^p(X-U,A-U;G)\xleftarrow{j^*}H^p(X,A;G).$$

7. 若 P 是单点空间,则对于 $p\neq 0$,

$$H^p(P;G)=0,\quad H^0(P;G)\cong G.$$

注意:

1. 空间偶$(A,\varnothing)$常记为 A.

2. 上述公理中的群同态均省略了维数下标.

3. 上述公理中涉及的空间偶均指容许的空间偶,即 $\mathscr{A}$ 中的空间偶.

艾伦伯格-斯廷罗德公理(Eilenberg-Steenrod axioms) 同调公理与上同调公理统称为艾伦伯格-斯廷罗德公理(参见“同调公理”和“上同调公理”).

奇异上同调(singular cohomology) 一种上同调群. 设(X,A)是空间偶,G 是任意交换群. 记 $C(X,A)$表示(X,A)的奇异链复形. 定义(X,A)的

系数在 G 中的 q 维奇异上链群

$$C^q(X,A;G) = \mathrm{Hom}(C_q(X,A),G),$$

这里 $\mathrm{Hom}(C_q(X,A),G)$表示群 $C_q(X,A)$到 G 的全体同态之集，它依照以 G 中诱导的二元运算成为一个交换群；上边缘算子

$$\delta: C^q(A;G) \to C^{q+1}(X,A;G)$$

定义为$C(X,A)$中边缘算子的对偶. 即对于

$$c^q \in C^q(A;G), \quad \delta(c^q) = c^q \circ \partial.$$

于是，$\{C^q(X,A;G),\delta \mid q\in\mathbb{Z}\}$是一个链复形，其 q 维同调群称为(X,A)的系数在 G 中的 q 维奇异上同调群，记为 $H^q(X,A;G)$. 系数在交换群 G 中的奇异上同调满足系数在交换群 G 中的上同调理论的所有公理. 与奇异同调理论类似，奇异上同调理论也是将每个拓扑空间(偶)联系上一系列交换群，称为上同调群. 从纯代数观点看，它的引入似乎更为自然. 上同调理论可用于研究流形上的微分形式. 此外，当系数群是一个有单位元的交换环时，上同调群上有一种自然的环结构，即上同调环，这是同调群上所没有的.

奇异上同调群(singular cohomology group) 见“奇异上同调”.

CW 复形的上同调(the cohomology of CW-complexes) 特殊空间的上同调群. 若

$$K = \{e_\alpha^n \mid n = 0,1,2,\cdots;\alpha \in J_n\}$$

是空间 X 上的 CW 复形，$\mathscr{D}(X)$是 X 的胞腔链复形，则对于任意交换群 G 及每个整数 p，链复形 $\mathscr{D}(X)$的系数在 G 中的 p 维上同调群 $H^p(\mathscr{D}(X);G)$与 X 的系数在 G 中的 p 维奇异上同调群 $H^p(X;G)$是同构的.

上积(cup product) 上同调群中的乘法. 设$\triangle^p$是标准 q 单形，映射

$$l(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p): \triangle^p \to \triangle^{p+q},$$
$$(x_0,x_1,\cdots,x_p) \mapsto (x_0,x_1,\cdots,x_p,\underbrace{0,0,\cdots,0}_{q个});$$
$$l(\varepsilon_p,\varepsilon_{p+1},\cdots,\varepsilon_{p+q}): \triangle^q \to \triangle^{p+q},$$
$$(x_0,x_1,\cdots,x_q) \mapsto (\underbrace{0,\cdots,0}_{p个},x_0,\cdots,x_q).$$

设 X 是拓扑空间，R 是有单位元的交换环，$C^p(X;R)$表示 X 的系数在 R 中的 p 维奇异上链群，对于 $c^p\in C^p(X;R)$，$c_p\in C_p(X)$，$\langle c^p,c_p\rangle$表示 c^p 作用在 c_p 上的值. 若映射

$$\smile: C^p(X;R) \times C^q(X;R) \to C^{p+q}(X;R),$$

使得对于 $c^p\in C^p(X;R)$，$c^q\in C^q(X;R)$及奇异 $p+q$ 单形 $T:\triangle^{p+q}\to X$，

$$\langle c^p \smile c^q,T\rangle = \langle c^p,T \circ l(\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_p)\rangle \cdot \langle c^q,T \circ l(\varepsilon_p,\varepsilon_{p+1},\cdots,\varepsilon_{p+q})\rangle,$$

上链 $c^p \smile c^q$ 称为上链 c^p 与 c^q 的上积. 于是，上链的上积诱导出映射

$$\smile: H^p(X;R) \times H^q(X;R) \to H^{p+q}(X;R),$$

它是双线性的与结合的. 对于$z^p\in H^p(X;R)$与 $z^q\in H^q(X;R)$，$z^p \smile z^q$ 称为 z^p 与 z^q 的上积. 若 $h:X\to Y$ 是连续映射，则由 h 诱导的同态

$$h^*: H^q(Y;R) \to H^q(X;R)$$

是保上积的.

上同调环(cohomology ring) $H^*(X;R)$上的一种环结构. 设 X 是拓扑空间，R 是有单位元的交换环. $H^*(X;R)$表示外直和$\oplus H^i(X;R)$. 于是，上积运算使得 $H^*(X;R)$成为有单位元的环，称为 X 的系数在 R 中的上同调环. 连续映射诱导出上同调环的同态；上同调环是拓扑空间的同伦型不变量；当两个拓扑空间的各个维数的上同调群分别同构时，其上同调环未必同构. 因此，利用上同调环判定两个拓扑空间是否同胚会比上同调群更为有效.

上同调泛系数定理(the universal coefficients theorem for cohomology) 描述一般系数的奇异上同调与奇异同调之间关系的定理. 若(X,A)是空间偶，则存在分裂的正合序列

$$0\leftarrow \mathrm{Hom}(H_p(X,A),G)\leftarrow H^p(X,A;G) \leftarrow \mathrm{Ext}(H_{p-1}(X,A),G)\leftarrow 0,$$

它对于由连续映射诱导的同态是自然的. 此外，关于奇异同调与奇异上同调，还有其他泛系数定理，陈述如下：设(X,A)是空间偶，若对于每个整数 i，$H_i(X,A)$是有限生成的交换群，则存在分裂的正合序列

$$0\leftarrow \mathrm{Hom}(H^p(X,A),G)\leftarrow H_p(X,A;G) \leftarrow \mathrm{Ext}(H^{p+1}(X,A),G)\leftarrow 0$$

和

$$0\to H^p(X,A)\otimes G \to H^p(X,A;G) \to H^{p+1}(X,A) * G \to 0,$$

它们对于由连续映射诱导的同态是自然的，其中，$*$ 表示交换群的挠积运算，Ext 表示扩张群.

上同调叉积(cohomology cross product) 一种特殊运算. 即描述两个空间的乘积空间的上同调环与每个因子空间的上同调环之间关系的运算. 设 R 是有单位元的交换环，C 与 C'分别是空间 X 和 Y 的奇异链复形. 若映射

$$\theta: C^p(X;R) \otimes C^q(Y;R) \to \mathrm{Hom}((C \otimes C')_{p+q},R)$$

使得对于 $\varphi^p\otimes\psi^q\in C^p(X;R)\otimes C^q((Y;R)$，$c_r\otimes c'_s\in(C\otimes C')_{p+q}$，$\theta(\varphi^p\otimes\psi^q)(c_r\otimes c'_s)=\varphi^p(c_r)\circ\psi^q(c'_s)$，此处规定当 $p\neq r$ 与 $q\neq s$ 时，$\varphi^p(c_r)=0$ 与 $\psi^q(c'_s)=0$，记 $\tilde{\gamma}:\mathrm{Hom}((C\otimes C')_{p+q},R)\to C^{p+q}(X\times Y;R)$表示艾伦伯格齐贝尔链等价

$$\gamma: C(X\times Y) \to C(X)\otimes C(Y)$$

的对偶，则奇异链 $c^p\in C^p(X;R)$与 $c^q\in C^q(Y;R)$的叉积定义为 $c^p\times c^q=\tilde{\gamma}\theta(c^p\otimes c^q)$. 于是，上链的叉积诱导出同态：

$$H^p(X;R)\otimes H^q(Y;R)\to H^{p+q}(X\times Y;R),$$
$$\{z_p\}\otimes\{z'_q\}\mapsto\{z_p\times z'_q\},$$

称 $\{z_p\times z'_q\}$ 为 $\{z_p\}$ 与 $\{z_q\}$ 的叉积，记为 $\{z_p\}\otimes\{z'_q\}$. 设 X 与 Y 均是拓扑空间，若 X 的各维数奇异同调群 $H_i(X)$ 都是有限生成的交换群，则上同调叉积给出环的单同态 $H^*(X)\otimes H^*(Y)\to H^*(X\times Y)$. 若 F 是域，则上同调叉积给出代数同构

$$H^*(X;F)\otimes_F H^*(Y;F)\to H^*(X\times Y;F).$$

其中，对于有单位元的交换环 R，上同调环 $H^*(X;R)$ 与 $H^*(Y;R)$ 的张量积 $H^*(X;R)\otimes_R H^*(Y;R)$ 上的乘法运算定义为

$$(\alpha\otimes\beta)\smile(\alpha'\otimes\beta')=(-1)^{pq}(\alpha\smile\alpha')\otimes(\beta\smile\beta'),$$

而 $\beta\in H^p(Y;R),\alpha'\in H^q(X;R)$.

同调流形(homology manifold) 一类重要的拓扑空间. 设 (X,A) 为拓扑空间偶，若对于 $X-A$ 中的每个点 x，相对同调群 $H_n(X,X-\{x\})$ 均为无限循环群，并且对于 $i\neq n$，$H_i(X,X-\{x\})$ 均为平凡群，则称 (X,A) 为相对同调 n 流形. 特别地，当 $A=\varnothing$ 时，称相应 X 为同调 n 流形. 拓扑流形均为同调流形，但同调流形未必是拓扑流形.

相对同调流形(relative homology manifold) 见“同调流形”.

庞加莱对偶(Poincaré duality) 描述可剖分同调流形的同调与上同调之间关系的定理. 设 X 是紧致可剖分的同调 n 流形，若 X 是可定向的，则对于每个整数 p，存在同构 $H^p(X;G)\cong H_{n-p}(X;G)$，其中，$G$ 是任意系数群；若 X 是不可定向的，则对于每个整数 p，存在同构 $H^p(X;\mathbb{Z}_2)\cong H_{n-p}(X;\mathbb{Z}_2)$.

切赫上同调(Čech cohomology) 一种同调群. 若 $\mathscr{A}$ 是拓扑空间 X 的子集族，则其抽象复形 $N(\mathscr{A})$ 定义为：其顶点是 $\mathscr{A}$ 中成员；其单形是 $\mathscr{A}$ 的有限子族 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，使得

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i\neq\varnothing.$$

若 $\mathscr{B}$ 是 X 的子集族，并且 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的加细（$\mathscr{B}$ 中的每一个集合一定能被 $\mathscr{A}$ 中的某一个集合所包含），则存在映射 $g:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$，使得对于 $\mathscr{B}$ 中的每个 B，$g(B)\supseteq B$. 由此顶点映射 g 诱导出单纯映射

$$g:N(\mathscr{B})\to N(\mathscr{A}),$$

于是，若映射 $g':\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ 也满足对于每个 $B\in\mathscr{B}$，有 $g'(B)\supseteq B$，则 g 与 g' 诱导出相同的同态：

$$g_*:H_k(N(\mathscr{B});G)\to H_k(N(\mathscr{A});G),$$
$$g^*:H^k(N(\mathscr{A});G)\to H^k(N(\mathscr{B});G),$$

这些同态称为由加细诱导的同态，其中，G 是任意交换群. 若 X 是拓扑空间，J 是 X 的全体开覆盖之族，对于 $\alpha,\beta\in J$，记 $\alpha<\beta$ 表示 β 是 α 的加细，则 J 关于关系 $<$ 是一个定向集. 对于 $\alpha<\beta$，记：

$$\pi_\alpha^\beta:H^k(N(\alpha);G)\to H^k(N(\beta);G),$$
$$\pi_\beta^\alpha:H_k(N(\beta);G)\to H_k(N(\alpha);G)$$

表示由加细诱导的同态. 从而对于每个整数 k，

$$\{H^k(N(\alpha);G),\pi_\alpha^\beta\}\quad 与\quad\{H_k(N(\alpha);G),\pi_\beta^\alpha\}$$

分别是群与同态的直系和逆系. 拓扑空间 X 的系数在 G 中的 k 维切赫上同调群和切赫同调群分别定义为

$$\check{H}^k(X;G)=\varinjlim_{\alpha\in J}H^k(N(\alpha);G),$$
$$\check{H}_k(X;G)=\varprojlim_{\alpha\in J}H_k(N(\alpha);G).$$

可剖分空间各个维数的单纯同调群（上同调群）与切赫同调群（上同调群）是同构的. 切赫上同调满足艾伦伯格-斯廷罗德上同调公理；切赫同调满足除了正合公理之外的其他艾伦伯格-斯廷罗德同调公理.

切赫上同调群(Čech cohomology groups) 见“切赫上同调”.

切赫同调群(Čech homology groups) 见“切赫上同调”.

上同调运算(cohomology operations) 作用在上同调群上的一种自然变换. 它是代数拓扑学中的一个重要工具. 设 p 和 q 是两个固定的非负整数，G 和 G' 为给定的交换群，一个 $(p,q;G,G')$ 型的上同调运算 θ 定义为一个从函子 $H^p(\quad;G)$ 到函子 $H^q(\quad;G')$ 的自然变换. 例如，由系数群的同态诱导的上同调群之间的同态、著名的斯廷罗德幂，庞特里亚金幂都是上同调运算. 塞尔(Serre J. P.)证明：所有 $(p,q;G,G')$ 型的上同调运算与 $K(G,p)$ 的 q 维上同调群 $H^q(k(G,p);G')$ 中的所有元素是一一对应的. 另外，斯廷罗德(Steenrod, N. E.)和托马斯(Thomas, E.)利用循环群诱导出许多具体的上同调运算. 斯廷罗德和托马斯所得到的具体上同调运算即为全体上同调运算. 亚当斯(Adams, J. F.)利用高阶上同调运算成功地解决了霍普夫不变量 1 的元素不存在问题.

斯廷罗德代数(Steenrod algebra) 一个作用在上同调环上的代数. 它是代数拓扑中的一个重要工具. 斯廷罗德平方 Sq^i 的性质可以用以下七条公理来规定（所用系数群为 $\mathbb{Z}_2$）：

1. 对于所有整数 $i\geqslant 0$ 及 $n\geqslant 0$，存在一个函子的自然变换 $Sq^i:H^n(X,A)\to H^{n+i}(X,A)$，并且 Sq^i 为同态.

2. $Sq^0=$恒同同态.

3. 若 $\dim x=n$，则 $Sq^n x=x^2$.

4. 若 $i>\dim x$，则 $Sq^i x=0$.

5. 嘉当(Cartan)公式：

$$Sq^k(xy)=\sum_{i=0}^{k}Sq^i x Sq^{k-i}y.$$

6. Sq^1 为系数群的正合序列

$$0 \to \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_4 \to \mathbf{Z}_2 \to 0$$

所决定的鲍克斯坦同态

$$\beta: H^n(X,A) \to H^{n+1}(X,A).$$

7. 亚得姆关系：若 $0<a<2b$，则

$$Sq^a Sq^b = \sum_{j=0}^{[a/2]} \binom{b-1-j}{a-2j} Sq^{a+b-j} Sq^j,$$

其中

$$\binom{b-1-j}{a-2j}$$

表示模 2 二项式系数. Sq^i 由前 5 条公理惟一决定. 若 $\mathfrak{A}_2$ 是由 $Sq^i(i=0,1,2,\cdots)$ 生成的在 $\mathbf{Z}_2$ 上的自由分次可结合代数，$\mathscr{I}_2$ 为由 $Sq^0=1$ 和亚得姆关系所产生的理想，则 $\varphi_2=\mathfrak{A}_2/\mathscr{I}_2$，称为模 2 斯廷罗德代数. 映射

$$\psi(Sq^k) = \sum_{i=0}^{k} Sq^i \otimes Sq^{k-i}$$

可以扩充为代数同态 $\psi:\varphi_2 \to \varphi_2 \otimes \varphi_2$，$\psi$ 称为对角映射. φ_2 为具有可交换和可结合的对角映射 ψ 的霍普夫代数.

简化幂 P^i 的性质可以用以下六条公理来规定（所用系数群为 $\mathbf{Z}_p$，p 为奇素数）：

1. 对所有整数 $i \geqslant 0$ 及 $n \geqslant 0$，存在一个函子的自然变换 $P^i: H^n(X,A) \to H^{n+2i(p-1)}(X,A)$，并且 P^i 为同态.

2. $P^0=$ 恒同同态.

3. 若 $\dim x = 2k$，则 $P^k x = x^p$.

4. 若 $2k > \dim x$，则 $P^k x = 0$.

5. 嘉当公式：

$$P^h(xy) = \sum_i P^i x P^{h-i} y.$$

6. 亚得姆关系，若 $a<pb$，则有

$$P^a P^b = \sum_{t=0}^{[a/p]} (-1)^{a+t} \binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt} P^{a+b-t} P^t,$$

若 $a \leqslant pb$，则有

$$P^a \beta P^b = \sum_{t=0}^{[a/p]} (-1)^{a+t} \binom{(p-1)(b-t)}{a-pt} \beta P^{a+b-t} P^t + \sum_{t=0}^{[(a-1)/p]} (-1)^{a+t-1} \binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt-1} P^{a+b-t} \beta P^t,$$

其中 $\beta: H^n(X,A) \to H^{n+1}(X,A)$ 为系数群的正合序列 $0 \to \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_{p^2} \to \mathbf{Z}_p \to 0$ 所决定的鲍克斯坦同态. P^i 由前 5 条公理惟一决定. 若 $\mathfrak{A}_p$ 是由 β, P^i $(i=0,1,2,\cdots)$ 生成的在 $\mathbf{Z}_p$（$p>2$ 的素数）上的分次可结合代数，$\mathscr{I}_p$ 为由 $\beta^2=0, P^0=1$ 和亚得姆关系产生的理想，则 $\varphi_p=\mathfrak{A}_p/\mathscr{I}_p$ 称为模 p 斯廷罗德代数. 利用映射

$$\psi(P^h) = \sum_{i=0}^{k} P^i \otimes P^{k-i}$$

和 $\psi(\beta)=\beta \otimes 1 + 1 \otimes \beta$ 可以扩充为代数同态

$$\psi: \varphi_p \to \varphi_p \otimes \varphi_p,$$

ψ 称为对角映射，φ_p 为具有可交换和可结合的对角映射 ψ 的霍普夫代数.

斯廷罗德平方(Steenrod square)　见“斯廷罗德代数”.

鲍克斯坦同态(Bockstein homomorphism)　见“斯廷罗德代数”.

对角映射(diagonally map)　见“斯廷罗德代数”.

简化幂(reduced power)　见“斯廷罗德代数”.

拓扑空间的楔和(wedge sum of topological spaces)　拓扑空间的一种运算. 它给出由已知空间构造新空间的一种方法. 设 X, Y 为两个带有基点的拓扑空间，x_0, y_0 分别为 X, Y 的基点. 子空间

$$X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subset X \times Y$$

称为 X 和 Y 的楔和，以 $X \vee Y$ 表示.

拓扑空间的碎积(smash product of topological spaces)　拓扑空间的一种运算，它给出由已知空间构造新空间的一种方法. 设 X, Y 为两个带有基点的拓扑空间，x_0, y_0 分别为 X, Y 的基点，则商空间

$$X \times Y / X \vee Y$$

称为 X, Y 的碎积，记为 $X \wedge Y$. 而 $X \vee Y$ 对应到商空间 $X \times Y / X \vee Y$ 中的点规定为 $X \wedge Y$ 中的基点. 设 I 为 $[0,1]$，规定点 0 为 I 的基点，则 $X \wedge I$ 称为在 X 上的角锥，记为 CX. 设 S^1 为一维球面，点 $(1,0)$ 为 S^1 的基点，则 $X \wedge S^1$ 称为 X 的悬垂，记为 SX. 规定

$$S^n X = (S^{n-1} X) \wedge S^1.$$

角锥(pyramid)　见“拓扑空间的碎积”.

悬垂(suspension)　代数拓扑学的一个重要概念. 带有基点的拓扑空间 (X, x_0) 的悬垂是它和单位区间 I 的积空间的商空间

$$(X \times I)/[(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)],$$

该空间同胚于 $S^1 \wedge X$，记为 SX. 等价类

$$(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I)$$

作为 SX 的基点. 以 X 到 SX 的对应可确定一个从带基点拓扑空间范畴到其自身的函子. 此函子可确定所谓的悬垂同态 $E: \pi_n(X) \to \pi_{n+1}(SX)$. 弗勒登塔尔(Freudenthal, H.)悬垂定理断言：当 X 是 $(m-2)$ 连通 $(m \geqslant 2)$ 空间时，若 $n<2m-1$，则 E 是同构；若 $n=2m-1$，则 E 为满同态. 对于任意同调论 h_*（上同调论 h^*），存在同构

$$\delta: \tilde{h}^n(X) \cong \tilde{h}^{n+1}(SX) = h^{n+1}(CX, X),$$

此同构即偶 (CX, X) 的正合序列中的连结同态，其中 CX 是 X 上的约化角锥. 在此同构下，$x \in \tilde{h}^n(X)$ 的像 δx 称为 x 的悬垂，记为 Sx. 对于任意纤维化 $p: X \to B$，复合

$$H_q(F) \xrightarrow{\partial_*^{-1}} H_{q+1}(X, F) \xrightarrow{p_*} H_{q+1}(B)$$

称为同调悬垂映射. 若 X 是函数空间 $(B,b_0)^{(I,0)}$，则对于 $\alpha\in X$，由 $p(\alpha)=\alpha(1)$ 定义一个纤维化 $p:X\to B$，此时，∂_* 是同构，从而 $p_*\circ\partial_*^{-1}$ 是同态. 因为这时纤维 $F=\Omega B$，所以得到同态 $H_{q-1}(\Omega B)\to H_q(B)$，并且，当 B 是 $(m-1)$ 连通空间时，若 $q<2m-1$，则此同态为同构；若 $q=2m-1$，则此同态为满同态. 若

$$\theta:\ H^{n+1}(\quad;\Pi)\to H^{q+1}(\quad;G)$$

为上同调运算，X 是 CW 复形，则悬垂映射函子可确定同态 $s^*:H^{r+1}(SX;M)\to H^r(X;M)$，对于任意系数群 M 和所有 r，此同态是同构. 于是有复合

$$H^n(X;\Pi)\xrightarrow{s^{*-1}}H^{n+1}(SX;\Pi)$$
$$\xrightarrow{\theta(SX)}H^{q+1}(SX;G)\xrightarrow{s^*}H^q(X;G).$$

若将此复合记为 $\sigma^*\theta(X)$，则 $\sigma^*\theta$ 是一个 $(n,q;\Pi,G)$ 型的上同调运算，称为上同调运算 θ 的悬垂.

弗勒登塔尔悬垂定理(Freudenthal suspension theorem) 见“悬垂”.

悬垂映射(suspension map) 见“悬垂”.

上同调运算的悬垂(suspension of cohomology operation) 见“悬垂”.

闭路空间(loop space) 一类特殊的拓扑空间. 若 (Y,y_0) 为一个带有基点的拓扑空间，则所有的连续映射 $(S^1,s_0)\to(Y,y_0)$（S^1 为一维球面，s_0 为它的基点）在紧开拓扑之下所构成的空间，称为 Y 的闭路空间，记为 ΩY.

广义同调(Generalized homology) 普通同调群的推广. 设给定某一类拓扑空间偶 $\mathscr{T}^2$，对于 $\mathscr{T}^2$ 中的任意一个元素 (X,A) 以及一个整数 q，确定一个交换群 $h_q(X,A)$，对于每一个映射

$$f:\ (X,A)\to(Y,B)$$

以及每一个整数 q，给定一个同态

$$h[f]_q:\ h_q(X,A)\to h_q(Y,B),$$

又对于每一个空间偶 (X,A) 以及每一个整数 q，给定一个同态 $h[\partial]_q:h_q(X,A)\to h_{q-1}(A,\varnothing)$（这里所出现的空间偶以及空间偶之间的映射均为可允许的，以后同此). 称 h_* 为非简化广义同调论，若 h_* 满足下面六条公理（艾伦伯格-斯廷罗德公理的前六条）：

1. 若 $f=$恒同映射，则 $h[f]_q=$恒同映射.
2. 若 $f:(X,A)\to(Y,B)$，$g:(Y,B)\to(Z,C)$，则 $h[gf]_q=h[g]_q\circ h[f]_q$.
3. 若 $f:(X,A)\to(Y,B)$，则有交换图.
4. 若 $i:(A,\varnothing)\to(X,\varnothing)$，$j:(X,\varnothing)\to(X,A)$ 为包含映射，则有正合序列

$$\cdots\to h_{n+1}(X,A)\xrightarrow{h[\partial]_{n+1}}h_n(A,\varnothing)\xrightarrow{h[i]_n}h_n(X,\varnothing)$$
$$\xrightarrow{h[j]_n}h_n(X,A)\xrightarrow{h[\partial]_n}h_{n-1}(A,\varnothing)\to\cdots.$$

5. 若 $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ 为同伦的映射，则有

$$\begin{array}{ccc} h_q(X,A) & \xrightarrow{h[f]_q} & h_q(Y,B) \\ \downarrow{\scriptstyle h[\partial]_q} & & \downarrow{\scriptstyle h[\partial]_q} \\ h_{p-1}(A;\varnothing) & \xrightarrow[h[f|A]_q]{} & h_{p-1}(B;\varnothing) \end{array}$$

$$h[f]_q=h[g]_q.$$

6. 设 $U\subset A$，U 的闭包$\subset A$ 的内点集，$f:(X-U,A-U)\to(X,A)$ 为包含映射，则 $h[f]_q$ 为同构.

对于带有基点的某一类空间 $\mathscr{T}'$ 中的任何一个空间 (X,x_0)（x_0 表示 X 的基点）以及每一个整数 q，确定一个交换群 $\tilde{h}_q(X,x_0)$，对于每一个保持基点的映射 $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 以及每一个整数 q，给定一个同态 $\tilde{h}[f]_q:\tilde{h}_q(X,x_0)\to\tilde{h}_q(Y,y_0)$，又规定 $S(X,x_0)=(SX,*)$（参见“拓扑空间的碎积”），对于每一个带有基点的空间 (X,x_0) 以及每一个整数 q，给定一个同构

$$\tilde{h}[\tilde{\partial}]_q:\ \tilde{h}_q(X,x_0)\to\tilde{h}_{q+1}(SX,*)$$

（这里所出现的带基点的空间以及保持基点的映射均为可允许的，以后同此）. 称 $\tilde{h}_*$ 为简化广义同调论，若 $\tilde{h}_*$ 满足下面的五条公理：

1. 若 $f=$恒同映射，则 $\tilde{h}[f]_q=$恒同映射.
2. 若 $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$，$g:(Y,y_0)\to(Z,z_0)$，则有 $\tilde{h}[gf]_q=\tilde{h}[g]q\circ\tilde{h}[f]_q$.
3. 若 $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$，则有交换图表

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}_q(X,x_0) & \xrightarrow{\tilde{h}[f]_q} & \tilde{h}_q(Y,y_0) \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{h}[\tilde{\partial}]_q} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{h}[\tilde{\partial}]_q} \\ \tilde{h}_{q+1}(SX,*) & \xrightarrow[\tilde{h}[sf]_{q+1}]{} & \tilde{h}_{q+1}(SY,*) \end{array}$$

4. 对于每一个带有基点的空间对 (X,A,x_0)，$i:(A,x_0)\to(X,x_0)$，$j:(X,x_0)\to(X\cup CA,*)$ 为包含映射，CA 为在 A 上的角锥，则有正合序列

$$\tilde{h}_q(A,x_0)\xrightarrow{\tilde{h}[i]_q}\tilde{h}_q(X,x_0)\xrightarrow{\tilde{h}[j]_q}\tilde{h}_q(X\cup CA,*).$$

5. 若 $f,g:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 为同伦的映射，则有 $\tilde{h}[f]_q=\tilde{h}[g]_q$.

给定非简化广义同调论 h_*，可以诱导出一个简化广义同调论 $\tilde{h}_*$. 给定简化广义同调论 $\tilde{h}_*$，并且满足 WHE 公理(即，若 $f:X\to Y$ 是弱同伦等价的，则有

$$\tilde{h}[f]_q:\ \tilde{h}_q(X,x_0)\to\tilde{h}_q(Y,f(x_0)),$$

对于所有的整数 q 以及 $x_0\in X$，是同构的)，可以诱导出一个非简化广义同调论 $\hat{\tilde{h}}_*$. $\hat{\tilde{h}}_*$ 自然等价于 h_*；$\tilde{\hat{\tilde{h}}}_*$ 自然等价于 $\tilde{h}_*$.

非简化广义同调论(unreduced generalized ho-

mology theory）见“广义同调”.

简化广义同调论（reduced generalized homology theory）见“广义同调”.

WHE 公理（WHE axion）见“广义同调”.

广义上同调（Generalized cohomology）普通上同调群的推广. 设给定某一类拓扑空间偶 $\mathscr{T}^2$，对于 $\mathscr{T}^2$ 中的任意一个元素 (X,A) 以及一个整数 q，确定一个交换群 $h^q(X,A)$，对于每一个映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 以及每一个整数 q，给定一个同态

$$h[f]^q:\ h^q(Y,B)\to h^q(X,A),$$

又对于每一个空间偶 (X,A) 以及每一个整数 q，给定一个同态 $h[\delta]^q:h^q(A,\varnothing)\to h^{q+1}(X,A)$（这里所出现的空间偶以及空间偶之间的映射均为可允许的，以后同此），称 h^* 为非简化上同调论，若 h^* 满足下面六条公理（艾伦伯格-斯廷罗德公理的前六条）：

1. 若 $f=$ 恒同映射，则有 $h[f]^q=$ 恒同映射.

2. 若 $f:(X,A)\to(Y,B)$，$g:(Y,B)\to(Z,C)$，则有 $h[gf]^q=h[f]^q\circ h[g]^q$.

3. 若 $f:(X,A)\to(Y,B)$，则有交换图表

$$\begin{array}{ccc} h^q(B,\varnothing) & \xrightarrow{h[f\mid A]^q} & h^q(A,\varnothing) \\ \downarrow h[\delta]^q & & \downarrow h[\delta]^q \\ h^{q+1}(Y,B) & \xrightarrow[h[f]^{q+1}]{} & h^{q+1}(X,A) \end{array}$$

4. 若 $i:(A,\varnothing)\to(X,\varnothing)$，$j:(X,\varnothing)\to(X,A)$ 为包含映射，则有正合序列

$$\cdots\to h^q(A,\varnothing)\xrightarrow{h[\delta]^q}h^{q+1}(X,A)\xrightarrow{h[j]^{q+1}}h^{q+1}(X,\varnothing)$$
$$\xrightarrow{h[i]^{q+1}}h^{q+1}(A,\varnothing)\xrightarrow{h[\delta]^{q+1}}h^{q+2}(X,A)\to\cdots.$$

5. 若 $f,g:(X,A)\to(Y,B)$ 为同伦的映射，则有

$$h[f]^q=h[g]^q.$$

6. 设 $U\subset A$，U 的闭包 $\subset A$ 的内点集，

$$f:\ (X-U,A-U)\to(X,A)$$

为包含映射，则 $h[f]^q$ 为同构.

对于带有基点的某一类空间 $\mathscr{T}'$ 中的任何一个空间 (X,x_0)（x_0 表示 X 的基点）以及每一个整数 q，确定一个交换群 $\tilde{h}^q(X,x_0)$，对于每一个保持基点的映射 $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 以及每一个整数 q，给定一个同态 $\tilde{h}[f]^q:\tilde{h}^q(Y,x_0)\to\tilde{h}^q(X,y_0)$，又规定 $S(X,x_0)=(SX,*)$，对于每一个带有基点的空间 (X,x_0) 以及每一个整数 q，给定一个同构

$$\tilde{h}[\delta]^q:\ \tilde{h}^q(SX,*)\to\tilde{h}^{q-1}(X,x_0).$$

称 $\tilde{h}^*$ 为简化广义上同调论，若 $\tilde{h}^*$ 满足下面的五条公理：

1. 若 $f=$ 恒同映射，则 $\tilde{h}[f]^q=$ 恒同映射.

2. 若 $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$，$g:(Y,y_0)\to(Z,z_0)$，则有 $\tilde{h}[gf]^q=\tilde{h}[f]^q\circ\tilde{h}[g]^q$.

3. 若 $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$，则有交换图表

$$\begin{array}{ccc} \tilde{h}^q(SY,*) & \xrightarrow{\tilde{h}[sf]^q} & \tilde{h}^q(SX,*) \\ \downarrow \tilde{h}[\tilde{\delta}]^q & & \downarrow \tilde{h}[\tilde{\delta}]^q \\ \tilde{h}^{q-1}(Y,y_0) & \xrightarrow[\tilde{h}[f]^{q-1}]{} & \tilde{h}^{q-1}(X,x_0) \end{array}$$

4. 对于每一个带有基点的空间对 (X,A,x_0)，$i:(A,x_0)\to(X,x_0)$，$j:(X,x_0)\to(X\cup CA,*)$ 为包含映射，CA 为在 A 上的角锥，则有正合序列

$$\tilde{h}^q(A,x_0)\xleftarrow{\tilde{h}[i]^q}\tilde{h}^q(X,x_0)\xleftarrow{\tilde{h}[j]^q}\tilde{h}^q(X\cup CA,*).$$

5. 若 $f,g:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 为同伦的映射，则有 $\tilde{h}[f]^q=\tilde{h}[g]^q$.

给定非简化广义同调论 h^*，可以诱导出一个简化广义同调论 $\tilde{h}^*$. 给定简化广义上同调论 $\tilde{h}^*$，并且满足 WHE 公理（即，若 $f:X\to Y$ 是弱同伦等价的，则有

$$\tilde{h}[f]^q:\tilde{h}^q(Y,f(x_0))\to\tilde{h}^q(X,x_0),$$

对于所有的整数 q 以及 $x_0\in X$，是同构的），可以诱导出一个非简化广义上同调论 $\hat{\tilde{h}}^*$. $\hat{\tilde{h}}^*$ 自然等价于 h^*；$\tilde{\hat{\tilde{h}}}^*$ 自然等价于 $\tilde{h}^*$.

非简化广义上同调论（unreduced generalized cohomology theory）见“广义上同调”.

简化广义上同调论（reduced generalized cohomology theory）见“广义上同调”.

谱（spectrum）建立同调理论的一种重要概念. 一个谱 E 是一族 CW 复形 $\{(E_n,*)\mid n\in\mathbf{Z}\}$ 使得对所有整数 n，SE_n 为（或同胚于）E_{n+1} 的一个子复形. 一个子谱 $F\subset E$ 由子复形 $F_n\subset E_n$ 组成，使得 $SF_n\subset F_{n+1}$. 由 $F_n=*$ 所构成的子谱 $F\subset E$ 称为一个 $(-\infty)$ 维胞腔. 若 e_n^d 为 E_n 的一个 d 胞腔（当 $d=0$ 时，$e_n^d\neq *$），又存在 $E_{n'}$ 的一个 d' 胞腔，使得 $e_n^d=S^{d-d'}e_{n'}^{d'}(n=n'+d-d')$，与 $e_{n'}^{d'}\overline{\in}SE_{n'-1}$，则序列

$$e=\{e_{n'}^{d'},Se_{n'}^{d'},S^2e_{n'}^{d'},\cdots\}$$

称为在谱 E 内的 $(d'-n')$ 维胞腔. 一个谱称为有限的，若它只有有限多个胞腔. 一个谱称为可数的，若它有可数多个胞腔. 谱 E 的过滤是 E 的子谱的递增序列 $\{E^n\mid n\in\mathbf{Z}\}$，它们的并集为 E. 谱之间的函数 $f:E\to F$ 是一族胞腔映射 $\{f_n\mid n\in\mathbf{Z}\}$，$f_n:E_n\to F_n$，使得 $f_{n+1}\mid SE_n=Sf_n$. 按照通常的方法，可以考虑函数的复合. 一个子谱 $F\subset E$ 称为共尾的，若对于 E 内的每一个胞腔 $e_n\subset E_n$，存在一个 m 使得 $S^me_n\subset F_{n+m}$.

设 E,F 为谱，考虑所有对 (E',f') 的集合 S，其中 $E'\subset E$ 为共尾子谱，$f':E'\to F$ 是一个函数，在 S 内引入关系如下：$(E',f')\sim(E'',f'')$ 当且仅当存在一个对 (E''',f''')，$E'''\subset E'\cap E''$，E''' 为 E 的一个共尾

子谱以及 $f'|E'''=f'''=f''|E'''$. 这关系为一个等价关系,等价类称为从 E 到 F 的一个映射,即

$$\mathrm{Hom}(E,F)=S/\sim.$$

可以进行映射的复合. 例如,若 X 为 CW 复形,则可定义一个谱 $E(X)$ 如下

$$E(X)_n=\begin{cases}* & (n<0),\\ S^nX & (n\geqslant 0).\end{cases}$$

若给定一个 CW 复形之间的胞腔映射 $f:X\to Y$,则利用

$$f_n=\begin{cases}* & (n<0),\\ S^nf & (n\geqslant 0),\end{cases}$$

可决定一个映射 $E(f):E(X)\to E(Y)$. 若 $E=\{E_n\}$ 为一个谱,(X,x_0) 为一个具有基点 x_0 的 CW 复形,则规定一个新谱 $E\wedge X$ 如下:记

$$(E\wedge X)_n=E_n\wedge X,$$

它具有弱拓扑. 由于

$$S(E\wedge X)_n=S(E_n\wedge X)=S^1(E_n\wedge X)$$
$$\cong(S^1\wedge E_n)\wedge X\subset E_{n+1}\wedge X,$$

所以 $\{(E\wedge X)_n|n\in\mathbf{Z}\}$ 为一个谱. 若给定一个谱的映射 $f:E\to F$,利用它的一个代表 (E',f') 以及又给定的一个 CW 复形之间的胞腔映射 $g:K\to L$,则可得一个以 $(E'\wedge K,f'\wedge g)$ 为代表的映射

$$f\wedge g:E\wedge K\to E\wedge L.$$

子谱(subspectrum)　见"谱".

有限谱(finite spectrum)　见"谱".

可数谱(countable spectrum)　见"谱".

共尾谱(cofinal spectrum)　见"谱".

谱的同伦(homotopies of spectra)　在谱的概念中引入同伦关系. 若 I^+ 表示 $[0,1]\cup\{*\}$,E,F 为谱,则由 0,1 到 I^+ 的包含映射诱导出的两个映射,记为:$i_0:E\to E\wedge I^+$,$i_1:E\to E\wedge I^+$. 设给定两个谱的映射 $f_0,f_1:E\to F$,若存在 $h:E\wedge I^+\to F$ 使得

$$h\circ i_0=f_0,h\circ i_1=f_1,$$

则称 f_0 与 f_1 是同伦的,记为 $f_0\simeq f_1$. 利用共尾子谱,各自以 (E_0',f_0'),(E_1',f_1') 为代表的两个映射 f_0,$f_1:E\to F$ 是同伦的,若存在一个共尾子谱 $E''\subset E_0'\cap E_1'$ 以及一个函数

$$h'':E''\wedge I^+\to F,$$

使得 $h''\circ i_0=f_0'|E''$,$h''\circ i_1=f_1'|E''$. 同伦是一个等价关系,映射 $f:E\to F$ 的同伦等价类集合记为 $[E,F]$,对于集合 $[E,F]$ 可以给定一个交换群结构. 对于任何一个谱 E,可以定义一个谱 ΣE 如下设

$$\Sigma E_n=E_{n+1}\ (n\in\mathbf{Z}),$$

对于任何一个函数 $f:E\to F$,可定义一个函数

$$\Sigma f:\Sigma E\to\Sigma F\ (\text{记}(\Sigma f)_n=f_{n+1}).$$

对于任何一个以 (E',f') 为代表的映射 $f:E\to F$,可以用 $(\Sigma E',\Sigma f')$ 作为代表定义一个映射

$$\Sigma f:\Sigma E\to\Sigma F.$$

对于 $n\geqslant 2$,规定 $\Sigma^n=\Sigma\circ\Sigma^{n-1}$. 用

$$(\Sigma^{-1}E)_n=E_{n-1},\quad(\Sigma^{-1}f)_n=f_{n-1}$$

可以定义 Σ^{-1}. 对于任意的整数 n,m,有

$$\Sigma^n\circ\Sigma^m=\Sigma^{n+m}.$$

对于 0 维球面 S^0,谱 $E(S^0)$ 仍记为 S^0. 设给定一个谱 E,对于每一个带有基点的 CW 复形 (X,x_0),设

$$E_n(X)=[\Sigma^nS^0,E\wedge X]\ (n\in\mathbf{Z}).$$

对于任何一个保持基点的胞腔映射 $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$,有

$$E_n(f)=(1\wedge f)_*:E_n(X)\to E_n(Y).$$

$$E_n(X)\underset{\simeq}{\overset{\Sigma}{\to}}[\Sigma^{n+1}S^0,\Sigma E\wedge X]$$
$$\underset{\simeq}{\to}[\Sigma^{n+1}S^0,E\wedge S^1\wedge X]=E_{n+1}(SX)$$

定义 $\sigma_n:E_n(X)\to E_{n+1}(SX)$. 从而,$E_*(X)$ 为一个简化广义同调论,并且满足韦琪公理:对于每一个 CW 复形族 $\{(X_\alpha,x_\alpha)|\alpha\in A\}$,包含映射

$$i_\alpha:X_\alpha\to\bigvee_{\beta\in A}X_\beta$$

诱导出同构

$$\{i_{\alpha*}\}:\bigoplus_{\alpha\in A}E_n(X_\alpha)\to E_n(\bigvee_{\alpha\in A}X_\alpha)\ (n\in\mathbf{Z}).$$

设给定一个谱 E,对于每一个带有基点的 CW 复形 (X,x_0),设

$$E^n(X)=[E(X),\Sigma^nE]\cong[\Sigma^{-n}S^0\wedge X,E]\ (n\in\mathbf{Z}).$$

对于任何一个保持基点的胞腔映射

$$f:(X,x_0)\to(Y,y_0),$$

有 $E^n(f)=E(f)^*:E^n(Y)\to E^n(X)$. 利用

$$E^{n+1}(SX)=[E(SX),\Sigma^{n+1}E]$$
$$\underset{\simeq}{\leftarrow}[\Sigma E(X),\Sigma^{n+1}E]$$
$$\underset{\simeq}{\overset{\Sigma^{-1}}{\to}}[E(X),\Sigma^nE]=E^n(X)$$

定义 $\sigma^n:E^{n+1}(SX)\to E^n(X)$. 从而,$E^*(X)$ 为一个简化广义上同调论,并且满足韦琪公理:对于每一个 CW 复形族 $\{(X_\alpha,x_\alpha)|\alpha\in A\}$,包含映射 $i_\alpha:X_\alpha\to\bigvee_{\beta\in A}X_\beta$ 诱导出同构

$$\{i_\alpha^*\}:E^n(\bigvee_{\alpha\in A}X_\alpha)\to\prod_\alpha E^n(X_\alpha).$$

设 E 是一个谱,若包含映射 $\epsilon_n:SE_n\to E_{n+1}$ 的伴随 $\epsilon_n':E_n\to\Omega E_{n+1}$ 都是弱同伦等价,则称 E 为 Ω 谱. 对于 Ω 谱 E,有这样的性质:对于每一个 CW 复形 (X,x_0),有自然同构

$$E^n(X)\cong[X,x_0;E_n,*].$$

韦琪公理(Wedge axiom)　见"谱的同伦".

实现定理(representation theorems)　代数拓扑学的重要定理. 是指对于满足一定条件的广义上同调论 k^*,能够找到一个谱 E,以及上同调之间的一个自然等价 $T:E^*\to k^*$. 设 $\mathscr{P}W'$ 表示由所有带有基点的 CW 复形以及它们之间所有保持基点的胞腔映射的同伦类所组成的范畴,$\mathscr{P}\mathscr{S}$ 表示所有的点

集和所有保持基点的函数所组成的范畴. 韦琪公理：若 $F:\mathscr{P}W'\to\mathscr{P}\mathscr{S}$ 为反变函子，则在 $\mathscr{P}W'$ 中的任意楔和 $\vee_\alpha X_\alpha$ 以及包含映射 $i_\alpha:X_\alpha\to\vee_\beta X_\beta$，一定有包含同态 $\{i_\alpha^*\}:F(\vee_\alpha X_\alpha)\to\prod_\alpha F(X_\alpha)$ 是一一对应. 迈尔-菲托里斯公理：若 $F:\mathscr{P}W'\to\mathscr{P}\mathscr{S}$ 为一反变函子，X 为任意一个 CW 复形，A_1, A_2 为 X 的任意子复形，$A_1\cup A_2=X$，又

$$i_1: A_1\to X,\quad i_2: A_2\to X,$$
$$j_1: A_1\cap A_2\to A_1,\quad j_2: A_1\cap A_2\to A_2$$

都是包含映射，则对于任意具有 $j_1^*(x_1)=j_2^*(x_2)$ 的 $x_1\in F(A_1)$, $x_2\in F(A_2)$，一定存在一个 $y\in F(X)$，使得 $i_1^*(y)=x_1$, $i_2^*(y)=x_2$.

实现定理：若 $F^*:\mathscr{P}W'\to\mathscr{P}\mathscr{S}$ 是一个满足韦琪公理和迈尔-菲托里斯公理的反变函子，则一定存在一个 CW 复形 (Y, y_0) 及一个元素 $u\in F(Y)$ 使由

$$Tu[f]=f^*(u)\in F^*(X),\quad f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$$

决定的 $Tu:[—;Y,y_0]\to F^*$ 是一个自然等价. 特别地，有下面的结果(实现定理)：若 k^* 是定义在 $\mathscr{P}W'$ 上的任意一个简化上同调论，并且满足韦琪公理，则一定存在一个 Ω 谱 E 以及一个自然等价 $T:E^*\to k^*$. 实现定理由布朗(Brown, E. H.)建立.

迈尔-菲托里斯公理(Mayer-Vietoris axiom) 见“实现定理”.

博特周期定理(Bott periodicity theorem) 关于典型群的同伦群的重要性质. 设给定酉群、正交群与辛群的稳定同伦群的具体结构. 酉群有一串包含

$$U(n)\subset U(n+1)\subset U(n+2)\subset\cdots,$$

令 $U=\bigcup_m U(m)$，取弱拓扑可得无穷酉群 U. 同样可得无穷正交群 O 与无穷辛群 Sp，则当 n 充分大时，$\pi_i(U)=\pi_i(U(n))$, $\pi_i(O)=\pi_i(O(n))$, $\pi_i(\mathrm{Sp})=\pi_i(\mathrm{Sp}(n))$ (i 固定)，它们分别称为酉群、正交群与辛群的稳定同伦群. 博特周期定理：$\pi_i(U)=\pi_{i+2}(U)$, $\pi_i(O)=\pi_{i+8}(O)$, $\pi_i(\mathrm{Sp})=\pi_{i+8}(\mathrm{Sp})$.

i	$\pi_i(U)$	$\pi_i(O)$	$\pi_i(\mathrm{Sp})$
0	0	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	0
1	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	0
2	0	0	0
3	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$
4	0	0	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
5	$\mathbf{Z}$	0	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
6	0	0	0
7	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$

博特周期定理除了在同伦论中引出许多重要推论外，还对于 K 理论的建立起关键作用.

酉群的稳定同伦群(stable homotopy group of unitary group) 见“博特周期定理”.

正交群的稳定同伦群(stable homotopy group of orthogonal group) 见“博特周期定理”.

辛群的稳定同伦群(stable homotopy group of symplectic group) 见“博特周期定理”.

拓扑 *K* 理论(topological K-theory) 广义上同调群中的一个重要理论. 设 X 为拓扑空间，记 $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(X)(\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(X))$ 为 X 上的所有实(复)向量丛的同构类集合. 利用向量丛的惠特尼和可在 $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(X)(\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(X))$ 上定义加法，利用向量丛的张量积可在其上定义乘法，使 $\mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(X)(\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(X))$ 有一个可交换的半环结构. 它的环的完备化记为 $KO(X)(K(X))$. 设向量丛的维数对应于向量丛，可得半环同态

$$rk:\ \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(X)\to\mathbf{Z}\ (rk:\ \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(X)\to\mathbf{Z}),$$

由此可扩充为环同态

$$rk:\ KO(X)\to\mathbf{Z}\ (rk:\ K(X)\to\mathbf{Z}).$$

设 $\widetilde{KO}(X)=\ker(rk:\ KO(X)\to\mathbf{Z})$，

$$\widetilde{K}(X)=\ker(rk:\ K(X)\to\mathbf{Z}).$$

当 X 为紧致空间时，由博特周期定理

$$\widetilde{KO}(X)\cong\widetilde{KO}(S^8X),\quad \widetilde{K}(X)\cong\widetilde{K}(S^2X).$$

规定：

$$\widetilde{K}^{-n}X=\widetilde{K}(S^nX),$$
$$K^{-n}(X,Y)=\widetilde{K}^{-n}(X/Y)=\widetilde{K}(S^n(X/Y)),$$
$$K^{-n}(X)=K^{-n}(X,\varnothing)=\widetilde{K}(S^n(X^+)),$$

其中 Y 为 X 的子空间，X^+ 表示 X 与一点的不交并. 规定：

$$\widetilde{KO}^{-n}(X)=\widetilde{KO}(S^nX),$$
$$KO^{-n}(X,Y)=\widetilde{KO}^{-n}(X/Y)=\widetilde{KO}(S^n(X/Y)),$$
$$KO^{-n}(X)=KO^{-n}(X,\varnothing)=\widetilde{KO}(S^n(X^+)),$$

其中 Y 为 X 的子空间，X^+ 表示 X 与一点的不交并. 函子 K, KO 为非简化广义上同调论. 亚当斯(Adams, J. F.)利用 K 理论，解决了球面上的向量场问题. 阿蒂亚(Atiyah, M. F.)和亚当斯(Adams, J. F.)利用 K 理论给出了霍普夫不变量 1 的元素不存在问题的一个短而简单的证明. 拓扑 K 理论是由格罗腾迪克(Grothendieck, A.)、阿蒂亚、希策布鲁赫(Hirzebruch, F.)于 20 世纪 60 年代初引入的.

有结构群的纤维丛(fibre bundle with structure group) 乘积空间 $E=B\times F$ 的一种推广. 纤维丛概念的产生，在历史上是与微分流形的拓扑与微分几何的研究有关的. 施梯福(Stiefel, H.)在其一系列流形的拓扑性质的研究中，引入了用流形上独立向量场来表示微分流形的同胚不变量，以后惠特尼(Whitney, H.)把流形及其上每一点的切空间概括在一起，得到了纤维丛的概念. 另一方面，在微分

几何方面，由于对于物理学中统一场论的研究，促进了近代微分几何的发展；特别对于联络理论的研究，使人们发现微分几何学中的联络思想与纤维丛理论有密切的关系，把两者结合起来使微分几何以崭新的面貌出现．例如，力学中的相空间即是一种切丛，这种本质的联系使纤维丛成为现代物理学（如相对论与杨-米尔斯理论）的重要支撑．

除了微分流形的切丛是纤维丛以外，李群与齐性空间、覆叠空间以及一般的向量丛概念均与纤维丛有密切的关系．在拓扑中对于纤维丛的研究，即是研究空间 E,B,F 三者之间的关系，因此产生了纤维空间同调的谱序列概念，结合上同调运算，产生了示性类的概念．另一方面，对于流形 X 上的切丛，引入等价与加法运算，便可得到空间 X 的 K 理论 $K(X)$，这是一种广义同调，至今也得到了颇为可观的发展．

设 E,B,F 都是拓扑空间，$p:E\to B$ 为连续满射，G 为有效地左作用于 F 的拓扑群（若 $g\in G$ 对于所有 $x\in F$ 满足 $gx=x$，则 $g=e$，e 为 G 的单位元素），$\{U_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 为 B 的开覆盖，$\varphi_\alpha:U_\alpha\times F\cong p^{-1}(U_\alpha)$ $(\alpha\in\Lambda)$ 为一族同胚，若满足下列条件，则称

$$(E,p,B,F,G,U_\alpha,\varphi_\alpha)$$

为坐标丛：

1. $p\varphi_\alpha(b,y)=b\ (b\in U_\alpha,y\in F)$.

2. 若 $\varphi_{\alpha,b}:F\cong p^{-1}(b)$，$\varphi_{\alpha,b}(y)=\varphi_\alpha(b,y)$，则对于任意 $b\in U_\alpha\cap U_\beta$，有 $g_{\beta\alpha}(b)=\varphi_{\beta,b}^{-1}\circ\varphi_{\alpha,b}\in G$.

3. $g_{\beta\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\to G$ 为连续映射.

两个坐标丛 $(E,p,B,F,G,U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 与 $(E,p,B,F,G,U'_\mu,\varphi_\mu)$ 称为等价的，若当 $U_\alpha\cap U'_\mu\neq\varnothing$ 时，

$$b\in U_\alpha\cap U'_\mu,\quad \bar{g}_{\mu\alpha}(b)=\varphi_{\mu,b}{}^{-1}\circ\varphi_{\alpha,b}\in G,$$

并且 $\bar{g}_{\mu\alpha}:U_\alpha\cap U'_\mu\to G$ 连续．这样定义的等价是坐标丛之间的一个等价关系，从而把坐标丛分成一些等价类，把这样的一个等价类称为纤维丛或 G 丛，记为 $\xi=(E,p,B,F,G)$．其中 E 称为全空间，p 称为射影，B 称为底空间，F 称为纤维，G 称为丛的群或结构群，U_α 称为坐标邻域，φ_α 称为坐标函数，$g_{\alpha\beta}$称为变换函数．对于具有相同的纤维与结构群的两个纤维丛

$$\xi=(E,p,B,F,G),\quad \xi'=(E',p',B',F,G)$$

之间，若存在连续映射 $\Psi:E\to E'$ 满足下面的条件，则称 Ψ 为从 ξ 到 ξ' 的丛映射：

1. 存在连续映射 $\psi:B\to B'$，使得

$$p'\circ\Psi=\psi\circ p.$$

2. 设 $\{U_\alpha,\varphi_\alpha\}$，$\{U'_\mu,\varphi_\mu\}$ 分别为 ξ,ξ' 的局部坐标系，对于 $b\in U_\alpha\cap\psi^{-1}(U'_\mu)$，若

$$\psi_{\mu\alpha}(b)=\varphi_{\mu,b'}^{-1}\circ\Psi\circ\varphi_{\alpha,b}\in G(b'=\psi(b)),$$

则 $\psi_{\mu\alpha}:U_\alpha\cap\psi^{-1}(U'_\mu)\to G$ 连续.

对此，若 ψ 为同胚，则 Ψ 也是同胚，而且 Ψ^{-1} 也是丛映射．对于有相同底空间、纤维及结构群的两个纤维丛

$$\xi=(E,p,B,F,G),\quad \xi'=(E',p',B,F,G),$$

若存在丛映射 $\Psi:E\to E'$ 使得上述 $\psi:B\to B$ 为恒等映射，则 ξ 与 ξ' 称为等价，记为 $\xi\equiv\xi'$．此时，若 ξ,ξ' 的坐标邻域取为相同的 $\{U_\alpha\}$，坐标变换分别为 $g_{\beta\alpha}$，$g'_{\beta\alpha}$，则 $\xi\equiv\xi'$ 的充分必要条件为存在一族连续映射 $\lambda_\alpha:U_\alpha\to G$，使得对于一切 α,β 有

$$g'_{\beta\alpha}(b)=\lambda_\beta(b)g_{\beta\alpha}(b)\lambda_\alpha(b)^{-1}(b\in U_\alpha\cap U_\beta)\neq\varnothing),$$

纤维丛的坐标变换 $\{g_{\beta\alpha}\}$ 满足

$$g_{\gamma\beta}(b)g_{\beta\alpha}(b)=g_{\gamma\alpha}(b)(b\in U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma).$$

反之，对于满足这个条件的连续映射

$$g_{\beta\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\to G\ (\text{其中}\{U_\alpha\}\text{ 为 }B\text{ 的开覆盖})$$

存在惟一的 G 丛 (E,p,B,F,G) 以 $\{g_{\beta\alpha}\}$ 为坐标变换．事实上，若参数集 $\Lambda=\{\alpha\}$ 为离散空间，取子空间

$$\widetilde{E}=\{(b,y,\alpha)|b\in U_\alpha\}\subset B\times F\times\Lambda,$$

其中两点 (z,y,α)，(z',y',β) 当 $b=b'$，$y'=g_{\beta\alpha}(z)y$ 时定义为等价，E 为 $\widetilde{E}$ 在这个等价之下的商空间，$p\{(b,y,\alpha)\}=b$，则 $\xi=(E,p,B,F,G)$ 即为所求.

以下介绍纤维丛的一些具体而重要的实例：

1. 主纤维丛：设纤维丛 $\xi=(E,p,B,F,G)$，若 $F=G$，并且结构群 G 对于纤维 G 的作用为 G 对 G 的左乘，则称 $\xi=(E,p,B,G)$ 为主纤维丛或主丛.

2. 乘积丛：在纤维丛 $\xi=(E,p,B,F,G)$ 中，若

$$E=B\times F,\quad p:B\times F\to B$$

为投射，

$$U_\alpha=B,\quad \varphi_\alpha:B\times F\to B\times F$$

为恒同映射与 $G=1$，则称 $\xi=(B\times F,P,B,F)$ 为乘积丛或平凡丛．换言之，一般的纤维丛可以看成平凡丛的推广.

3. 向量丛：在纤维丛 $\xi=(E,p,B,F,G)$ 中，若 $F=\mathrm{R}^n$ 为 n 维（实）向量空间，

$$\varphi_{\alpha,b}:\mathrm{R}^n\to p^{-1}(b)\ (b\in V_\alpha)$$

为向量空间的同构，并且当 $b\in U_\alpha\cap U_\beta$ 时，

$$g_{\beta\alpha}(b)=\varphi_{\beta,b}^{-1}\circ\varphi_{\alpha,b}:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$$

为一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathrm{R})$ 中的元素，即 $G\subset\mathrm{GL}(n,\mathrm{R})$，则称 ξ 为（实）n 维向量丛，特别地，称 1 维向量丛为线丛.

4. 切丛与余切丛：设 M 为 n 维 C^r 微分流形，$T_p(M)$ 为 M 在 p 点 $(p\in M)$ 的切空间，若

$$T(M)=\bigcup_{p\in M}T_p(M),$$

$$\pi:T(M)\to M\text{ 为 }\pi(T_p(M))=p,$$

则对于 p 在 M 中的坐标邻域 U_p 与局部坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\pi^{-1}(U_p)$ 中的元素可以表示为

$$\sum_{i=1}^n f_i\frac{\partial}{\partial x_i},$$

从而在 $\pi^{-1}(U_p)$ 中引入坐标系

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n,f_1,f_2,\cdots,f_n)$$

使得 $T(M)$ 成为 C^{r-1} 微分流形（$T(M)$ 为 $2n$ 维流形），n 维向量丛 $(T(M),\pi,M,\mathrm{R}^n,\mathrm{GL}(n,\mathrm{R}))$ 称为 M 的切向量丛或切丛；在 M 的每一点 p，若取的是余切空间 $T_p^*(M)$（$T_p^*(M)$ 为一切由 $T_p(M)\to\mathrm{R}$ 的线性映射所构成），则类似地得到的

$$(T^*(M),\pi,M,\mathrm{R}^n,\mathrm{GL}(n,\mathrm{R}))$$

称为 M 的余切丛.

5. 设 $\mathrm{R}P^n=\{\|x\|=1|x\in\mathrm{R}^{n+1}\}/x\sim(-x)$ 为 n 维实射影空间，

$$E(r_n')=\{(\{\pm x\},v)|v=\lambda x,\lambda\in\mathrm{R}\}$$

是 $\mathrm{R}P^n\times\mathrm{R}^{n+1}$ 的一个子集，若

$$\pi:E(r_n')\to\mathrm{R}P^n,\quad \pi(\{\pm x\},v)=\{\pm x\},$$

则 $\pi^{-1}\{\pm x\}$ 是 R^{n+1} 中通过 $x,-x$ 的直线 R，而这样得到的纤维丛 $r_n'=\{E(r_n'),\mathrm{R}P^n,\mathrm{R}\}$ 称为 $\mathrm{R}P^n$ 上的典型线丛；若

$$\mathrm{C}P^n=\{z|z\in\mathrm{C}^{n+1}\text{-}\{0\}/z\sim\lambda z\},$$

其中 $0\neq\lambda\in\mathrm{C}$，为复 n 维射影空间，

$$E(Cr_n')=\{(\{z\},v)|v=\lambda z,\lambda\in\mathrm{C}\}$$

$$\pi(\{z\},v)=\{z\},$$

则 $\pi^{-1}(\{z\})=\mathrm{C}$ 是一条复直线，而

$$Cr_n'=\{E(Cr_n'),\mathrm{C}P^n,\mathrm{C}\}$$

是 $\mathrm{C}P^n$ 上的典型线丛；类似地，可以得到四元数射影空间上的典型线丛.

坐标丛(coordinate bundle)　见“有结构群的纤维丛”.

等价坐标丛(equivalent coordinate bundle)　见“有结构群的纤维丛”.

全空间(total space)　见“有结构群的纤维丛”.

底空间(base space)　见“有结构群的纤维丛”.

射影(projection)　见“有结构群的纤维丛”.

纤维(fibre)　见“有结构群的纤维丛”.

结构群(structure group)　见“有结构群的纤维丛”.

坐标邻域(coordinate neighborhood)　见“有结构群的纤维丛”.

坐标函数(coordinate function)　见“有结构群的纤维丛”.

丛映射(bundle mapping)　见“有结构群的纤维丛”.

等价丛映射(equivalent bundle mapping)　见“有结构群的纤维丛”.

主丛(principal bundle)　见“有结构群的纤维丛”.

平凡丛(trivial bundle)　见“有结构群的纤维丛”.

线丛(line bundle)　见“有结构群的纤维丛”.

切丛(tangent bundle)　见“有结构群的纤维丛”.

余切丛(cotangent bundle)　见“有结构群的纤维丛”.

典型线丛(canonical line bundle)　见“有结构群的纤维丛”.

诱导丛(induced bundle)　从一个纤维丛经一个连续映射诱导出的一个新的纤维丛. 设

$$\xi=(E,p,B,F,G)$$

为纤维丛，$\psi:B'\to B$ 为连续映射，考虑 $E\times B'$ 的子空间 $E'=\{(x,b')\in E\times B'|p(x)=\psi(b')\}$，若 $p':E'\to B'$，$\Psi:E'\to E$ 分别为乘积空间的投射

$$E\times B'\to B',\quad E\times B'\to E$$

在 E' 上的限制，则 $\psi^\#\xi=(E',p',B',F,G)$ 是纤维丛，并且 Ψ 是由 $\psi^\#\xi$ 到 ξ 的丛映射，$\psi^\#\xi$ 称为由 ψ 得到的 ξ 的诱导丛，也称为丛 ξ 由映射 ψ 而得到的回退. 此时，若 ξ 的坐标邻域族及坐标变换族为 $\{U_\alpha\}$，$\{g_{\beta\alpha}\}$，则 $\psi^\#\xi$ 的相应族为 $\{\psi^{-1}(U_\alpha)\}$ 与 $\{g_{\beta\alpha}\circ\psi\}$；设已给纤维丛 ξ'，ξ 之间的丛映射 $\Psi:E'\to E$，若 $\psi:B'\to B$ 为底空间之间的映射，则 $\xi'\equiv\psi^\#\xi$. 若 $\xi_1=\xi_2$，则 $\psi^\#\xi_1=\psi^\#\xi_2$. 当 $\psi':B''\to B'$ 为连续映射时，

$$(\psi\circ\psi')^\#\xi=\psi'^\#(\psi^\#\xi).$$

若 η 是主丛，则 $\psi^\#\eta$ 也是主丛. 若 $\xi_i=(E_i,p_i,B_i,F_i,G_i)$，$i=1,2$ 为纤维丛，则 $\xi_1\times\xi_2=(E_1\times E_2,p_1\times p_2,B_1\times B_2,F_1\times F_2,G_1\times G_2)$ 在自然意义下也成为纤维丛，称为 ξ_1 与 ξ_2 的乘积丛. 特别地，若 $\xi_i=(E_i,p_i,B,k^{n_i},\mathrm{GL}(n_i,\mathrm{R}))$ 为向量丛，$\Delta:B\to B\times B$，$\Delta(b)=(b,b)$ 为对角映射，则诱导向量丛 $\Delta^\#(\xi_1\times\xi_2)$ 称为向量丛 ξ_1,ξ_2 的惠特尼和，记为 $\xi_1\oplus\xi_2$，而 $\xi_1\oplus\xi_2$ 为 B 上的 n_1+n_2 维向量丛. 诱导丛在代数拓扑中的一个重要性质是：若 B' 为仿紧空间，$\psi_1,\psi_2:B'\to B$ 同伦，则 $\psi_1^\#\xi=\psi_2^\#\xi$.

分类空间(classifying space)　在纤维丛理论中起关键作用的一类空间. 若 $\xi=(E,p,B,G)$ 为主丛，$\psi_1,\psi_2:X\to B$ 连续，X 为仿紧空间，则当 $\psi_1\simeq\psi_2$（同伦）时，$\psi_1^\#\xi\equiv\psi_2^\#\xi$（等价）. 若记一切以 X 为底空间，G 为结构群的主丛的等价类之集为 $K_G(X)$，一切从 X 到 B 保点连续映射的同伦类之集为 $[X,x_0;B,b_0]$，则存在一个对应

$$T:[X,x_0;B,b_0]\to K_G(X),T[f]=[f^\#\xi],$$

其中 $[f]$，$[f^\#\xi]$ 分别表示同伦类之集与等价类之集. 重要的是：若 E 为 n 连通的（即 $\pi_i(E)=0,0\leqslant i\leqslant n$），则对于任何 $\dim X\leqslant n$ 的 CW 复形 X，上述 T 为双射. 这样就可把 X 上的主丛与 X 到 B 的连续

映射对应起来，因此，E 与 B 便显得十分重要. 从而对于主丛 $\xi=(E,p,B,G)$，当 E 为 n 连通空间($n\leqslant\infty$)时，称 ξ 为 n 泛丛，B 为 n 分类空间. 特别地，当 $n=\infty$ 时，称 ξ 为 G 的泛(纤维)丛，$B=B_G$ 称为 G 的分类空间，f 称为丛 $f^{\#}\xi$ 的示性映射. 米尔诺(Milnor, J. W.)证明：对于任意拓扑群 G，均存在它的分类空间 B_G. 特别地，当 G 为可数 CW 复形时，B_G 也是可数 CW 复形，并且对于固定的 G，一切 CW 复形 B_G 均有相同的同伦型. 对于实正交群、酉群、辛群，有几何意义较明显的构造分类空间的方法.

泛丛(universal bundle)　见"分类空间".

示性映射(characteristic map)　见"分类空间".

史梯福流形(Stiefel manifold)　一类较常用的齐性空间. 设 $O(n,\mathsf{R})$ 为 n 阶实正交群，即它由一切 $n\times n$ 实正交矩阵所构成. 对于 $k\leqslant n$ 与 $B\in O(k,k)$，若 B 对应

$$\begin{pmatrix} B & O \\ O & E_{n-k} \end{pmatrix},$$

其中 E_{n-k} 为 $(n-k)\times(n-k)$ 单位矩阵，则 $O(k,\mathsf{R})$ 可以看做 $O(n,\mathsf{R})$ 的子群. 因为每个 n 阶矩阵可以看做一个 n^2 维向量，或者说 R^{n^2} 中的一个点，所以 R^{n^2} 的通常拓扑诱导出 $O(n,\mathsf{R})$ 的一个拓扑，在此拓扑之下，$O(n,\mathsf{R})$ 是 R^{n^2} 的一个紧致子空间，$O(k,\mathsf{R})$ 是 $O(n,\mathsf{R})$ 的闭子群. 另一方面，若

$$V_{n,k}=\{(e_1,e_2,\cdots,e_k)\mid e_i\in\mathsf{R}^n, e_i\cdot e_j=\delta_{ij}, 1\leqslant i,j\leqslant k\},$$

即 $V_{n,k}$ 中的每个成员是 R^n 中的一个 k 元正交标架，则在 $\mathsf{R}^n\times\cdots\times\mathsf{R}^n$($k$ 个)的诱导拓扑之下，$V_{n,k}$ 为一个紧致流形，称为史梯福流形. 史梯福流形可以看做李群的商空间——齐性空间. 若

$$f\colon O(n,\mathsf{R})\to V_{n,k},\quad A\mapsto(Ae_1,Ae_2,\cdots,Ae_k),$$

其中 e_i 为 R^n 中的标准正交向量，则

$$f(A)=(e_1,e_2,\cdots,e_k)$$

当且仅当 $A\in O(n-k,\mathsf{R})$. 从而有商映射

$$\bar{f}\colon O(n,\mathsf{R})/O(n-k,\mathsf{R})\to V_{n,k},$$

它是一个同胚. 特别地，当 $k=1$ 时，有

$$O(n,\mathsf{R})/O(n-1,\mathsf{R})\cong V_{n,1}\cong S^{n-1}.$$

现在

$$O(n-1)\to O(n)\to O(n)/O(n-1)$$

为纤维空间序列，其中 $O(i)=O(i,\mathsf{R})$，于是诱导出同伦群的正合序列

$$\cdots\to\pi_{i+1}(S^{n-1})\to\pi_i(O(n-1))\to\pi_i(O(n))\to\pi_i(S^{n-1})\to\cdots.$$

由于 $\pi_{i+1}(S^{n-1})=\pi_i(S^{n-1})=0, i<n-2$，所以

$$\pi_i(O(n-1))\cong\pi_i(O(n))\quad(i<n-2),$$

因此 $\pi_i(O(n))\cong\pi_i(O(n+k))$ $(i<n-1)$，并且

$$\pi_{n-1}(O(n))\to\pi_{n-1}(O(n+k))$$

为满同态；若考虑

$$O(n)\to O(n+k)\to O(n+k)/O(n)\cong V_{n+k,k}$$

的正合同伦群序列

$$\pi_i(O(n))\to\pi_i(O(n+k))\to\pi_i(V_{n+k,k})\to\pi_{i-1}(O(n))\to\pi_{i-1}(O(n+k)),$$

则由上面结论得到 $\pi_i(V_{n+k,k})=0, i\leqslant n-1$.

格拉斯曼流形(Grassmann manifold)　一类特殊的可微流形. 若 $O(n)$ 为 n 阶正交群，$O(n-k)\times O(k)$ 中的每个元素 (A,B) 对应于 $n\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix},$$

其中 A 为 $(n-k)\times(n-k)$ 正交矩阵，B 为 $k\times k$ 正交矩阵，则 $O(n-k)\times O(k)$ 可视为 $O(n)$ 的子群. 设 $G_{n,k}=G_{n,k}(\mathsf{R})$ 表示 R^n 中一切 k 维子空间之集，即 $G_{n,k}$ 中元素是 R^n 中一张过原点的 k 维平面，若

$$\pi\colon V_{n,k}\to G_{n,k},$$

$\pi(v_1,v_2,\cdots,v_k)$ 为 R^n 中由 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 生成的子空间，记为 $\pi(v_1,v_2,\cdots,v_k)=\langle v_1,v_2,\cdots,v_k\rangle$，并定义 $G_{n,k}$ 的拓扑为 $V_{n,h}$ 在 π 之下的商拓扑，则 $G_{n,k}$ 为流形，称为 R^n 中关于 k 维平面的格拉斯曼流形. 若：

$$\psi_{n,k}\colon O(n)/O(n-k)\times O(k)\to G_{n,k},$$

$$\psi_{n,k}(C(O(n-k)\times O(k)))=\langle Ce_1,Ce_2,\cdots,Ce_k\rangle,$$

其中 e_i 为单位坐标向量，则 $\psi_{n,k}$ 仅仅依赖于陪集 $C(O(n-k)\times O(k))$. $\psi_{n,k}$ 为连续的双射，由于 $O(n)/O(n-k)\times O(k)$ 与 $G_{n,k}$ 均为紧致豪斯多夫空间，所以 $\psi_{n,k}$ 为同胚. 特别地，当 $k=1$ 时，

$$O(n)/O(n-1)\times O(1)\cong G_{n,1}\cong\mathsf{R}P^{n-1}$$

为 $n-1$ 维实射影空间. 现在

$$O(k)\to O(n)/O(n-k)\xrightarrow{p}O(n)/O(n-k)\times O(k)$$

为纤维空间序列，于是 $\xi=(V_{n,k},p,G_{n,k},O(k))$ 是主丛，从而 $\eta=(V_{n+k,n},p,G_{n+k,n},O(n))$ 也是主丛. 在上面已经指出 $V_{n+k,n}$ 是 $n-1$ 连通的，所以格拉斯曼流形 $G_{n+k,n}$ 是正交群 $O(n)$ 的 $n-1$ 分类空间.

正交群的泛丛(universal bundle of orthogonal groups)　实正交群 $O(k)$ 的具有泛性质的主纤维丛. 在对应 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)\mapsto(0,x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 之下，将 R^k 视为 R^{k+1} 的子空间，有逐个包含的欧氏空间序列 $\mathsf{R}^k\subset\mathsf{R}^{k+1}\subset\cdots\mathsf{R}^{k+n}\subset\cdots$，从而有格拉斯曼流形之间的包含映射 $G_{k,k}\to G_{k+1,k}\to\cdots\to G_{k+n,k}\to\cdots$. 设

$$\mathrm{BO}(k)=\bigcup_{n\geqslant 0}G_{n+k,k},$$

并规定 $\mathrm{BO}(k)$ 的拓扑为弱拓扑，即 $U\subset\mathrm{BO}(k)$ 为开集当且仅当 $U\cap G_{n+k,k}$ 是 $G_{n+k,k}$ 的开集(对于一切 $n\geqslant 0$)，又

$$\mathrm{EO}(k)=\bigcup_{n\geqslant 0}V_{n+k,k},$$

并且 $\mathrm{EO}(k)$ 的拓扑也是弱拓扑，于是有映射

$$\pi: \mathrm{EO}(k) \to \mathrm{BO}(k),$$

使得 $\xi_{O(k)} = (\mathrm{EO}(k), \pi, \mathrm{BO}(k), O(k))$ 为主 $O(k)$ 丛. 另一方面,在上面已知 $\pi_i(V_{n+k,k}) = 0\ (i \leqslant n-1)$,从而由同伦群定义可知 $\pi_i(\mathrm{EO}(k)) = 0$,对于一切 i. 所以 $\xi_{O(k)}$ 是正交群 $O(k)$ 的泛丛,而无穷维欧氏空间中 k 维平面的格拉斯曼流形 $\mathrm{BO}(k)$ 是正交群 $O(k)$ 的分类空间.

酉群的泛丛(universal bundle of unitary group) 酉群 $U(k)$ 的具有泛性质的主丛. 对于以复数为元素的一个 $n \times n$ 矩阵 A,若 $A\overline{A}' = I$,其中 $\overline{A}'$ 表示 A 的转置以后每个元素取共轭复数的矩阵,I 为单位矩阵,则称 A 为酉矩阵. 若记所有 $n \times n$ 酉矩阵之集为 $U(n)$,则在矩阵的乘法之下,$U(n)$ 成为群,称为酉群. 若把 $U(n)$ 看做 $\mathbb{C}^{n^2}$ 的子空间,则 $U(n)$ 是拓扑群. 如同正交群情形,有 $U(k) \subset U(n)\ (k \leqslant n)$. 从而诱导出商空间 $U(n)/U(k)$. 若 $V_{n,k}(\mathbb{C}) = \{(v_1, v_2, \cdots, v_k) \mid v_i \in \mathbb{C}^n, v_i\bar{v}_j = \delta_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant k\}$,则

$$\varphi_{n,k}: U(n)/U(n-k) \to V_{n,k}(\mathbb{C}),$$
$$\varphi_{n,k}(AU(n-k)) = \langle Av_1, \cdots, Av_k \rangle,$$

是两个空间之间的同胚,$V_{n,k}(\mathbb{C})$ 称为复史梯福流形. 若 $G_{n,k}(\mathbb{C})$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中 k 维复子空间所成的流形,则 $G_{n,k}(\mathbb{C})$ 称为复格拉斯曼流形. 若

$$\psi_{n,k}: U(n)/U(n-k) \times U(k) \to G_{n,k}(\mathbb{C}),$$
$$\psi_{n,k}(A(U(n-k) \times U(k)) = \langle Av_1, Av_2, \cdots, Av_k \rangle,$$

则 $\psi_{n,k}$ 为同胚. 特别地,当 $k=1$ 时,

$$U(n)/U(n-1) \times U(1) \cong G_{n,1} \cong \mathbb{C}P^{n-1}$$

为复 $n-1$ 维射影空间. 如同实空间的情形,若

$$\pi: V_{n,k}(\mathbb{C}) \to G_{n,k}(\mathbb{C}),$$
$$\pi(v_1, v_2, \cdots, v_k) = \langle v_1, v_2, \cdots, v_k \rangle,$$

则 $(V_{n+k,k}(\mathbb{C}), \pi, G_{n+k,k}(\mathbb{C}), U(k))$ 为 $U(k)$ 的 $2n-1$ 泛丛. 若

$$\mathrm{BU}(k) = \bigcup_{n \geqslant 0} G_{n+k,k}(\mathbb{C}),$$
$$\mathrm{EU}(k) = \bigcup_{n \geqslant 0} V_{n+k,k}(\mathbb{C}),$$

则 $\pi_i(\mathrm{EU}(k)) = 0\ (i \geqslant 0)$. 因此

$$\xi_{U(k)} = (\mathrm{EU}(k), \pi, \mathrm{BU}(k), U(k))$$

是 $U(k)$ 的泛丛,$\mathrm{BU}(k)$ 为酉群 $U(k)$ 的分类空间.

复史梯福流形(complex stiefel manifold) 见"酉群的流形".

复格拉斯曼流形(complex Grassmann manifold) 见"酉群的流形".

辛群的泛丛(universal bundle of symplectic group) 辛群 $\mathrm{Sp}(k)$ 的具有泛性质的主丛. 记全体四元数之集为 $\mathbb{H}$. 对于 $y \in \mathbb{H}$,

$$y = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3,$$
$$\bar{y} = x_0 - ix_1 - jx_2 - kx_3$$

称为 y 的共轭四元数. 一个 $n \times n$ 四元数矩阵 A 称为是辛矩阵,若 $A\overline{A}' = I$,其中 $\overline{A}'$ 为 A 的转置共轭,I 为单位矩阵. 若记全体 $n \times n$ 辛矩阵之集为 $\mathrm{Sp}(n)$,则在矩阵的乘法之下,它构成一个群,称为辛群. 如同酉群与正交群的情形,有 $\mathrm{Sp}(k) \subset \mathrm{Sp}(n)$,当 $k \leqslant n$ 时,若 $V_{n,k}(\mathbb{H}) = \{(v_1, v_2, \cdots, v_k) \mid v_i \in \mathbb{H}^n, v_i\bar{v}_j = \delta_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant k\}$,则 $V_{n,k}(\mathbb{H})$ 可以看做 $\mathbb{H}^n$ 中 k 维标架所构成的流形,称为四元数史梯福流形. 若 $G_{n,k}(\mathbb{H})$ 为 $\mathbb{H}^n$ 中一切 k 维子空间所构成的流形,则称为四元数格拉斯曼流形. 若

$$\pi: V_{n,k}(\mathbb{H}) \to G_{n,k}(\mathbb{H}),$$
$$\pi(v_1, v_2, \cdots, v_k) = \langle v_1, v_2, \cdots, v_k \rangle,$$

则 $(V_{n+k,K}(\mathbb{H}), \pi, G_{n+k,k}(\mathbb{H}), \mathrm{Sp}(k))$ 为 $\mathrm{Sp}(k)$ 的 $4n-1$ 泛丛. 如同在实数与复数情形,若

$$\mathrm{ESp}(k) = \bigcup_{n \geqslant 0} V_{n+k,k}(\mathbb{H}),$$
$$\mathrm{BSp}(k) = \bigcup_{n \geqslant 0} G_{n+k,k}(\mathbb{H}),$$

则 $\xi_{S_p(k)} = (\mathrm{ESp}(k), \pi, \mathrm{BSp}(k), \mathrm{Sp}(k))$ 称为辛群 $\mathrm{Sp}(k)$ 的泛主丛,$\mathrm{BSp}(k)$ 为辛群 $\mathrm{Sp}(k)$ 的分类空间. 特别地,有 $V_{n,1}(\mathbb{H}) \cong S^{4n-1}, G_{n,1}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{H}P^{n-1}$.

共轭四元数(conjugacy quaternion) 见"辛群的泛丛".

四元数史梯福流形(quaternion stiefel manifold) 见"辛群的泛丛".

四元数格拉斯曼流形(quaternion Grassmann manifold) 见"辛群的泛丛".

相伴丛(associated fibre bundle) 与主丛具有对应关系的纤维丛. 设 $\eta = (E', q, B, G)$ 为主丛,则存在 G 在 E 上的一个右作用. 另一方面,设 F 为 G 在其上有左作用的空间,对于 $(x, y) \in E \times F$,若

$$(x, y)g = (xg, g^{-1}y),$$

则 G 为 $E \times F$ 上的右作用群. 记轨道空间

$$(E \times F)/G = E \times_G F,$$

若

$$p: E \times_G F \to B, \quad p\{(x, y)\} = q(x),$$

则 $\eta(F) = (E \times_G F, p, B, F, G)$ 为纤维丛,称为 η 的相伴丛. 对于纤维丛 $\xi = (E', p, B, F, G)$,若有主丛 η,使得 $\xi \equiv \eta(F)$,则称 η 为与 ξ 相伴的主丛,它可由 ξ 的坐标变换 B 以及 G 按构造主丛的方法作出. 如此 ξ 与 η 有一一对应关系,并且纤维丛 ξ_1, ξ_2 等价当且仅当其相伴主丛等价. 从而对于主丛 η,可把 $\eta(F)$ 作为相应纤维丛的定义. 由于这个对应关系,在以后的讨论中,将把适用于主丛的理论,也应用到相应的纤维丛上去,特别地,对于分类空间 B_G,CW 复形 X,与 $f_1, f_2: X \to B_G$,

$$f_1^{\#}\xi_G[F] \equiv f_2^{\#}\xi_G[F]$$

当且仅当 f_1 同伦于 f_2,即 B_G 也是以 G 为作用群的向量丛的分类空间.

射影空间的上同调环(cohomology ring of projection spaces) 代数拓扑学的重要概念. 计算射影

空间 $\mathrm{R}P^n$,$\mathrm{C}P^n$,$\mathrm{H}P^n$ 的上同调代数. 设 Λ 为有 1 交换环,x 为一字母,则一切形如

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n \quad (\lambda_i \in \Lambda)$$

的多项式在普通多项式的加法与乘法之下(但在乘的过程中当出现 x^m,$m>n$ 时,令 $x^m=0$)构成 Λ 上的一个代数,称其为 Λ 上的截代数,记为 $\Lambda(x)/(x^{n+1})$. 特别地,当 $n=\infty$时,它即为多项式代数 $\Lambda(x)$. 对于实射影空间 $\mathrm{R}P^n$,$S^0\to S^n\to \mathrm{R}P^n$ 为一纤维空间序列,因此有上同调的奇欣序列

$$O\to H^0(\mathrm{R}P^n;\mathrm{Z}_2)\to H^0(S^n;\mathrm{Z}_2)\to\cdots$$
$$\to H^q(S^n;\mathrm{Z}_2)\to H^q(\mathrm{R}P^n;\mathrm{Z}_2)$$
$$\to H^{q+1}(\mathrm{R}P^n;\mathrm{Z}_2)\to H^{q+1}(S^n;\mathrm{Z}_2)\to\cdots$$

考虑到 $H^0(S^n;\mathrm{Z}_2)=H^n(S^n;\mathrm{Z}_2)=\mathrm{Z}_2$,$H^i(S^n;\mathrm{Z}_2)=0$,$i\neq 0,n$,利用上同调乘积可知

$$H^*(\mathrm{R}P^n;\mathrm{Z}_2)=\mathrm{Z}_2[w]/(w^{n+1}).$$

特别地,当 $n=\infty$时,

$$H^*(\mathrm{R}P^\infty;\mathrm{Z}_2)=\mathrm{Z}_2(w),$$

其中 w 为 $H^1(\mathrm{R}P^n;\mathrm{Z}_2)$的生成元,是 $\mathrm{R}P^n$ 的欧拉类. 同理对于复射影空间 $\mathrm{C}P^n$,有

$$H^*(\mathrm{C}P^n;\mathrm{Z})=\mathrm{Z}(e)/(e^{n+1}),$$
$$H^*(\mathrm{C}P^\infty;\mathrm{Z})=\mathrm{Z}(e),$$

其中 $e\in H^2(\mathrm{C}P^n;\mathrm{Z})$为欧拉类. 对于四元数射影空间 $\mathrm{H}P^n$,有

$$H^*(\mathrm{H}P^n;\mathrm{Z})=\mathrm{Z}(e')/(e'^{n+1}),$$
$$H^*(\mathrm{H}P^\infty;\mathrm{Z})=\mathrm{Z}(e'),$$

其中 $e'\in H^4(\mathrm{H}P^n;\mathrm{Z})$. 又对于 $V=\mathrm{R}$,C 或 H,根据射影空间定义,有 $VP^n\subset VP^{n+1}$,因此

$$VP^\infty=\bigcup_{n\geqslant 0} VP^n,$$

并被赋予关于 $VP^0,VP^1,\cdots,VP^n,\cdots$的弱拓扑.

截代数(truncated algebra) 见“射影空间的上同调环”.

奇欣序列(Gysin sequence) 见“射影空间的上同调环”.

示性类(characteristic class) 一个具有特殊的几何与拓扑背景的上同调类. 示性类理论开始于1935 年,几乎是由惠特尼(Whitney,H.)与史梯福(Stiefel,H.)同时发展起来的,史梯福的论文是引入与研究某些决定于可微流形切丛的“特征”同调类,而惠特尼讨论的是任意球丛的情形,并在以后把它表示为上同调的语言. 1942 年,庞特里亚金(Понтрягин,Л. С.)从研究格拉斯曼流形的同调入手,引入了至今称为庞特里亚金类的示性类. 最后,1946 年,陈省身在昆明从研究复流形入手,定义了复向量丛的陈(省身)类,他指出复格拉斯曼流形有比实格拉斯曼流形更容易掌握的上同调结构,从而有助于人们更好地来掌握示性类理论. 另一方面,若从更为统一的观点来看待,则可把示性类理论描述如下:若 ξ,η 为 CW 复形 X 上的 $G(n)$丛,则有分类映射 f_ξ,f_η:$X\to\mathrm{BG}(n)$(其中 $\mathrm{BG}(n)$为结构群 $G(n)$的分类空间). 因此从分类空间的条目可知,$\xi\equiv\eta$ 当且仅当 $f_\xi\simeq f_\eta$. 所以可把确定 X 上 $G(n)$丛的问题,归结为映射 f:$X\to\mathrm{BG}(n)$的分类问题. 对于后者,代数拓扑中有一种判定办法是:f 诱导出

$$f^*: H^*(\mathrm{BG}(n))\to H^*(X),$$

对于 f_ξ 与 f_η,若 $f_\xi^*\neq f_\eta^*$,则有 $f_\xi\not\simeq f_\eta$,从而 $\xi\not\simeq\eta$,为此只须找 $x\in H^*(\mathrm{BG}(n))$,使得

$$f_\xi^*(x)\neq f_\eta^*(x)\in H^*(X).$$

由于 f_ξ 的同伦类由 ξ 决定,所以记 $f_\xi^*(x)$为 $x(\xi)\in H^*(X)$,称为 ξ 关于 x 的示性类. 近来国内外学者的工作表明,根据托姆(Thom,R.)与庞特里亚金定理,通过史梯福-惠特尼类的计算,对于确定某些带对合可微流形的协边类还是相当有效的.

史梯福-惠特尼类(Stiefel-Whitney class) 一种相应于正交群 $O(n)$的模 2 系数的示性类. 为了定义史梯福-惠特尼类,先叙述一个定理:设 h^* 是一种有乘积的上同调理论,使得对于每个 $n\geqslant 1$,有元素 $x_n\in h^1(\mathrm{R}P^n)$满足:

1. $h^*(\mathrm{R}P^n)=h^*(Pt)[x_n]/(x_n^{n+1})$.

2. 若 i:$\mathrm{R}P^n\to\mathrm{R}P^{n+1}$ 为包含,则 $i^*x_{n+1}=x_n$($h^*(Pt)$为 h^*下一点构成空间的上同调环),

则对于以 CW 复形 X 为底空间的每个$O(n)$丛 ξ,存在惟一的 $W_i(\xi)\in h^i(X)$ $(0\leqslant i\leqslant n)$满足:

1. $W_i(f^\#\xi)=f^*(W_i(\xi))$,对于一切 f:$Y\to X$.

2. $W_0(\xi)=1$.

3. 若 $r_n'=(E,p,\mathrm{R}P^n,\mathrm{R},O(1))$为 $\mathrm{R}P^n$ 上的典型线丛,则 $W_1(r_n')=x_n$.

4. $W_k(\xi\oplus\eta)=\sum_{i+j=k}W_i(\xi)W_j(\eta)$.

由于 Z_2 系数的奇异上同调 $H^*(\mathrm{R}P^n;\mathrm{Z}_2)$满足定理中的条件 1,2,因此,对于 CW 复形 X 上的每个 $O(n)$丛 ξ,存在惟一的

$$W_i(\xi)\in H^i(X^n,\mathrm{Z}_2)\quad(0\leqslant i\leqslant n),$$

它们称为 $O(n)$丛 ξ 的史梯福-惠特尼类.

向量丛的截面(cross-section of vector bundles) 可微流形上连续非零向量场概念的推广. 设 $\xi=(E,p,B,\mathrm{R}^n,G)$为向量丛,$f$:$B\to E$ 连续,若对于每个 $z\in B$,$f(z)\in F_b(\xi)$(即 $pf(b)=b$),则称 f 为向量丛的一个截面. 若 f 恒为 $O\in\mathrm{R}^n$,则称 f 为向量丛 B 上的一个零截面. 一般地,若

$$S_1,S_2,\cdots,S_k:\ B\to E$$

为 ξ 的 k 个截面,对于任意 $b\in B$,

$$S_1(b),S_2(b),\cdots,S_k(b)\in F_b(\xi)$$

线性无关,则称 $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 为 ξ 上一族独立截面. 对于向量丛 ξ,若 $E=B\times\mathrm{R}^n$,则称 ξ 是平凡丛. 对于平凡丛 ξ,存在独立的截面

$$S_1, S_2, \cdots, S_n: B \to B \times \mathrm{R}^n,$$

并且反之也成立. 关于截面, 有下面的定理: 向量丛

$$\xi = (E, p, B, \mathrm{R}^n, G)$$

上存在 n 个独立的面, 当且仅当 ξ 为平凡丛. 向量丛上并不总是存在处处非零截面, 例如, 考虑 $\mathrm{R}P^n$ 上的典型线丛 $r_n' = (E(r_n'), \pi, \mathrm{R}P^n, \mathrm{R}, O(1))$ (参见"有结构群的纤维丛"), 若存在截面

$$S: \mathrm{R}P^n \to E(r_n'),$$

则有复合映射

$$S^n \to \mathrm{R}P^n \xrightarrow{s} E(r_n'),$$

对于 $x \in S^n$, 像点可表为 $(\{\pm x\}, \lambda(x)x)$, 其中 $\lambda(x)$ 为实值连续函数, 并且 $\lambda(-x) = -\lambda(x)$. 因为 S^n 是弧连通的, 所以由中值定理, 存在 $x_0 \in S^n$, 使得 $\lambda(x_0) = 0$, 从而 S 不是一个处处非 0 的函数, 即 S 不是 r_n' 上的处处非零截面. 若向量丛为光滑 n 维流形 M 的切丛:

$$(T(M), \pi, M, \mathrm{R}^n, \mathrm{GL}(\mathrm{R}, n)),$$

则其上的一个截面 $S: M \to T(M)$ 称为向量场, 其上的一族独立截面

$$S_1, S_2, \cdots, S_k: M \to T(M)$$

称为 M 上的一个 k 维标架场.

子向量丛的正交补 (orthogonal complements of subbundle) 欧氏空间中的正交子空间概念在向量丛情形的推广. 设 $\eta = (E, p, B, \mathrm{R}^n)$ 为向量丛, 若 $\xi = (E', p', B, \mathrm{R}^{n_1})$ 也是向量丛, 并且 E' 是 E 的子空间 ($\mathrm{R}^{n_1} \subset \mathrm{R}^n$, $p|E' = p'$), 则称 ξ 为 η 的子向量丛. 设 ξ 是向量丛 η 的子向量丛, 若 B 为仿紧空间, 则利用单位分解定理, 在 E 中可以引入欧氏度量 (即在每个 $F_b(\eta) \subset E$ 中引入内积, 使之与 E 的拓扑结构相协调). 若 E 中有欧氏度量, 则对于每个 $z \in B$, 记

$F_z(\xi^\perp) = \{V \mid V \cdot W = 0$, 对于一切 $W \in F_z(\xi)\}$,

它是 $F_z(\eta)$ 的 $n - n_1$ 维子空间, 而

$$E(\xi^\perp) = \bigcup_{z \in B} F_z(\xi^\perp),$$

使得 $\xi^\perp = (E(\xi^\perp), p'', B, \mathrm{R}^{n-n_1})$ 为 η 的另一个子向量丛, 称为 ξ 的正交补. 对于 ξ 与 $\xi^\perp$, 有惠特尼和 $\eta = \xi \oplus \xi^\perp$. 若 η 有独立截面 $S_1, S_2, \cdots, S_k: B \to E$, $F_b(\xi)$ 为由 $S_1(b), S_2(b), \cdots, S_k(b)$ 生成的 $F_b(\eta)$ 的子空间, 则 $\xi = (E(\xi), p, B, \mathrm{R}^k)$ 为 η 的子丛. 由于这个 k 维子丛有 k 个独立的截面, 从而 ξ 为平凡丛, 记为 ε, 所以 $\eta = \varepsilon \oplus \varepsilon^\perp$, 其中 $\varepsilon^\perp$ 为 $n-k$ 维的 ε 在 η 中的正交补.

史梯福-惠特尼类的性质 (properties of Stiefel-Whitney classes) 对史梯福-惠特尼类的刻画. 指它的一些基本性质. 即:

1. 若 $\xi = \eta$, 则 $W_i(\xi) = W_i(\eta)$.

2. 若 ε 为平凡丛, 则 $W_i(\varepsilon) = 0$, $i > 0$, 这是因为存在从 ε 到底空间为一个点的向量丛的映射.

3. 若 ε 为平凡丛, 则 $W_i(\varepsilon \oplus \eta) = W_i(\eta)$.

4. 若向量丛 ξ 有 k 个独立的截面, 则 $\xi = \varepsilon \oplus \varepsilon^\perp$, 其中 ε 为 k 维平凡丛, 从而 $W_i(\xi) = W_i(\varepsilon^\perp)$, 所以

$$W_{n-k+1}(\xi) = W_{n-k+2}(\xi) = \cdots = W_n(\xi) = 0.$$

对于一个 $O(n)$ 向量丛 ξ,

$$W(\xi) = 1 + W_1(\xi) + W_2(\xi) + \cdots + W_n(\xi)$$

称为 ξ 的全史梯福-惠特尼类. 于是由惠特尼乘积定理有 $W(\xi \oplus \eta) = W(\xi) W(\eta)$.

5. 设 r_n^1 为 $\mathrm{R}P^n$ 上的典型线丛, 则

$$W(r_n^1) = 1 + x_n.$$

这由示性类的定义立即可知. 对于一个 CW 复形 X, 以 X 为底空间的向量丛 ξ 是很多的, 当 $X = M$ 为可微流形时, 称切丛 $\tau(M)$ 的史梯福-惠特尼类为 M 的史梯福-惠特尼类. 对于流形 M, 若 $\tau(M)$ 为平凡丛, 则称 M 为可平行化的. 设 $(n+1)r_n^1$ 为 $n+1$ 个 r_n^1 的惠特尼和, 其全空间中的每一个点可以表为

$$(\{x\}, y_0 x, y_1 x, \cdots, y_n x),$$

其中 $x \in S^n$, $y_i \in \mathrm{R}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, $\{x\}$ 是 x 在 $\mathrm{R}P^n$ 中的像点, 则存在一个丛映射

$\varphi: (n+1)r_n^1 \to \tau(\mathrm{R}P^n) \oplus \varepsilon'$ (ε' 为一维平凡丛),

$$\varphi(\{x\}, y_0 x, y_1 x, \cdots, y_n x) = (\{x\}, y - (x, y)x, (x, y)),$$

其中 $y = (y_0, y_1, \cdots, y_n) \in \mathrm{R}^{n+1}$, (x, y) 为 x, y 的内积. φ 为同胚, 因此 $(n+1)r_n^1 \equiv \tau(\mathrm{R}P^n) \oplus \varepsilon'$. 从而由性质 4 即知有下列性质:

6. $W(\mathrm{R}P^n) = (1 + x_n)^{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1} x_n + \binom{n+1}{2} x_n^2 + \cdots + \binom{n+1}{n} x_n^n.$

由于这个性质 6 与性质 4, 即得下列性质 (史梯福的一个定理):

7. $W(\mathrm{R}P^n) = 1$, 当且仅当 $n = 2^r - 1$ ($r \geqslant 0$).

因此 $\mathrm{R}P^n$ 可平行化 (即它的切丛为平凡丛), 仅可能是 $\mathrm{R}P^1, \mathrm{R}P^3, \mathrm{R}P^7, \mathrm{R}P^{13}, \mathrm{R}P^{15}, \cdots$ 事实上, 已经知道 $\mathrm{R}P^1, \mathrm{R}P^3, \mathrm{R}P^7$ 可以平行化, 而 $\mathrm{R}P^{15}, \cdots$ 不能平行化. 此外, 由性质 4 与 6 还可知: $\mathrm{R}P^{2m}$ ($m \geqslant 1$) 上没有截面, 即, 没有连续处处非零的向量场.

史梯福-惠特尼数 (Stiefel-Whitney numbers) 对史梯福-惠特尼类的一种刻画. 指由史梯福-惠特尼类决定的域 Z_2 中的元素. 设 M 为闭光滑 n 维流形 (可能不连通), 因此存在惟一非 0 元素 $\mu_M \in H_n(M; \mathrm{Z}_2)$, 称为 M 的基本类. 于是对于任意上同调类 $v \in H^n(M; \mathrm{Z}_2)$, 有克罗内克 (Kronecker, L.) 数 $\langle v, \mu_M \rangle \in \mathrm{Z}_2$, 记为 $v[M]$. 若 ξ 是以流形为底空间的 n 维向量丛, $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 是一串非负整数, 使得

$$r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n = n,$$

则对应的乘积为

$$W_1(\xi)^{r_1} W_2(\xi)^{r_2} \cdots W_n(\xi)^{r_n} \in H^n(M; \mathrm{Z}_2).$$

因此有

$$\langle W_1(\xi)^{r_1}W_2(\xi)^{r_2}\cdots W_n(\xi)^{r_n},\mu_M\rangle\in \mathbf{Z}_2.$$

特别地，若 ξ 为 M 的切丛，则

$$W_1^{r_1}\cdots W_n^{r_n}[M]=\langle W_1(\tau M)^{r_1}\cdots W_n(\tau M)^{r_n},\mu_M\rangle$$

称为流形 M 关于乘积 $W_1^{r_1}W_2^{r_2}\cdots,W_n^{r_n}$ 的史梯福-惠特尼数．史梯福-惠特尼数对于判断微分流形的协边性质十分有用，首先，有庞特里亚金定理：若 M 为光滑紧$(n+1)$维流形 W 的边界，则 M 的所有史梯福-惠特尼数全为 0；其次，有托姆定理：若光滑闭 n 流形 M 的一切史梯福-惠特尼数为 0，则存在$(n+1)$维紧光滑流形 W，使得 $\partial W=M$．根据上述两个定理，立即可得下列重要推论：两个光滑闭 n 流形 M,M' 是协边的，当且仅当它们的一切对应的史梯福-惠特尼数全部相等．

吴类(Wu class)　拓扑流形的一种 $\mathbf{Z}_2$ 系数的示性类．对于拓扑流形，示性类也可按下述方式定义．设 M 为 n 维紧流形，对于任意 $x^i\in H^i(M;\mathbf{Z}_2)$，$y^{n-i}\in H^{n-i}(M;\mathbf{Z}_2)$，通过

$$x^i(y^{n-i})=(x^iy^{n-i})[M]\in \mathbf{Z}_2,$$

定义一个同构

$$\psi:\ H^i(M;\mathbf{Z}_2)\to \mathrm{Hom}(H^{n-i}(M;\mathbf{Z}_2),\mathbf{Z}_2),$$

在 ψ 之下，若同态 $\alpha:\ y^{n-i}\to Sq^iy^{n-i}[M]$对应于 $u^i\in H^i(M;\mathbf{Z}_2)$（即 $\psi^{-1}(\alpha)=u^i$）$(i\leqslant n/2)$，则 u^i 称为 M 的吴（文俊）类，其中 Sq 为斯廷罗德运算，并且称

$$W_j=\sum_{i\geqslant 0}Sq^{j-i}u^i$$

为 M 的史梯福-惠特尼类．对此，当 M 为可微流形时，有 $W_j=W_j(M)$（$W_j(M)$为前面定义中史梯福-史梯福-惠特尼类为拓扑不变量．与此相反，米尔诺(Milnor, J. W.)证明，庞特里亚金类并非拓扑不变量．

吴公式(Wu formula)　史梯福-惠特尼类经斯廷罗德运算以后的表示式．在 $\mathbf{Z}_2$ 系数的上同调中，向量丛 ξ 的史梯福-惠特尼类在 $H^*(B(\xi);\mathbf{Z}_2)$中占有重要的地位，斯廷罗德运算 Sq 是一种重要的上同调运算，而吴（文俊）公式是 $W_i(\xi)$经 Sq 以后的表达式，即

$$Sq^k(W_m)=W_kW_m+\binom{k-m}{1}W_{k-1}W_{m+1}+\cdots+\binom{k-m}{k}W_0W_{m+k},$$

其中

$$\binom{x}{i}=x(x-1)\cdots(x-i+1)/i!\,(\mathrm{mod}\,2).$$

由于用示性类做判断难免要对示性类做种种计算，所以吴公式对于示性类的应用，即示性类的计算是十分重要的．

陈类(Chen class)　一种相应于整系数的复向量丛的示性类．对于复向量丛，即 $U(n)$丛

$$\xi=(E,p,X,\mathbf{C}^n,U(n)).$$

如同实向量丛的情形，此时有下列定理：若 h^* 是一种有乘积的上同调理论，使得对于每个 $n\geqslant 1$，有元素 $x_n\in h^2(\mathbf{C}P^n)$满足：

1. $h^*(\mathbf{C}P^n)\cong h^*(Pt)[x_n]/(x_n^{n+1})$.

2. 若 $i:\mathbf{C}P^n\to\mathbf{C}P^{n+1}$为包含，则 $i^*x_{n+1}=x_n$，

则对于每个以 CW 复形 X 为底空间的 $U(n)$丛 ξ，存在惟一的 $C_i(\xi)\in h^{2i}(X)$ $(0\leqslant i\leqslant n)$满足：

1) $C_i(f^{\#}\xi)=f^*(C_i(\xi))$，对于一切 $f:Y\to X$.

2) $C_0(\xi)=1$.

3) 若 $r=(E,p,\mathbf{C}P^n,\mathbf{C},U(1))$为 $\mathbf{C}P^n$ 上的典型复线丛，则 $c_1(r)=x_n$.

4) 若 ξ 为$U(m)X$ 上的丛，η 为 X 上的 $U(n)$丛，则 $C_i(\xi\oplus\eta)=\sum_{j+k=i}C_j(\xi)C_k(\eta)$，$0\leqslant i\leqslant n+m$，其中规定：当 $j>m$ 时，$C_j(\xi)=0$，当 $k>n$ 时，$C_k(\eta)=0$.

由于以 $\mathbf{Z}$ 为系数的奇异上同调 $H^*(\mathbf{C}P^n;\mathbf{Z})$满足定理中的条件 1 与 2，所以对于 CW 复形 X 上的每一个复向量丛（或者说 $U(n)$丛）ξ，存在惟一的

$$C_i(\xi)\in H^{2i}(X;\mathbf{Z})\quad(0\leqslant i\leqslant n)$$

（为在计算上统一，规定 $C_i(\xi)=0,i>n$），它们称为 $U(n)$丛 ξ 的陈（省身）类．陈类是陈省身在研究微分几何中发现的，它在复流形与代数几何中有着广泛的应用．

陈类的性质(properties of Chen class)　对陈类的刻画．指陈类的一些基本性质．对于复 n 维向量丛 ξ，若

$$C(\xi)=1+C_0(\xi)+C_1(\xi)+\cdots+C_n(\xi),$$

则由“陈类”中的结论可知，对于复向量丛 η，有：

1. $C(\xi\oplus\eta)=C(\xi)C(\eta)$.

2. 若 ε 为平凡丛，则 $C(\varepsilon)=1$.

3. 若 γ 为 $\mathbf{C}P^n$ 上的典型复线丛，则

$$C(r)=1+x_n.$$

如同实数的情形，对于一个光滑复流形 M，称 M 的切丛 $\tau(M)$的陈类为 M 的陈类．

4. 对于复射影空间 $\mathbf{C}P^n$，若 $a\in H^2(\mathbf{C}P^n;\mathbf{Z})$为生成元，则 $C(\tau(\mathbf{C}P^n))=(1+a)^{n+1}$.

设 r_m^n 为复格拉斯曼流形 $G_{m,n}(\mathbf{C})$上的标准 n 维向量丛，若 $m\to\infty$，记 $G_{\infty,n}(\mathbf{C})=\mathrm{BU}(n)$上的标准 n 维向量丛 r^n，$C_1(r^n),C_2(r^n),\cdots,C_n(r^n)$为 r^n 的陈类，则还有如下性质：

5. $H^*(\mathrm{BU}(n);\mathbf{Z})\cong\mathbf{Z}(C_1(r^n),C_2(r^n),\cdots,C_n(r^n))$.

庞特里亚金类(Понтрягин class)　一种整系数的四元数向量丛的示性类．对于四元数向量丛，即 $\mathrm{Sp}(n)$丛 $\xi=(E,\pi,X;\mathbf{H}^n,\mathrm{Sp}(n))$，有定理：若 h^* 是

一种有乘积的上同调理论，使得对于每个 $n\geqslant 1$，有元素 $x_n\in h^4(\mathrm{H}P^n)$满足：

1. $h^*(\mathrm{H}P^n)\cong h^*(Pt)[x_n]/(x_n^{n+1})$.

2. 若 $\mathrm{H}P^n\to\mathrm{H}P^{n+1}$为包含，则 $i^*x_{n+1}=x_n$，

则对于每个以 CW 复形 X 为底空间的 $\mathrm{Sp}(n)$丛 ξ，存在惟一的 $p_i(\xi)\in h^{4i}(X)$ $(0\leqslant i\leqslant n)$，满足：

1) $p_i(f^{\#}\xi)=f^*(p_i(\xi))$，对于一切 $f:Y\to X$.

2) $p(\xi)=1$.

3. 若 $r=(E,\pi,\mathrm{H}P^n,\mathrm{H},\mathrm{Sp}(1))$为 $\mathrm{H}P^n$ 上的典型四元数线丛，则 $p_1(T)=x_n$.

4. 若 ξ 为 X 上的 $\mathrm{Sp}(m)$丛，η 为 X 上的 $\mathrm{Sp}(n)$丛，则

$$p_i(\xi\oplus\eta)=\sum_{j+k=i}p_j(\xi)p_k(\eta),$$

其中当 $j>m$ 时，规定$p_j(\xi)=0$，当 $k>n$ 时，规定

$$p_k(\eta)=0.$$

由于四元数射影空间 $\mathrm{H}P^n$ 的整系数上同调 $H^*(\mathrm{H}P^n;\mathbb{Z})$满足定理中的条件 1 与 2，因此，对于 CW 复形 X 上的每个四元数向量丛 ξ，存在惟一的 $p_i(\xi)\in H^{4i}(X;\mathbb{Z})$ $(0\leqslant i\leqslant n)$，称为 $\mathrm{Sp}(n)$丛 ξ 的庞特里亚金类. 庞特里亚金类常用以下定义，设 ξ 为在 CW 复形 X 上的一个实向量丛，$\mathbb{C}$ 为复数域，可得复丛 $\xi\otimes\mathbb{C}$. 设 $p_i(\xi)=(-1)^iC_{2i}(\xi\otimes\mathbb{C})$，$C_{2i}$为陈类. 庞特里亚金类有一些类似于史梯福-惠特尼类与陈类的几何与拓扑性质. 此外，由于复数与四元数之间的密切关系，还存在一些陈类与庞类之间的关系，但是米尔诺(Milnor, J. W.)证明，庞特里亚金类不是拓扑不变量.

不动点理论(theory of fixed points) 亦称尼尔森不动点理论或称拓扑不动点理论，是代数拓扑学的一个经典研究方向. 对于一个自映射 $f:X\to X$，集合 X 中满足条件 $f(x)=x$ 的点称为映射 f 的不动点. 该理论就是研究拓扑空间中自映不动点集的特征，它是各种方程解的存在性等问题的抽象化.

该理论问题的研究开始于尼尔森(Nielsen, J.)关于环面上自同胚的不动点个数问题，这一方法被赖德迈斯特(Reidemeister, K. W. F.)等人推广至紧多面体的任意连续映射，相应的不变量被称为尼尔森数. 一个映射的尼尔森数是它所在的映射同伦类中所有映射不动点个数的下界.

另一个拓扑不变量是莱夫谢茨数，一个映射的莱夫谢茨数非零决定了该映射必存在不动点.

不动点类理论的进一步研究问题有：尼尔森数、莱夫谢茨数与其他拓扑不变量的关系，它们的理论计算问题，各种特殊类型的空间及映射的不动点集特征问题等. 另外，这一理论中的方法亦被用来研究映射的周期点问题.

中国数学家在这一领域中有很好的研究工作. 姜伯驹解决了一类拓扑空间(被称为姜空间)中自映射的尼尔森数的计算问题，并首先给出了莱夫谢茨数为零但尼尔森数非零的映射的例子，这说明了在判别不动点存在的问题上，后一个不变量要优于前一个不变量.

撰 稿 于丹岩 史存海 李厚源 吴振德 何伯和 郑崇友 赵学志 崔宏斌 樊 磊

审 阅 孙以丰 吴振德 郑崇友

几何拓扑学

几何拓扑学(geometric topology) 简称几何拓扑. 拓扑学的一个分支. 它以研究流形的拓扑分类及其有关性质为主. 近些年来，由于其中的低维问题进展迅速，内容丰富，所以也称其低维部分为低维拓扑.

从历史上看，几何拓扑学可以说是代数拓扑学的先驱. 1833 年，高斯(Gauss, G. F.)研究函数沿一个空间闭曲线的积分，用线积分定义空间闭曲线(扭结)的环绕数. 19 世纪，黎曼(Riemann, G. F. B.)在函数论的研究中，贯穿着拓扑学的思想，其中关于紧致曲面分类问题的解决，可以看做是对于曲面的拓扑性质的第一次全面深入的研究. 事实上，早期那些几何拓扑学的拓荒者，高度地发挥了种种组合技巧，想用以处理几何拓扑中的基本分类问题，不幸在证明"主要猜测"即多面体的拓扑分类与组合分类为等价时，遭到了失败. 20 世纪 30 年代的拓扑学家，吸取了这个教训，根据庞加莱(Poincaré, (J.-)H.)的意见，将他们的精力，集中于多面体的同调及其相应结构的研究上. 但是尽管如此，以后在几何拓扑学以及相关问题的研究中，仍然取得一系列令人振奋的结果. 1956 年，米尔诺(Milnor, J. W.)证明了在 7 维球面上(即 S^7 同胚的流形上)可以安装互不等价的微分结构. 1960 年，凯伐勒(Kervaire, M.)提出了第一个组合流形的例子，使得在它上不存在与原来拓扑结构等价的微分结构. 同年，米尔诺提出了同胚而非组合等价的多面体的例子，这就对于紧致多面体的情形，证明了主要猜测的结论不成立. 对于低维流形的情形，1925 年，拉多(Radó, T.)证明了每个紧致曲面可以单纯剖分；1951 年，莫伊斯(Moise, E. E.)证明了每个 3 维流形都可以赋予组合结构，并且在组合等价的意义下是惟一的.

1961 年，斯梅尔(Smale, S.)证明了在 $n\geqslant 5$ 时的广义庞加莱猜测，即一个 n 维闭流形 M，若它为 $n-1$ 连通空间，则 M 同胚于 S^n. 以后在 1981 年，弗

里德曼(Freedman, M. (H.))证明了这个猜测在 $n=4$ 时也成立，但是令人遗憾的是 $n=3$ 的情形($n=1,2$ 情形是已知的)即庞加莱在 1904 年原先提出的猜测(即一个单连通的 3 维闭流形同胚于 S^3)，至今未有证明，这也可以说是当今几何学与拓扑学中最著名的问题之一.

近年来，在拓扑与几何的结合上，瑟斯顿(Thurston, W. P.)利用覆叠空间理论.证明了在 3 维流形中仅存在 8 种常曲率几何，并发现其中最重要的结构是双曲结构，这是对于曲面情形的著名的黎曼-希尔伯特定理的推广.它必将促进低维流形的拓扑与几何性质的研究.与此同时弗里德曼与唐纳森(Donaldson, S.)在 4 维流形方面的结果，对于揭示 4 维流形的性质，也是一种非同小可的突破.如同代数学作为实数系与复数系研究的推广一样，拓扑学乃至几何拓扑学的研究，对于整个数学是重要的，起着基础的作用.

哥尼斯堡七桥问题(problem of seven bridges in Koenigsberg)　由哥尼斯堡市的七座桥所引出来的一个拓扑学问题.拓扑学是 19 世纪发展起来的一个重要数学分支.早在欧拉(Euler, L.)或更早的时代，已有它的萌芽，其中所谓哥尼斯堡七桥问题，便是一个著名的例子.

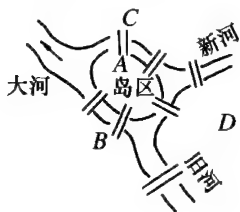


图 1

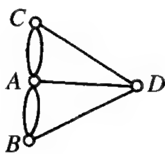


图 2

哥尼斯堡是前苏联的加里宁格勒，布勒格尔河横贯市区，这条河有两个支流，称为新河、旧河，在市中心汇合成大河，中间是岛区，河上有七座桥如图 1，现在的问题是，一个人能否一次走遍七座桥，不重复也不遗漏? 1736 年，欧拉认真考虑了这个问题后，回答这是不可能的.他的证明方法是针对七桥问题画一个图，如图 2，于是人们可以看到，要不重复地一笔画出这个图是不可能的，这类问题以后也称为一笔画问题.

一笔画问题(the problem on the picture of one stroke)　见"哥尼斯堡七桥问题".

流形(manifold)　一类拓扑空间，它在每一点的附近都与欧氏空间同胚.一般的流形概念，起始于对于可微流形的研究，在点集拓扑中已经熟悉把一元或多元连续函数的概念，推广为拓扑空间之间连续映射的概念.但是对于函数的可微性，在进行类似的推广时，却遇到截然不同的情况，若 M, N 为拓扑空间，$f: M\to N$ 为映射，则为了计算微商，须考虑 $(f(x+h)-f(x))/h$，然而在一般空间中，这是没有意义的，因此对于 M 与 N，提出了有一个支撑空间的要求，这是产生可微流形概念的客观要求.

在历史上，n 维流形的概念在拉格朗日(Lagrange, J.-L.)时代已初见端倪，黎曼(Riemann, G. F. B.)于 1854 年利用参数的观点，对维数用归纳法进行构造，以后庞加莱(Poincaré, (J.-)H.)为了摆脱这种研究方法的复杂性，把 n 维流形定义为现在这个样子，即它是一种连通的拓扑空间，其中每点有一个邻域与 R^n(或 C^n)的一个邻域同胚，即把流形定义为局部欧氏空间.这是曲线与曲面概念的高维推广，它是代数拓扑、微分拓扑、几何拓扑以及微分几何研究的主要对象.

拓扑流形(topological manifold)　一类特殊的流形.它是一种特定的豪斯多夫空间.在 n 维欧氏空间 R^n 中，由 $x_n\geqslant 0$ 定义的半空间记为 R^n_+.一个豪斯多夫空间 M，当其中每点 p 有同胚于 R^n 或 R^n_+ 的开邻域 $U(p)$ 时，则称 M 为 n 维拓扑流形.设 $\partial\mathrm{R}^n_+$ 为 R^n_+ 的边界，当 $\varphi_p: U(p)\cong\mathrm{R}^n_+$ 时，$\varphi_p^{-1}(\partial\mathrm{R}^n_+)$ 中的点称为 M 的边界点.由内点不变性(布劳威尔区域不变定理)可知边界点的定义与 φ_p 的选取无关，记 M 的全体边界点之集为 ∂M，称为流形 M 的边界，补集 $\mathrm{Int}M=M-\partial M$ 称为 M 的内部.$\partial M=\varnothing$ 的流形 M 称无边流形，否则称为带边流形.n 维流形 M 的边界 ∂M 是 $n-1$ 维无边流形.紧致无边流形称为闭流形，非紧致无边流形称为开流形.存在连通但非仿紧的拓扑流形，1 维这种流形称为长直线，这种流形都不常见且具有较奇异的性质，下面讨论均假定为仿紧豪斯多夫的，并且具有可数基，因而是度量空间.

无边流形(manifold without boundary)　见"拓扑流形".

带边流形(manifold with boundary)　见"拓扑流形".

闭流形(closed manifold)　见"拓扑流形".

开流形(open manifold)　见"拓扑流形".

长直线(long line)　见"拓扑流形".

拓扑流形的定向(orientation of topological manifold)　确定流形指向的方式问题.有多种等价的方式来定义流形的定向.这里介绍比较基本的两种.设 M 为 n 维拓扑流形，由定义可知存在 M 的一个开覆盖 $\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$，使得对于每个 U_λ 有同胚 φ_λ: $U_\lambda\cong\mathrm{R}^n$(或 R^n_+)，于是当 $U_\lambda\cap U_\mu\neq\varnothing$ 时，

$$\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1}: \varphi_\lambda(U_\lambda\cap U_\mu)\to\varphi_\mu(U_\lambda\cap U_\mu)$$

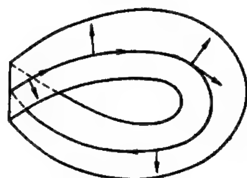
是 R^n(或 R^n_+)的开子集之间的同胚.若在 M 上可选取 U_λ 与 φ_λ，$\lambda\in\Lambda$，使得当 $U_\lambda\cap U_\mu\neq\varnothing$ 时，$\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1}$ 总是保向同胚，则称 M 为可定向流形；否则，称为不可

定向流形.

设 $I=[0,1]$ 为单位区间，$a:I\to M$ 为流形 M 的一条道路，选取 I 的一个分割

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1,$$

使得 $a[t_{i-1},t_i]\subset$ 某 U_{i-1}. 现在通过 φ_{i-1} 选取 U_{i-1}($1\leqslant i\leqslant k$)的序向，使得在 U_{i-1} 和 U_i 上，它们有一致的序向，则当 a 为环道时，有 $a(0)$ 的邻域 $U\subset U_0$ 到 $a(1)$ 的邻域 $V\subset U_{k-1}$ 的一个同胚 h. 若 h 为保向同胚，则称 a 为保向的；否则称 a 为逆向的. 于是 M 可定向的等价说法是：M 上的任意环道都是保向环道. 由于具有相同基点的同伦环道有相同的保向性，所以单连通流形必定可定向，因此 n 维球面 S^n 当 $n\geqslant2$ 时可定向(当然圆周 S^1 也可定向). 另一方面，如图所示，默比乌斯带的腰圆是一条逆向曲线，从而默比乌斯带不可定向，因此一切包含默比乌斯带的曲面均不可定向，所以 2 维实射影平面、克莱因瓶等均为不可定向的闭曲面(2 维流形).



可定向流形(orientable manifold)　见“拓扑流形的定向”.

不可定向流形(nonorientable manifold)　见“拓扑流形的定向”.

保向环道(orientation preserving loop)　见“拓扑流形的定向”.

逆向环道(orientation reversing loop)　见“拓扑流形的定向”.

庞加莱猜想(Poincaré conjecture)　关于闭 3 维流形拓扑性质的一个猜测. 庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)于 1900 年提出这样的问题：一个同调平凡的 3 维流形 M(即 $H_0(M)=\mathbf{Z}, H_i(M)=0, i>0$)是单连通的，从而同胚于 3 维球面 S^3. 后来他自己举了一个反例，说明存在同调平凡但非单连通的流形，这样的流形当然不能同胚于 S^3，但下列问题至今没能解决：一个单连通的 3 维闭流形同胚于 S^3. 这就是著名的庞加莱猜测. 若 3 维闭流形 M 是 2 连通的，则 M 与 S^3 有相同的同伦型. 上述庞加莱猜测中的流形正是这样的流形，因此上述问题的一般提法(广义庞加莱猜测)是：若一个 n 维闭流形 M 与 S^n 有相同的同伦型，则 M 同胚于 S^n.

这个问题当 $n\geqslant5$ 时，由美国数学家斯梅尔(Smale,S.)于 1960 年利用莫尔斯理论的方法所解决，他考虑的是 M 为可微流形的情形. 后来，史太令史(Stallings J. R.)解决了 M 为分片线性(简称 PL)流形的情形；纽曼(Newman, M. H. A.)解决了 M 为拓扑流形的情形. 一般地，当 $n\geqslant5$，M 为光滑同伦 n 维球面(即与 S^n 有相同同伦型)时，M 同胚于 S^n. 但当 $n\geqslant7$ 时，这决不意味着 M 微分同胚于 S^n. 当 $n\geqslant5$，M 为 PL 同伦 n 维球面时，M 为 PL 同胚于 S^n. 当 $n=4$，M 为拓扑同伦 4 维球面时，弗里德曼(Freedman, M. (H.))于 1980 年在更广泛的意义上，作为一个推论，解决了 M 同胚于 S^4 的问题. 对于 $n=3$ 的情形，即古典庞加莱猜测，至今未能解决. 此外，对于 $n=1,2$ 情形问题是平凡的，早为人们所熟知.

广义庞加莱猜想(generalized Poincaré conjecture)　见“庞加莱猜想”.

分片线性结构(piecewise linear structure)　对于流形结构的一种限制. 对于一个拓扑流形，若不加任何结构方面的限制，则存在着操作上的困难. 如同代数拓扑中的传统作法，对它进行剖分，便产生能否剖分，以及不同的剖分是否等价等问题，因此引出分片线性结构的思想. 设 K_1, K_2 为单纯复形，对于映射 $f:|K_1|\to|K_2|$，若存在 K_i 的重分 $L_i, i=1,2$，使得 f 关于 L_1, L_2 为单纯映射，则称为分片线性的，简称 PL 的. 设 M 为一个可剖分流形，对于 M 的两个单纯剖分 (K_1,h_1)，(K_2,h_2)，若 $h_2^{-1}\circ h_1:M\to M$ 是 PL 的，则称为相容的，M 上一切相容的剖分的极大集，称为 M 上的一个 PL 结构. 如同可微流形的讨论在微分结构上进行一样，n 维拓扑的讨论一般地在 PL 流形上进行，对此要注意的是，存在同胚但不是 PL 同胚的 PL 流形以及存在没有 PL 结构的拓扑流形. 但是，对于低维流形的情形，这样的问题是不存在的. 拉多(Radó, T.)于 1925 年证明：每个紧致曲面都可以单纯剖分. 莫伊斯(Moise, E. E.)于 1951 年证明：每个 3 维流形都有一个组合结构，并且这样的结构在 PL 意义下是惟一的.

分片线性映射(piecewise linear mapping)　见“分片线性结构”.

相容单纯剖分(admissible simplicial subdivision)　见“分片线性结构”.

组合流形(combinatorial manifold)　对于其结构有限制的一类 PL 流形. 设 σ 是单纯复形 K 中的一个单形，$\mathrm{St}(\sigma,K)$ 为 σ 在 K 中的星形，它由 K 中一切与 σ 相交的单形以及它们的面所构成. $L(\sigma,K)$ 为 σ 在 K 中的环绕，它由 K 中一切含 σ 的单形 τ 的不与 σ 相交的面所构成. 例如，若 K 为 2 维组合球面，$\sigma=v\in K$ 为顶点，则 $L(v,K)$ 为 K 中的一个组合圆周(简单多边形). 设 M 是一个 PLn 维流形，若对于每个顶点 $v\in M$，当 $v\in\partial M$ 时，$L(v,M)$ 同胚于 $n-1$ 维单形，当 $v\in\mathrm{Int}M$ 时，$L(v,M)\cong S^{n-1}$，则称 M 为组合流形.

野生空间(wild space)　亦称病态空间. 一类特殊的空间. 要求流形上有 PL 结构，有时可以避免野生的或病态的空间的出现，构成这种空间需要无限

回的操作.下面介绍一些有代表性的例子.继安托万(Antoin,L. A.)的研究之后,亚历山大(Alexander, J. W.)为了构造在 $n=2$ 时沙夫里斯(Schönflies, A.)问题的反例,在3维欧几里得空间 R^3 中2维球面 S^2 的内部无限次地粘以环柄(图1)所得到的是一个有界不是单连通的区域,即所谓亚历山大角球.福克斯(Fox,R. H.)与阿廷(Artin,E.)应用扭结理论也得到了类似的例子.

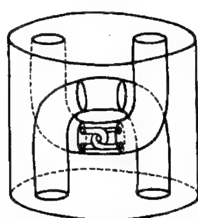


图1

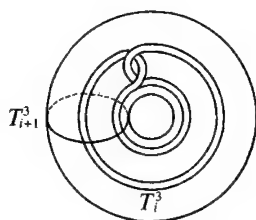


图2

怀特海(Whitehead,J. H. C.)于1935年在企图证明庞加莱猜想的过程中,构造出这样的一个例子(图2),其中 $T^3_1, T^3_2, \cdots, T^3_i, \cdots$ 为3维实环体的序列,$T^3_i \subset T^3_{i+1}$ $(1 \leqslant i)$.若

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} T^3_i,$$

则 M 是一个单连通的3维开流形,与 R^3 有相同的同伦型.但是 M 不同胚于 R^3,所以3维庞加莱猜想对于开流形不成立.另一方面麦克米伦(McMillan, D. R.)证明:$M \times \mathrm{R} \cong \mathrm{R}^4$.

病态空间(wild space)　即"野生空间".

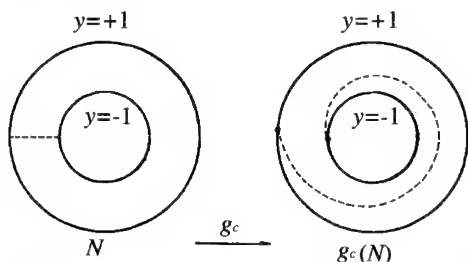
曲面的德恩扭(Dehn twist of surface)　曲面上的一种特殊自同胚.设 S 为任意曲面,c 是 S 上的一条PL简单闭曲线(即 S 上的一个有限多边形),

$$N = [-1,1] \times c \ (c \times \{0\} = c)$$

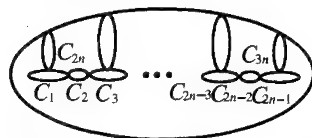
是 c 在 S 中的一个邻域(如图),若 $g_c: S \to S$ 满足:

$$g_c|_{S-N} = \text{恒同},$$
$$g_c(y,\theta) = (y, \theta + \pi(y+1))$$
$$((y,\theta) \in [-1,1] \times c),$$

则 g_c 称为 S 关于简单闭曲线 c 的德恩扭.德恩扭是几何拓扑的早期概念,它对于研究曲面到自己的自同胚,具有深刻的意义.



里可里西定理(Lickorish theorem)　研究曲面到自身的同胚映射的性质.设 S 是亏格为 n 的可定向闭曲面,$c_1, c_2, \cdots, c_{3n-1}$ 是 S 上如图所示的 $3n-1$ 条简单闭曲线.里可里西(Lickorish, W. B.)于1962,1964,1966年给出的一个定理断言:若 T_n 是亏格为 n 的可定向闭曲面,则:



1.每一个从 T_n 到自身的保向同胚合痕于 T_n 上一些德恩扭的乘积.

2.若 $c_1, c_2, \cdots, c_{3n-1}$ 如图所示,则 T_n 上关于任意简单闭曲线的德恩扭 g_c 合痕于德恩扭 $g_{c_1}, g_{c_2}, \cdots, g_{c_{3n-1}}$ 的幂乘积.

由里可里西定理,从 T_n 到自身的每一个保向自同胚可由德恩扭 g_{c_i} 生成,一切 g_{c_i} $(1 \leqslant i \leqslant 3n-1)$ 在乘法运算之下构成一个群.从而引起了关于这个群的性质,即生成元之间关系的研究.另一方面,由里可里西这方面一个类似的定理得知,每一个可定向闭3维流形可以通过在 S^3 中去掉一个环绕的管状邻域,然后再以另一方式填回而得到.

3维流形的海嘎特分解(Heegaard splitting of 3-manifold)　表示3维闭流形的一种方法.流形研究中的主要问题之一为分类问题,即找出一族 n 维流形 M^n_λ,使得当 $\lambda \neq \lambda'$ 时,M^n_λ 不同胚于 $M^n_{\lambda'}$,而每个 n 维流形必与其中之一同胚.与这相关的还有所谓同胚问题,即找出一个方法,使得依此能判别两个已知的 n 维流形是否为同胚.关于紧致流形,当 $n=2$ 时,上述两个问题均已解决;当 $n=3$ 时,至今尚未解决.马尔可夫(Марков, А. А.)证明,同胚问题当 $n \geqslant 4$ 时是不可能解决的,所以研究 $n=3$ 的情形尤为有意义.为了对于3维流形进行研究,初步可以提出这样的问题,如何使3维流形 M 变得稍许具体一点,对此当 M 为闭流形时,有所谓 M 的海嘎特分解.设 M 为 n 维流形,N 为 M 的 $n-1$ 维子流形,若 $\partial N \subset \partial M$,则称 N 为 M 的真嵌入或完全嵌入子流形.对于3维流形 M,若存在互不相交的真嵌入2维胞腔族 $\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$,使得

$$M - \bigcup_{i=1}^{n} D_i \times (-1,1)$$

是一个3维胞腔,则称 M 为一个 n 柄体.设 M 为闭3维流形,K 是 M 的单纯剖分,Γ_1 为 K 的1维骨架,Γ_2 为 Γ_1 的对偶骨架,即 Γ_2 是 K 的一次重分 K' 中与 Γ_1 不相交的极大子复形.若 $V_i = N(\Gamma_i, K'')$(即 K 的二次重分 K'' 中一切与 Γ_i 相交的闭单纯形之并集),则 $M = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$,$V_1, V_2$ 是有相同亏格的柄体,M 可定向当且仅当 V_1(或 V_2)可定向,当且仅当 ∂V_1 可定向,V_1, V_2 称为 M 的一个海嘎特分解,记为 (V_1, V_2).海嘎特分解的优点

是使得每个闭 3 维流形都有一个较为具体的表示，缺点是这种分解不是惟一的.

完全嵌入子流形(properly embedded supmanifold) 见“3 维流形的海嘎特分解”.

***n* 柄体**(cube with *n*-handles or *n*-handlebody) 见“3 维流形的海嘎特分解”.

3 维流形的海嘎特图(Heegaard diagram of 3-manifold) 由海嘎特分解得到的 3 维流形的一种图解表示. 若 M 为闭 3 维流形，(V,V') 为它的一个海嘎特分解，V' 为 n 柄体，$D_1,D_2,\cdots,D_n$ 为 V' 的一族互不相交的真嵌入 2 维胞腔，使得

$$V'-\bigcup_{i=1}^{n}D_i\times(-1,1)$$

为 3 维胞腔，则 $\partial D_i=J_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 为 ∂V 上的一族互不相交、不分离 ∂V 的简单闭曲线，这时

$$(V;J_1,J_2,\cdots,J_n)$$

称为 M 的海嘎特图. 反之，由一个海嘎特图

$$(V;J_1,J_2,\cdots J_n)$$

可以恢复出一个 3 维闭流形. 若

$$N=V\cup\bigcup_{i=1}^{n}D_i\times[-1,1],$$

其中

$$D_i\times[-1,1]\cap V=\partial D_i\times[-1,1]\cap\partial V$$
$$=\partial D_i\times[-1,1],\partial D_i\times\{0\}=J_i\ (1\leqslant i\leqslant n_1),$$

则 $\partial N=S^2$. 所以 $M=N\cup B^3$(其中 B^3 为 3 维胞腔，$\partial B^3=\partial N$)为闭 3 维流形，以 $(V;J_1,J_2,\cdots,J_n)$ 为它的海嘎特图. 因此，用海嘎特图可以表示一切闭 3 维流形. 例如，图 1 与图 2 均为 3 维球面 S^3 的海嘎特图. 若 M 有海嘎特图 $(V;J_1,J_2,\cdots,J_n)$，则由范卡彭

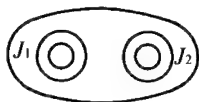


图 1

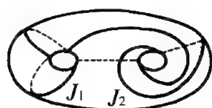


图 2

定理，

$$\pi_1(M)=\pi_1(N)=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n;r_1,r_2,\cdots,r_n\rangle,$$

其中关系 r_i 是同伦类 $[J_i]$ 在

$$\pi_1(V)=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$$

中所表示的元素. 所以 3 维流形的海嘎特图提供了研究 3 维流形的一些信息.

透镜空间(lens space) 一类特殊的可定向闭 3 维流形. 有了 3 维闭流形的海嘎特分解与海嘎特图概念以后，一个有趣的问题是，能否对于有某一固定亏格的海嘎特图的流形进行分类. 当亏格为 1 时，即对于分解 (V,V')，其中 $\partial V=\partial V'$ 为环面或克莱因瓶，赖德迈斯特(Reidemeister, K. W. F.)于 1935 年成功地进行了分类，所得到的闭 3 维流形是透镜空间或 S^1 上的不可定向 S^2 丛. 但是，对于亏格大于 1 的情形，至今尚无相应的结果. 若 $V=S^1\times B^2$ 为环体，$\pi_1(\partial V)$ 是环面 ∂V 的基本群，以 $S^1=a$ 以及 $\partial B^2=b$ 为生成元，则 ∂V 上的闭曲线 a^pb^q 为简单闭曲线当且仅当 p,q 互素. 于是，给定整数 p,q，使得 $p\geqslant 0$，$(p,q)=1$，则存在惟一 3 维闭流形 $L_{p,q}$，它由海嘎特图 $(V;J)$ 决定，并且 J 为 ∂V 上的简单闭曲线，它在 $\pi_1(\partial V)$ 中表示的元素为 a^pb^q，这种流形称为 p,q 型的透镜空间. 特别地，有

$$L_{1,0}=S^3,\quad L_{0,1}=S^2\times S^1,\quad \pi_1(L_{p,q})\cong\mathbf{Z}_p$$

(其中规定 $\mathbf{Z}_1=1,\mathbf{Z}_0=\mathbf{Z}$). 按照赖德迈斯特的分类，这样一些透镜空间同胚的充分必要条件为

1. $L_{1,q}\cong S^3$，对于一切 q.
2. $L_{p,q}\cong L_{p,q'}$，当且仅当 $q\equiv\pm q'\bmod p$ 或
$$qq'=\pm 1\bmod p.$$

当 V 是亏格为 1 的不可定向柄体时，用 $(V;J)$ 表示的不可定向 3 维闭流形只有一个，即 S^1 上的不可定向 S^2 丛. 透镜空间还可以用另一种方式来定义，设

$$S^{2n+1}=\{(z_0,z_1,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^{n+1}\mid\sum|z_i|^2=1\}$$

是 $n+1$ 维复空间中 $2n+1$ 维球面，整数 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 素于整数 p，若同胚 $h:S^{2n+1}\to S^{2n+1}$ 满足

$$h(z_0,z_1,\cdots,z_n)=(\mathrm{e}^{2\pi i/p}z_0,\mathrm{e}^{2\pi iq_1/p}z_1,\cdots,e^{2\pi iq_n/p}z_n),$$

则 h 决定 S^{2n+1} 中的一个周期为 p 的没有不动点的作用. S^{2n+1} 关于这个作用群的轨道空间称为广义透镜空间，记为 $L(p,q_1,q_2,\cdots,q_n)$. 特别地，当 $n=1$ 时，此处所得的空间 $L(p,q)$ 即上述空间 $L_{p,q}$.

***p*,*q* 型透镜空间**(lens space of type p,q) 见“透镜空间”.

广义透镜空间(generalized lens space) 见“透镜空间”.

连通和(connected sum) 将两个连通的 3 维流形并为一个连通的 3 维流形的一种自然的方式. 设 M_1,M_2 为连通的 3 维流形，B_i $(i=1,2)$ 为 M_i 的内部的 3 维胞腔，若 $R_i=M_i-\mathrm{Int}\,B_i$，$M=R_1\cup R_2$，其中 $\partial B_1=\partial B_2$，则 M 称为 M_1,M_2 的连通和，记为 $M=M_1\#M_2$. 对此，注意，M_1 与 M_2 的连通和不是 M_1 与 M_2 直接并起来，而是两者分别挖去一块以后再并起来，所以 M 并不包含 M_1 或 M_2. # 作为 3 维流形之间的一种运算，这种运算是交换与结合的. 至于运算的惟一性问题，若 M_1,M_2 可定向，则等同 ∂B_1 与 ∂B_2 本质上只有两种方式. 于是，若要求 $R_i\to M$ 为保向嵌入，则 $M_1\#M_2$ 在同胚意义下是惟一的，与 B_i 的选取以及等同 ∂B_1 与 ∂B_2 的选取无关. 但是，若记 $-M_2$ 为与 M_2 指向相反的定向流形，则 $M_1\#M_2$ 与 $M_1\#(-M_2)$ 有时并不同胚. 类似地，还可定义一般 n 维流形的连通和，设 M_1,M_2 为 n 维流形，$B_1\subset$

$\mathrm{Int}\,M_1$，$B_2\subset\mathrm{Int}\,M_2$ 为 n 维胞腔，若

$$M_1\#M_2=(M_1-\mathrm{Int}\,B_1)\cup(M_2-\mathrm{Int}\,B_2),$$

其中 $\partial B_1=\partial B_2$，则它是两个 n 维流形的连通和. 特别地，若 $n=2$，T_m 是亏格为 m 的可定向闭曲面，则

$$T_m=T_{m-1}\#T_1=T_1\#\cdots\#T_m\ (m\text{ 个}).$$

***n* 维流形的连通和**(connected sum of n-manifolds)　见“连通和”.

素分解的存在惟一性定理(the existence and uniqueness theorem for prime decomposition)　几何拓扑学的一个重要定理. 3 维流形分解为素 3 维流形的连通和的可能性以及这种分解的惟一性问题. 对于一个无 S^2 边界的 3 维流形 M，若 $M=M_1\#M_2$ 必然导致 M_1，M_2 之一为 S^3，则称 M 为素的. 若

$$M=M_1\#\cdots\#M_p,$$

其中每个 M_i 为素流形，则称这个分解为素分解. 对于有 S^2 边界的流形 M，设 $\hat{M}$为在它的每个 S^2 边界上粘以 3 维胞腔所得之流形，若 $\hat{M}=M_1\#\cdots\#M_p$ 为素分解，而 M 有 q 个 S^2 边界，则

$$M=M_1\#\cdots\#M_p\#B_1^3\#\cdots\#B_q^3$$

称为 M 的素分解. 根据克纳塞尔(Kneser，H.)的结果，每一个紧 3 维流形必然可以表为有限多个素 3 维流形的连通和. 而根据米尔诺(Milnor，J. W.)的定理，对于可定向流形这样的连通和分解除了因子的次序差别以外，在同胚的意义之下，是惟一确定的. 对于不可定向流形，设 P 为 S^1 上的不可定向 S^2 丛，M 为不可定向流形，若有 $M=M_1\#(S^2\times S^1)$，则必然还有 $M=M_1\#P$，M 的这种改变称为标准化. 上述惟一性定理对于不可定向流形在标准化意义下也成立. 紧致 3 维流形的连通和分解，在某种意义下，可把流形的研究转为对于素流形的研究，但是素流形如何？至今仍很不清楚.

环道定理(loop theorem)　3 维流形理论中的一个基本定理. 德恩(Dehn，M.)于 1910 年提出了下列引理：若 M 为 3 维流形，B^2 为 2 维圆盘，$f:B^2\to M$ 为连续映射，使得 ∂B^2 在 B^2 的某邻域 A 上，f 是嵌入，即 $f^{-1}f(A))=A$，则 $f|\partial A$ 能够扩张为嵌入 $g:B^2\to M$. 但是德恩的证明是不完全的，这个问题直至 1957 年，帕帕克里亚可帕罗史(Papakyriakopoulos，C. D.)才给出一个完全的证明. 帕帕克里亚可帕罗史证明的称为环道定理与球面定理，而把上述德恩引理作为环道定理的推论，以后史太令史(Stallings，J.)等又对于原来的证明作了改进，下面是改进后环道定理的叙述：若 M 为任意 3 维流形，$F\subset\partial M$ 为连通的 2 维流形，N 是 $\pi_1(F)$的正规子群，则当 $\ker(\pi_1(F)\to\pi_1(M))-N\neq\varnothing$时，存在真嵌入 $g:(B^2,\partial B^2)\to(M,F)$使得$[g|\partial B^2]\notin N$.

球面定理(sphere theorem)　3 维流形理论中的一个基本定理. 若 M 为 3 维可定向流形，$\pi_2(M)\neq0$，则在 M 中存在一个 PL 球面 S^2，使得 S^2 在 M 中不同伦于 0. 对于不可定向流形，相当于球面定理的有衣泼斯坦(Epstein，D. B. A)的射影平面定理. 其大意是说，若 M 为任意 3 维流形，$\pi_2(M)\neq0$，则存在连续映射 $g:S^2\to M$，使得 $g:S^2\to g(S^2)$或者为同胚，或者为 2 倍覆叠，而 g 不同伦于 0. 球面定理与环道定理沟通代数与几何之间的关系，是 3 维流形研究中的有力工具.

射影平面定理(the projective plane theorem)　见“球面定理”.

3 维流形的基本群(the fundamental group of 3-manifold)　对 3 维流形的一种刻画. 3 维流形的分类或性质，虽然说不能由其基本群来决定，但是基本群与流形也存在着颇为密切的关系，仅举数例于下. 若 F 为 3 维流形 M 中异于 S^2 的曲面，并且当任何 $S^1\subset F$ 在 $M\backslash F$ 中张开一个圆盘时，S^1 在 F 中也张开一个圆盘，则称 F 为 M 中的不可压缩曲面. 不可压缩曲面在 3 维流形的研究中起着重要的作用. 有如下定理：若 M 为紧致 3 维流形，∂M 中的每个分支在 M 中不可压缩，$\pi_1(M)=G_1*G_2$(群的自由积)，则

$$M=M_1\#M_2,\quad \pi_1(M_i)=G_i\quad(i=1,2).$$

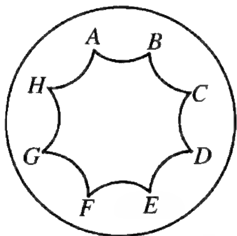
关于不可定向流形，衣泼斯坦(Epstein，D. B. A.)也有一个重要的定理：设 M 为不可定向 3 维流形，若它的基本群为有限群，则 $\pi_1(M)=\mathbb{Z}_2$. 若一个 3 维流形的基本群为交换群，则上述定理可视为下列定理的特殊情形：设 G 为有限生成交换群，若 G 为某 3 维流形 M 的基本群 $\pi_1(M)$的子群，则 G 同构于下列 5 个群 $\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}_p$，$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}_2$ 之一.

不可压缩曲面(incompressible surface)　见“3 维流形的基本群”.

2 维流形的几何(the geometries of 2-manifolds)　曲面上的常曲率几何. 先考虑一般 n 维流形 M 上的常曲率几何的概念. 若在流形 M 上的一个度量，使得对于任意 $x,y\in M$，有 x 的邻域 U 与 y 的邻域 V 以及一个保距同胚(简称保距)$(U,x)\to(V,y)$，则称此度量为局部齐性的. 称 M 容许一个几何结构，指的是 M 有一个完备的局部齐性度量. 于是 M 的任何覆叠空间 $\tilde{M}$ 继承一个自然的度量，使得射影 $\tilde{M}\to M$ 为局部保距. 另一方面，由辛格(Singer，I. M.)的一个定理：在单连通流形上的一个局部齐性度量必定是齐性的，即它的保距群必定是可迁的. 所以当 X 为 M 的泛覆叠空间时，M 为 X 关于其某保距子群 G 的轨道空间 $M=X/G$. 因此可以认为 X 与它的保距群决定一个克莱因意义下的几何，并称 M 具有以 X 为模型的几何. 根据上述讨论，考虑 2 维闭流形的情形，先看球面 S^2. 3 维欧氏

空间 $\mathbb{R}^3$ 的标准度量，诱导 S^2 上曲率为 1 的齐性度量. 因为 $S^2 \to \mathbb{R}P^2$ 有 2 倍覆叠，所以 $\mathbb{R}P^2$ 上也有常曲率为 1 的度量. 其次考虑环面 T^2，它可由欧氏平面经折叠而得到，所以 T^2 上有曲率为 0 的局部齐性度量. 由于 T^2 到克莱因瓶 K 上有 2 倍覆叠，所以 K 上也有曲率为 0 的度量.

取双曲平面 H^2 的一个庞加莱模型，由于 H^2 中三角形的三内角之和小于 180°，所以，如图在 H^2 上可以做一个 8 边形，使得 8 个角之和为 2π. 于是 H^2 在保距变换之下的叠合，即得亏格为 2 的闭曲面 T_2. 同理对于 $T_g, g\geqslant 2$ 均可这样获得. 记亏格为 q 的不可定向闭曲面为 $M(q)$. 考虑到 $T_q \to M(q+1)$ 有 2 倍覆叠，所以 T_q 与 $M(q+1), q\geqslant 2$ 上均有常曲率为 -1 的度量. 应用曲面上的高斯-波内定理，这样的常曲率除去一个常系数倍以外是惟一的，所以有下列定理. 对于闭曲面 S，当欧拉示性数 $\chi(s)>0$ 时，S 上有常曲率为 1 的几何；当 $\chi(s)=0$ 时，S 上有常曲率为 0 的几何；当 $\chi(S)<0$ 时，S 上有常曲率为 -1 的几何，并且除了差一个系数倍，S 上的这种几何是惟一的.



局部齐性度量(locally homogeneous metric)　见“2 维流形的几何”.

3 维齐性黎曼流形(3-dimensional homogeneous Riemannian manifold)　一类特殊的 3 维流形. 讨论三个特殊的齐性流形(参见“2 维流形的几何”). 对于半平面 $\mathbb{R}_+^2=\{(x,y)\mid y\geqslant 0\}$，给定度量

$$ds^2=\frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2),$$

它称为双曲平面 H^2 的克莱因模型. 在此模型中，垂直于 X 轴的直线与半圆是 H^2 的直线，关于垂线的反射与关于半圆的反演是保距，H^2 上的任意保距至多是三个这种保距之积，任意保向保距是两个这种保距之积. 将 $\mathbb{R}_+^2$ 中的点表示为复数，$\mathbb{R}_+^2$ 中的每个保向保距是变换

$$\alpha:\ z\mapsto\frac{az+b}{cz+d},$$

其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$，行列式

$$\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}>0.$$

因此一切保向保距与 $\mathbb{R}$ 上行列式大于 0 的 2 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

相对应，记为 PSL_2R，称为 $\mathbb{R}$ 上的 2 阶射影特殊线性群，或记为 SL_2R. 另一方面，若 M 为黎曼流形，TM 是 M 上的切丛，$f:M\to M$ 为保距，则 f 诱导保距 $df:TM\to TM$. 若 M 是齐性的，则 TM 也是齐性的. 设 $M=H^2$，$UH^2\subset TH^2$ 为单位切丛，对于 H^2 上的一个保向保距

$$\alpha:\ z\mapsto\frac{az+b}{cz+d},\quad d\alpha:\ UH^2\to UH^2,$$

由于 H^2 上的每点每个方向决定一个保距，UH^2 与 PSL_2R 在它们的元素之间有一个一一对应，根据 UH^2 上有齐性度量可知，PSL_2R 上也有齐性度量，从而它的泛覆叠空间 $\widetilde{\mathrm{PSL}_2R}$ 上也是如此. 其次若

$$\mathrm{Nil}=\left\{(x,y,z)=\begin{pmatrix}1 & x & z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\,\middle|\, x,y,z\in\mathbb{R}\right\},$$

则在矩阵的乘积 $((x,y,z)(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z'+xy'))$ 之下，Nil 是一个幂零群，在矩阵群的微分构造之下成为一个李群. 作为李群，有在它的单位点的切空间的度量所诱导的左不变度量

$$ds^2=dx^2+dy^2+(-x dy+dz)^2.$$

因此左平移是 Nil 上的保距. Nil 是一个 3 维齐性黎曼流形，由于 $\mathrm{Nil}\cong\mathbb{R}^3$(同胚)，所以 Nil 为单连通流形，它称为海森堡群. 最后，设

$$\mathrm{Sol}=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\},$$

规定

$$(x,y,z)(x',y',z')=(x+e^z x',\ y+e^z y',\ z+z'),$$

它也是李群. 在它的上面有左不变黎曼度量

$$ds^2=e^{2z}dx^2+e^{-2z}dy^2+dz^2,$$

所以它也是 3 维单连通齐性黎曼流形.

克莱因模型(Klein model)　见“3 维齐性黎曼流形”.

2 阶射影特殊线性群(projective special linear group of degree 2 over R)　见“3 维齐性黎曼流形”.

左不变度量(metric invariant under left multiplication)　见“3 维齐性黎曼流形”.

海森堡群(Hisenberg group)　见“3 维齐性黎曼流形”.

3 维流形的几何(the geometries of 3-manifolds)　研究 3 维流形上的常曲率几何. 至今可以用三种方式来谈论几何，第一种：古典的欧氏几何，在其中考虑点、线、面、角、长度等以及它们之间的相互关系，而且这种方法对于非欧几何也适用；第二种：微分几何；第三种是克莱因意义下的几何，即考虑空间 X 与其上的一个可迁变换群 G，所谓几何 (X,G) 即考虑 X 在 G 之下的那些不变性. 当然这三者只是立论不同而已，其内容有时是共通的. 在这里所论的几何正是克莱因意义之下的几何. 由于流形 M 与它的泛覆叠空间 X 之间有相同的度量，所以为

了讨论流形 M 上的局部齐性度量，只须讨论 X 上的齐性完备度量即可，其中 $G=\mathrm{Isom}(X)$，即 X 上的保距群，并假定 G 有子群 H，使得轨道空间（流形）X/H 是紧致的（称为 (X,G) 有紧商）. 在这些限制之下，瑟斯顿（Thurston, W. P.）有下列定理：

1. 任何单连通 3 维流形 X 上有紧商的完备齐性几何 $(X,\mathrm{Isom}(X))$ 等价于下列 8 种几何之一：

R^3，H^3，S^3，$S^2\times\mathsf{R}$，$H^2\times\mathsf{R}$，$\widetilde{\mathrm{SL}_2\mathrm{R}}$，Nil，Sol，

（此处 $\widetilde{X}$ 表示 X 的覆叠空间），其中 R^3 为 3 维欧氏空间，H^2，H^3 分别为 2 维与 3 维双曲空间，S^2，S^3 上有分别作为 R^3，R^4 的子空间的诱导几何.

2. 任何闭 3 维流形上，若有模型于上述意义下的几何，则这种几何是惟一的.

当然，瑟斯顿也注意到在闭 3 维流形的非平凡连通和之中，除了 $\mathsf{R}P^3\#\mathsf{R}P^3$ 以外，均无上述意义下的几何，因此他的工作中也包含一些几何猜想，即他认为任何紧致、可定向 3 维流形，当用其中一些互不相交的球面与环面去切，并在球面的切口处再补上 3 维球体以后，必然有几何结构. 这些猜测之中包含着著名的庞加莱猜想，但是看来要证实它们还须走漫长的道路. 在 3 维流形上存在常曲率几何，这是近年来由瑟斯顿发展起来的一个新的研究课题，它对于流形性质的研究具有重要的意义.

赛费特纤维空间（Seifert fibre spaces） 亦称赛费特流形. 一类特殊的 3 维流形. 除了 3 维球面与透镜空间以外，赛费特纤维空间是一类较为具体，研究得较多的 3 维流形，而且它在 3 维流形上的齐性几何（即常曲率几何）中扮演着重要的角色. 一个 3 维流形 M，若它能表示为 M 中一些互不相交的简单闭曲线之并，则称为赛费特纤维空间，这些闭曲线称为 M 的纤维. 若对于其中的一个纤维 c，取 c 在 M 中的正则邻域 $N(c)$，可以要求 $N(c)$ 由 M 中的一些纤维所构成，则把 $N(c)$ 看做独立于 M 之外的流形，有 $N(c)=B^2\times S^1$，而当 $N(c)$ 按原来的方式放回到 M 时，对于 $\partial N(c)$ 上的一个纤维 c'，在 $\partial B^2\times S^1$ 上可以表示为 $\lambda^n\mu^m$，其中 λ 代表 $\pi_1(\partial B^2\times S^1)$ 中的生成元 S^1，μ 代表其中的生成元 ∂B^2. 当 $n=\pm1$ 时，称 c 为正则的，否则 c 称为奇异的. 由于在奇异纤维附近的纤维都是正则的，当 M 为紧致流形时，M 中仅有有限个奇异纤维，∂M 为正则纤维之并. 现在对 M 的研究，可着眼于这些奇异纤维上，通过适当调整 c' 的取向，总可假定 $n>0$，$0\leqslant m\leqslant n/2$. 若将 M 中每条纤维等同为一个点，则得轨道空间 S，以及射影 $\eta:M\to S$. 由于 $\eta(N(c))$ 为 S 中的一个 2 维胞腔，从而表明 S 为 2 维流形，称为 M 的伴随赛费特曲面. 设 M 有奇异纤维 $c_{\alpha_1},c_{\alpha_2},\cdots,c_{\alpha_q}$，$B_1,B_2,\cdots,B_q$ 为 $\eta(c_{\alpha_1}),\eta(c_{\alpha_2}),\cdots,\eta(c_{\alpha_q})$ 在 S 中互不相交的 2 维胞腔邻域. 若

$$S^*=S-\bigcup \mathrm{Int}\ B_i,\quad M^*=\eta^{-1}(S^*),$$

则 $\eta|M^*:M^*\to S^*$ 为通常意义下的纤维丛映射. 若 $\partial S^*\neq0$（当 M 无奇异纤维时，把一个正则纤维看做奇异即可），则 S^* 可收缩为圆周的一点并，因此 $\eta|M^*:M^*\to S^*$ 有截面，选 $\eta^{-1}(\partial B_i)$ 的生成元 c_i,t_i，其中 t_i 为 M 上正则纤维，c_i 与 t_i 相交于一点. 另一方面，已有 $\eta^{-1}(\partial B_i)$ 的生成元 μ_i,λ_i，而 $t_i=\mu_i^{m_i}\lambda_i^{n_i}$（当 c_{α_i} 为 (m_i,n_i) 型奇异纤维时），所以 $c_i=\mu_i^{r_i}\lambda_i^{s_i}$，其中

$$s_im_i-r_in_i=1,\quad \mu_i=t_i^{S_i}c_i^{-n_i},$$

这样可以由 $\pi_1(M^*)$ 中增加关系 $t_i^{s_i}c_i^{-n_i}=1$ 而计算 $\pi_1(M)$. 具体说来，由范卡彭定理易知有下列结果：若 M 为有 g 个奇异纤维的赛费特纤维空间，其赛费特曲面 S 有亏格 g 以及 k 个边界分支，则当 S 可定向时，$\pi_1(M)$ 可表示为 1，当 S 不可定向时，$\pi_1(M)$ 可表示为 2：

1. $\langle a_1,b_1,\cdots,a_g,b_g,c_1,c_2,\cdots,c_q,d_1,d_2,\cdots,d_k,t;a_i+a_i^{-1}=t^{\varepsilon_i},b_i+b_i^{-1}=t^{\delta_i},c_i+c_i^{-1}=t,d_i+d_i^{-1}=t^{\theta_i},c_i^{n_i}=t^{s_i},c_q=[a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g]c_1\cdots c_{q-1}d_1\cdots d_k\rangle$.

2. $\langle a_1,a_2,\cdots,a_g,c_1,c_2,\cdots,c_q,d_1,d_2,\cdots,d_k,t;a_i+a_i^{-1}=t^{\varepsilon_i},c_i+c_i^{-1}=t,d_i+d_i^{-1}=t^{\theta_i},c_i^{n_i}=t^{s_i},c_q=a_1^2\cdots a_g^2c_1\cdots c_{q-1}d_1\cdots d_k\rangle$,

其中 $\varepsilon_i,\delta_i,\theta_i=\pm1$，$t$ 表示 M 中的任意正则纤维. 若赛费特纤维空间 M 为闭流形，则其中的赛费特结构可能不惟一，但是它上面的齐性几何由两个不变量决定，其一为赛费特曲面 S 的欧拉示性数 χ，其二为 M 的欧拉示性数 e. 关于 χ，e 与 M 的模型空间之间的关系如下表：

	$\chi>0$	$\chi=0$	$\chi<0$
$e=0$	$S^2\times\mathsf{R}$	R^3	$H^2\times\mathsf{R}$
$e\neq0$	S^3	Nil	$\widetilde{\mathrm{SL}_2R}$

赛费特流形（Seifert manifold） 即“赛费特纤维空间”.

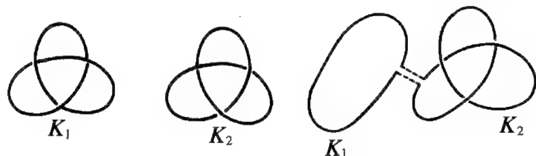
正则纤维（regular fibre） 见“赛费特纤维空间”.

奇异纤维（singular fibre） 见“赛费特纤维空间”.

伴随赛费特曲面（associated Seifert surface） 见“赛费特纤维空间”.

扭结（knot） 亦称环绕. 几何拓扑学的一个重要概念. 设 K 是拓扑空间 X 的一个子集，若 K 同胚于 p 维球面 S^p，则称 K 为 X 中的一个扭结. 一般地，X 的一个子集 K，若 K 同胚于 r 个球面的无交并 $S^{p_1}\cup\cdots\cup S^{p_r}$，则称为 X 中的一个环绕. 所以扭结是环绕的特殊情形. 对于 X 中的两个扭结或环绕 K，K'，若存在同胚 $h:X\to X$，使得 $h(K)=K'$，即

$(X,K)\cong(X,K')$，则称为等价的. 扭结或环绕的等价类称为扭结型或环绕型. 实际上，除了有特别的说明以外，在这些问题中，一般总假定 X 为 n 维欧氏空间，n 维球面或 n 维单形. 在这里限制 X 为 3 维欧氏空间 R^3，K 为 S^1，即此处所指的扭结是 R^3 中的一条简单闭曲线. 对于 R^3 的一个自同胚 h，若存在伦移 $H:\mathrm{R}^3\times I\to\mathrm{R}^3$，使得每个 $h_t=H(\mathrm{R}^3,t):\mathrm{R}^3\to\mathrm{R}^3$ 为同胚，h_0 为恒等映射，$h_1=h$，则称为合痕于恒等映射. 对于 R^3 中的扭结 K_1,K_2 若存在 R^3 的合痕 $\{h_t\}$，$0\leqslant t\leqslant 1$，使得 $h_1(K_1)=K_2$，则称 K_1,K_2 有相同的合痕型. 合痕与等价是两个不同的概念. 例如，图中所列的两个三瓣扭结是等价的，但不具有相同的合痕型，因为 R^3 关于其中某张平面的反射，可把 K_1 变为



它的镜面像 K_2，但不能通过连续的变形把 K_1 变为 K_2. R^3 到自身的同胚可以惟一地扩张为 S^3 到自身的同胚，因此在讨论扭结问题时，也可用 S^3 代替 R^3，于是可知任意同胚 $h:\mathrm{R}^3\to\mathrm{R}^3$ 合痕于恒等同胚当且仅当 h 为保向同胚. R^3 中 (x,y) 平面上的单位圆周所表示的扭结及其扭结型称为平凡的或不打结的，否则称为打结的. 在扭结的等价之下，可用 R^3 中由有限条边构成的多边形来表示的扭结称为温良的，否则称为野生的. 对于可用多边形表示的温良扭结 K，可取 R^3 中的平面 π 以及 R^3 到 π 的投影 p，使得：

1. $p(K)$ 的多重点只限于二重点，并且只有有限个.

2. K 的顶点不映为 $p(K)$ 的二重点，这样的一个投影称为 K 的正则投影.

若两个纽结 K_1,K_2 处于互不相绕的位置，则可以通过两段小弧把它们互相连结起来，如同上图右，这样形成的一个新扭结称为扭结 K_1,K_2 的结合，结合的操作称为扭结的乘法. 于是全体扭结型在这种乘法之下成为一个交换半群. 一个扭结型称为素的，若不能再用非平凡扭结将它分解. 所以在此扭结型半群之中，每一个扭结型能惟一地表示成有限个素扭结型的乘积.

在 20 世纪 30 年代之前，扭结理论主要以美国的亚历山大(Alexander, J. W.)以及德国的赖德迈斯特(Reidemeister, K. W. F.)、赛费特(Seifert, H. K. I.)为代表发展起来的，40 年代几乎没有太多进展. 以后，美国的福克斯(Fox, R. H.)在这方面的贡献较多. 进入 20 世纪 80 年代以来，一些著名数学家如韦吞(Witten, E.)等投入这方面研究，他把扭结理论与量子场联系起来，得到了琼斯-韦吞(Jones-Witten)的不变量 $\mathrm{SU}(2)_q$. 高登(Gordon, C. M.)与吕克(Luecker, J.)证明了 S^3 中的一个扭结 K 由它的补 S^3-K 决定. 里可里西(Lickorish)利用考夫曼(Kauffmen)括号多项式构造了 3 维流形不变量，并描述此不变量与 $\mathrm{SU}(2)_q$ 的关系.

环绕(link)　即“扭结”.

等价扭结(equivalent knot)　见“扭结”.

等价环绕(equivalent link)　见“扭结”.

扭结型(knot type)　见“扭结”.

环绕型(link type)　见“扭结”.

合痕型(isotopy type)　见“扭结”.

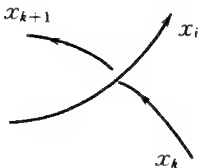
不打结扭结(unknotted knot)　见“扭结”.

打结扭结(knotted knot)　见“扭结”.

温良扭结(tame knot)　见“扭结”.

野生扭结(wild knot)　见“扭结”.

扭结群(knot group)　研究扭结的一个工具. 若 K 为扭结，则 R^3-K 的基本群 $G=\pi_1(\mathrm{R}^3-K)$ 称为 K 的扭结群. 取扭结 K 的一个正则投影 $\mathscr{P}$，使得投影平面为 xy 平面. 然后对于 $\mathscr{P}(K)$ 中的每个二重点 P，设它对应于 K 中的两个点 P_1,P_2，这时，若 P_1 的 z 坐标大于 P_2 的 z 坐标，则称 K 中 P_1 附近线段的投影为 $\mathscr{P}(K)$ 中的上行段，P_2 附近线段的投影为 $\mathscr{P}(K)$ 中的下行段(如图). 若给定 K 的一个指向，选取 R^3-K 的基点为 z 坐标充分大的点 q，对于每条上行段，引入一条以 q 为基点的环道，它对于 K 的指定的取向右旋的绕上行段一周，这些环道在 $\pi_1(\mathrm{R}^3_+-K)$ 中所决定的元素记为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ (R^3_+ 表示 R^3 的上半空间)，然后对于每个交点，如图所示，引入关系 $r_i=x_kx_ix_{k+1}^{-1}x_i^{-1}$，则 K 的扭结群



$$G=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n;r_1,r_2,\cdots,r_n\rangle.$$

因为上述 n 个关系中的任何一个可用其余 $n-1$ 个表出，所以 G 还可表示为

$$G=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n;r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}\rangle,$$

它称为 G 的维丁格尔表示. 若 G 的换位子群是 G'，则 G/G' 是无限循环群 Z. 扭结群是扭结型的不变量，但具有同构扭结群的扭结不一定等价. 因此寻找尽可能精细的扭结不变量是扭结研究中的一个重要问题.

维丁格尔表示(Wirtinger representation)　见“扭结群”.

亚历山大多项式(Alexander polynomial)　扭结型的比扭结群更加易于计算的不变量. 设 Λ 为有

单位元的交换环，A 为 Λ 的元素构成的 $m\times n$ 矩阵，用 Λ^n 记以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为基底的自由 Λ 模，又 Λ^m 为以 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 为基底的自由 Λ 模. 若 $f:\Lambda^n\to\Lambda^m$ 为由 $A=(a_{ij})$ 所确定的 Λ 模同态，即

$$f(x_i)=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}y_j\ (1\leqslant i\leqslant n),$$

则称 A 为商模 $M=\Lambda^m/f(\Lambda^n)$ 的表现矩阵. 若 A 为方阵，则它的行列式是模 M 的一个同构不变量. 若扭结 K 的扭结群 $G=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n;r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}\rangle$，$G'$ 是 G 的换位子群，$X=\mathrm{R}^3-K$，$\widetilde{X}$ 为 X 的对应于 G' 的覆叠空间，G'' 是 G' 的换位子群，则

$$H_1(\widetilde{X})\cong G'/G'',$$

$\widetilde{X}$ 的覆叠变换群 G/G' 为无限循环群. 若 G/G' 的生成元为 t，则 t 引起 $H_1(\widetilde{X})$ 的一个自同构. 根据 $\widetilde{X}$ 的作法可知，若 $u=gG''\in G'/G''=H_1(\widetilde{X})$，则有

$$tu=xgx^{-1}G'',$$

其中 x 为由 $\widetilde{x}$ 中连结 q 与 $t(q)$ 的道路在 X 中的投影所决定的 $\pi_1(X,p)=G$ 中的一个元素，在

$$G=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n;r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}\rangle$$

中，记 $x=x_n$，$a_1=x_1x^{-1}$，$\cdots$，$a_{n-1}=x_{n-1}x^{-1}$. 考虑到关系 $r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}$，可知 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 以及它们关于 x 的共轭生成 G'. 记 $u_i=a_iG''$，R_i 为 r_i 所确定的 u_i 之间的关系. 若 Λ 为整数环上由 t,t^{-1} 生成的多项式环 $\Lambda=Z[t,t^{-1}]$，则把 R_i 表示为各个 u_i 以 Λ 中元素为系数的线性组合，系数矩阵便是作为 Λ 模的 G'/G'' 的表现矩阵，这个 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的行列式即是著名的扭结 K 的亚历山大多项式. 例如，当 $x_kx_ix_k^{-1}x_{i+1}^{-1}$ 用 a_i 表示时，它为

$$a_kxa_ixx^{-1}a_k^{-1}x^{-1}a_{i+1}^{-1}=a_kxa_ix^{-1}xa_k^{-1}x^{-1}a_{i+1}^{-1},$$

作为 Λ 模在 G'/G'' 中表示为

$$u_k+tu_i-tu_k-u_{k+1}=(1-t)u_k+tu_i-u_{i+1}.$$

这就对应于表现矩阵中的一列. 例如，扭结中的三瓣扭结有扭结群 $\langle x_1,x_2,x_3;x_1x_2x_1^{-1}x_3^{-1},x_2x_3x_2^{-1}x_1^{-1}\rangle$，根据上述作法有表现矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1-t & -1\\ t & 1-t\end{pmatrix},$$

因此有三瓣扭结的亚历山大多项式 $|A|=t^2-t+1$. 类似地，对于多于一个分支的环绕，也能计算它的亚历山大多项式. 例如，下图是有两个分支的环绕，它的亚历山大多项式是

$$\Delta(x,y)=1-4x+6x^2-2x^3-2y+6xy-4x^2y+x^3y.$$

对于上面所决定的扭结的情形，符号 $P_{t.[a+b+c+\cdots}$，其中 P 表示交点数，t 表示编号，$[a+b+c+\cdots$ 表示其亚历山大多项式，即 $\Delta(x)=a+b(x+x^{-1})+c(x^2+x^{-2})+\cdots$ 例如，下图中的 $7_{1.[1-1+1-1}$ 的亚历山大多项式为

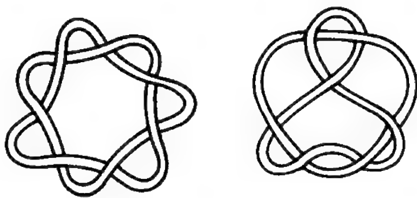
$$\Delta(x)=1-(x+x^{-1})+(x^2+x^{-2})-(x^3-x^{-3}).$$

对于环绕的情形，记号

$$P_t^s,\begin{bmatrix}a\ b\ c\ \cdots\\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \cdots\end{bmatrix},$$

其中 s 表示环绕中扭结的个数，

$$\begin{bmatrix}a\ b\ c\ \cdots\\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \cdots\end{bmatrix}$$



7_1，$[1-1+1-1$ $\qquad$ 7_1^2，$\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$

表示环绕的亚历山大多项式

$$\Delta(x,y)=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\cdots+y(a+bx+cx^2+\cdots).$$

例如，上图中的

$$7_1^2,\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

的亚历山大多项式是

$$\Delta(x,y)=1-x+y(-1+x-x^2)+y^2(-x+x^2).$$

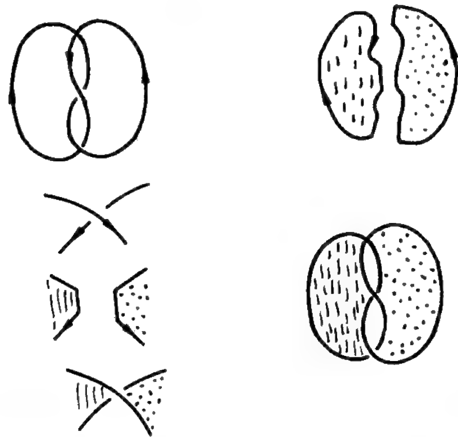
商模的表现矩阵(representative matrix of quotient module) 见“亚历山大多项式”.

赛费特曲面(Seifert surface) 几何拓扑学的一个重要曲面. R^3 中以一个扭结为边界的紧致连通曲面. 对于 R^3 中给定的一个扭结 K，以三瓣扭结为例，其赛费特曲面的构造如下：如图所示，先把扭结定向，并把它的投影在交点处切开，则得一些互不相交的定向圆周. 现在把每个定向圆周张成一个圆盘，然后在每个交点处再把这些换成扭曲的条带，可得一个以扭结 K 为边界的紧致连通曲面 S. 要看出 S 可定向，须知每个圆周有来自 K 的定向，这决定了所张圆盘的序向，从而决定了 S 的序向. S 称为扭结 K 的赛费特曲面. 对于扭结 K 的赛费特曲面 S，若去掉其中两个不相交的开圆盘并接上一个环柄，所得曲面 S' 仍为 K 的赛费特曲面，所以扭结的赛费特曲面不是惟一的. 若在 S 的边界(即 K)处，在高维空间中再补上一个圆盘，则得一个可定向闭曲面，称

这种可定向闭曲面中的最小亏格为扭结 K 的亏格，记为 $g(K)$. 扭结的亏格具有可加性，若 K_1,K_2 为两个互不缠绕的扭结，K_1+K_2 是它们的结合，则有

$$g(K_1+K_2)=g(K_1)+g(K_2).$$

扭结的赛费特曲面对于确定扭结的亚历山大多项式以及扭结的双向性等均具有重要的作用.



扭结的亏格(deficiency of knot)　见“赛费特曲面”.

辫(braid)　辫群的一种几何表示. 它可作为研究扭结的辅助工具. 并且与数学的许多问题有联系. 设 M 为 m 维流形($m\geqslant 2$)，

$$\prod_{j=1}^{n} M$$

为 M 的 n 重拓扑乘积，设

$$E_nM=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\prod_{j=1}^{n} M\,|\,x_i\neq x_j(i\neq j)\right\}.$$

对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$x'=(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_n})\in E_nM$，若存在一个 n 次置换 σ，使得$\sigma(i)=j_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，则 x 和 x' 称为等价的，记为 $x\sim x'$. 若

$$B_nM=E_nM/\sim,$$

则 B_nM 的基本群 $\pi_1(B_nM)$ 称为 M 的完全辫群. 辫群的概念是阿廷(Artin, E.)于 1925 年定义的. 现在一般为称古典辫群，也就是取 M 为 2 维欧氏平面 R^2 的情形. 为了使得它更几何化，可把古典辫群的定义进一步解释如下：设 $x\in E_n\mathsf{R}^2$，在 $B_n\mathsf{R}^2$ 中的等价类为 $\bar{x}$，$p:E_n\mathsf{R}^2\to B_n\mathsf{R}^2$ 为投影，它是一个正则覆盖，取 $x^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in E_n\mathsf{R}^2$ 为基点，对于 $B_n\mathsf{R}^2$ 中的任意一个环道

$$\bar{f}:(I,\partial I)\to(B_n\mathsf{R}^2,\bar{x}^0),$$

有提升 $f:(I,0)\to(E_n\mathsf{R}^2,x^0)$，若

$$f(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t))\quad(t\in I),$$

则每个 $f_i(t)$ 定义了 $\mathsf{R}^2\times I$ 中的一条弧 a_i，这些弧 a_i ($1\leqslant i\leqslant n$)是互不相交的，这些 a_i 之并，称为 $\mathsf{R}^2\times I$ 中的一个几何辫，把起点 $x^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$与终点 $x^{0'}=(x_1^{0'},x_2^{0'},\cdots,x_n^{0'})$分别排在一条直线 L 上，在 $L\times I$ 上得到几何辫 a 的一个辫框或平面表示，如图 1. 对于 $\mathsf{R}^2\times I$ 中的两条 n 次辫子 z_1,z_2，若存在 $\mathsf{R}^2\times I$ 上的一个保基与自同胚 h，使得 $h(z_1)=z_2$，则称为等价的. 在此等价关系之下，把辫分成了一些等价类. 从图 1 可见，一个辫元所以不是平凡的(即 $L\times I$ 中 n 条平行于 I 的直线)，是因为即使在等价之下，也不能去掉在 $L\times I$ 中看来互相重叠的部分. 为此把这些部分抽象出来，即是几何辫研究中的基本概念. 对于图 1 的这些交叉点，不失一般性，在辫的等价之下，可以要求在每条水平线 $L\times\{t\}(t\in I)$的邻域之中，至多只有一个交叉点. 于是它们的基本类型不外乎如同图 2 的(A)与(B). 若记(A)情形的辫为 σ_j，则(B)情形可记为 σ_j^{-1}. 然后两个 n 次几何辫 z_1，z_2 在基点在 $B_n\mathsf{R}^2$ 中的投影相同的情况下可以相乘，乘积 z_1z_2 即是把 z_1 的终点与 z_2 的始点接起来，如图 2(C).

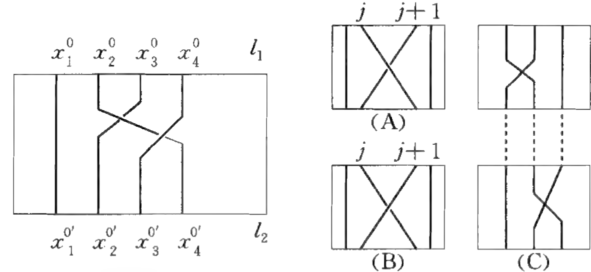


图 1　　　　图 2

若记一个 n 次平凡辫为 1，则 $\sigma_j\sigma_j^{-1}=1$(等价)，而这些基本辫之间有关系

$$\sigma_j^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_j\sigma_i=1\qquad(|i-j|\geqslant 2),$$

$$\sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_j\sigma_i\sigma_j=1\quad(|i-j|=1).$$

因为一条几何辫可用 σ_j 之积表示，所以判定两条辫的等价问题与判定两个 σ_i ($1\leqslant i\leqslant n$)的表示式在上述关系之下表示同一字的问题是一样的. 因此辫又与字的问题联系起来，成为组合群的一个分支. 辫的理论以及相应字问题的解决是由阿廷所首倡，并由阿廷以及布纳布路史(Bohnenblust, F.)所发展.

辫群(braid group)　见“辫”.

完全辫群(full braid group)　见“辫”.

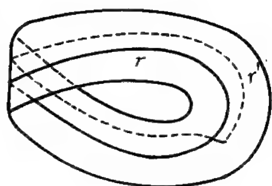
古典辫群(classical braid group)　见“辫”.

等价辫子(equivalent braid)　见“辫”.

高维扭结(high dimensional knot)　扭结概念在一般高维流形的推广. 若 M 为 n 维流形，则 S^{n-2} 在 M 的一个嵌入，当 $n>3$ 时称为一个高维扭结. 类似地，若 $S_1^{n-2}\cup\cdots\cup S_r^{n-2}$ 为无交并，则它在 M 的嵌入是一个高维环绕. 目前对于高维扭结(环绕)的研究，其内容不如 $M=S^3$ 情形丰富.

闭曲面上的相交形式(the intersection form on closed surfaces)　定义在每一个闭曲面上的双线性形式，它可以用来确定闭曲面的类型. 设 Σ 为闭曲

面，r 是 Σ 上的一条闭曲时可分两种情况：若 r 为保向曲线，即 r 在 Σ 上的一个正则邻域是平环 $N(r)$，则 $N(r)$ 中任意一条与 r 处于一般位置的闭曲线 r'，它与 r 的交点的模 2 个数为 0：$L(r,r')\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$；反之，若 r 为 Σ 上的一条逆向曲线（这只有在 Σ 为不可定向曲面时才有可能），则正则邻域 $N(r)$ 为默比乌斯带，因此存在闭曲线 $r'\subset N(r)$，使得 $L(r,r')\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$，如图所示. 将以上考虑稍加扩充，一方面假定 r,r' 为 Σ 上任意两条(简单)闭曲线，不要求在同一邻域内，另一方面，把这些闭曲线换为它们在 Σ 的 $\mathbf{Z}_2$ 系数 1 维同调群 $H_1(\Sigma;\mathbf{Z}_2)$ 中的同调类 $[r]$，$[r']$ 等，由于 $H_1(\Sigma;\mathbf{Z}_2)$ 是域 $\mathbf{Z}_2$ 上的向量空间，模 2 相交数在同调之下不变，所以可定义 $H_1(\Sigma;\mathbf{Z}_2)$ 上的一个双线性形式或相交形式



$$\mu:\ H_1(\Sigma;\mathbf{Z}_2)\times H_1(\Sigma;\mathbf{Z}_2)\to \mathbf{Z}_2,$$
$$\mu([r],[r'])\equiv L(r,r').$$

设向量空间 $H_1(\Sigma;\mathbf{Z}_2)$ 有基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，若 $\mu(x_i,y_i)=\mu_{ij}$，则相交形式 μ 对应一个矩阵 (μ_{ij}). 作为拓扑中的经典结果，有下列事实：两个闭曲面微分同胚，当且仅当它们有相同的相交形式；一切闭曲面在同胚的意义下，可以分为两种类型，其中 Ⅰ 型为不可定向闭曲面，它能分解为射影平面的连通和，Ⅱ 型为可定向闭曲面，它能分解为环面的连通和（当曲面 Σ 为球面时，其亏格为 0，理解为它是 0 个环面的连通和）. 综合闭曲面的以上特征，可列表如下：

类型 Ⅰ	不可定向	$\mu\cong\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}$	$\Sigma\cong \mathbf{R}P^2\#\cdots\#\mathbf{R}P^2$
类型 Ⅱ	可定向	$\mu\cong\begin{pmatrix}0&1&&&\\1&0&&&\\&&\ddots&&\\&&&0&1\\&&&1&0\end{pmatrix}$	$\Sigma\cong(S^1\times S^1)\#\cdots\#(S^1\times S^1)$

列出以上内容，主要是为了与 4 维流形的情形做比较.

对称双线性形式(the symmetric bilinear form) 关于格的一个重要概念. 有限生成自由交换群称为格，对于格 Λ_1,Λ_2 上的对称双线性形式 $\mu_i:\Lambda_i\times\Lambda_i\to\mathbf{Z}$，$i=1,2$，若存在格的同构 $\varphi:\Lambda_1\to\Lambda_2$，使得对于任意 $x,x'\in\Lambda_1$，$\mu_1(x,x')=\mu_2(\varphi(x),\varphi(x'))$，则 μ_1 与 μ_2 称为等价的. 对于格 Λ 上的一个对称双线性形式 μ，若

$$\mu(x,x)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\quad 对于一切\ x\in\Lambda,$$

则称为 Ⅱ 型的；否则，μ 称为 Ⅰ 型的. 这样的 μ 有两个基本不变量：一个是它的秩，即 μ 的维数；另一个为符号差或指数，即 μ 的秩 $-2q$，其中 q 是使得 μ 在其上为负定的 Λ 的子空间的最大维数. 关于符号差的一个基本结论是，每个 Ⅱ 型形式的符号差必为 8 的倍数. 双线性形式可以分为定(正定、负定)与不定两种. 对于不定幺模对称双线性形式的等价类，完全由它们的秩与符号差决定，其分类如下：

$$\text{Ⅰ 型}:\mu\cong\langle 1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle 1\rangle\oplus\langle -1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle -1\rangle.$$
$$\text{Ⅱ 型}:\mu\cong H\oplus\cdots\oplus H\oplus E_8\oplus\cdots\oplus E_8,$$

其中 $\langle 1\rangle$ 与 $\langle -1\rangle$ 表示秩 1 形式的两种可能，

$$H=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad E_8=\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0&0&0\\1&2&1&0&0&0&0&0\\0&1&2&1&0&0&0&0\\0&0&1&2&1&0&0&0\\0&0&0&1&2&1&1&0\\0&0&0&0&1&2&0&0\\0&0&0&0&1&0&2&1\\0&0&0&0&0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

对于定幺模对称双线性形式的分类，其情形完全不同于不定形式，它是困难的古典数学领域之一. 为说明这一点，设 $N(r)$ 为秩 r 的 Ⅱ 型不等价的正定幺模对称双线性形式的个数，则有下表：

r	8	16	24	32	40
$N(r)$	1	2	24	$\geqslant 10^7$	$\geqslant 10^{51}$

等价对称双线性形式(equivalent symmetric bilinear form) 见“对称双线性形式”.

4 维流形上的相交形式(the intersection form on 4-manifolds) 定义在紧致单连通 4 维流形上的双线性形式，用它可以确定 4 维流形的同伦型与分类性质. 设 M 为紧致单连通的 4 维拓扑流形，S,S' 为 M 中可定向闭曲面，它们处于一般位置，因为 $\pi_1(M)=1$，M 为可定向流形，交点数 $L(S,S')$ 随 S（或 S'）的改变定向而改变符号，所以决定一个对称双线性形式或相交形式

$$\mu:\ H_2(M;\mathbf{Z})\times H_2(M;\mathbf{Z})\to\mathbf{Z},$$
$$\mu([S],[S'])=L(S,S'),$$

或用上同调表示为

$$\mu:\ H^2(M;\mathbf{Z})\times H^2(M;\mathbf{Z})\to\mathbf{Z},$$
$$\mu(x,y)=x\cdot y[M].$$

由庞加莱对偶定理可知，μ 是幺模的. 即，若 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 为交换群 $H^2(M;\mathbf{Z})$ 的一个基，$\mu(x_i,x_j)=\mu_{ij}$，则行列式 $\det(\mu_{ij})=\pm 1$. 一个经典的结果是，可由 μ 决定 M 的同伦型，即，怀特海定理：两个紧致单连通的 4 维流形是同伦等价的，当且仅当它们的相交形

式是等价的.

怀特海定理(Whitehead theorem)　见“4维流形上的相交形式”.

拓扑4维流形的弗里德曼定理(Freedman theorem on topological 4-manifolds)　阐明4维流形的拓扑分类与相交形式之间关系的一个定理. 根据关于对称双线性形式的分类与怀特海定理,自然要产生这样的问题:哪一个双线性形式能够作为紧致单连通4维流形的相交形式而出现? 这是4维流形的存在性问题. 此外,还有一个惟一性问题. 即,有多少个不等价的流形有同一个相交形式? 这里的等价可做两种理解:对于流形为拓扑流形,它指的是同胚;对于流形为可微流形,它指的是微分同胚. 其中惟一性问题,对于双线性形式为0秩平凡形式,这就是4维庞加莱猜想. 这是近代拓扑学中一个深刻的结果,因为对于拓扑流形的情形,美国数学家弗里德曼(Freedman,M.(H.))于1982年完全回答了上述两个问题. 对于一个拓扑流形,若它的第一、第二施梯福-惠特尼类为0,则称为旋流形. 如同在曲面的情形,紧致单连通4维流形M分为两种类型:若M是非旋流形且其相交形式为Ⅰ型的,则称M为Ⅰ型的;若M为旋流形且其相交形式为Ⅱ型的,则称M为Ⅱ型的. 记μ_R^{Top}为R型紧致单连通4维拓扑流形的同胚类之集,其中$R=$Ⅰ或Ⅱ,$\mathscr{P}_R$为幺模对称双线性形式的等价类之集,设$i_R:\mu_R^{\mathrm{Top}}\to\mathscr{P}_R$为一个映射,它映流形$M$为它的相交形式,于是有下列弗里德曼定理:映射$i_{\mathrm{II}}:\mu_{\mathrm{II}}^{\mathrm{Top}}\to\mathscr{P}_{\mathrm{II}}$为双射,映射$i_{\mathrm{I}}:\mu_{\mathrm{I}}^{\mathrm{Top}}\to\mathscr{P}_{\mathrm{I}}$为二对一满射. 因此,每一个幺模形式是紧致单连通拓扑4维流形的相交形式. 对于Ⅱ型的情形,这个4维流形是惟一的;对于Ⅰ型的情形,恰有两个不同胚的4维流形有相同的相交形式,这两种可能的不同在于,其一有非0的对它实行单纯剖分的克勃-齐贝曼障碍$KS(M)\neq 0$. 弗里德曼因此项工作而获1986年菲尔兹奖.

4维可微流形的唐纳森定理(Donaldson theorem on differentiable 4-manifolds)　关于可微4维流形相交性质的一个定理. 考察可微流形的情形,于此一个重要的事实是,与拓扑流形不同,并非每一个双线性形式都是可微流形的相交形式. 即存在著名的罗赫林定理:若M为紧致单连通可微Ⅱ型的4维流形,则M的相交形式的符号差是16的倍数,即

$$\mathrm{Signature}(M)\equiv 0 \bmod 16.$$

在“对称双线性形式”条目中已经知道,每一个Ⅱ型形式的符号差必为8的倍数,因此对于Ⅱ型幺模对称双线性形式μ,可以引入罗赫林不变量

$$\rho(\mu)\equiv\frac{1}{8}\mathrm{Signature}(\mu) \bmod 2.$$

罗赫林定理是说,非0罗赫林不变量的形式不是可微紧致单连通Ⅱ型4维流形的相交形式. 对于可微流形,更重要的是下列唐纳森定理:若M为紧致单连通光滑4维流形,其相交形式μ是正定的,则μ必定等价于对角形式,即$\mu\cong\langle 1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle 1\rangle$. 根据这个定理,对于光滑流形的相交形式,数目庞大的正定对称双线性形式可以不予考虑. 结合弗里德曼定理与不定对称双线性形式的分类,可得紧致单连通光滑4维流形同胚类与其相交形式之间关系的一个表,其中所列的那些4维流形M是所熟悉的同胚类的代表,它类似于前面关于闭曲面情形所列的图表.

型Ⅰ	非旋 ($w_2\neq 0$)	$\mu\cong\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}$	$M\cong CP^2\#\cdots\# CP^2\#\overline{CP}^2\#\cdots\#\overline{CP}^2$
型Ⅱ	旋 ($w_2=0$)	$\mu\cong\begin{pmatrix}\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}&&&&\\&\ddots&&&\\&&\begin{matrix}0&1\\1&0\end{matrix}&&\\&&&E_8&\\&&&&\ddots\\&&&&&E_8\end{pmatrix}$	$M\cong(S^2\times S^2)\#\cdots\#(S^2\times S^2)\#E_8\#\cdots\#E_8$

在表的第二行中,由唐纳森定理,其中至少有一个$S^2\times S^2$因子,由罗赫林定理,E_8的个数为偶数,并且即使如此,还是不知道$S^2\times S^2$与E_8的连通和在两者原来的拓扑之下,是否能光滑化? 此处E_8是例外李群的卡当矩阵,并且可以知道库默尔曲面

$$M^4=\{[z_0,z_1,z_2,z_3]\in \mathbf{C}P^3 \mid z_0^4+z_1^4+z_2^4+z_3^4=0\}$$

的相交形式为

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\oplus E_8\oplus E_8.$$

唐纳森(Donaldson,S.)因他的上述工作而获得1986年菲尔兹奖.

罗赫林定理(Rohlin theorem)　见“4维可微流形的唐纳森定理”.

罗赫林不变量(Rohlin's invariant)　见“4维可微流形的唐纳森定理”.

怪$\mathbf{R}^4$(Exotic $\mathbf{R}^4$)　4维欧氏空间的一种怪现象. 同胚于4维欧氏空间$\mathbf{R}^4$,但是不微分同胚于$\mathbf{R}^4$的4维可微流形. 这是一切$\mathbf{R}^n$中惟一的特有现象,而且具有一些异于普通直观想象的性质. 至今紧致单连通4维可微流形的可微结构的惟一性虽然仍是一个还未解决的问题,但是综合已有的结果,却可得到一个令人惊讶的结论. 这个事实首先由弗里德曼(Freedman,M.(H.))与克勃(Kirby,M.)观察到,以后利用库因(Quinn,F)的结果,便获得更为简捷的证明. 同时有下列定理:

1. 存在一个怪 $\mathbf{R}^4$，即一个同胚 $\mathbf{R}^4$ 但不微分同胚于 $\mathbf{R}^4$ 的 4 维可微流形. 因为复射影平面 $\mathbf{C}P^2$ 由复平面 $\mathbf{C}^2$ 在无穷远处添加一条复射影直线而得到的，所以，若 $S^2=\mathbf{C}P^1\subset\mathbf{C}P^2$ 为 $\mathbf{C}P^2$ 中的任意复射影直线，则 $\mathbf{C}P^2-S^2=\mathbf{R}^4$. 若 $h:\mathbf{C}P^2\to\mathbf{C}P^2$ 为同胚，则

$$h(\mathbf{C}P^2-S^2)=\mathbf{C}P^2-h(S^2)=h(\mathbf{R}^4)$$

同胚于 $\mathbf{R}^4$，并且作为 $\mathbf{C}P^2$ 的开子集而继承有一个微分结构. 若 M 为 4 维流形，在其中某点 P 的外部有可微结构，则称 P 为 M 的奇点. 对于奇点 P，若有同胚 $h:\mathbf{C}P^2\to\mathbf{C}P^2$ 与 P 在 M 中的邻域 U，使得 $U-\{P\}$ 微分同胚于 $\widetilde{U}-h(S^2)$，其中 $\widetilde{U}$ 为 $h(S^2)$ 中 $\mathbf{C}P^2$ 中的一个邻域，则称为可解的.

2. 库因定理：若 M 为紧致拓扑 4 维流形，其克勃-齐贝曼不变量 $\mathrm{KS}(M)$ 为 0，则 M 有一个光滑结构，定义在 M 的有限个可解奇点的外部.

设 M 为紧致 4 维流形，$\mathrm{KS}(M)=0$，若 M 的相交形式正定而非对角形式，则由唐纳森定理，M 不能被光滑化(例如 $E_8\#\mathbf{C}P^2$ 即是这样一个流形). 但由库因定理，M 在它的有限个可解奇点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 以外有光滑结构，把 M 的 P_j 附近 $U'_j\equiv U_j-\{P_j\}$ 可微地换为 $\mathbf{C}P^2$ 中的 S^2 附近 $\widetilde{U}'_j\equiv\widetilde{U}_j-h_j(S^2)$，整个流形成为可微的. 因此称光滑流形

$$M-\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$$

有欧氏终端，如图 1.

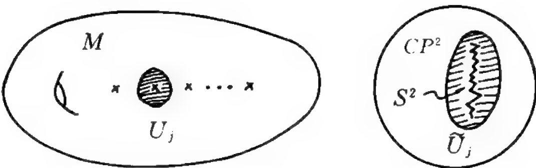


图 1

由唐纳森定理得出，与诸欧氏终端相应的

$$\widetilde{R}_j^4\equiv\mathbf{C}P^2-h_j(S^2)$$

中至少有一个不微分同胚于 $\mathbf{R}^4$. 直观地说，若不然，则做一些可微剜补，可得新的"可微"流形与原 M 有相同的相交形式，这与唐纳森定理矛盾. 事实上，只须取 $M=E_8\#\mathbf{C}P^2$，它有一个可解奇点，即可作为库因定理的讨论对象.

3. 戈卜夫定理：存在一个外来 $\mathbf{R}^4$，记为 $\mathbf{R}^4_\Gamma$，它有下列性质：

1) $\mathbf{R}^4_\Gamma$ 有一紧致子集不能被其中的一个光滑 S^3 所包围.

2) $\mathbf{R}^4_\Gamma$ 没有光滑反向自同胚.

3) $\mathbf{R}^4_\Gamma$ 不能保向地光滑嵌入于 $\mathbf{C}P^2$ 或 $\mathbf{C}P^2\#\cdots\#\mathbf{C}P^2$ 中.

对于两个开流形 M_1,M_2，通过一条线段的开正则邻域也可以把它们联起来，如图 2，只要小心地操作，可以保证在 M_1,M_2 的原有结构下新流形的可微性，并把新流形记为 $M_1 \natural M_2$，于是对于 $\mathbf{R}^4_\Gamma$ 可得

$$\mathbf{R}^4_S=\mathbf{R}^4_\Gamma\natural(-\mathbf{R}^4_\Gamma).$$



图 2

从而，它也是外来 $\mathbf{R}^4$，但不微分同胚于 $\mathbf{R}^4_\Gamma$. 据此，对于任意一个由两个字母构成的无限字 $W=\cdots\Gamma ST\Gamma S\cdots$，相应地可作出 4 维可微流形

$$\mathbf{R}^4_W=\hat{\mathbf{R}}^4_\Gamma\natural\hat{\mathbf{R}}^4_S\natural\hat{\mathbf{R}}^4_\Gamma\natural\hat{\mathbf{R}}^4_S\cdots,$$

其中 $\hat{\mathbf{R}}^4_\Gamma$ 为由 $\mathbf{R}^4_E$ 添加两个平凡终端所得到，$E=\Gamma,S$. $\mathbf{R}^4_W$ 同胚于 $\mathbf{R}^4$，由 $\mathbf{R}^4_\Gamma$ 作为可微开子集在 $\mathbf{R}^4_W$ 中，从而 $\mathbf{R}^4_W$ 也是外来 $\mathbf{R}^4$. 所以，由此方式可以构造出多少个不同的外来的 $\mathbf{R}^4$，这是一个有趣的问题.

4 维流形的奇点(singular point of 4-manifolds) 见"怪 $\mathbf{R}^4$".

可解奇点(resolvable singular point) 见"怪 $\mathbf{R}^4$".

库因定理(Quinn theorem) 见"怪 $\mathbf{R}^4$".

戈卜夫定理(Gompf theorem) 见"怪 $\mathbf{R}^4$".

若尔当曲线定理(Jordan curve theorem) 关于平面上简单闭曲线性质的一个经典结果. 在欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 上，任意一条简单(即自身不相交)闭曲线 J 把平面分成两部分，使得在同一部分的任意两点，可用一条不与 J 相交的弧相连；在不同部分的两点若要相连，则连结的弧必须与 J 相交. 这就是著名的若尔当曲线定理. 它是属于数学中那种看起来容易，证起来难的定理.

若尔当曲线定理由若尔当(Jordan, C.)首次提出并证明. 若尔当的证明既长且繁，当发现他的推理有缺陷时，补证起来还相当费事，直到 1905 年，维布伦(Veblen, O.)才第一次给出了一个正确的证明. 若尔当曲线定理证起来之所以困难，究其原因还是对于什么是简单闭曲线这个概念不明确. 用现代的语言，称一个与圆周 S^1 同胚的拓扑空间为一条若尔当曲线. 于是若尔当曲线定理现在可正式地表达为：平面 $\mathbf{R}^2$ 中的每一条若尔当曲线 J 把 $\mathbf{R}^2$ 分为两个以 J 为公共边界的区域，其中区域指的是连通开子集.

若尔当曲线定理有很多推广形式，首先容易使人们相信，若把欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 换成球面 S^2，则定理同样成立(但是对于环面或其他闭曲面不成立). 至于一般情形，设 S^r 为 r 维球面，利用代数拓扑的方法，可以证明下列若尔当-布劳威尔分离定理：S^n 中每一个同胚于 S^{n-1} 的子集 S_{n-1} 分 S^n 为两个以 S_{n-1} 为公共边界的开连通分支. 当 $n\geqslant 2$ 时，把上面的 S^n 改为

R^n，则定理仍然成立. 若尔当曲线定理当把它作为一个拓扑定理来研究时，有很多副产品，其一是下面的松夫里斯定理：对于 R^2 上的任意若尔当曲线 J，存在一个 R^2 到自身的同胚 $h:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^2$，使得 $h(J)=S^1$；其二是区域不变性定理.

若尔当-布劳威尔分离定理(Jordan-Brouwer separation theorem)　见"若尔当曲线定理".

松夫里斯定理(Schönflines theorem)　见"若尔当曲线定理".

区域不变性定理(invariance theorem of domain)　关于欧氏空间中区域的拓扑性质的一个定理. 与若尔当曲线定理紧密相关的，有所谓布劳威尔区域不变性定理，它在平面区域的情形可以表述如下：设 U 是欧氏平面 R^2 中的开集，$h:U\to\mathrm{R}^2$ 为连续单射，则 h 为嵌入，并且 $h(U)$ 为 R^2 中的开集. 这是 2 维情形的定理，还可以把它推广为一般 n 维情形的定理，并且还有一些等价的叙述形式，其中之一是：若 $A\subset\mathrm{R}^n$ 为开集，A 同胚于 R^n 中的子集 B，则 B 是开集. 区域不变性定理对于一般流形也成立，但是对于可分度量空间不成立. 由区域不变性定理可知，维数不同的欧氏空间不能同胚. 所以有所谓维数不变性定理. 这些定理都是关于流形拓扑性质的基本定理.

维数不变性定理(invariance theorem of dimension)　见"区域不变性定理".

撰　稿　干丹岩　吴振德　何伯和
审　阅　孙以丰　吴振德

微分拓扑学

微分拓扑学(differential topology)　简称微分拓扑. 拓扑学的一个重要的、十分活跃的分支学科. 它以研究微分流形在微分同胚下的不变性质为特征. 一般地，微分拓扑学是研究微分流形及微分流形之间的可微映射的性质的学科. 例如，它包含有下述一些典型的问题：

1. 两个微分流形在什么条件下是微分同胚的？

2. 若两个微分流形是同胚的，则它们一定微分同胚吗？

3. 一个微分流形能嵌入或浸入到另一个微分流形中吗？

4. 怎样的微分流形是另一个带边流形的边界？

5. 一个微分流形是否可平行化.

19 世纪末，庞加莱(Poincaré，(J.-)H.)在代数拓扑学方面做了一系列奠基工作的同时，对 3 维流形的拓扑进行了深入的分析，提出了著名的庞加莱猜想：每个单连通的紧致、无边的 3 维流形必同胚于 3 维球面 S^3. 这是微分拓扑学中非常重要的、迄今尚未完全解决的问题.

20 世纪以来，外尔(Weyl，(C. H.)H.)、惠特尼(Whitney，H.)、米尔诺(Milnor，J. W.)、托姆(Thom，R.)、斯梅尔(Smale，S.)、吴文俊等学者在微分拓扑学的许多方面的工作，使得这门学科得以迅速发展，并且与其他拓扑学分支，尤其是代数拓扑学建立了深刻而有力的联系. 同时，微分拓扑学理论和方法上的成果推动着诸如近代微分方程、微分几何、大范围分析等数学的各个领域的发展，显示出它越来越重要的作用.

卡(chart)　亦称局部坐标系. 微分拓扑的基本概念. 若 M 是 n 维拓扑流形，$U\subseteq M$ 是 M 的开集，

$$\varphi: U\to U'\subseteq\mathrm{R}^n$$

是 U 到 R^n 的开集 U' 上的同胚映射，则 (U,φ) 称为 M 上的一个卡. 此时，对于 $p\in U$，(U,φ) 称为含点 p 的卡，$\varphi(p)=(x_1(p),x_2(p),\cdots,x_n(p))\in U'\subseteq\mathrm{R}^n$ 称为 p 关于卡 (U,φ) 的局部坐标. M 上卡的族

$$\Phi=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha\in\Lambda\},$$

若满足 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha=M$，则称为 M 的图册. 因此 n 维拓扑流形 M 总有它的图册.

局部坐标系(local coordinate system)　即"卡".

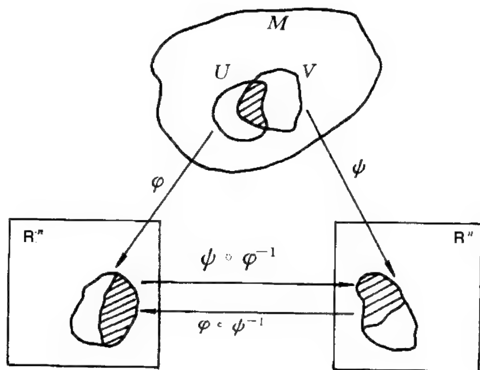
局部坐标(local coordinate)　见"卡".

图册(atlas)　见"卡".

微分流形(differentiable manifold)　微分拓扑学中的基本概念和主要研究对象. 它是具有适当微分构造的拓扑流形. 若 M 是 n 维拓扑流形，(U,φ)，(V,ψ) 是 M 的两个卡，并且 $U\cap V\neq\varnothing$，则 R^n 中开集之间的同胚映射

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V),$$
$$\varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V)$$

称为这两个卡之间的卡变换或坐标变换(见图).



设 M 的图册 $\Phi=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha\in\Lambda\}$，若对于 $(U_\alpha,\varphi_\alpha),(U_\beta,\varphi_\beta)\in\Phi$，$U_\alpha\cap U_\beta=\varnothing$，

或卡变换 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1},\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$ 都是 C^r 映射，则称 M 的图册 Φ 是 C^r 的(r 为正整数或∞)．Φ 是 C^∞ 的也称为光滑图册．M 的一个卡(U,φ)，若对于 $\alpha\in\Lambda$，$U\cap U_\alpha=\varnothing$或卡变换 $\varphi_\alpha\circ\varphi^{-1},\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 是 C^r 映射，则称为与 M 的 C^r 图册 Φ 是相容的．M 的 C^r 图册 Φ，若包含所有与它相容的卡，则称为极大图册．若在 n 维拓扑流形 M 上给定一个极大的 C^r 图册 Φ，则称(M,Φ)是 n 维 C^r 微分流形，常简记为 M，其中 Φ 称为 M 上的 C^r 微分构造．C^∞ 微分流形称为光滑流形，简称微分流形．

通常，在 n 维拓扑流形 M 上取定一个 C^r 图册 Φ(并非一定最大)，M 上所有与 Φ 相容的卡组成 M 上一个包含 Φ 的最大 C^r 图册，它是 M 上的 C^r 微分构造．同一拓扑流形上可以有不同的微分构造，使所得到的两个微分流形不能微分同胚．凯伐勒(Kervaire,M.)于 1960 年首次给出一个拓扑流形，在它上面不可能有微分构造，因而不能成为微分流形．

卡变换(chart transformation)　见“微分流形”．

坐标变换(coordinate transformation)　见“微分流形”．

光滑图册(smooth atlas)　见“微分流形”．

极大图册(maximal atlas)　见“微分流形”．

微分构造(differentiable structure)　见“微分流形”．

光滑流形(smooth manifold)　见“微分流形”．

可微映射(differentiable map)　一类连续映射，是微分拓扑学的基本概念和主要研究对象．它是微分流形之间在每点附近的局部表示．设 M,N 分别是 m 维，n 维微分流形，$f:M\to N$ 是连续映射，对于 $p\in M$，(U,φ)，(V,ψ)分别是 M 含 p 的卡及 N 含 $f(p)$的卡，$f(U)\subseteq V$，则映射

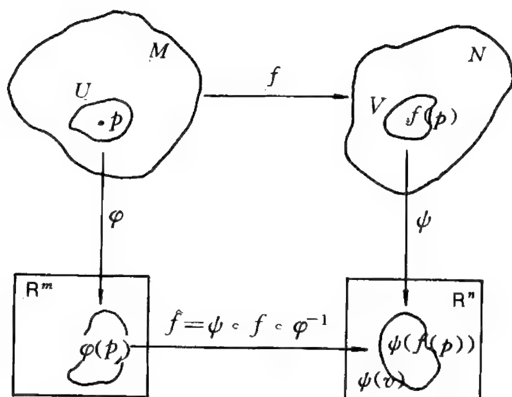
$$\hat{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\ \varphi(U)\to\psi(V)$$

称为 f 关于卡(U,φ)，(V,ψ)的局部表示，它是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集 $\varphi(U)$到 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 $\psi(V)$的连续映射．连续映射 $f:M\to N$，若对于 $p\in M$，$f(p)\in N$，存在卡(U,φ)，卡(V,ψ)与 $f(U)\subseteq V$，使得 f 的局部表示 $\hat{f}$ 是 C^r 可微的(见图)，则称 f 在 $p\in M$ 处是 C^r 可微的．连续映射 $f:M\to N$，若 f 在每点 $p\in M$ 处都是 C^r 可微的，则称 f 为 C^r 可微映射．此时，简称 f 为 C^r 映射．M 到 N 的 C^∞映射称为 M 到 N 的光滑映射．

映射的局部表示(local representation of map)　见“可微映射”．

光滑映射(smooth map)　见“可微映射”．

微分同胚(diffeomorphism)　微分流形之间的一类同胚映射．它与它的逆映射都是可微的．设 M，N 均为微分流形，对于映射 $f:M\to N$，若 f 是同胚



映射，并且 f,f^{-1}都是 C^r 可微映射，则称 f 为 M 到 N 上的 C^r 微分同胚．C^∞微分同胚 $f:M\to N$ 简称 M 到 N 上的微分同胚．对于微分流形 M,N，若存在(C^r)微分同胚 $f:M\to N$，则称 M 与 N 是(C^r)微分同胚的微分流形，记为 $M\cong N$．“$\cong$”是微分拓扑学中的基本等价关系．微分拓扑的基本任务是研究微分流形在微分同胚下保持不变的性质，以及寻求在怎样的条件下两个微分流形是微分同胚的．米尔诺(Milnor,J. W.)于 1956 年证明，在 S^7 上至少存在两个不微分同胚的微分构造．后来证实，S^7 上恰好有 15 个这样的不同的微分构造．

带边流形(manifold with boundary)　一类特殊的拓扑流形．它具有可数基和 T_2 分离性，并且局部同胚于欧氏空间中半空间的拓扑空间．$\mathbb{R}^n$ 的子空间

$$\mathbb{R}^n_+=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,x_n\geqslant 0\}$$

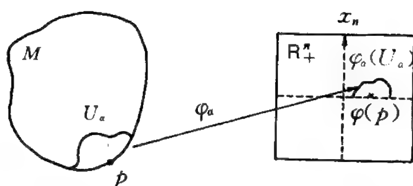
称为 $\mathbb{R}^n$ 中的半空间．设 M 是具有可数基的豪斯多夫空间，若它局部同胚于 $\mathbb{R}^n_+$，换言之，对于任意 $p\in M$，存在 p 在 M 中的开邻域 U 及 U 到 $\mathbb{R}^n_+$ 的某开集 U' 上的同胚映射 $\varphi:U\to U'$，并且存在着变换到$(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},0)$的点，则称 M 为 n 维带边拓扑流形．此时，仍称(U,φ)为 M 的卡，M 的卡的族 $\Phi=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\,|\,\alpha\in\Lambda\}$，若 $M=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha$，则称 Φ 为 M 的图册．类似地，有 C^r 带边流形、光滑带边流形等相应的概念．

光滑带边流形(smooth manifold with boundary)　见“带边流形”．

流形的边界(boundary of manifold)　带边流形中全体边界点的集合．设 M 是 n 维带边流形，$\Phi=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\,|\,\alpha\in\Lambda\}$是 M 的图册．对于 $p\in M$，若存在卡$(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\Phi$，使得 $p\in U_\alpha$，$\varphi(p)\in\partial\mathbb{R}^n_+$，其中

$$\partial\mathbb{R}^n_+=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,x_n=0\},$$

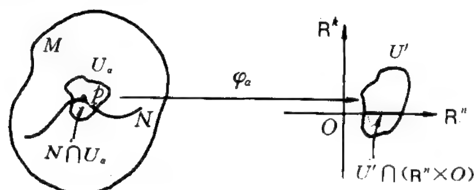
则称 p 为 M 的边界点(见图)．p 是 M 的边界点与卡$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$的选取无关．$M$ 的全体边界点的集合称为 M 的边界，它是$(n-1)$维的(无边)流形，记为 ∂M，$p\in M-\partial M$ 称为 M 的内点，$M-\partial M$ 是 n 维(无边)流形．



子流形(submanifold) 流形的子空间按照自然方式做成的流形. 设 M 是$(n+k)$维流形,$N\subseteq M$,若对于任意 $p\in N$,存在 M 中含 p 的卡$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$,

$$\varphi_\alpha:\ U_\alpha\to U'\subseteq\mathsf{R}^{n+k}=\mathsf{R}^n\times\mathsf{R}^k,$$

使得 $\varphi_\alpha(N\cap U_\alpha)=U'\cap(\mathsf{R}^n\times O)$(见图),则称 N 为 M 的 n 维子流形,$(N\cap U_\alpha,\varphi_\alpha|N\cap U_\alpha)$称为子流形 N 的卡,它们组成 N 的图册. 当 M 是 C^r 微分流形时,N 亦然. 若 N 是$(n+k)$维流形 M 的 n 维子流形,则称 N 在 M 内的余维是 k. 惠特尼(Whitney,H.)于 1944 年证明,n 维微分流形总可微分同胚于 R^{2n}的某个子流形.



可微映射的秩(rank of differentiable map) 对可微映射的一种刻画. 微分流形之间的可微映射在一点处的雅可比矩阵的秩. 若 M,N 分别是 m 维,n 维微分流形,$f:M\to N$ 是可微映射,f 在 $p\in M$ 处关于卡(U,φ),(V,ψ)的局部表示为

$$\hat f=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\ \varphi(U)\to\psi(V),$$

对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\varphi(U)$,记

$$\hat f(x)=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\psi(V),$$

则 f 在 p 处关于卡(U,φ),(V,ψ)的雅可比矩阵为

$$J_{\hat f}(p)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_m}\\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_m}\end{pmatrix}_{(p)},$$

雅可比矩阵 $J_{\hat f}(p)$的秩称为可微映射 f 在 p 处的秩,它与卡的选取无关,记为 $\mathrm{rank}_p f$.

流形的浸入(immersion of manifold) 一类特殊的可微映射. 它在流形的每一点的切映射是单射. 设 M,N 分别是 m 维,n 维微分流形,$f:M\to N$ 是可微映射,若 f 在 $p\in M$ 处的秩

$$\mathrm{rank}_p f=m=\dim M,$$

则称 f 在 p 处是浸入映射. 此时,$m\leqslant n$. 若 f 在每个点 $p\in M$ 处都是浸入映射,则称 f 是流形 M 到 N 的浸入. 若 $T_pM,T_{f(p)}N$ 分别是 M,N 在 $p,f(p)$处的切空间,则 f 是浸入的一个等价说法是:对于任意 $p\in M$,f 的切映射 $T_pf:M_p\to N_{f(p)}$是单射. 局部来说,f 在 p 处是浸入映射,当且仅当 f 在 p 处关于某对卡(U,φ),(V,ψ)的局部表示

$$\hat f=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\ \varphi(U)\to\psi(V)$$

满足 $\hat f(x_1,x_2,\cdots,x_m)=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)$. 若 $f:M\to N$ 是浸入,并且 f 是单射,则 $f(M)\subseteq N$ 称为 N 的浸入子流形. 注意,虽然子流形必是浸入子流形,但一般浸入子流形不必是子流形.

浸入映射(immersion map) 见“流形的浸入”.

浸入子流形(immersion submanifold) 见“流形的浸入”.

惠特尼浸入定理(Whitney immersion theorem) 关于流形能浸入到欧氏空间的重要定理. 惠特尼(Whitney,H.)于 1944 年证明:对于任意 n 维微分流形 M,存在浸入映射 $f:M\to\mathsf{R}^{2n}$,即 M 可浸入到 R^{2n}中;当 $n\geqslant 2$ 时,M 还能浸入到 R^{2n-1}中.

流形的淹没(submersion of manifold) 一类特殊的可微映射. 它在流形的各点的切映射是满射. 设 M,N 分别是 m 维,n 维微分流形,$f:M\to N$ 是可微映射,若 f 在 $p\in M$ 处的秩 $\mathrm{rank}_p f=n=\dim N$,则称 f 在 p 处是淹没映射. 此时自然 $n\leqslant m$. 若 f 在每个点 $p\in M$ 处都是淹没映射,则称 f 是流形 M 到 N 的淹没. f 是淹没的一个等价说法是:对于任意 $p\in M$,f 的切映射 $T_pf:T_pM\to T_{f(p)}N$ 是满射,其中 $T_p(M)$,$T_{f(p)}N$ 分别是流形 M,N 在 $p,f(p)$处的切空间. 局部来说,f 在 p 处是淹没映射,当且仅当 f 在 p 处关于某对卡(U,φ),(V,ψ)的局部表示

$$\hat f=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\ \varphi(U)\to\psi(V)$$

满足 $\hat f(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots,x_m)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 关于流形的淹没,一个简单而重要的事实是,设 $f:M\to N$ 是淹没映射,A 是 N 的子流形,则当 $f^{-1}(A)\neq\varnothing$时,$f^{-1}(A)$是 M 的子流形.

淹没映射(submersion map) 见“流形的淹没”.

映射的正则点(regular point of map) 微分流形上一类特殊的点. 指微分流形上的那种点,可微映射在该点处是淹没映射. 设 $f:M\to N$ 是微分流形 M 到 N 的可微映射. 若 f 在 $p\in M$ 处是淹没映射,即 $\mathrm{ran}_p f=\dim N$,则称 p 是 f 的正则点;相应地,对于 $q\in N$,若$f^{-1}(q)=\varnothing$或对于任意 $p\in f^{-1}(q)$,p 是 f 的正则点,则称 q 为 f 的正则值. 若 $p\in M$ 不是 f 的正则点,则称为 f 的临界点. 此时 $f(p)\in N$ 称为 f 的临界值. 于是,若 $f:M\to N$ 是可微映射,$q\in f(M)$ 是 f 的正则值,则 $f^{-1}(q)$是 M 的子流形. 一般地,若 $A\subseteq N$ 是 N 中 f 的正则值组成的子流形,

$f^{-1}(A)\neq\varnothing$,则 $f^{-1}(A)$是 M 的子流形. 关于临界值,一个重要而有广泛应用的事实是著名的萨德(Sard,A.)定理. 在流形上的莫尔斯(Morse,H. M.)函数的研究中,临界点性质得到深入的讨论.

正则值(regular value) 见"映射的正则点".

映射的临界点(critical point of map) 见"映射的正则点".

临界值(critical value) 见"映射的正则点".

流形的嵌入(embedding of manifold) 一类特殊的可微映射. 它把一个流形微分同胚地映射到另一个流形的子流形上. 设 M,N 是微分流形,对于可微映射 $f:M\to N$,若 $f(M)\subseteq N$ 是 N 的可微子流形,$f:M\to f(M)$是微分同胚,则称 f 为嵌入映射. 此时 M 称为由 f 嵌入到 N 中. f 是嵌入映射,当且仅当 f 是浸入映射,并且 $f:M\to f(M)$是同胚映射. 于是,若 $f:M\to N$ 是单的浸入映射,并且对于 N 的任意紧致子集 K,$f^{-1}(K)$是 M 的紧致子集(例如 M 是紧致空间情形),则 f 是 M 到 N 的嵌入. 若嵌入映射 f 是 C^r 映射,则称 f 为 C^r 嵌入.

嵌入映射(embedding map) 见"流形的嵌入".

C^r 嵌入(C^r embedding) 见"流形的嵌入".

惠特尼嵌入定理(Whitney embedding theorem) 关于流形能嵌入到欧氏空间中的重要定理. 惠特尼(Whitney,H.)于 1944 年证明:对于任意 n 维 C^r 流形 M,存在 C^r 嵌入映射 $f:M\to\mathrm{R}^{2n+1}$,因此 M 微分同胚于 R^{2n+1}的某个子流形. 进而,这一结果还可改善为:M 可以 C^r 嵌入到 R^{2n}中.

流形的乘积(product of manifolds) 微分拓扑学的一个重要概念. 对两个微分流形的拓扑乘积空间上给出适当的微分构造使之成为微分流形的一般方法. 设 M,N 分别是 m 维,n 维微分流形,

$$\Phi=\{(U_i,\varphi_i)\mid i\in\Lambda\},\Psi=\{(V_j,\psi_j)\mid j\in\Gamma\}$$

分别是 M,N 的(光滑)图册,按下述自然方式,在拓扑积 $M\times N$ 上决定一个(光滑)图册:对于 $i\in\Lambda,j\in\Gamma$,$(U_i\times V_j,\varphi_i\times\psi_j)$是 $M\times N$ 上的一个卡,其中

$$\varphi_i\times\psi_j:\ U_i\times V_j\to\varphi_i(U_i)\times\psi_j(V_j)\subseteq\mathrm{R}^m\times\mathrm{R}^n=\mathrm{R}^{m+n}$$

定义为,对于$(p,q)\in U_i\times V_j$,

$$(\varphi_i\times\psi_j)(p,q)=(\varphi_i(p),\psi_j(q)).$$

若 $\Phi\times\Psi=\{(U_i\times V_j,\varphi_i\times\psi_j)\mid i\in\Lambda,j\in\Gamma\}$,则 $\Phi\times\Psi$ 是 $M\times N$ 上的(光滑)图册. 在 $M\times N$ 上由 $\Phi\times\Psi$ 决定的微分构造使得 $M\times N$ 成为一个$(m+n)$维微分流形,称为流形 M 与流形 N 的乘积流形. 若 M 是(无边)微分流形,N 是带边微分流形,则乘积 $M\times N$ 是带边流形,它的边界 $\partial(M\times N)=M\times\partial N$.

射影空间的微分结构(differential structure of projective space) 微分流形的重要例子. 它在拓扑学各分支及其相关学科中是常见的. 若在$\mathrm{R}^{n+1}-\{0\}$中规定等价关系"~":对于 $x,y\in\mathrm{R}^{n+1}-\{0\}$,

$$x\sim y \text{ 当且仅当存在 } \lambda\in\mathrm{R},x=\lambda y,$$

则商拓扑空间 $\mathrm{R}^{n+1}-\{0\}/\sim$称为 n 维(实)射影空间,记为$\mathrm{R}P^n$. 若 $\pi:\mathrm{R}^{n+1}-\{0\}\to\mathrm{R}P^n$ 为自然投影,即对于 $x\in\mathrm{R}^{n+1}-\{0\}$,$\pi(x)=[x]$是 x 所属的等价类,则按下述方式 $\mathrm{R}P^n$ 是 n 维微分流形,对于 $i=1,2,\cdots,n+1$,记

$$U_i=\{[x]\in\mathrm{R}P^n\mid x=(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})\in\mathrm{R}^{n+1}-\{0\},x_i\neq 0\}$$

与$\varphi_i:U_i\to\mathrm{R}^n$,对于$[x]\in U_i$,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$,

$$\varphi_i([x])=(x_1/x_i,\cdots,x_{i-1}/x_i,x_{i+1}/x_i,\cdots,x_{n+1}/x_i),$$

从而 $\Phi=\{(U_i,\varphi_i)\mid i=1,2,\cdots,n+1\}$是$\mathrm{R}P^n$ 的一个(光滑)图册,由此决定 $\mathrm{R}P^n$ 上的(光滑)微分构造,从而使得 $\mathrm{R}P^n$ 是 n 维微分流形. 特别地,$\mathrm{R}P^1\cong S^1$,$\mathrm{R}P^2$ 为 2 维射影平面. 类似地,可定义复射影空间 $\mathrm{C}P^n$,它是 $2n$ 维(实)微分流形.

史梯福流形的微分结构(differential structure of Stiefel manifold) 微分流形的常见例子之一. 若 $\mu(m,n)$是全体 $m\times n$(实)矩阵的集合,将 $\mu(m,n)$中的矩阵等同于R^{mn}中的点

$$(a_{11},\cdots,a_{1n},a_{21},\cdots,\cdots,a_{2n},\cdots,a_{m1},\cdots,a_{mn}),$$

则按此自然方式,$\mu(m,n)$是一个 $m\times n$ 维微分流形. 考虑 $\mu(m,n)$中全体秩为 $k(\leqslant\min(m,n))$的 $m\times n$ 矩阵的集合 $\mu(m,n;k)$,则作为子空间 $\mu(m,n;k)$是$k(m+n-k)$维的微分流形. R^n 中$k(1\leqslant k\leqslant n)$个有序线性无关向量组$(v_1,v_2,\cdots,v_k)$称为 R^n 中的一个 k 标架,若

$$F(n,k)\subseteq\underbrace{\mathrm{R}^n\times\cdots\times\mathrm{R}^n}_{k\text{个}}$$

为 R^n 中所有 k 标架的集合,则按下述方式使得 $F(n,k)$成为 $n\times k$ 维微分流形,称为 R^n 上的 k 标架流形. 若在 R^n 中选取一个固定的 k 标架$(e_1,e_2,\cdots,e_k)$,则$(v_1,v_2,\cdots,v_k)\in F(n,k)$与秩为 k 的 $n\times k$ 矩阵 $A\in\mu(n,k;k)$一一对应. 若记

$$V(n,k)\subseteq\underbrace{\mathrm{R}^n\times\cdots\times\mathrm{R}^n}_{k\text{个}}$$

为 R^n 中所有两两正交的单位向量组成的 k 标架的集合,则按上述方式,$V(n,k)$是$(nk-k(k+1)/2)$维微分流形,称为史梯福流形.

标架流形(frame manifold) 见"史梯福流形的微分结构".

格拉斯曼流形的微分结构(differential structure of Grassmann manifold) 微分流形的常见例子之一. 设 $G(n,k)$是 R^n 中 k 维$(1\leqslant k\leqslant n)$线性子空间的全体组成的集合,按下述等价关系"~",它是 R^n 上的 k 标架流形 $F(n,k)$的商空间 $F(n,k)/\sim$:对于$(v_1,v_2,\cdots,v_k),(v_1',v_2',\cdots,v_k')\in F(n,k)$,

$$(v_1,v_2,\cdots,v_k)\sim(v_1',v_2',\cdots,v_k')$$

$$\Leftrightarrow [v_1, v_2, \cdots, v_k] = [v'_1, v'_2, \cdots, v'_k],$$

即它们生成的线性子空间相同. 若在商空间 $G(n,k) = F(n,k)/\sim$ 上以自然方式给出微分结构，则它是 $k\times(n-k)$ 维微分流形，称为格拉斯曼流形. 例如，当 $k=1$ 时，$G(n,1)=\mathrm{R}P^{n-1}$.

切空间(tangent space) 微分流形在一点处所联系的向量空间，欧氏空间中光滑曲线的切线、光滑曲面的切平面的推广. 若 M 是 n 维微分流形，$p\in M$，记 $C^\infty(p)$ 为在 p 的某个邻域内有定义的 C^∞ 可微函数的集合，则适合下列条件的函数 $X_p: C^\infty(p)\to\mathrm{R}$ 称为 M 在 p 处的切向量：

$M=S^2$　P　T_pM

1. 对于 $f,g\in C^\infty(p)$，若存在 M 中 p 的某邻域 U，使得 $f|U=g|U$，则 $X_p(f)=X_p(g)$.

2. 对于 $f,g\in C^\infty(p)$，$\alpha,\beta\in\mathrm{R}$，有

$$X_p(\alpha f+\beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g),$$

这时 $C^\infty(p)$ 中函数的运算依定义

$$(\alpha f+\beta g)(q) = \alpha f(q) + \beta g(q) \in \mathrm{R},$$

当 $f(q),g(q)$ 有定义时.

3. 对于 $f,g\in C^\infty(p)$，有

$$X_p(f\times g) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f),$$

其中 $f\times g$ 是通常函数的乘法，即

$$(f\times g)(q) = f(q)g(q).$$

微分流形 M 在 $p\in M$ 处的全体切向量的集合记为 T_pM，对于 $X_p, Y_p\in T_pM$，$\alpha\in\mathrm{R}$ 与 $f\in C^\infty(p)$，设

$$(X_p+Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f),$$
$$(\alpha X_p)(f) = \alpha X_p(f),$$

因而 T_pM 是实数域 R 上的 n 维向量空间，称为微分流形 M 在 p 处的切空间(如上图).

切空间 T_pM 中切向量的表示：设 (U,φ) 是 M 含点 p 的卡，在 U 上局部坐标为

$$\varphi(q) = (x_1(q), x_2(q), \cdots, x_n(q)) \quad (q\in U),$$

对于 $i=1,2,\cdots,n$，若

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : C^\infty(p)\to\mathrm{R}, \quad \forall f\in C^\infty(p),$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p(f) = \left.\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}\right|_{\varphi(p)},$$

其中 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 是 R^n 中坐标，则

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \in T_pM,$$

并且

$$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p\right\}$$

是 T_pM 的一组基. 此时对于 $X_p\in T_pM$，有

$$X_p = \sum_{i=1}^n X_p(x_i)\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p.$$

切向量(tangent vector) 见“切空间”.

映射在一点处的微分(differential of map at a point) 亦称映射在一点处的切映射. 一种特殊的映射. 由微分流形之间的可微映射诱导出的它们切空间之间的一种线性映射. 若 M,N 分别是 m 维，n 维微分流形，$f: M\to N$ 是可微映射，则按下述方式 f 诱导出切空间 T_pM 到 $T_{f(p)}N$ 的线性映射

$$f_{*p}: T_pM\to T_{f(p)}N,$$

对于 $X_p\in T_p(M)$，$g\in C^\infty(f(p))$，

$$[f_{*p}(X_p)](g) = X_p(g\circ f),$$

f_{*p} 称为可微映射 f 在 $p\in M$ 处的微分，f_{*p} 亦记为 T_pf. 若 f 是微分同胚映射，则对于 $p\in M$，f_{*p} 是同构.

映射的微分的局部坐标表示：若 (U,φ)，(V,ψ) 分别是 M 含点 p，N 含点 $f(p)$ 的卡，$f(U)\subseteq V$，

$$(x_1,x_2,\cdots,x_m),\ (y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

分别是这两点关于 (U,φ)，(V,ψ) 的局部坐标，在切空间 T_pM，$T_{f(p)}N$ 中分别取基

$$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : i=1,2,\cdots,m\right\}, \left\{\left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{f(p)} : j=1,2,\cdots,n\right\},$$

则 f 的微分 $f_{*p}: T_pM\to T_{f(p)}N$ 关于这两组基的矩阵为

$$J_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}_p,$$

其中 $f_j = y_j\circ f$，$j=1,2,\cdots,n$ 与

$$\left.\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p(f_j),$$

其中 $i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$. 这里 $J_f(p)$ 即是 f 在 p 处关于卡 (U,φ)，(V,ψ) 的雅可比矩阵.

在一点处的切映射(tangent map at a point) 即“映射在一点处的微分”.

流形的切丛(tangent bundle of manifold) 一类最简单的向量丛. 微分流形上各点处的切向量的全体按自然方式做成的微分流形. 若 M 是 n 维微分流形，记 $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$，其中 T_pM 为 M 在 p 处的切空间，则 TM 按下述方式是一个 $2n$ 维微分流形. 记 $\pi: TM\to M$ 是由对于 $p\in M$，$X_p\in T_pM$，$\pi(X_p)=p$ 定义的映射，若 $\Phi=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha\in\Lambda\}$ 是 M 的 C^∞ 图册，对于 $\alpha\in\Lambda$，卡 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 上局部坐标为 $(x_1, x_2,\cdots,x_n)$，记

$$\widetilde{U}_\alpha=\pi^{-1}(U_\alpha)\subseteq TM,$$
$$\widetilde{\varphi}_\alpha:\ \widetilde{U}_\alpha\to\varphi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{R}^n\subseteq\mathbb{R}^{2n},$$

使得对于 $p\in U_\alpha$，

$$X_p=\sum_{i=1}^{n}X_p(x_i)\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\in\widetilde{U}_\alpha$$

的像点为

$$\widetilde{\varphi}_\alpha(X_p)=(x_1(p),x_2(p),\cdots,x_n(p),X_p(x_1),X_p(x_2),\cdots,X_p(x_n)),$$

则在 TM 上定义拓扑：$W\subseteq TM$ 称为开集$\Leftrightarrow$对于 $\alpha\in\Lambda$，$\widetilde{\varphi}_\alpha(W\cap\widetilde{U}_\alpha)$是 $\varphi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{R}^n\subseteq\mathbb{R}^{2n}$中的开集. 于是 TM 是具有可数基的豪斯多夫空间. 进而，

$$\mathscr{A}=\{(\widetilde{U}_\alpha,\widetilde{\varphi}_\alpha)\mid\alpha\in\Lambda\}$$

是 TM 的 C^∞ 图册，由此决定 TM 的微分构造，所以 TM 是 $2n$ 维微分流形. 此时，(TM,M,π)称为微分流形 M 的切丛，简称 TM 为 M 的切丛，$\pi:TM\to M$ 称为切丛的射影，对于 $p\in M$，切空间 $T_pM=\pi^{-1}(p)$ 称为切丛 TM 在 p 处的纤维. 对于流形的乘积，有结论：若 M,N 为微分流形，则 $T(M\times N)$微分同胚于 $TM\times TN$.

丛射影(projection of bundle)　见“流形的切丛”.

丛的纤维(fibre of bundle)　见“流形的切丛”.

切映射(tangent map)　一种可微映射. 微分流形之间的可微映射诱导出它们的切丛之间可微映射. 设 $f:M\to N$ 是微分流形 M 到 N 的可微映射，$Tf:TM\to TN$，使得对于 $p\in M$，

$$Tf|T_pM=f_{*p}:\ T_pM\to T_{f(p)}N\subseteq TN,$$

其中 f_{*p}是 f 在 $p\in M$ 处的微分. 此时称 Tf 是 f 的切映射. 若记 $\pi_1:TM\to M$，$\pi_2:TN\to N$ 均为丛射影，则 $f\circ\pi_1=\pi_2\circ Tf$. 若 $f:M\to N$ 是微分同胚映射，则 $Tf:TM\to TN$ 亦然. 因此，切丛是流形在微分同胚下保持不变的重要性质.

平凡切丛(trivial tangent bundle)　一类特殊的切丛. 判断一个微分流形的切丛是否平凡的，这是微分拓扑学的重要问题之一. 设 M 是 n 维微分流形，对于 M 的切丛 TM，若存在微分同胚映射 $f:TM\to M\times\mathbb{R}^n$，使得对于 $p\in M$，

$$f|T_pM:\ T_pM\to\{p\}\times\mathbb{R}^n$$

是向量空间的线性同构，则称为平凡的. 当 TM 为平凡丛时，M 称为可平行化. 亚当斯(Adams，J. F.)于 1962 年证明了一个重要事实：当且仅当 $n=1,3,7$ 时，S^n 的切丛 TS^n 是平凡的.

可平行化的流形(parallelizable manifold)　见“平凡切丛”.

流形上的向量场(vector fields on manifold)　欧氏空间中曲面的向量场的概念的推广. 微分流形的切丛的截面. 设 M 是微分流形，对于映射 $X:M\to TM$，若 $\pi\circ X=i_M:M\to M$，其中 $\pi:TM\to M$ 为丛射影，即对于 $p\in M$，$X(p)\in T_pM$，则 X 称为 M 上的向量场. 此时，若 X 为 C^∞映射，则 X 称为光滑向量场. 若 $f:M\to N$ 是微分流形 M 到 N 的微分同胚，X 是 M 上的(光滑)向量场，则 $f_*X=Tf\circ X\circ f^{-1}:N\to TN$ 是 N 上的(光滑)向量场.

光滑向量场(smooth vector fields)　见“流形上的向量场”.

向量丛(vector bundle)　流形切丛概念的抽象和推广，它是微分拓扑学和代数拓扑学的重要研究对象. 设 E,B 是拓扑空间(B 为 T_2 空间)，$\pi:E\to B$ 为连续满映射. $\xi=(E,\pi,B)$称为 n 维(实、拓扑)向量丛，若适合：

1. 对于 $b\in B$，$E_b=\pi^{-1}(b)$是 n 维(实)向量空间.

2.(局部平凡性)对于$b\in B$，存在 b 的邻域U 及同胚映射 $\varphi:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^n$，使得对于 $x\in U$，$\varphi_x=\varphi|E_x:E_x\to\{x\}\times\mathbb{R}^n$ 是向量空间的同构.

此时，B 称为向量丛 ξ 的底空间，记为 $B(\xi)$，E 称为向量丛 ξ 的全空间，记为 $E(\xi)$，E_b 称为 $b\in B$ 处的纤维，π 称为丛射影. 上述适合条件 2 的(U,φ)称为 ξ 的丛卡. ξ 的一族丛卡的集合

$$\Phi=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha\in\Lambda\},$$

若$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha=B$，则称为图册. 进而，设 B 是微分流形，对于 ξ 的图册 Φ，若$\forall\ \alpha,\beta\in\Lambda$，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，图册的转换函数 $g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$是可微的，其中$g_{\alpha\beta}(x)=\varphi_{\beta x}\circ\varphi_{\alpha x}^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，$x\in U_\alpha\cap U_\beta$，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$为可逆 n 阶方阵组成的(实)线性群，则称为可微的. 若图册 Φ 是 ξ 的极大的可微图册，则 $\xi=(E,\pi,B,\Phi)$称为可微向量丛. 此时，若 B 是 m 维微分流形，则 ξ 的全空间 E 是$(n+m)$维微分流形. 流形的切丛、法丛、万有丛等都是可微向量丛的常见例子. 向量丛 $\xi=(E,\pi,B)$也称为 B 上的向量丛.

可微图册(differentiable atlas)　见“向量丛”.

可微向量丛(differentiable vector bundle)　见“向量丛”.

平凡向量丛(trivial vector bundle)　一类特殊的向量丛. 若向量丛 $\xi=(E,\pi,B)$有一个丛卡(B,φ)，则称 ξ 是平凡向量丛. 根据向量丛的同伦性质，任何可缩的仿紧空间上的向量丛都是平凡的.

向量丛的子丛(subbundle of vector bundle)　向量丛中全空间的子空间. 它在一定条件下对于同一底空间按自然方式做成的向量丛. 设 $\xi=(E,\pi,B)$是 n 维向量丛，$F\subseteq E(\xi)$，对于 $\eta=(F,\pi|F,B)$，若任意 $b\in B$，存在 ξ 的含 b 的丛卡(U,φ)，使得

$$\varphi(\pi^{-1}(U)\cap F)=U\times\mathbb{R}^k\subseteq U\times\mathbb{R}^n,$$

则 η 称为 ξ 的子丛. 此时，η 是向量丛. 例如，若 $N\subseteq$

M 是流形 M 的子流形，则切丛 TN 是向量丛 $T_N M = \bigcup_{p\in N} T_p M$ 的子丛.

向量丛的限制(restriction of vector bundle) 一类特殊的向量丛. 它是由一个已知的向量丛派生出来的. 若 $\xi=(E,\pi,B)$ 为向量丛，$B_0\subseteq B(\xi)$，则

$$(\pi^{-1}(B_0),\pi|\pi^{-1}(B_0),B_0)$$

是向量丛，称为 ξ 在 B_0 上的限制，记为 $\xi|B_0$. $\xi|B_0$ 可看成包含映射 $i:B_0\to B$ 决定的诱导向量丛 $i^*\xi$.

向量丛映射(vector bundle map) 向量丛之间的映射. 设 ξ 和 η 均为向量丛，

$$f: B(\xi)\to B(\eta),\quad \tilde{f}: E(\xi)\to E(\eta)$$

为连续映射，若下列图表是交换的(即 $\pi(\eta)\circ\tilde{f}=f\circ\pi(\xi)$)，并且 $\tilde{f}$ 把每一个纤维 $E_b(\xi)$ 线性映射到 $E_{f(b)}(\eta)$ 中)，则称 $(\tilde{f},f)$ 为向量丛 ξ 到 η 的丛态射. 进而，若 $\tilde{f}|E_b(\xi)$: $E_b(\xi)\to E_{f(b)}(\eta)$ 是同构，则称 $(\tilde{f},f)$ 为向量丛 ξ 到 η 的丛映射.

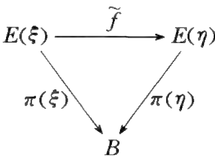
$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{\tilde{f}} & E(\eta) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi(\xi)} & & \downarrow{\scriptstyle \pi(\eta)} \\ B(\xi) & \xrightarrow{f} & B(\eta) \end{array}$$

它是将向量丛的底空间和全空间分别映射到另一向量丛的底空间、全空间的有良好的性质的一对映射. 向量丛映射是研究向量丛的重要工具，正像运用可微映射研究微分流形的情形. 特别地，若上述 f 为同胚映射，则 ξ 到 η 的丛映射 $(\tilde{f},f)$ 称为向量丛等价.

向量丛态射(vector bundle morphism) 见"向量丛映射".

向量丛等价(vector bundle equivalence) 见"向量丛映射".

向量丛同构(vector bundle isomorphism) 底空间相同的两个向量丛之间一种特殊的向量丛等价. 按此等价关系讨论向量丛的同构分类是向量丛的重要问题之一. 设 ξ,η 是 B 上两个向量丛(即 $B(\xi)=B(\eta)$)，对于连续映射 $\tilde{f}:E(\xi)\to E(\eta)$，若右图是交换的，并且对于 $b\in B$，$\tilde{f}|E_b(\xi)$: $E_b(\xi)\to E_b(\eta)$ 是线性映射，则称为向量丛 ξ 到 η 的丛同态. 进而，若对于 $b\in B$，$\tilde{f}|E_b(\xi)$ 是同构，则 $\tilde{f}$ 称为向量丛同构，此时记为 $\xi\overset{\tilde{f}}{\simeq}\eta$. 关于向量丛的一个重要事实是：若 $f,g:B'\to B$ 是同伦映射，B' 为仿紧空间，$\xi=(E,\pi,B)$ 是向量丛，则由 f,g 分别决定的 B' 上的诱导丛 $f^*\xi$ 与 $g^*\xi$ 是丛同构. 此定理称为向量丛的同伦性质.



向量丛同态(vector bundle homomorphism) 见"向量丛同构".

向量丛的同伦性质(homotopy property of vector bundle) 见"向量丛同构".

诱导向量丛(induced vector bundle) 亦称向量丛的回退. 由连续映射从一个向量丛按自然方式诱导产生的向量丛，这是构造新向量丛的常用方法之一. 设 $\xi=(E,\pi,B)$ 为向量丛，$f:B'\to B$ 为连续映射，记

$$f^*E(\xi)=\{(b,e)\,|\,f(b)=\pi(e)\}\subseteq B'\times E(\xi),$$
$$f^*\pi:\ f^*E(\xi)\to B',$$

使得 $f^*\pi(b,e)=b$. 于是，若 Φ 是 ξ 的图册，$(U,\varphi)\in\Phi$，则 $(f^{-1}(U),\psi)$ 为

$$(f^*E(\xi),f^*\pi,B')$$

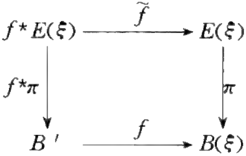
的丛卡：$\forall\, z\in f^{-1}(U)$，$f(z)=x\in U$，$\psi_z=\varphi_x$. 从而包含一切这种形式的丛卡的极大图册，使得

$$(f^*E(\xi),f^*\pi,B')$$

成为一个向量丛，称为诱导向量丛，记为 $f^*\xi$. 对于 ξ，$f^*\xi$ 有典型的向量丛映射 $(\tilde{f},f)$，其中

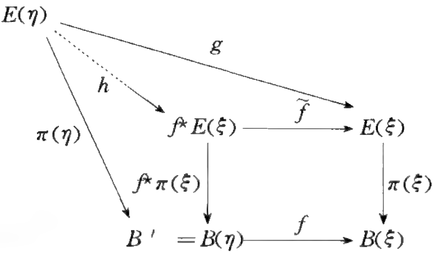
$$\tilde{f}:\ f^*E(\xi)\to E(\xi),\ \tilde{f}(b,e)=e.$$

因而右图是交换的，并且就从同构而言，这种诱导丛是惟一的. 进而，若 η 为 B' 上的向量丛，(g,f) 是 η 到 ξ 的丛态射(如下图)，则存在惟一丛同态 $h:E(\eta)\to f^*E(\xi)$，使得 $g=\tilde{f}\circ h$，其中



$$h(y)=(\pi(\eta)(y),g(y))\in B'\times E(\xi).$$

此为诱导丛的泛性质.



向量丛的回退(pullback of vector bundle) 即"诱导向量丛".

诱导丛的泛性质(universal property of induced bundle) 见"诱导向量丛".

向量丛的惠特尼和(Whitney sum of vector bundle) 亦称向量丛的直和. 指同一底空间上的两个向量丛运用直和方式构造的新向量丛. 设 ξ,η 分别是 n 维，k 维向量丛，都以 B 为底空间，其图册分别是 Φ,Ψ. 设

$$E(\xi)\oplus E(\eta)=\bigcup_{b\in B}E_b(\xi)\oplus E_b(\eta),$$
$$\tilde{\pi}:\ E(\xi)\oplus E(\eta)\to B$$

为自然投射，即对于

$$(x,y)\in E_b(\xi)\oplus E_b(\eta),\quad \tilde{\pi}(x,y)=b.$$

对于 $(U,\varphi)\in\Phi$，$(V,\psi)\in\Psi$，$U\cap V\neq\varnothing$，设

$$\varphi\oplus\psi:\ \tilde{\pi}^{-1}(U\cap V)\to(U\cap V)\times(\mathrm{R}^n\oplus\mathrm{R}^k),$$

使得$\forall\ b\in U\cap V$,

$$(\varphi\oplus\psi)|E_b(\xi)\oplus E_b(\eta)=\varphi_b\oplus\psi_b:$$
$$E_b(\xi)\oplus E_b(\eta)\to\{b\}\times(\mathrm{R}^n\oplus\mathrm{R}^k)$$

是向量空间的同构. 于是,以

$$\Phi\oplus\Psi=\{(U\cap V,\varphi\oplus\psi)|(U,\varphi)\in\Phi,(V,\psi)\in\Psi\}$$

作为图册,$(E(\xi)\oplus E(\eta),\tilde{\pi},B)$是$(n+k)$维向量丛,称为$\xi$与$\eta$的惠特尼和,记为$\xi\oplus\eta$. 而$\xi\oplus\eta$也可看成积丛$\xi\times\eta$由对角映射$f:B\to B\times B$决定的诱导丛.

向量丛的直和(direct sum of vector bundle) 即"向量丛的惠特尼和".

积丛(product bundle) 由两个向量丛按乘积方式构造的新向量丛. 若ξ,η为向量丛,则

$$(E(\xi)\times E(\eta),\pi(\xi)\times\pi(\eta),B(\xi)\times B(\eta))$$

是向量丛,其中丛射影

$$\pi(\xi)\times\pi(\eta):E(\xi)\times E(\eta)\to B(\xi)\times B(\eta),$$

对于$e\in E(\xi),e'\in E(\eta)$,

$$(\pi(\xi)\times\pi(\eta))(e,e')=(\pi(\xi)(e),\pi(\eta)(e')),$$

此向量丛称为ξ与η的积丛,记为$\xi\times\eta$.

商向量丛(quotient vector bundle) 一种常见的向量丛. 它是由两个同一底空间上的向量丛及其适合一定条件的丛同态构造的. 设ξ,η均为B上的向量丛,$f:E(\eta)\to E(\xi)$为丛同态,在$E(\xi)$上定义等价关系"$\sim$":

$$\forall\ x,y\in E(\xi),\ x\sim y\Leftrightarrow\pi(\xi)(x)=\pi(\xi)(y),$$

并且存在$e'\in E(\eta)$,使得$x-y=f(e')$. 记商空间

$$\widetilde{E}(\xi)=E(\xi)/\sim,\quad \tilde{\pi}:\widetilde{E}(\xi)\to B,$$

使得$\forall\ [x]\in\widetilde{E}(\xi),\tilde{\pi}([x])=\pi(\xi)(x)$. 于是当丛同态$f$适合$\forall\ b\in B,f_b=f|E_b(\xi)$是单的线性映射时,$(\widetilde{E}(\xi),\tilde{\pi},B)$是向量丛,称为由$f$决定的$\xi$的商丛,记为$\xi/f\eta$. 或等价地,若

$$0\to\eta\xrightarrow{f}\xi\xrightarrow{g}\tilde{\xi}\to 0$$

是向量丛的正合序列,则$\tilde{\xi}$是由f决定的ξ的商丛,即$\tilde{\xi}=\xi/f\eta$. 特别地,若η是ξ的子丛,则由包含映射$i:E(\eta)\subseteq E(\xi)$决定的$\xi$的商丛,记为$\xi/\eta$.

流形的法丛(normal bundle of manifold) 一种特殊的向量丛. 设$f:M\to N$是微分流形M到N的浸入,因为$Tf:TM\to TN$是切丛之间的丛同态,并且在每个纤维上是单的线性映射,于是,由Tf决定丛同态$h:TM\to f^*TN$,其中f^*TN是以M为底空间的由f决定的TN的诱导向量丛,从而诱导出f^*TN的商丛$V_f=f^*TN/h(TM)$,称为由f决定的M的法丛. 此时,向量丛序列

$$0\to TM\xrightarrow{h}f^*TN\to V_f\to 0$$

是正合的,所以$f^*TN\simeq TM\oplus V_f$. 几何上,若向量丛f^*TN上给定黎曼度量后,则法丛V_f同构于TM的正交补. 微分流形之间的浸入映射诱导出切丛的诱导丛上的商丛,在黎曼流形情形,法丛有较明显的几何背景. 特别地,若$M\subseteq N$是微分流形N的子流形,则M在N中的法丛$TM^{\perp}=T_MN/TM$. 由于m维流形M总可以浸入到R^n中(n充分大),所以总存在M的法丛V_f,使得$TM\oplus V_f$是平凡向量丛.

泛向量丛(universal vector bundle) 亦称格拉斯曼丛. 一种特殊的向量丛. 一般纤维丛的泛丛在向量丛情形的结果. 它在研究向量丛的分类性质中起重要作用. 设$G(n,k)$是R^n中$k(1\leqslant k\leqslant n)$维线性子空间组成的格拉斯曼流形,若

$$E=\{(H,x)|H\in G(n,k),x\text{ 为 }H\text{ 中向量}\}\subseteq G(n,k)\times\mathrm{R}^n,$$
$$\pi:E\to G(n,k),\pi(H,x)=H,$$

则向量丛$\gamma_{n,k}=(E,\pi,G(n,k))$称为泛向量丛. 对于向量丛,一个重要的定理是:若$n\geqslant k+m$,则对于任意$m$维微分流形$M$上的$k$维向量丛$\xi$,都存在连续映射$g:M\to G(n,k)$,使得诱导向量丛$g^*\gamma_{n,k}\simeq\xi$. 这也是$\gamma_{n,k}$称为泛丛的原因.

格拉斯曼丛(Grassmann bundle) 即"泛向量丛".

向量丛的定向(orientation of vector bundle) 具有定向性质的向量丛. 设$\xi=(E,\pi,B)$是n维向量丛,对于$b\in B$,纤维E_b(作为向量空间)指定一个定向$\omega_b,\omega=\{\omega_b|b\in B\}$称为$\xi$的一个定向,若满足条件:对于任意$b\in B$,都存在丛卡$(U,\varphi)$,使得对于任意$x\in U,\varphi|E_x:E_x\to\mathrm{R}^n$是将$\omega_x$变成$\mathrm{R}^n$的同一固定定向的线性同构. 若向量丛$\xi$有一个定向$\omega$,则称$\xi$是可定向的. 此时$(\eta,\omega)$称为有向向量丛;否则称$\xi$是不可定向的. 向量丛的可定向性是向量丛的重要拓扑性质. 有向向量丛的诱导丛有自然的定向.

有向向量丛(oriented vector bundle) 见"向量丛的定向".

微分流形的定向(orientation of differential mani-fold) 具有定向性质的微分流形. 设M是n维微分流形,M是可定向的当且仅当存在M的(光滑)图册Φ,适合:$\forall\ (U,\varphi),(V,\psi)\in\Phi,U\cap V\neq\varnothing$,对于任意$x\in U\cap V,\det J_{\psi\circ\varphi^{-1}}(\varphi(x))>0$. 连通的可定向流形恰有两个定向. 微分流形是否可定向是流形的重要拓扑性质,它在微分同胚下保持不变. 射影平面、克莱因瓶、默比乌斯带等都是常见的不可定向流形的例子. 流形的可定向性与流形的嵌入有密切关系. 例如:任何紧致的不可定向的n维流形不能嵌入到单连通的$(n+1)$维流形中;特别地,射影空间$\mathrm{R}P^{2n}$不能嵌入到$\mathrm{R}^{2n+1}(n\geqslant 1)$中.

向量丛的黎曼度量(Riemannian metric of vector bundle) 对向量丛的一种刻画. 在向量丛的每个纤维(作为向量空间)上的内积组成的族,它连续

依赖于底空间的点，在具有黎曼度量的向量丛上可以讨论正交等度量性质. 设 $\xi=(E,\pi,B)$ 是向量丛，ξ 上的一个黎曼度量或内积是指 $\alpha=\{\alpha_b|b\in B\}$，其中 $\alpha_b:E_b\times E_b\to\mathbb{R}$ 是向量空间 E_b 上的内积(对称，双线性的正定二次形式)，并且

$$f: W=\{(b,x,y)\in B\times E\times E\,|\,x,y\in E_b\}\to\mathbb{R},$$
$$f(b,x,y)=\alpha_b(x,y)$$

是连续(或可微)的函数，此时称 (ξ,α) 是正交向量丛. 运用单位分解方法，得到：若 B 是仿紧空间，则 $\xi=(E,\pi,B)$ 上总存在黎曼度量. 在正交向量丛的诱导丛上可以自然方式赋予黎曼度量.

正交向量丛(orthogonal vector bundle) 见“向量丛的黎曼度量”.

黎曼流形(Riemannian manifold) 一种重要的微分流形. 在其切丛上赋予黎曼度量的微分流形. 设 M 为微分流形，$\mathscr{X}(M)$ 是 M 上的全体光滑向量场按自然方式组成的向量空间，M 上的黎曼度量是指 $\alpha=\{\alpha_p|p\in M\}$，其中对于 $p\in M$，α_p 是 T_pM 上的内积，并且使得对于 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$，由 $g(X,Y)(p)=\alpha_p(X_p,Y_p)$ 定义的函数 $g(X,Y):M\to\mathbb{R}$ 是光滑的，此时称 (M,α) 为黎曼流形. 任何微分流形上总存在黎曼度量，从而成为黎曼流形. 若 $M\subseteq N$ 是黎曼流形 N 的子流形，则 TN 的子丛

$$(TM)^{\perp}=\bigcup_{p\in M}(T_pM)^{\perp}$$

称为 TM 在 TN 中的正交补，其中 $(T_pM)^{\perp}$ 是 T_pM 在向量空间 T_pN 中的正交补空间. M 在 N 中的法丛自然同构于 $(TM)^{\perp}$. 由于丰富的几何内容，所以对黎曼流形性质的研究与近代微分几何与大范围分析等有密切联系.

单位分解(partition of unity) 一种连续函数族. 微分流形上的适合某些良好性质的连续(或可微)函数族. 单位分解的存在性是微分拓扑与微分几何理论中常用的技巧和基本工具之一. 设 M 为微分流形，M 上的连续(或可微)函数族

$$H=\{h_\alpha: M\to[0,1]\,|\,\alpha\in\Lambda\}$$

若适合下列条件：

1. $\{\mathrm{supp}(h_\alpha)\,|\,\alpha\in\Lambda\}$ 是 M 的局部有限闭覆盖，其中 $\mathrm{supp}(h_\alpha)=\overline{\{p\in M\,|\,h_\alpha(p)\neq 0\}}$；

2. 对于 $p\in M$，$\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}h_\alpha(p)=1$；

则称为 M 上的一个单位分解.

进而，设 $\mathscr{A}=\{U_i\,|\,i\in I\}$ 是 M 的开覆盖，对于 M 上的单位分解 $H=\{h_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$，若 $\alpha\in\Lambda$，存在 $i\in I$，使得 $\mathrm{supp}(h_\alpha)\subseteq U_i$，则称 H 为从属于 $\mathscr{A}$ 的单位分解. 于是，对于微分流形的任意开覆盖 $\mathscr{A}$，总存在 M 上从属于 $\mathscr{A}$ 的单位分解. 单位分解的方法有广泛的应用，例如，流形上黎曼度量的存在性、惠特尼嵌入定理及逼近定理等.

纤维丛(fibre bundle) 向量丛的一般化和推广. 代数拓扑的重要研究对象. 设 E,B,F 均为拓扑空间，$\pi:E\to B$ 为连续映射，$\xi=(E,\pi,B,F)$ 称为纤维丛，若满足：对于 $b\in B$，都有 b 在 B 中的邻域 U_b 及同胚映射 $\varphi_{U_b}:\pi^{-1}(U_b)\to U_b\times F$，使得对于

$$(x,y)\in U_b\times F,\quad \pi\circ\varphi_{U_b}^{-1}(x,y)=x.$$

此时 π 称为丛射影，B 称为 ξ 的底空间，F 称为 ξ 的导空间(纤维)，E 称为丛空间. 当纤维丛 ξ 的导空间是向量空间 $\mathbb{R}^n$ 时，ξ 是 n 维向量丛；若导空间 F 是离散拓扑空间，则称 $E(\xi)$ 为对 π 而言 B 上的覆叠空间，此时 π 称为覆叠映射. 纤维丛 ξ 的丛射影 $\pi:E\to B$ 的基本性质之一是，对于任意有限复形的多面体(基础空间)X，具有覆叠同伦性质，即 $f:X\to E$ 及 $p\circ f=g_0$ 的同伦映射 $g_t:X\to B$，$t\in[0,1]$，都存在 $f=f_0$ 的同伦映射 $f_t:X\to E$，使得

$$g_t=p\circ f_t,\quad t\in[0,1].$$

由此得到更广泛的一类空间称为纤维空间，它在代数拓扑学的研究中占有重要地位. 对于 $\xi=(E,\pi,B)$，若连续映射 $\pi:E\to B$ 对于任意有限复形的多面体都具有覆叠同伦性质，则称为纤维空间. 此时称 π 为纤维映射，B 为底空间，简称 E 为纤维空间. 对于

$$b\in B,\quad \pi^{-1}(b)\subseteq E$$

称为 b 上的纤维.

丛空间(bundle space) 见“纤维丛”.

覆叠映射(covering map) 见“纤维丛”.

纤维映射(fibre map) 见“纤维丛”.

纤维空间(fibre space) 见“纤维丛”.

映射的覆叠同伦性质(covering homotopy property of map) 见“纤维丛”.

子流形的管状邻域(tubular neighborhood of submanifold) 微分拓扑中的一个工具. 设 $M\subseteq N$ 是微分流形 N 的子流形，$\xi=(E,\pi,M)$ 是 M 上的向量丛，$f:E\to N$ 是嵌入映射，则 (f,ξ) 称为 M 在 N 中的管状邻域，若它适合：1. $f(E)$ 是 M 在 N 中的开邻域. 2. 当把 M 等同于 ξ 的零截面的像($\subseteq E$)时，$f|M=i_M$. 通常也称 $f(E)$ 是 M 在 N 中的管状邻域. 当 M,N 是(无边)微分流形时，则子流形 M 在 N 中必存在管状邻域，并且 M 在 N 中的任何两个管状邻域是合痕的. 利用管状邻域的存在性和横截性定理，可以证明惠特尼定理：任何(无边)紧致微分流形微分同胚于欧氏空间中的解析子流形.

$C^r(M,N)$ 上的弱拓扑(weak topology on $C^r(M,N)$) 亦称 $C^r(M,N)$ 上的紧开拓扑. 一种常见拓扑. 它是流形 M 到 N 的全体 C^r 映射的集合上的拓扑. 设 M,N 是 C^r 流形，

$$C^r(M,N)=\{f: M\to N\,|\,f \text{ 是 } C^r \text{ 映射}\},$$

若 $f\in C^r(M,N)$，(U,φ)，(V,ψ) 分别是 M,N 上的

卡，$K\subseteq U$ 是紧致子集，使得 $f(K)\subseteq V$，$\varepsilon>0$，记

$$\mathscr{N}^r(f,(U,\varphi),(V,\psi),K,\varepsilon)$$

是适合下述条件的 C^r 映射 g：$M\to N$ 的集合：

1. $g(K)\subseteq V$.

2. $\forall\ x\in\varphi(K)$，$k=0,1,\cdots,r$，有

$$\| D^k(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})(x)-D^k(\psi\circ g\circ\varphi^{-1}(x)\| <\varepsilon$$

（换言之，f,g 的局部表示及其直到 r 阶的微分在 K 上每一点相差小于 ε)，则 $C^r(M,N)$ 中由一切形如

$$\mathscr{N}^r(f,(U,\varphi),(V,\psi),K,\varepsilon)$$

的集合作为子基生成的拓扑称为 $C^r(M,N)$ 上的弱拓扑，此拓扑空间记为 $C^r_w(M,N)$. 设 M 是 m 维紧致 C^r 流形，若

$$E^r_{mb}(M,\mathrm{R}^n)=\{f: M\to\mathrm{R}^n\,|\,f \text{ 是 } C^r \text{ 嵌入}\},$$

则当 $n\geqslant 2m$ 时，$E^r_{mb}(M,\mathrm{R}^n)$ 在空间 $C^r_w(M,\mathrm{R}^n)$ 中是稠密的. 类似地，若

$$I^r_{mm}(M,\mathrm{R}^n)=\{f: M\to\mathrm{R}^n\,|\,f \text{ 是 } C^r \text{ 浸入}\},$$

则当 $n\geqslant 2m-1$ 时，$I^r_{mm}(M,\mathrm{R}^n)$ 在 $C^r_w(M,\mathrm{R}^n)$ 中是稠密的.

$C^r(M,N)$ 上的紧开拓扑(compact-open topology on $C^r(M,N)$)　即"$C^r(M,N)$上的弱拓扑".

$C^r(M,N)$ 上的强拓扑(strong topology on $C^r(M,N)$)　亦称 $C^r(M,N)$上的惠特尼拓扑. 一种最常见的拓扑. 它是流形 M 到 N 的全体 C^r 映射的集合上的拓扑. 微分拓扑学中许多重要问题，例如流形的嵌入、映射的逼近、横截性等，都可化归这类映射空间的相应问题. 设 M,N 是 C^r 流形，

$$C^r(M,N)=\{f: M\to N\,|\,f \text{ 是 } C^r \text{ 映射}\}.$$

记 $\Phi=\{(U_i,\varphi_i)\,|\,i\in\Lambda\}$ 是 M 的局部有限的卡的族(局部有限性，即对于 $p\in M$，p 在 M 中有邻域仅与有限个 U_i 相交)，$K=\{K_i\,|\,i\in\Lambda\}$ 是 M 的紧致子集族，适合 $K_i\subseteq U_i$，$i\in\Lambda$；$\Psi=\{(V_i,\psi_i)\,|\,i\in\Lambda\}$ 是 N 的卡的族；$\varepsilon=\{\varepsilon_i>0\,|\,i\in\Lambda\}$，对于 $f\in C^r(M,N)$，若 $\mathscr{N}^r(f,\Phi,\Psi,K,\varepsilon)$ 是适合下述条件的 C^r 映射 $g:M\to N$ 的集合：

1. $\forall\ i\in\Lambda$，$g(K_i)\subseteq V_i$.

2. $\forall\ i\in\Lambda$，$x\in\varphi_i(K_i)$，$k=0,1,\cdots,r$，有

$$\| D^k(\psi_i\circ f\circ\varphi_i^{-1})(x)-D^k(\psi_i\circ g\circ\varphi_i^{-1})(x)\| <\varepsilon_i,$$

则 $C^r(M,N)$ 中由一切形如 $\mathscr{N}^r(f,\Phi,\Psi,K,\varepsilon)$ 的集合组成 $C^r(M,N)$ 上某拓扑的基，由此生成的拓扑称为 $C^r(M,N)$ 上的强拓扑，此拓扑空间记为 $C^r_s(M,N)$.

当 M 是紧致流形时，$C^r_s(M,N)=C^r_w(M,N)$. 若 $I^r_{mm}(M,N)$，$S^r_{mb}(M,N)$，$E^r_{mb}(M,N)$，$\mathrm{Diff}^r(M,N)$ 分别记为全体 M 到 N 的 C^r 浸入，C^r 淹没，C^r 嵌入及 M 到 N 上的 C^r 微分同胚映射的集合，则当 $r\geqslant 1$ 时，它们都是 $C^r_s(M,N)$ 中的开子集. 运用单位分解的方法，得到下述重要的逼近定理：若 M,N 是 C^q 流形，$1\leqslant q\leqslant\infty$，则当 $0\leqslant r\leqslant q$ 时，有 $C^q_s(M,N)$ 在 $C^r_s(M,N)$ 中是稠密的. 结论表明任何流形之间的连续或低阶可微映射均可用高阶可微映射充分逼近. 根据逼近定理还可得到颇有意义的下述结果：

1. 若 $1\leqslant r\leqslant\infty$，则 C^r 流形总能 C^r 微分同胚于一个光滑流形.

2. 若 $1\leqslant r<s\leqslant\infty$，$C^s$ 流形 M,N 是 C^r 微分同胚，则它们 C^s 微分同胚.

$C^r(M,N)$ 上的惠特尼拓扑(Whitney topology on $C^r(M,N)$)　即"$C^r(M,N)$上的强拓扑".

逼近定理(approximation theorem)　见"$C^r(M,N)$上的强拓扑".

微分流形上的零测集(subset which has measure zero on differential manifold)　n 维流形的一类特殊子集，它与每个卡的交在同胚卡映射下是 R^n 中测度为零之集. 若 n 维方体

$$C=I_1\times\cdots\times I_n\subseteq\mathrm{R}\times\cdots\times\mathrm{R}=\mathrm{R}^n,$$

其中 I_j 是 R 中长为 λ 的闭区间，则 C 在 R^n 中的测度为 $\mu(C)=\lambda^n$. 对于子集 $W\subseteq\mathrm{R}^n$，若对于任意 $\varepsilon>0$，存在 R^n 中的一族 n 维方体 $C_1,C_2,\cdots,C_i,\cdots$，使得

$$W\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\mu(C_i)<\varepsilon,$$

则称 W 的测度为零. 设 M 为 n 维微分流形，$A\subseteq M$，若对 M 的每一个卡 (U,φ)，$\varphi(A\cap U)\subseteq\mathrm{R}^n$ 测度为零，则称 A 是零测集(或测度为零). 若 A 对 M 的某个图册的卡具有上述性质，则 A 是零测集. 关于 R^n 中零测集有下述常用的富比尼定理：对于 $t\in\mathrm{R}$，记

$$\mathrm{R}^{n-1}_t=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathrm{R}^n\,|\,x_n=t\}.$$

若 $C\subseteq\mathrm{R}^n$ 是紧致子集，使得对于任意 $t\in\mathrm{R}$，$C_t=C\cap\mathrm{R}^{n-1}_t$ 是 $\mathrm{R}^{n-1}_t\cong\mathrm{R}^{n-1}$ 的零测集，则 C 是 R^n 的零测集.

富比尼定理(Fubini's theorem)　见"微分流形上的零测集".

萨德定理(Sard's theorem)　有关流形上可微映射的正则值与临界值集合的一个重要定理，它肯定了光滑映射具有"足够多"的正则值. 若 M,N 分别是 m 维，n 维微分流形，$f:M\to N$ 是 C^r 映射，

$$r>\max\{0,m-n\},$$

D 是 f 在 M 中的临界点的集合，则 $f(D)\subseteq N$ 是零测集. 萨德定理在微分拓扑、代数拓扑中有较多应用，例如，证明托姆横截性定理、惠特尼嵌入定理、布劳威尔不动点定理等. 作为萨德定理的推论有布朗定理：光滑映射 $f:M\to N$ 在 N 中的正则值集合 W 是稠密的.

布朗定理(Brown's theorem)　见"萨德定理".

横截性(transversality)　微分流形之间的可微映射的像空间的子流形所具有的一种重要性质，它推广了映射在正则值处的性质，横截性在动力系统

理论中起着重要作用. 设 $A\subseteq N$ 是微分流形 N 的子流形, $f:M\to N$ 是微分流形 M 到 N 的可微映射, $p\in M$. 若 $f(p)\overline{\in}A$ 或 $T_{f(p)}N=f_{*p}(T_pM)+T_{f(p)}A$, 则 f 称为在 p 处与 A 横截. 此时记为 $f\pitchfork_p A$. 若对于任 $p\in M$, $f\pitchfork_p A$, 则称 f 与 A 横截, 记为 $f\pitchfork A$. 若 $f\pitchfork A$, 则 $f^{-1}(A)$ 是 M 的可微子流形(当 $f^{-1}(A)\neq\varnothing$ 时). 若 $f:M\to N$ 是淹没映射, 则对于 N 的任何可微子流形 A, 有 $f\pitchfork A$. 具有横截性的可微映射其局部表示有如下特性: 设 $f:M\to N$ 是 m 维流形 M 到 n 维流形 N 的可微映射, $A\subseteq N$ 是余维为 k 的子流形, $p\in M$. 若 $f\pitchfork_p A$, 则存在 M 含 p 的卡 (U,φ) 与 N 含 $f(p)$ 的卡 (V,ψ), 使得 f 的局部表示 $\hat{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$ 具有形式

$$\hat{f}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=(y_1(x_1,x_2,\cdots,x_m),\cdots,y_{n-k}(x_1,x_2,\cdots,x_m),x_{n-k+1},\cdots,x_n).$$

关于子流形间的横截性具有明显的直观几何背景. 设 M_1,M_2 都是微分流形 N 的子流形, 若包含映射 $i:M_2\to N$ 与 M_1 横截, 则称 M_1 与 M_2 横截(也称 M_1,M_2 在 N 中处于一般位置), 记为 $M_1\pitchfork M_2$. 此时对于 $p\in M_1\cap M_2$, 有 $T_pM_1+T_pM_2=T_pN$.

子流形的横截性(transversality of submanifolds) 见"横截性".

托姆横截性定理(Thom transversality theorem) 微分拓扑学的重要定理. 它也是动力系统理论研究的重要工具. 它表明流形之间具有横截性的映射是"足够普遍"的. 设 M,N 都是 C^r 流形, $f:M\to N$ 是 C^r 映射, $A\subseteq N$ 是 N 的 C^r 子流形, 则存在任意邻近 f 的(就 $C^r_w(M,N)$, $C^r_s(M,N)$ 的拓扑而言)映射 $g:M\to N$, $g\pitchfork A$; 并且, 若对于 A 的闭子集 B, $f\pitchfork B$, 则进而可选取 $g:M\to N$, 使得

$$f|B=g|B.$$

嵌入的合痕(isotopy of embeddings) 单参数可微的嵌入映射族, 它的性质在嵌入映射的扩充等问题上颇有用处. 设 M,N 都是微分流形, M 到 N 的 C^r 合痕是指 C^r 映射 $F:M\times[0,1]\to N$, 使得对于 $t\in[0,1]$, 由 $p\mapsto F(p,t)$ 定义的映射 $F_t:M\to N$ 是嵌入映射. 此时亦称 F 是映射 F_0 到 F_1 的 C^r 合痕, 或嵌入映射 $f=F_0$ 的一个 C^r 合痕; 嵌入映射

$$\hat{F}:M\times[0,1]\to N\times[0,1],\quad (p,t)\mapsto(F(p,t),t)$$

称为合痕 F 的痕迹. 特别地, 设 $M=N$, $F_0=i_M$(恒同映射), 对于 $t\in[0,1]$, F_t 是 M 上微分同胚, 则合痕 F 称为 M 上的微拓合痕. 下述微拓合痕的存在性定理称为齐性引理: 对于任何光滑连通流形 M, $p,q\in M$, 都存在微拓合痕 F, 使得微分同胚 $F_1:M\to M$ 将 p 映射至 q.

合痕的痕迹(track of isotopy) 见"嵌入的合痕".

微拓合痕(diffeotopy) 见"嵌入的合痕".

齐性引理(homogeneous lemma) 见"嵌入的合痕".

可微映射的映射度(degree of differential map) 重要的同伦不变量. 设 (M,ω), (N,θ) 均为紧致无边有向 n 维微分流形, N 是连通的, $f:M\to N$ 是可微映射. 若 $p\in M$ 是 f 的正则点, 记

$$\operatorname{sign}f_{*p}=\begin{cases}+1 & (f_{*p}\text{保持定向}),\\ -1 & (f_{*p}\text{反转定向}),\end{cases}$$

则 $\deg(f,q)=\sum_{p\in f^{-1}(q)}\operatorname{sign}f_{*p}\in\mathbf{Z}$, 其中 $q\in N$ 是 f 的正则值. 若 $f^{-1}(q)=\varnothing$, 则 $\deg(f,q)=0$. 于是, $\deg(f,q)$ 与正则值 $q\in N$ 的选取无关, 因此可记 $\deg(f)=\deg(f,q)$, 并称它为可微映射 f 的映射度, 它与 f(看做连续映射)的布劳威尔度一致. 直观上说, $f:M\to N$ 的映射度表示 f 把 M"覆盖"N 的次数. 映射度在代数拓扑、微分拓扑中有广泛应用, 例如, 证明布劳威尔不动点定理、代数基本定理等. 映射度的一个主要性质是: 若 f 光滑同伦于 $g:M\to N$, 则 $\deg(f)=\deg(g)$. 一般地, 若 $f:M\to N$ 为连续映射, 则存在与 f 同伦的 C^∞ 映射 $g:M\to N$. 取 $q\in N$ 是 g 的正则值, 定义 $\deg(f)=\deg(g,q)$, 它与 g, q 的选取无关.

注意, 若 M,N 不是可定向流形, $f:M\to N$ 为连续映射, 则取与 f 同伦的 C^∞ 映射 $h:M\to N$, 对于 h 的正则值 $q\in N$, 记 $\deg_2(h,q)$ 为 $h^{-1}(q)\subseteq M$ 中点的个数的模 2 剩余类, 它与 h,q 的选取无关, 于是, 称 $\deg_2(f)=\deg_2(h,q)$ 为 f 的模 2 映射度. 下述霍普夫定理表明映射度在映射的同伦分类上的本质意义. 若 M 是紧致连通的 n 维(无边)微分流形, $n\geqslant1$, $f,g:M\to S^n$ 为连续映射, 则:

1. 若 M 是有向的, 则 $f\simeq g\Leftrightarrow\deg(f)=\deg(g)$.
2. 若 M 是不可定向的, 则

$$f\simeq g\Leftrightarrow\deg_2(f)=\deg_2(g).$$

模 2 映射度(degree of mod 2 map) 见"可微映射的映射度".

霍普夫定理(Hopf's theorem) 见"可微映射的映射度".

相交数(intersection number) 重要的同伦不变量. 映射度在更一般情形的推广. 设 M 与 N 分别是 m 维与 n 维的紧致有向(无边)微分流形, $n>m$, A 是 N 的 $(n-m)$ 维闭有向子流形, $f:M\to N$ 是 C^∞ 映射, $f\pitchfork A$, 对于 $p\in f^{-1}(A)$, 当线性同构

$$T_pM\xrightarrow{f_{*p}}T_{f(p)}N\to T_{f(p)}N/T_{f(p)}A$$

保持定向时, 记为 $\#_p(f,A)=1$; 否则记为 $\#_p(f,A)=-1$, 则 $\#(f,A)=\sum_{p\in f^{-1}(A)}\#_p(f,A)\in\mathbf{Z}$(因为 $f^{-1}(A)$ 在 M 中余维为 m), 称为映射 f 对于子流形

A 的相交数. 类似于映射度情形,得到:若 $f,g:M\to N$ 是光滑同伦映射,$f \pitchfork A$,$g \pitchfork A$,则

$$\#(f,A)=\#(g,A).$$

由此可将相交数定义推广到一般连续映射的情形. 相交数有直观的几何背景,设 $M_1,M_2\subseteq N$ 都是 N 的有向(无边)紧致子流形,

$$\dim N=\dim M_1+\dim M_2,$$

$M_1 \pitchfork M_2$(即处于一般位置),$i:M_1\to N$ 为包含映射,则 $\#(i,M_2)$ 实际上是 $M_1\cap M_2$ 中点的"代数"个数(按定向,每一点赋予适当的符号),称为 (M_1,M_2) 的相交数,记为 $\#(M_1,M_2)$ 或 $\#(M_1,M_2;N)$. 从而

$$\#(M_1,M_2)=(-1)^{\dim M_1\cdot\dim M_2}\#(M_2,M_1).$$

注意,当 M,N 或 A 不是可定向流形时,可类似于模 2 映射度而定义模 2 相交数 $\#_2(f,A)$.

模 2 相交数(mod 2 intersection number) 见"相交数".

欧拉数 (Euler number) 对向量丛的一种刻画. 有向向量丛的零截面对于底空间的相交数. 设 $\xi=(E,\pi,M)$ 是 n 维有向向量丛,M 是 n 维紧致连通有向(无边)微分流形. 若将底空间 M 与 ξ 的零截面的像等同,则

$$\chi(\xi)=\#(M,M)=\#(M,M;E)$$

称为向量丛 ξ 的欧拉数. 设 M 如上述,$\xi=TM$,则 $\chi(\xi)$ 称为流形 M 的欧拉特征,记为 $\chi(M)$. 例如,$\chi(S^{2n})=2$(因而 S^{2n} 上任何向量场均有零点),$\chi(S^{2n+1})=0$. 欧拉数是向量丛的同构不变量. 在流形的切丛情形,得到在代数拓扑中有广泛应用的拓扑不变量——流形的欧拉特征数.

流形的欧拉特征(Euler characteristic of manifold) 见"欧拉数".

莫尔斯函数(Morse function) 微分拓扑学的一个重要函数. 微分流形 M 到 R 的函数,其临界点都是非退化的. 设 M 是 n 维微分流形,$f:M\to\mathrm{R}$ 为 C^∞ 函数,$p\in M$ 是 f 的临界点,(U,φ) 是 M 的含 p 的卡,坐标函数为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p=0\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

记

$$H_f(p)=\left(\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right|_p\right)_{n\times n},$$

称为 f 关于卡 (U,φ) 在 p 处的海赛矩阵. 若海赛矩阵 $H_f(p)$ 非退化,则称 p 是 f 的非退化临界点. 此时 $H_f(p)$ 的负特征值个数称为 p 的指数. 临界点 p 的非退化性及指数与含 p 的卡的选取无关.

下述著名的莫尔斯引理给出光滑函数 f 在非退化的临界点邻域的局部性质. 设 $p\in M$ 是 C^∞ 映射 $f:M\to\mathrm{R}$ 的指数为 r 的非退化临界点,则存在 M 的含 p 的卡 (U,φ),使得 $\varphi(p)=0$,并且 $\forall\ u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in\varphi(U)$,

$$f\circ\varphi^{-1}(u)=f(p)-\sum_{i=1}^{r}u_i^2+\sum_{j=r+1}^{n}u_j^2.$$

微分流形 M 上的光滑函数 $f:M\to\mathrm{R}$,若 f 所有的临界点都是非退化的,则称为莫尔斯函数. 由莫尔斯引理知,当 M 是紧致流形时,M 上的莫尔斯函数仅有有限个临界点. 对于任意微分流形 M,M 上的全体莫尔斯函数的集合在 $C_s^\infty(M,\mathrm{R})$ 中是开的稠密子集. 由于 M 上的莫尔斯函数与 M 的拓扑性质有密切关系,所以莫尔斯函数是一类有重要意义的函数,它的性质有着广泛应用,例如,黎泊定理、紧致曲面的拓扑分类等都用到它.

非退化临界点(nondegenerate critical point) 见"莫尔斯函数".

临界点的指数(index of critical point) 见"莫尔斯函数".

莫尔斯引理(Morse's lemma) 见"莫尔斯函数".

黎泊定理(Reeb's theorem) 运用莫尔斯函数的性质刻画 S^n 的拓扑特征的一个重要定理. 设 M 是紧致 n 维微分流形,若 M 上存在莫尔斯函数 $f:M\to\mathrm{R}$ 恰有两个临界点,则 M 必与 S^n 同胚. 但需指出,定理中 M 不必微分同胚于 S^n. 米尔诺(Milnor, J. W.)于 1956 年构造了一个称为"七维怪球"的微分流形,它上面存在恰有两个临界点的莫尔斯函数,因而同胚于 S^7,但并不微分同胚于 S^7.

莫尔斯不等式(Morse inequalities) 流形上莫尔斯函数的临界点指数与流形的同调特征(如贝蒂数、欧拉特征数)的重要关系式. 它在微分拓扑、代数拓扑中都有应用. 设 M 是 n 维紧致微分流形,$f:M\to\mathrm{R}$ 是莫尔斯函数,则:

1. 对于 $0\leqslant m\leqslant n$,

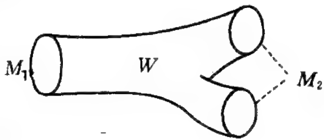
$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{i+m}\beta_i(M)\leqslant\sum_{i=0}^{m}(-1)^{i+m}\mu_i(M,f).$$

2. $$\chi(M)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\mu_i(M,f)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i(M),$$

其中 $\beta_i(M)$ 是 M 的第 i 个贝蒂数,即系数在某数域 F 中的第 i 个同调群 $H_i(M;F)$ 作为向量空间的维数,$\mu_i(M,f)$ 是 f 的指数为 i 的临界点个数,$\chi(M)$ 是 M 的欧拉特征数(欧拉示性数). 于是,当 $0\leqslant i\leqslant n$ 时,$\beta_i(M)\leqslant\mu_i(M,f)$;当 n 为奇数时,$\chi(M)=0$.

流形的协边(cobordism of manifolds) 微分拓扑学的一个重要概念. 两个流形的互不相交的并恰是某个流形的边界. 设 M_1,M_2 都是紧致(无边)微分流形,若存在紧致带边流形 W 与微分同胚 $\partial W\cong M_1\cup M_2$,则称为 M_1 与 M_2 的协边,记为 $M_1\sim M_2$(见

图)."～"是 n 维闭流形上的等价关系,其等价类称为协边类,流形 M 所在的等价类常记为$[M]$.全体协边类记为 $\mathscr{R}^n$. $\mathscr{R}^n$ 上互不相交的并运算使得 $\mathscr{R}^n$ 成一交换群,称为流形的协边群.协边群的计算是微分拓扑与代数拓扑相关的重要课题,其中已知的重要结果是关于协边的托姆同态定理,它表明协边群同构于一类同伦群.类似地,对于有向微分流形,可以定义有向协边类(群)Ω^n:设(M_1,ω_1),(M_2,ω_2)为有向闭流形,若存在有向紧致流形(W,θ)及保持定向的微分同胚



$$(\partial W,\partial\theta)\cong(M_1,-\omega_1)\cup(M_2,\omega_2),$$

则称(M_1,ω_1)与(M_2,ω_2)有向协边.协边理论是在20世纪50年代托姆(Thom,R.)的基础工作上逐步发展起来的,并成为微分拓扑学中较深入的部分,与代数拓扑有密切关系.

协边类(cobordism class) 见"流形的协边".

协边群(cobordism group) 见"流形的协边".

有向协边(oriented cobordism) 见"流形的协边".

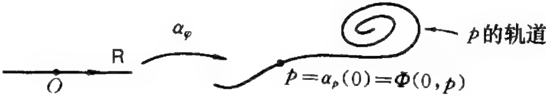
流形上的动力系统(dynamical system on manifold) 现代数学中相当活跃的研究分支之一,近年来已取得重要进展(例如结构稳定性、通有性等).它与微分拓扑学有着密切且深刻的联系.设 M 是微分流形,M 上的一个动力系统(亦称 M 上的流)是指可微映射 Φ:R×M→M,适合:

1. 对于 $p\in M$,$\Phi(0,p)=p$.

2. 对于 $t,s\in$R,$p\in M$,

$$\Phi(t,\Phi(s,p))=\Phi(t+s,p).$$

此时 α_p:R→M,$t\mapsto\Phi_t(p)=\Phi(t,p)$称为动力系统 Φ 在 $p\in M$ 处的积分曲线,α_p(R)$\subseteq M$ 称为 p 的轨道(见图).



流形上的流(flow on manifold) 即"流形上的动力系统".

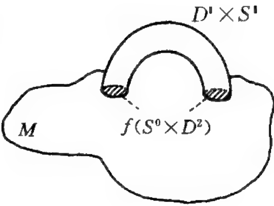
动力系统的积分曲线(integral curve on dynamical system) 见"流形上的动力系统".

一维流形的微分同胚分类(differentially homeomorphic classification of 1-Manifolds) 流形关于微分同胚的分类问题的一个重要结果.作为莫尔斯函数在流形分类上的简单应用,有结论:每个连通的一维微分流形或者微分同胚于圆周 S^1,或者微分同胚于R的某个区间.可见,本质上只有四个不同的一维微分流形,即 S^1,$[0,1]$,$(0,1)$,$[0,1)$.

紧致曲面的微分同胚分类(differentially homeomorphic classification of compact surfaces) 拓扑学(包括代数拓扑学、微分拓扑学)中的一个著名结果.这种完整的拓扑分类定理在数学中是少有成功的,因而是很重要的.事实上,紧致曲面的拓扑分类问题的研究可追溯到19世纪末默比乌斯(Möbius,A.F.)、若尔当(Jordan,C.)等,甚至更早的黎曼(Riemann,G.F.B.)的工作.运用莫尔斯函数的性质等得到的曲面(2维流形)的分类定理,也可用代数拓扑的方法(如同调性质或组合技巧)来证明.设 M 是2维流形,$f:S^0\times D^2\to M-\partial M$ 是嵌入映射,其中 D^2 是二维圆盘,则

$$M'=(M-\text{Int }f(S^0\times D^2))\cup_f(D^1\times S^1)$$

可以自然方式成为曲面,M'称为由 M 装上一个环柄(亦称施行"剜补运算"或"外科手术")得到的曲面(见图).于是得到:



1. 设 M 是紧致连通的(无边)可定向的曲面,则存在惟一整数 $p\geqslant0$,使得 M 微分同胚于装上 p 个环柄的球面,其中 p 称为 M 的亏格,此时 M 的欧拉特征 $\chi(M)=2-2p$.

2. 设 M 是不可定向的紧致连通的(无边)曲面,则存在惟一的整数 $p\geqslant1$,使得 M 微分同胚于 p 个互不相交的射影平面的连通和(它同胚于 S^n 上挖去 p 个互不相交的圆盘,而装上 p 个默比乌斯带),其中 p 称为 M 的亏格或默比乌斯数.

需指出,关于一般 n 维($n\geqslant3$)微分流形的分类问题是拓扑学中极其困难的课题,对于维数$\geqslant5$的单连通流形情形,斯梅尔(Smale,S.)等1962年的工作,以及20世纪80年代唐纳森(Donaldson,S.)与弗里德曼(Freedman,M.(H.))的工作,均在4维流形方面取得突破性进展.

默比乌斯数(Möbius number) 见"紧致曲面的微分同胚分类".

撰 稿 刘旺金 吴振德 何伯和
审 阅 孙以丰 吴振德 郑崇友

奇点理论与突变理论

奇点理论

奇点理论(the theory of singularity)　一门新兴的数学学科,它处在拓扑学、代数几何、微分几何、代数学、分析学等众多数学领域的交界处.追溯其历史渊源,有20世纪30年代,莫尔斯(Morse,M.)的临界点理论;20世纪40年代,惠特尼(Whitney,H.)的有关微分流形嵌入、浸入的奇点的工作;以及庞特里亚金(Понтрягин,Л.С.)与惠特尼等人的与示性类有关的奇点方面的工作.这是奇点理论的萌芽时期.1955年,惠特尼关于平面映到平面的映射的奇点的工作,标志着奇点理论开始作为一个独立的数学分支登上了数学舞台.1956年,托姆(Thom,R.)的论文《可微映射的奇点》,对奇点理论做了高度的概括,为其以后的发展提出了纲领式的描述;1960年,他在波恩做了系列演讲,使其纲领式的描述更加具体化.此后,奇点理论得到了蓬勃的发展,一方面奇点理论本身取得了重大进展,如玛瑟(Mather,J.N.)关于稳定性方面与阿诺尔德(Арнольд,В.И.)关于奇点分类方面的工作;另一方面是奇点理论在自然科学中的应用也取得了重大的成就,这就是20世纪60年代末托姆创立的突变理论.

奇点理论极大地推广了函数在极大值点与极小值点的性质的研究.设 $f:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^m$ 是可微映射,$f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$,点 $a\in\mathrm{R}^n$,映射 f 在点 a 的雅可比矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$$

的秩就称为 f 在点 a 的秩,记为$\mathrm{rank}f_a$.若$\mathrm{rank}f_a=\min(n,m)$,则称 a 是 f 的正常点.若 $\mathrm{rank}f_a<\min(n,m)$,则称 a 为 f 的奇点.奇点理论研究的任务之一就是研究可微映射在奇点附近的性态.当 $m=1$,映射就成为通常的函数,而研究函数在一点附近的性态是微积分的任务之一.如在微积分学中所知道的函数 $f(x)$在正常点(即 a 使$f'(a)\neq0$)附近有反函数(由反函数定理).又如当a 是 f 的奇点(即 $f'(a)=0$ 时),此时 f 在点 a 附近的性态比较复杂一些,须进一步观察 f 的二阶导数:若有 $f''(a)>0$,则 a 是 f 的极小值点;若有 $f''(a)<0$,则 a 是 f 的极大值点.对多个变元的函数情形就变得非常复杂,人们只是对某些特殊的奇点研究清楚了.例如,20世纪30年代,莫尔斯研究了较为简单的奇点,即所谓非退化临界点,对它们进行了分类,并求出了它们的标准型.莫尔斯的结果如下:设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一个可微函数,若在点 $a\in\mathrm{R}^n$ 有

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)=0,$$

则称点 a 为 f 的临界点;若还有矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)$$

是满秩的,则称 a 是 f 的非退化的临界点.莫尔斯证明:若点 a 是函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的非退化临界点,则可以在点 a 附近另选取适当的局部坐标$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,使得在这个局部坐标系中,f 的表达式为

$$f(a)-(y_1)^2-\cdots-(y_\lambda)^2+(y_{\lambda+1})^2+\cdots+(y_n)^2,$$

数 λ 称为 f 在点 a 处的指数.λ 可取 $0,1,\cdots,n$ 中某个数.因此,非退化临界点共有 $n+1$ 个类型.对退化临界点的研究却十分困难,阿诺尔德对此作出了重要贡献.而对一般映射的奇点分类研究更为复杂,经典的结果有惠特尼对平面到平面的映射的研究,他证明:对于可微映射 $f:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^2$,稳定的奇点只有两种:折叠点和尖点.前一种情形的标准型为

$$\begin{cases}y_1=x_1,\\ y_2=x_2^2;\end{cases}$$

后一种情形的标准型为

$$\begin{cases}y_1=x_1,\\ y_2=x_1x_2-\dfrac{1}{3}x_2^3.\end{cases}$$

而正常点情形的标准型为

$$\begin{cases}y_1=x_1,\\ y_2=x_2.\end{cases}$$

其中(x_1,x_2),(y_1,y_2)为 R^2 的适当的局部坐标,$f:(x_1,x_2)\to(y_1,y_2)$.20世纪70年代,玛瑟对于可微映射的稳定性的研究取得了重大进展;同时,在奇点理论发展的基础上诞生了一门新的学科,这就是法国数学家托姆创立的突变理论.

可微映射的秩(rank of differentiable mapping)　见“奇点理论”.

可微映射的正常点(regular point of differentiable mapping)　见“奇点理论”.

可微映射的奇点(singular point of differentiable mapping)　见“奇点理论”.

可微函数的临界点(critical point of differentiable function)　见“奇点理论”.

可微函数的非退化临界点(non-degenerate critical point of differentiable function)　见"奇点理论".

映射芽(germ of mapping)　奇点理论与突变理论的主要研究对象之一. 确定在一点的邻域上的连续映射的等价类. 精确地说,设 X,Y 是拓扑空间, $p\in X$,考虑由在点 p 附近定义的全体连续映射 g 所构成的集合 A, $A=\{g\mid g:U\to Y,U$ 是点 p 的开邻域,g 是连续映射$\}$. 在这个集合里引进等价关系如下:设 $g:U\to Y$, $f:V\to Y$ 是 A 中的两个映射,若存在点 p 的开邻域 W,使得 $W\subset U\cap V$,而且 f 和 g 在 W 上的限制相等,即 $f|_W=g|_W$,则称 f 和 g 等价. 在这个等价关系下的一个等价类就称为映射在点 p 的芽. 常记为 $h:(X,p)\to Y$. 这个类中的任何映射 g 都称为芽 h 的代表,而 h 也称为映射 g 在点 p 的芽. 关于映射的许多概念,如两个映射的复合映射等都可以自然的方式搬到映射芽上来. 特别地,函数的相乘、相加等概念能够以自然的方式搬到函数芽上. 在奇点理论与突变理论中研究的是可微映射芽.

等价映射(equivalent mapping)　见"映射芽".

函数芽(germ of function)　见"映射芽".

k 阶导网(k-jet)　奇点理论的一个重要概念. 函数或映射在一点的直到 k 阶的导数之全体,并把它看做高维空间的一个点. 考虑由 $\mathbb{R}^n$ 映入 $\mathbb{R}^p$ 的无穷次可微的,并把原点映为原点的映射全体做成的空间,记为 $C^\infty(n,p)$. 对于 $f,g\in C^\infty(n,p)$,若 f 和 g 在原点 O 的所有阶$\leqslant k$ 的导数都对应相等,则称 f 与 g 在原点处 k 阶等价. $C^\infty(n,p)$ 中的映射在这个等价关系下的一个等价类就称为 k 阶导网. 映射 f 的等价类就称为 f 在点 O 的 k 阶导网,记为 $j^kf(0)$. 在这个等价关系下,$C^\infty(n,p)$ 中的映射的所有等价类做成的集合记为 $J^k(n,p)$. 在 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^p$ 里选取定了坐标系之后,取 f 在点 O 的直到 k 阶导数的值作为 $j^kf(0)$ 的坐标,于是,$J^k(n,p)$ 也是欧氏空间,称为 k 阶导网空间. 特别地,对映射芽 $f\in C^\infty(n,p)$, f 的一阶导网 $j^1f(0)$ 就是 f 在原点处的雅可比矩阵,所以一阶导网空间 $J^1(n,p)$ 就可以看做是由 $n\times p$ 矩阵的全体做成的空间 $L(n,p)$.

k 阶等价(k-equivalence)　见"k 阶导网"和"导网丛".

k 阶导网空间(k-jet space)　见"k 阶导网".

导网丛(jet bundle)　奇点理论的一个重要概念. 指流形之间的所有可能的映射在各点的直到某阶导数之全体所形成的空间. 设 M,N 是两个微分流形,$f,g:M\to N$ 是无穷次可微的映射,$p\in M$, $k\geqslant 0$ 是一整数,称 f 与 g 在点 p 为 k 阶等价,是指满足下面两个条件:

1. $f(p)=g(p)=q\in N$.

2. 任意选取点 p 与点 $q=f(p)$ 的局部坐标系,对于选取的局部坐标系,f 和 g 的所有阶$\leqslant k$ 的导数在点 p 的值都对应地相等.

这个条件与点 p 和点 $q=f(p)$ 的局部坐标系的选取无关. 常以记号 $f\underset{p}{\overset{k}{\sim}}g$ 记 f 与 g 在 p 点 k 阶等价. 于是,k 阶等价是一个等价关系. 考虑映射集合

$$\{f\mid f:M\to N,f(p)=q,f \text{ 无穷次可微}\},$$

这个集合在 k 阶等价这个等价关系下分成一些等价类,由这些等价类做成的空间记为 $J^k(M,N)_{(p,q)}$,若

$$J^k(M,N)=\bigcup_{(p,q)\in M\times N}J^k(M,N)_{(p,q)},$$

则称 $J^k(M,N)$ 为 k 阶导网空间,元素 $\sigma\in J^k(M,N)$ 称为从 M 到 N 的映射的 k 阶导网. 若 $\sigma\in J^k(M,N)$,则有 $(p,q)\in M\times N$,使得 $\sigma\in J^k(M,N)_{(p,q)}$. 这时点 p 称为 σ 的"源",q 称为 σ 的"的". 又定义映射 α 与 β 如下:

$$\alpha:\begin{cases}J^k(M,N)\to M,\\ \sigma\to(\sigma\text{ 的“源”}),\end{cases}\quad \beta:\begin{cases}J^k(M,N)\to N,\\ \sigma\to(\sigma\text{ 的“的”}),\end{cases}$$

称 α 为源映射,β 为的映射. 从而,$\alpha\times\beta:J^k(M,N)\to M\times N$ 是一纤维丛. 称 $J^k(M,N)$ 为 $M\times N$ 上的 k 阶导网丛,而且 $J^k(M,N)$ 也是微分流形.

k 阶导网的源(the source of k-jet)　见"导网丛".

k 阶导网的目标(the target of k-jet)　见"导网丛".

源映射(source mapping)　见"导网丛".

目标映射(target mapping)　见"导网丛".

k 阶导网映射(k-jet mapping)　一种特殊的映射. 由给定的映射导出的到导网空间的映射. 是指:对给定的映射 f,对其定义域上的每个点,对应 f 在该点的 k 阶导网. 设 M,N 是微分流形,$f:M\to N$ 是无穷次可微映射,可以定义从 M 到导网丛空间 $J^k(M,N)$ 的映射 $j^kf:M\to J^k(M,N)$ 如下:

$$j^kf:\begin{cases}M\to J^k(M,N),\\ p\to j^kf(p)=\{f\text{ 在 }J^k(M,N)_{(p,f(p))}\text{ 里的等价类}\},\end{cases}$$

称映射 j^kf 为映射 f 的 k 阶导网映射. f 的 k 阶导网映射 j^kf 仍为无穷次可微映射.

可微函数芽环(ring of germs of differentiable functions)　一种特殊的环. 指可微函数芽的全体在以自然方式定义的加法、乘法下构成的环. 考虑 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的无穷次可微函数在原点 O 的芽,以记号 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to\mathbb{R}$ 记之. 以 $\varepsilon(n)$ 记这样的芽的全体做成的集合,并以自然的方式在其上定义函数芽的相加、相乘以及函数芽与实数的相乘. 对于这些运算,$\varepsilon(n)$ 成为具有单位元的交换环,且是 $\mathbb{R}$ 上的代数,称为可微函数芽环或称可微函数芽代数. $\varepsilon(n)$ 中那些在原点取值为 0 的芽之全体做成 $\varepsilon(n)$ 的惟一

极大理想，记为 $m(n)$. 这个极大理想 $m(n)$ 在奇点理论研究中起着重要的作用.

可微函数芽代数(algebra of germs of differentiable functions)　见"可微函数芽环".

可微函数芽环的极大理想(maximal ideal of the ring of germs of differentiable functions)　见"可微函数芽环".

惠特尼 C^∞ 拓扑(Whitney C^∞ topology)　可微映射空间中的一种拓扑. 在由微分流形 M,N 之间的可微映射做成的空间 $C^\infty(M,N)$ 里可以引进一种最常用的拓扑，这就是惠特尼 C^∞ 拓扑. 粗略地说，两个映射 f,g 称为靠得很近，若它们相应的各阶导数都相差很小. 精确定义如下：设 M,N 是两个微分流形，若 k 是一非负整数，对于导网丛空间 $J^k(M,N)$ 里的任一子集 U，以 $M(U)$ 记空间 $C^\infty(M,N)$ 的下述子集

$$\{f \mid f \in C^\infty(M,N), j^k f(M) \subset U\},$$

这里 $j^k f$ 是 f 的 k 阶导网映射，则有 $M(U)\cap M(V)=M(U\cap V)$. 对于 $J^k(M,N)$ 中的所有开集 U，以相应的这些 $M(U)$ 为基生成的 $C^\infty(M,N)$ 的拓扑就称为惠特尼 C^k 拓扑. 以 W_k 记 $C^\infty(M,N)$ 的在惠特尼 C^k 拓扑中的所有开集构成的集合. 从而，当 $k\leqslant l$ 时，有 $W_k \subset W_l$. 以集合

$$W=\bigcup_{k=0}^{\infty} W_k$$

为基而生成的 $C^\infty(M,N)$ 的拓扑就称为惠特尼 C^∞ 拓扑. 关于惠特尼拓扑最重要的结果是：设 M,N 是微分流形，对于惠特尼 C^∞ 拓扑，$C^\infty(M,N)$ 是贝尔空间.

惠特尼 C^k 拓扑(Whitney C^k topology)　见"惠特尼 C^∞ 拓扑".

导网的充分性(sufficiency of jets)　奇点理论的一种概念. 它是反映函数的导数决定函数的本质的那种概念. 设以 $C^r(n,p)$ 记全体 C^r 可微映射芽 $f:(\mathsf{R}^n,0)\to(\mathsf{R}^p,0)$ 做成的集合(C^r 指 r 次连续可微)，对一个给定的 k 阶导网 $z\in J^k(n,p)(k\leqslant r)$，若 $f\in C^r(n,p)$ 满足 $j^k f(0)=z$，则称 f 是 z 的一个 C^r 实现. 若对 z 的任意两个 C^r 实现 f 和 g，都存在 C^s 微分同胚芽 $\varphi:(\mathsf{R}^n,0)\to(\mathsf{R}^n,0)$ 和 $\phi:(\mathsf{R}^p,0)\to(\mathsf{R}^p,0)$ 使得右图交换，即 $\phi\circ f=g\circ\varphi$，则称 k 阶导网 $z\in J^k(n,p)$ 在 C^r 内是 C^s 充分的(这里 $k=1,2,\cdots,\infty,\omega$；$s,r=0,1,2,\cdots,\infty,\omega$；$k,s\leqslant r$；$C^\omega$ 表解析映射类).

$$\begin{array}{ccc}(\mathsf{R}^n,0) & \xrightarrow{f} & (\mathsf{R}^p,0)\\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\phi}\\ (\mathsf{R}^n,0) & \xrightarrow[g]{} & (\mathsf{R}^p,0)\end{array}$$

若 φ 把 $f^{-1}(0)$ 在点 O 的芽映为 $g^{-1}(0)$ 在点 O 的芽，则称 z 在 C^r 里是 v 充分的. 对于 $p=1$ 时，有下面定理. 设 $z\in J^r(n,1)$，f 是 z 的 C^r 实现：

1. 若 $r<\infty$，则下面条件是等价的：

1) z 在 C^r 内是 v 充分的.

2) z 在 C^r 内是 C^0 充分的.

3) 有 $c>0$，在点 O 的邻域里，

$$|\mathrm{grad} f(x)|\geqslant c\ |x|^{r-1}.$$

2. 若 $r=\infty$，则下面条件是等价的：

1) z 在 C^∞ 内是 v 充分的.

2) z 在 C^∞ 内是 C^0 充分的.

3) 有 $c,N>0$，在点 0 的邻域内，

$$|\mathrm{grad} f(x)|\geqslant c|x|^N.$$

4) z 在 C^∞ 内是有限 v 充分的.

5) z 在 C^∞ 内是有限 C^0 充分的.

3. 若 $r=\omega$，则下面条件是等价的：

1) z 在 C^ω 内是有限 v 充分的.

2) z 在 C^ω 内是有限 C^0 充分的.

3) 点 O 是 f 的孤立临界点(或点 O 不是临界点).

C^r 实现(C^r-realization)　见"导网的充分性".

C^s 充分性(C^s-sufficiency)　见"导网的充分性".

v 充分性(v-sufficiency)　见"导网的充分性".

映射芽的接触等价(contact equivalence of map-germs)　奇点理论的一个概念. 它是反映两个映射的零点集局部拓扑等价的概念. 设 $f,g:(\mathsf{R}^n,0)\to(\mathsf{R}^p,0)$ 是两个可微映射芽，若存在 C^∞ 微分同胚芽 $\varphi:(\mathsf{R}^n,0)\to(\mathsf{R}^n,0)$ 和可微映射芽 $L:(\mathsf{R}^n,0)\to \mathrm{GL}(\mathsf{R}^p)$，这里 $\mathrm{GL}(\mathsf{R}^p)$ 是一般线性群，$L(0)=I$，I 为 R^p 上的恒等变换，使得 $g(x)=L(x)\cdot f(\varphi(x))$，则称 f 和 g 是 C^∞ 接触等价的. 若 φ 与 L 均为 C^r 可微映射芽，则称 f 与 g 是 C^r 接触等价的. 当 φ 与 L 仅为连续时，就称 f 与 g 是 C^0 接触等价的，或称为拓扑接触等价的. 若 f 与 g 是 C^∞ 接触等价，则局部微分同胚芽 φ 把 $f^{-1}(0)$ 在点 O 的芽映成 $g^{-1}(0)$ 在点 O 的芽. 于是，f 与 g 是 C^∞ 接触等价的当且仅当存在一 C^∞ 微分同胚芽 $H:(\mathsf{R}^n\times\mathsf{R}^p,0\times0)\to(\mathsf{R}^n\times\mathsf{R}^p,0\times0)$ 使得：

1. $H(\mathsf{R}^n\times0,0\times0)=(\mathsf{R}^n\times0,0\times0)$.

2. $H(\mathrm{graph}\, f)=\mathrm{graph}\, g$.

用 $\mathscr{K}$ 记由所有满足下面条件的 C^∞ 微分同胚芽 $H:(\mathsf{R}^n\times\mathsf{R}^p,0\times0)\to(\mathsf{R}^n\times\mathsf{R}^p,0\times0)$ 相对于结合映射运算做成的群，这里关于 H 存在可微映射芽 $h:(\mathsf{R}^n,0)\to(\mathsf{R}^n,0)$，使得下图交换

$$\begin{array}{ccccc}(\mathsf{R}^n,0) & \xrightarrow{l} & (\mathsf{R}^n\times\mathsf{R}^p,0\times0) & \xrightarrow{\pi} & (\mathsf{R}^n,0)\\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle H} & & \downarrow{\scriptstyle h}\\ (\mathsf{R}^n,0) & \xrightarrow{l} & (\mathsf{R}^n\times\mathsf{R}^p,0\times0) & \xrightarrow{\pi} & (\mathsf{R}^n,0)\end{array}$$

这里 l 为嵌入映射 $l(x)=(x,0)$，π 为投影映射. 群

$\mathscr{K}$ 在 $C^\infty(n,p)$ 上的作用由下式刻画：$\langle 1,H\cdot f\rangle=H\circ\langle 1,f\rangle\circ h^{-1}$，$H\in\mathscr{K}$，$f\in C^\infty(n,p)$，1 记恒同映射芽：$(\mathrm{R}^n,0)\to(\mathrm{R}^n,0)$. 从而，$f$ 与 g 是接触等价的当且仅当 f 与 g 属于群 $\mathscr{K}$ 作用下的同一个轨道.

C^∞ 接触等价(C^∞ contact equivalence)　见"映射芽的接触等价".

C^r 接触等价(C^r contact equivalence)　见"映射芽的接触等价".

C^0 接触等价(C^0 contact equivalence)　见"映射芽的接触等价".

拓扑接触等价(topological contact equivalence)　见"映射芽的接触等价".

可微映射芽的无穷小稳定性(infinitesimal stablity of differentiable mapping germs)　利用切空间给出可计算的一种稳定性概念. 设 M,N 是两个微分流形，$f:M\to N$ 是可微映射，$p\in M$，以 $\tilde{f}_p$ 记映射 f 在点 p 的芽. 若对任意一个沿 f 的向量场在点 p 的芽 $\tilde{\tau}_p$，都存在 M 上的向量场在点 p 的芽 $\tilde{\zeta}_p$ 和 N 上的向量场在点 $q=f(p)$ 的芽 $\tilde{\eta}_q$，使得

$$\tilde{\tau}_p=\mathrm{d}f(\tilde{\zeta}_p)+f^*\tilde{\eta}_q,\tag{1}$$

这里 $f^*\tilde{\eta}_q(x)=\tilde{\eta}_q(f(x))$，$\mathrm{d}f$ 是映射 f 的切映射，则称 $\tilde{f}_p$ 是无穷小稳定的. 若可微映射 f 在点 p 的芽是无穷小稳定的，则称 f 在点 p 是无穷小稳定的. 若 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 是点 p 的局部坐标，$y=(y_1,x_2,\cdots,y_n)$ 是点 $q=f(p)$ 的局部坐标，f 的坐标函数为 $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$，则在点 p 的邻域里沿 f 的向量场 $\tau(x)$ 可以表示为

$$\tau(x)=\sum_{i=1}^n\tau_i(x)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right),$$

M 的向量场 ζ 在坐标邻域里可表示为

$$\zeta=\sum_{i=1}^m\zeta_i(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

N 的向量场 η 在坐标邻里可表示为

$$\eta=\sum_{i=1}^n\eta_i(y)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right),$$

所以，在局部坐标系中(1)式可以写为下面的形式

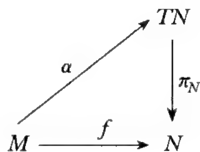
$$\tau_i(x)=\sum_{j=1}^m\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\zeta_j(x)+\eta_i(f_1(x),\cdots,f_n(x))\quad(i=1,2,\cdots,n).\tag{2}$$

若对于 R^n 上的任意一组函数芽 $\tau_1(x),\tau_2(x),\cdots,\tau_n(x)$，都存在 R^m 上的一组函数芽 $\zeta_1(x),\zeta_2(x),\cdots,\zeta_m(x)$ 和 R^n 上的一组函数芽 $\eta_1(y),\eta_2(y),\cdots,\eta_n(y)$ 使得

$$\tau_i(x)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\zeta_j(x)+\eta_i(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))+O(|x|^{k+1})\ (i=1,2,\cdots,n),$$

则称方程(2)为 k 阶可解的. 于是，有下面的定理：若 $f:M^m\to N^n$ 是可微映射，$p\in M^m$，$q=f(p)\in N^n$，则 f 在点 p 是无穷小稳定的当且仅当在选取点 p 和点 $q=f(p)$ 的局部坐标以后，所对应的方程(2)是 k 阶可解的.

可微映射的无穷小稳定性(infinitesimal stability of differentiable mappings)　利用切空间给出的一种关于映射的稳定性概念，其优点是可以计算且在一定条件下与通常稳定性等价. 设 M,N 是两个微分流形，$f:M\to N$ 是可微映射. 以 TN 记 N 的切丛，$\pi_N:TN\to N$ 记丛投影，$\alpha:M\to TN$ 是可微映射，若下图交换，即

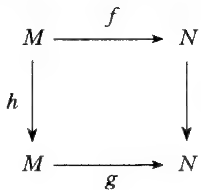


$$f=\pi_N\circ\alpha,$$

则称 α 是沿 f 的向量场. 若对每一个沿着 f 的向量场 α，都存在 M 上的向量场 ζ 和 N 上的向量场 η，使得 $\alpha=(\mathrm{d}f)(\zeta)+\eta\circ f$，则称 f 是无穷小稳定的，这里 $\mathrm{d}f:TM\to TN$ 记 f 的切映射. 稳定性难以判定，托姆(Thom, R.)提出的无穷小稳定性是可以计算的，从而在理论上便于应用. 玛瑟(Mather, J. N.)证明下面的重要定理：若 M 是一紧致微分流形，$f:M\to N$ 是无穷次可微的映射，则 f 是稳定的充分必要条件为 f 是无穷小稳定的.

沿映射 f 的向量场(vector field along a mapping f)　见"可微映射的无穷小稳定性".

可微映射的稳定性(stability of differentiable mapping)　反映一个映射经小扰动后本质不变的特性. 设 M,N 是两个微分流形，$f,g:M\to N$ 是两个无穷次可微映射，若存在无穷次可微的微分同胚 $h:M\to M$，$k:N\to N$，使得下图交换，即 $g=k\circ f\circ h^{-1}$，则称 f 与 g 是 C^∞ 等价的. 若上述的 h 与 k 是 r 次可微的微分同胚，则称 f 与 g 是 C^r 等价的. 若 h 与 k 仅是同胚，则称 f 与 g 是拓扑等价的或 C^0 等价的.



以 $C^\infty(M,N)$ 记由把 M 映入 N 的所有无穷次可微的映射做成的集合，在其中引入了惠特尼 C^∞ 拓扑. 映射 $f\in C^\infty(M,N)$ 称为 C^∞ 稳定的，若存在 f 在 $C^\infty(M,N)$ 里的邻域 U，使得 U 里的每个映射都 C^∞ 等价于 f. 若存在 f 在 $C^\infty(M,N)$ 里的邻域 U，使得 U 里的每个映射都拓扑等价于 f，则称 f 为拓扑稳定的. 于是，所有稳定映射组成的集合是映射空间 $C^\infty(M,N)$ 里的开集. 无论是从理论的角度还是从实际背景来考虑，有兴趣的问题是研究稳定映射. 因此，重要的问题是：稳定映射是否有普遍性，即它们是否足够多，使得任何一个映射都可用稳定的映射来逼近它？玛瑟(Mather, J. N.)于 1971 年证明了下面关于稳定性的基本定理：设 M^m,N^n 是两个微分流形，所有逆紧 C^∞ 稳定

映射在映射空间 $C^\infty(M^m,N^n)$ 里做成稠密子集的充分必要条件是 m,n 满足下面条件：记 $s=n-m$，

1. 当 $s\geqslant 4$ 时，$n<7s+8$.
2. 当 $3\geqslant s\geqslant 0$ 时，$n<7s+9$.
3. 当 $s=-1$ 时，$n<8$.
4. 当 $s=-2$ 时，$n<6$.
5. 当 $s\leqslant -3$ 时，$n<7$.

C^∞ 稳定性（C^∞ stability） 见“可微映射的稳定性”.

拓扑稳定性（topological stability） 见“可微映射的稳定性”.

映射芽的右-左等价（right-left equivalence of map-germs） 两个映射之间的一种关系. 指两个映射经过其定义域及值域的坐标变换后可以把一个变为另一个. 设 $f,g:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 是两个可微映射芽，若存在 C^∞ 微分同胚芽 $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ 和 $k:(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$，使得右图交换，即 $k\circ f=g\circ h$，则称映射芽 f 与 g 是 C^∞ 右-左等价的. 若 h,k 都是 C^r 微分同胚芽，则称 f 与 g 是 C^r 右-左等价的. 若 h,k 仅是同胚芽，则称 f 与 g 是拓扑右-左等价的. 记 $\mathscr{A}=\mathscr{R}\times\mathscr{L}$（群 $\mathscr{R},\mathscr{L}$ 的定义参见“映射芽的右等价”和“映射芽的左等价”）. 群 $\mathscr{A}$ 自然地作用在 $C^\infty(n,p)$ 上，这里 $C^\infty(n,p)$ 记 C^∞ 可微映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 之全体，即

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^n,0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^n,0)\\ \downarrow h & & \downarrow k\\ (\mathbb{R}^n,0) & \xrightarrow[g]{} & (\mathbb{R}^n,0)\end{array}$$

$$\begin{cases}\mathscr{A}\times C^\infty(n,p)\to C^\infty(n,p),\\ [(h,k),f]\to k\circ f\circ h^{-1},\end{cases}$$

f 与 g 右-左等价当且仅当存在 $(h,k)\in\mathscr{A}$ 使

$$k\circ f\circ h^{-1}=g,$$

亦即 f 与 g 属于群 $\mathscr{A}$ 作用下的同一个轨道.

C^∞ 右-左等价（C^∞ ringt-left equivalence） 见“映射芽的右-左等价”.

C^r 右-左等价（C^r right-left equivalence） 见“映射芽的右-左等价”.

映射芽的右等价（right equivalence of map-germs） 两个映射之间的一种关系. 指两个映射只经过其定义域的坐标变换后便可以把一个变为另一个. 设 $f,g:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 是两个可微映射芽，若存在 C^∞ 微分同胚芽 $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ 使得右图是交换的，

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^n,0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p,0)\\ \downarrow h & \nearrow g & \\ (\mathbb{R}^n,0) & & \end{array}$$

即 $f=g\circ h$，则称 f 与 g 是右等价的. 若 h 是 C^r 微分同胚芽，则称 f 与 g 是 C^r 右等价的. 若 h 仅是同胚芽，则称 f 与 g 是拓扑右等价的. 可以换一角度来说，所有 C^∞ 微分同胚芽 $h:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ 相对于结合映射运算做成一个群，记为 $\mathscr{R}$，群 $\mathscr{R}$ 自然地作用在 $C^\infty(n,p)$ 上，这里 $C^\infty(n,p)$ 记 C^∞ 可微映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 之全体，即

$$\begin{cases}\mathscr{R}\times C^\infty(n,p)\to C^\infty(n,p),\\ (h,f)\to f\circ h,\end{cases}$$

f 与 g 右等价当且仅当存在 $h\in\mathscr{R}$，使 $g=f\circ h$，亦即 f 与 g 属于群 $\mathscr{R}$ 作用下的同一个轨道.

映射芽的拓扑右等价（topological right equivalence of map-germs） 见“映射芽的右等价”.

映射芽的左等价（left equivalence of map-germs） 两个映射之间的一种关系. 指两个映射仅经过其值域的坐标变换后便可以把一个变为另一个. 设 $f,g:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 是两个可微映射芽，若存在 C^∞ 微分同胚芽 $k:(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 使得下图是交换的，即 $g=k\circ f$，则称 f 与 g 是左等价的. 若 k 是 C^r 微分同胚芽，则称 f 与 g 是 C^r 左等价的. 若 k 仅是同胚芽，则称 f 与 g 是拓扑左等价的. 换一角度来说，所有 C^∞ 微分同胚芽 $k:(\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 相对于结合映射运算做成一个群，记为 $\mathscr{L}$，群 $\mathscr{L}$ 自然地作用在 $C^\infty(n,p)$ 上，这里 $C^\infty(n,p)$ 记 C^∞ 可微映射芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ 之全体，即

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^n,0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p,0)\\ & \searrow g & \downarrow k\\ & & (\mathbb{R}^p,0)\end{array}$$

$$\begin{cases}\mathscr{L}\times C^\infty(n,p)\to C^\infty(n,p),\\ (k,f)\to k\circ f,\end{cases}$$

f 与 g 左等价当且仅当存在 $k\in\mathscr{L}$，使 $g=k\circ f$，亦即 f 与 g 属于群 $\mathscr{L}$ 作用下的同一个轨道.

映射芽的拓扑左等价（topological left equivalence of map-germs） 见“映射芽的左等价”.

光滑映射在一点的稳定性（stability of a smooth mapping at a point） 光滑映射在一点局部经小扰动后本质不变的特性. 设 M^m,N^n 是两个微分流形，$p\in M^m$，$q=f(p)$，$f:U\to N^n$ 是光滑映射，U 是点 p 的邻域. 若对于任何足够接近于映射 f 的映射 $\tilde{f}:U\to N^n$，都存在点 p 和点 q 的邻域 V 和 W，$p\in V\subset U\subset M^m$，$q\in W\subset N^n$ 和微分同胚嵌入 $h:V\to U$，$k:W\to N^n$，使得上图交换：

$$\begin{array}{ccc}M^m\supset U\supset V & \xrightarrow{f} & W\subset N^n\\ \downarrow h & & \downarrow k\\ M^m\supset U & \xrightarrow{\tilde{f}} & N^n\end{array}$$

$$M^n\supset U\supset V\xrightarrow{f}W\subset N^n,$$

即

$$k\circ f=\tilde{f}\circ h,$$

则称 f 在点 p 是稳定的. 若这里的 h 与 k 是同胚，则称 f 在点 p 是拓扑稳定的. 若 M^m,N^n 是解析流形，

f 是解析映射，而且这里的 h 和 k 是解析同胚，则称 f 在点 p 是解析稳定的. 于是，有下面阿诺尔德(Арнольд, В. И.)定理：设 U 是原点 $O\in\mathbb{R}^n$ 的邻域，$f:U\to\mathbb{R}^n$ 是解析映射，

$$f(0)=0,\ y=f(x),\ y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

若在 $x=0$ 的邻域里存在下面 n 个分析式

$$x_iE=\mathrm{d}f(x)\cdot H_i(x)+K_i(f(x))\ (i=1,2,\cdots,n),$$

则映射 f 在点 O 是稳定的. 这里 E 是 $n\times n$ 阶单位矩阵，$\mathrm{d}f(x)$是 f 的雅可比矩阵，$H_i(x)$，$K_i(y)$分别是 $x=0$，$y=0$ 的邻域里解析的 $n\times n$ 阶矩阵.

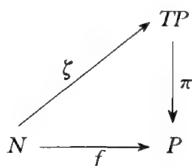
光滑映射在一点的拓扑稳定性(topological stability of a smooth mapping at a point)　见“光滑映射在一点的稳定性”.

解析映射在一点的解析稳定性(analytical stability of a analytical mapping at a point)　见“光滑映射在一点的稳定性”.

阿诺尔德定理(Arnold theorem)　见“光滑映射在一点的稳定性”.

映射芽的有限决定性(finite determinacy of map-germs)　映射在一点的局部性质，它可以由其在该点的泰勒展开的有限项所决定. 设 N，P 分别是 n 维和 p 维的两个微分流形，$x\in N$，$y\in P$，以 $\mathscr{F}$ 记所有可微映射芽 $f:(N,x)\to(P,y)$做成的集合. 粗略地说，称一个可微映射芽 f 是有限决定的，若选定局部坐标后，f 的泰勒展式前有限项做成的多项式映射与 f 等价. 精确定义如下：设 $\mathscr{S}$ 记群 $\mathscr{K}$，$\mathscr{R}$，$\mathscr{L}$，$\mathscr{A}$ 中之一(群 $\mathscr{R}$，$\mathscr{L}$，$\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{K}$ 的定义参见“映射芽的右等价”，“映射芽的左等价”，“映射芽的右-左等价”和“映射芽的接触等价”)，$f\in\mathscr{F}$，称 f 相对于群 $\mathscr{S}$ 是 k 决定的，若对任意 $g\in\mathscr{F}$，只要 $j^kf(x)=j^kg(x)$，都有 f 的 $\mathscr{S}$ 轨道包含 g，即映射芽 f 与 g 相对于 $\mathscr{S}$ 等价. 若 $k=\infty$，则称 f 是无限决定的. 对于一个映射 f，若存在一个正整数 k 使得 f 是 k 决定的，就称 f 是有限决定的.

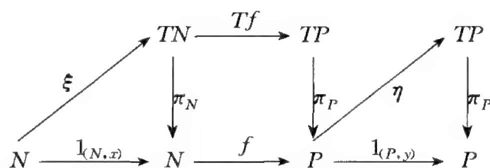
有限决定性理论是由玛瑟(Mather, J. N.)奠基的，他于 1969 年证明了有关的基本定理. 以$C(N)_x$，$C(P)_y$分别记由所有可微函数芽$(N,x)\to\mathbb{R}$，$(P,y)\to\mathbb{R}$ 做成的集合，它们是实数域 $\mathbb{R}$ 上的代数，分别含有惟一的极大理想 m_x，m_y. 由映射芽 $f:(N,x)\to(P,y)$导出同态 $f^*:C(P)_y\to C(N)_x$，对 $h\in C(P)_y$ 有 $f^*(h)=h\circ f$. TP 记 P 的切丛. 设可微映射芽 $\zeta:(N,x)\to TP$ 为沿映射芽 f 的向量场，即 $\pi\circ\zeta=f$，这里 π 是丛投影(见右图). $\theta(f)$记由所有沿映射芽 f 的 C^∞ 向量场做成的集合，它是 $C(N)_x$ 上的模. 以



$$1_{(N,x)}:(N,x)\to(N,x),\quad 1_{(P,y)}:(P,y)\to(P,y)$$

记恒同映射芽. 以 Tf 记由 f 导出的切映射. 定义映射 tf，wf 如下(见下图)：

$$tf:\begin{cases}\theta(1_{(N,x)})\to\theta(f),\\ \xi\to Tf\circ\xi,\end{cases}\qquad wf:\begin{cases}\theta(1_{(P,y)})\to\theta(f),\\ \eta\to\eta\circ f,\end{cases}$$



对于 $f\in\mathscr{F}$，设

$$\mathrm{d}(f,\mathscr{K})=\dim_{\mathbb{R}}\theta(f)/(tf[\theta(1_{(N,x)})]+f^*[m_y]\theta(f)),$$

$$\mathrm{d}(f,\mathscr{A})=\dim_{\mathbb{R}}\theta(f)/(tf[\theta(1_{(N,x)})]+wf[\theta(1_{(P,y)})]),$$

$$\mathrm{d}(f,\mathscr{R})=\dim_{\mathbb{R}}\theta(f)/tf[\theta(1_{(N,x)})]$$

$$\mathrm{d}(f,\mathscr{L})=\dim_{\mathbb{R}}\theta(f)/wf[\theta(1_{(P,y)})].$$

玛瑟证明了下面的基本定理：若 $\mathscr{S}$ 记群 $\mathscr{K}$，$\mathscr{R}$，$\mathscr{L}$，$\mathscr{A}$ 中之一，则映射芽 $f\in\mathscr{F}$ 关于群 $\mathscr{S}$ 为有限决定的充分必要条件是 $d(f,\mathscr{S})<\infty$.

映射芽的 k 决定性(k-determinacy of map-germs)　见“映射芽的有限决定性”.

映射芽的无限决定性(infinite determinacy of map-germs)　见“映射芽的有限决定性”.

奇点分类(classification of singularities)　亦称 Σ^i 分类. 按映射奇点的不同性质进行的分类. 设 M，N 是两个微分流形，$\dim M=m$，$\dim N=n$，而 $f:M\to N$ 是一个光滑映射. 按照映射 f 的一阶微分的秩来给奇点分类. $p\in M$，$(\mathrm{d}f)_p:TM_p\to TN_{f(p)}$记 f 在点 p 的切映射. 若有 $\dim\ker(\mathrm{d}f)_p=i$，则称点 p 为 Σ^i 型的奇点. 映射 f 的所有 Σ^i 型的奇点做成的集合记着 $\Sigma^i(f)$. $\Sigma^i(f)$称为一阶奇点集.

在奇点理论研究中基本观点之一是所谓一般性，即，并不关心对于一个给定的映射来说它有何种类型的奇点以及奇点集有什么性质等，而要研究的是，对于给定的维数 m，n，一般地，映射 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 有何种类型的奇点，亦即，对于把 $\mathbb{R}^m$ 映到$\mathbb{R}^n$ 的绝大多数映射来说，将会出现何种类型的奇点以及奇点集的性质如何. 托姆(Thom, R.)提出一个一般的方法来讨论这个问题，即通过导网空间来研究它. 托姆的思想把奇点理论的发展推进到了一个新的阶段，他的方法如下：若 $L(m,n)$记由 $m\times n$ 实矩阵全体做成的 $m\times n$ 维实线性空间，$L_r(m,n)$记由 $L(m,n)$中所有秩为 r 的矩阵做成的集合，则有下面的命题：$L_r(m,n)$是$L(m,n)$中余维为$(m-r)(n-r)$的光滑子流形. 因此，$L(m,n)$分解为光滑子流形$L_0(m,n)$，$L_1(m,n)$，…，$L_q(m,n)$ 的不交并，这里 $q=$

$\min(m,n)$，称此为 $L(m,n)$ 的自然分层，每个光滑流形 $L_r(m,n)$ 称为一个层. 由于一阶导网空间 $J^1(m,n)$ 与 $L(m,n)$ 有自然的等同，所以，$J^1(m,n)$ 有自然分层 $J^1(m,n)=L_q(m,n)\cup L_{q-1}(m,n)\cup\cdots\cup L_1(m,n)\cup L_0(m,n)$，$q=\min(m,n)$. 一阶导网丛 $J^1(M,N)$ 的纤维是 $J^1(m,n)$，以 $L_r(m,n)$ 代替 $J^1(m,n)$ 作为纤维，就得到 $J^1(M,N)$ 的一个子丛，把它记为 $L_r(M,N)$. 若 $f:M\to N$ 是光滑映射，$j^1(f):M\to J^1(M,N)$ 记 f 的一阶导网映射，则有

$$\Sigma^i(f)=j^1(f)^{-1}[L_r(M,N)],$$

这里 $r=m-i$. 这样通过在导网丛中构造 $L_r(M,N)$ 而得到了 Σ^i 型奇点的另一个定义：设 $f:M\to N$ 是一光滑映射，若 $j^1(f)$ 横截于 $J^1(M,N)$ 的所有子流形 $L_r(M,N)$，即 $j^1(f)\pitchfork L_r(M,N)$，对所有 r，则称 f 是一阶好映射. 若 f 是一阶好映射，则由有关横截性的命题就知道，这些 $\Sigma^i(f)$ 都是微分子流形. 又由横截性定理知道，一阶好映射全体在映射空间 $C^\infty(M,N)$ 中做成一个处处稠密的集合，实际上它是可数多个处处稠密的开集之交. 所以，一般说来，奇点集 Σ^i 是微分流形. 特别地，若微分流形 N 是实数集 $\mathbb{R}$，即映射 $f:M\to\mathbb{R}$ 是光滑函数，则 f 的 Σ^m 型的奇点就是通常的临界点.

Σ^i 分类（Σ^i classification） 即“奇点分类”.

Σ^i 型奇点（Σ^i type singularity） 见“奇点分类”.

一阶奇点集（first order singularity set） 见“奇点分类”.

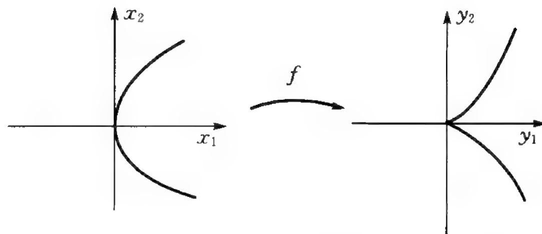
高阶奇点的托姆定义（higher order singularities, the definition of Thom） 高阶奇点的一种定义. 对一阶奇点进一步分类的一种方法. 在一阶奇点分类不足以充分刻画其性质时可做更细微的分类方法. 奇点的 Σ^i 分类（即一阶奇点）还不够精细，映射在两个同一类型 Σ^i 的奇点上，可能具有极不同的性态. 因此有必要对奇点做进一步的分类，托姆（Thom, R.）提出了一个构想. 先从一个具体的例子来看托姆的思想. 考虑映射 f 如下：

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\\ (x_1,x_2)\to(y_1,y_2),\end{cases}\qquad\begin{cases}y_1=x_1,\\ y_2=x_1x_2-\dfrac{1}{3}x_2^3.\end{cases}$$

f 的雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ x_2 & x_1-x_2^2\end{pmatrix}.$$

根据 Σ^i 型奇点的定义，$\Sigma^1(f)$ 为平面上的抛物线，除去抛物线 $x_1=x_2^2$ 之外，整个平面的其余部分为 $\Sigma^0(f)$. 抛物线 $\Sigma^1(f)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑曲线，因此可以考虑 f 在 $\Sigma^1(f)$ 上的限制映射 $f|\Sigma^1(f):\Sigma^1(f)\to\mathbb{R}^2$，此时，原点是 $f|\Sigma^1(f)$ 的 Σ^1 型奇点，奇点集



$\Sigma^1(f|\Sigma^1(f))$ 记为 $\Sigma^{1,1}(f)$. 抛物线 $x_1=x_2^2$ 除原点外其他点皆为 Σ^0 型奇点，奇点集 $\Sigma^0(f|\Sigma^1(f))$ 记为 $\Sigma^{1,0}(f)$. 这样就把 f 的奇点集 $\Sigma^1(f)$ 进一步分为两类奇点 $\Sigma^{1,1}(f)$ 和 $\Sigma^{1,0}(f)$. 对一般情况，托姆的构想如下：设 $f:M\to N$ 是光滑映射，若奇点集 $\Sigma^{i_1}(f)$ 是 M 的子流形，则可以考虑 f 在 $\Sigma^{i_1}(f)$ 上的限制映射 $f|\Sigma^{i_1}(f):\Sigma^{i_1}(f)\to N$. $f|\Sigma^{i_1}(f)$ 的 Σ^{i_2} 型奇点集记为 $\Sigma^{i_1,i_2}(f)$，即 $\Sigma^{i_1,i_2}(f)=\Sigma^{i_2}(f|\Sigma^{i_1})$，称为 f 的 Σ^{i_1,i_2} 型奇点. 这是二阶奇点. 若 $\Sigma^{i_1,i_2}(f)$ 还是 M 的子流形，则可以仿照上述构造三阶奇点

$$\Sigma^{i_1,i_2,i_3}(f)=\Sigma^{i_3}(f|\Sigma^{i_1,i_2}(f)).$$

最一般的情形，可以归纳构造如下：对于任意非负整数集 $I=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$，若

$$\Sigma^I(f)=\Sigma^{i_1,\cdots,i_k}(f)\subset M$$

已确定并且是 M 的子流形，则 $\Sigma^{i_{k+1}}(f|\Sigma^I(f))$ 就记为 $\Sigma^{i_1,\cdots,i_k,i_{k+1}}(f)$，即 $f|\Sigma^I(f):\Sigma^I(f)\to N$ 的 $\Sigma^{i_{k+1}}$ 型奇点称为 f 的 $\Sigma^{i_1,\cdots,i_k,i_{k+1}}$ 型奇点.

高阶奇点的波特曼定义（higher order singularities, the definition of Boardman） 高阶奇点的一种定义. 以严格的不变的方式给出高阶奇点的定义. 在托姆（Thom, R.）引进的高阶奇点的定义中，他已经注意到这个定义有原则性的缺点，即在他的归纳定义中，每一步都必须假定相应出现的 $\Sigma^I(f)$ 为子流形，否则定义的构造就进行不下去，所以不是对所有的映射都可以定义高阶奇点. 而要克服这个缺陷，就应该像定义一阶奇点时，在一阶导网丛 $J^1(M,N)$ 中以不变的方式定义出子流形 Σ^i 那样，在 k 阶导网丛 $J^k(M,N)$ 中以不变的方式定义出子流形 $\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}$，而映射 f 的 k 阶奇点集 $\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}(f)$ 就是子流形 $\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}$ 在导网映射 $j^kf:M\to J^k(M,N)$ 下的逆像，即 $\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}(f)=(j^k)^{-1}(\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k})$. 对于二阶奇点，这个问题由列文（Levine, H.）于 1964 年所解决，一般情形由波特曼（Boardman, J. M.）于 1967 年提出雅可比扩张概念所解决. 波特曼的定义如下：设 $\varepsilon(m)$ 是可微函数芽代数，I 是 $\varepsilon(m)$ 的有限生成的理想，对给定的整数 $k\geqslant 1$，任意选取 I 的一组生成元 $f_1,f_2,\cdots,f_n$，由 I 和雅可比矩阵 $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ 的所有 k 阶子式所生成的理想记为 Δ_kI，称为 I 的雅可比扩张. 从而，Δ_kI 与生成元 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的选取无关，也和 $\mathbb{R}^m$ 中的坐标系 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 的选取无关，它是

由 I 惟一决定的.由定义,当 $k>m$ 时,$\Delta_k I=I$,而且这些理想有下面包含关系

$$I\subseteq\Delta_m I\subseteq\Delta_{m-1}I\subseteq\cdots\subseteq\Delta_1 I\subseteq\varepsilon(m),$$

若 $\Delta_k(I)\neq\varepsilon(m)$,而 $\Delta_{k-1}(I)=\varepsilon(m)$,则称 $\Delta_k(I)$是 I 的临界雅可比扩张.引进记号 $\Delta^k I=\Delta_{m-k+1}I$,上面包含关系变为

$$I=\Delta^0 I\subseteq\Delta^1 I\subseteq\Delta^2 I\subseteq\cdots\subseteq\Delta^m I\subseteq\varepsilon(m).$$

假定 $\Delta^{i_1}I$ 是 I 的临界雅可比扩张,进一步考虑理想 $\Delta^{i_1}I$ 的临界雅可比扩张,设它为 $\Delta^{i_2}\Delta^{i_1}I$,照此继续下去就可以得到一个理想序列,$\Delta^{i_1}I\subseteq\Delta^{i_2}\Delta^{i_1}I\subseteq\cdots$,称$(i_1,i_2,\cdots)$为 I 的波特曼符号.对于任一可微映射芽

$$f:(\mathsf{R}^m,0)\to(\mathsf{R}^n,0),\quad f=(f_1,f_2,\cdots,f_n),$$

由映射分量 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 生成的理想记为 I_f,I_f 的波特曼符号就称为 f 的波特曼符号.对于给定的 k 个非负整数 $i_1,i_2,\cdots,i_k$,若映射芽 $f:(\mathsf{R}^m,0)\to(\mathsf{R}^n,0)$的波特曼符号有形式$(i_1,\cdots,i_k,\cdots)$,则称映射芽 f 为 $\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}$型(或称原点 O 为 f 的 $\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}$型奇点).例如:映射芽

$$f:\begin{cases}(\mathsf{R},0)\to(\mathsf{R},0),\\ x\to y=x^3\end{cases}$$

为 $\Sigma^{1,1,0}$型.映射芽

$$f:\begin{cases}(\mathsf{R}^4,0)\to(\mathsf{R}^4,0),\\ (x_1,x_2,x_3,x_4)\to(y_1,y_2,y_3,y_4),\end{cases}$$

$$y_1=x_1,\quad y_2=x_2,$$

$$y_3=x_3^2+x_4^2+x_1x_3+x_2x_4,\quad y_4=x_3x_4$$

为 $\Sigma^{2,0}$型的.

从映射芽的波特曼符号的定义,映射芽 f 的波特曼符号中前 k 个整数仅依赖 f 的 k 阶导网.于是,可以提出下面的定义:若 $\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}(m,n)\subseteq J^k(m,n)$ 由那些有代表芽为 $\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}$型的 k 阶导网组成,则有下面两个结果:

1. 集合 $\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}(m,n)\subseteq J^k(m,n)$为非空的充分必要条件是:$m\geqslant i_1\geqslant i_2\geqslant\cdots\geqslant i_k\geqslant 0$;$i_1\geqslant m-n$;由 $i_1=m-n$ 得 $i_1=i_2=\cdots=i_k$.

2. 若 $\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}(m,n)$在 $J^k(m,n)$中是非空的,则它是一个光滑子流形.

设 M,N 是两个维数分别为 m,n 的微分流形,k 阶导网丛 $J^k(M,N)$的纤维是 $J^k(m,n)$,以子流形 $\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}(m,n)$代替 $J^k(m,n)$作纤维就得到一个子丛,记为 $\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}$.若 $f:M\to N$ 是光滑映射,$j^kf:M\to J^k(M,N)$是 f 的 k 阶导网映射,则$(j^kf)^{-1}(\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k})$中的点就称为 f 的 $\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}$型的奇点.

由托姆的横截性定理,推出下面的命题:对于每一整数 $k\geqslant 1$,其导网映射 j^kf 横截于所有波特曼子流形 $\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}$的光滑映射 $f:M\to N$ 之全体,在映射空间 $C^\infty(M,N)$中是处处稠密的.一光滑映射 $f:M\to N$,若对每一整数 $k\geqslant 1$,j^kf 横截于所有波特曼子流形 $\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}$,则称 f 在波特曼意义下为一般的.此时,f 的高阶奇点集

$$\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}f=(j^kf)^{-1}(\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k})$$

是 M 的微分子流形.若 $f:M\to N$ 是光滑映射并且在波特曼意义为一般的,则有

$$\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k,i_{k+1}}f=\Sigma^{i_{k+1}}(f\,|\,\Sigma^{i_1,i_2,\cdots,i_k}f).$$

雅可比扩张(Jacobian extension) 见“高阶奇点的波特曼定义”.

临界雅可比扩张(critical Jacobian extension) 见“高阶奇点的波特曼定义”.

波特曼符号(Boardmam symbols) 见“高阶奇点的波特曼定义”.

玛尔格朗日预备定理(Malgrange preparation theorem) 分析学中的一个重要定理.经典的外尔斯特拉斯预备定理在可微函数范畴的推广.设$F(w,z_1,z_2,\cdots,z_n)$是在 $\mathsf{C}\times\mathsf{C}^n$ 的原点附近确定的 $n+1$ 个复变量的复值全纯函数,并且$F(w,0,\cdots,0)\neq 0$.若 $F(w,0,\cdots,0)$是 k 阶的,即 k 是使得

$$\frac{\partial^k F(0,\cdots,0)}{\partial w^k}\neq 0$$

的最小整数,则称函数 $F(w,z_1,z_2,\cdots,z_n)$关于变量 w 是 k 阶正则的.若 $F(w,z_1,z_2,\cdots,z_n)$关于变量 w 是 k 阶正则的,则有 $F(w,0,\cdots,0)=w^kg(w)$,这里 $g(w)$是在 C 的原点附近的全纯函数,而且 $g(0)\neq 0$.对确定在 $\mathsf{R}\times\mathsf{R}^n$ 的原点附近的光滑函数 $F(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$,可以类似地定义函数 $F(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$关于变量 t 是 k 阶正则的概念,即 $F(t,0,\cdots,0)$是 k 阶的.若 $F(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$关于 t 是 k 阶正则的,则同样有$F(t,0,\cdots,0)=t^kg(t)$,这里 $g(t)$是在 R 的原点附近确定的光滑函数.

外尔斯特拉斯(Weierstrass,(K. T.)W.)于1880 年证明了下面的结果,该结果现在称为外尔斯特拉斯预备定理,该结果断言:设 $F(w,z_1,z_2,\cdots,z_n)$是确定在 $\mathsf{C}\times\mathsf{C}^n$ 的原点的一个邻域上的全纯函数,若 $F(w,z_1,z_2,\cdots,z_n)$关于 w 是 k 阶正则的,则存在确定在 $\mathsf{C}\times\mathsf{C}^n$ 的原点的一个邻域里的复值全纯函数$q(w,z_1,z_2,\cdots,z_n)$和确定在 C^n 的原点的一个邻域里的复值全纯函数 $\lambda_0(z_1,z_2,\cdots,z_n)$,$\cdots$,$\lambda_{k-1}(z_1,z_2,\cdots,z_n)$,使得

$$\begin{aligned}&F(w,z_1,z_2,\cdots,z_n)\\&=(w^k+\lambda_{k-1}(z_1,z_2,\cdots,z_n)w^{k-1}+\cdots\\&\quad+\lambda_1(z_1,z_2,\cdots,z_n)w\\&\quad+\lambda_0(z_1,z_2,\cdots,z_n))q(w,z_1,z_2,\cdots,z_n),\\&\qquad q(0,\cdots,0)\neq 0.\end{aligned}$$

该定理是为进一步研究由 $F(w,z_1,z_2,\cdots,z_n)$的零点集做成的簇做准备的,所以称之为预备定理.斯巴兹(Späth,H.)于 1929 年进一步把预备定理推广为

下面类似于除法算法形式的所谓除法定理(外尔斯特拉斯除法定理):设 $F(w,z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 是确定在原点 $O\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^n$ 的一个邻域上的全纯函数,$G(w,z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 是确定在原点 $O\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^n$ 的一个邻域上的任意的全纯函数,若 $F(w,z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 关于 w 是 k 阶正则的,则存在确定在原点 $O\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^n$ 的邻域上的全纯函数 $q(w,z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 和确定在原点 $O\in\mathbf{C}^n$ 的邻域上的全纯函数

$$r_0(z_1,z_2,\cdots,z_n),\ \cdots,\ r_{k-1}(z_1,z_2,\cdots,z_n),$$

使得

1. $G=qF+r$,其中
$$\begin{aligned}&r(w,z_1,z_2,\cdots,z_n)\\&=r_{k-1}(z_1,z_2,\cdots,z_n)w^{k-1}+\cdots\\&\quad+r_1(z_1,z_2,\cdots,z_n)w+r_0(z_1,z_2,\cdots,z_n).\end{aligned}$$
2. q 和 $r_1,r_2,\cdots,r_{k-1}$ 是惟一的.

托姆(Thom,R.)于 1960 年发现:若外尔斯特拉斯预备定理对于光滑函数成立,则它对奇点理论将有重要的作用.在托姆的影响下,玛尔格朗日(Malgrange,B.)于 1962 年证明了下面的重要定理(玛尔格朗日预备定理):设 $F(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是确定在 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 的原点 O 的邻域上的光滑实值函数,若 $F(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 关于 t 是 k 阶正则的,则存在确定在原点 $O\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 的一个邻域上的光滑实值函数 $q(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和确定在原点 $O\in\mathbf{R}^n$ 的一个邻域上的光滑实值函数 $\lambda_0(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,\lambda_{k-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,使得

$$\begin{aligned}&F(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=[t^k+\lambda_{k-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)t^{k-1}+\cdots\\&\quad+\lambda_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)t\\&\quad+\lambda_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)]q(t,x_1,x_2,\cdots,x_n),\\&\qquad q(0,\cdots,0)\neq 0.\end{aligned}$$

玛瑟除法定理:若 $F(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是确定在原点 $O\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 的邻域上的光滑函数,而 F 关于 t 是 k 阶正则的,则对任意确定在原点 $O\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 的邻域上的光滑函数 $G(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$,都存在确定在原点 $O\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 的邻域上的光滑函数 $q(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和确定在原点 $O\in\mathbf{R}^n$ 的邻域上光滑函数

$$r_0(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ \cdots,\ r_{k-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

使得 $G=qF+r$,其中

$$r(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=0}^{k-1}r_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)t^i.$$

对于预备定理的应用而言,最方便的是代数形式的预备定理,现叙述如下:设 M,N 是两个微分流形,$p\in M,q\in N$,$C_p^\infty(M)$ 和 $C_q^\infty(N)$ 分别记由 M 和 N 上的光滑函数在点 p 和 q 上的芽全体做成的环,即可微函数环,它们有惟一的极大理想,分别记为 $m_p(M)$ 和 $m_q(N)$.用 $f:(M,p)\to(N,q)$ 记 C^∞ 映射 $f:M\to N$ 在点 p 的芽,其中 $f(p)=q$,f 自然地导出环同态

$$f^*:\begin{cases}C_q^\infty(N)\to C_p^\infty(M),\\ \varphi\to\varphi\circ f.\end{cases}$$

广义玛尔格朗日预备定理:设 M,N 是两个微分流形,$p\in M,q\in N,f:(M,p)\to(N,q)$ 是 C^∞ 映射芽.若 A 是有限生成的 $C_p^\infty(M)$ 模,则 A 是有限生成的 $C_q^\infty(N)$ 模的充分必要条件为 $A/m_q(N)\cdot A$ 是 $\mathbf{R}$ 上的有限维向量空间.其中环 $C_q^\infty(N)$ 在 A 上的作用是通过环同态 f^* 来确定的.

外尔斯特拉斯预备定理(Weierstrass preparation theorem) 见"玛尔格朗日预备定理".

外尔斯特拉斯除法定理(Weierstrass division theorem) 见"玛尔格朗日预备定理".

玛瑟除法定理(Mather division theorem) 见"玛尔格朗日预备定理".

广义玛尔格朗日预备定理(generalized Malgrange preparation theorem) 见"玛尔格朗日预备定理".

映射芽的决定性(determinacy of map-germs) 反映映射在一点的局部性质,它可以由其在该点的某些导数所决定.设 N,P 为光滑流形,$x_0\in N,y_0\in P$,C_N 表示由无穷次可微函数芽 $(N,x_0)\to\mathbf{R}$ 的全体构成的集合,$\{y_1,y_2,\cdots,y_p\}$ 表示 y_0 的局部坐标,$p=\dim P$.设 M 为

$$(C_N)^p=\underbrace{C_N\times\cdots\times C_N}_{p\text{个}}$$

的 $\mathbf{R}$ 线性子空间.给定一个无穷次可微映射芽 $f:(N,x_0)\to(P,y_0)$,若存在可微映射芽 $g:(N,x_0)\to(P,y_0)$ 使得

$$(y_1\circ g-y_1\circ f,\cdots,y_p\circ g-y_p\circ f)\in M,$$

则称 g 是 f 的 M 逼近.若对于 f 的每个 M 逼近 g,f 和 g 关于右-左等价关系都是 C^∞ 等价的,则称 f 是 M 决定的.注意,在一般情况下,f 的 M 决定性与点 y_0 的局部坐标的选取有关,但是,当 M 是 C_N 的某个理想 I 的 p 次直积时,就与坐标系的选取无关.

映射芽的逼近(approximation of map germ) 见"映射芽的决定性".

突变理论

突变理论(catastrophe theory) 一门新兴的数学学科.一种自然现象或一个技术过程,在发展变化过程中常常会从一个状态跳跃式地变到另一个状态,或者说经过一段时间缓慢的连续变化之后,在一定的外界条件下,会产生一种不连续的变化,这就是所谓的突变现象.这类突变现象在大自然以及在技

术中都是普遍存在的. 例如，一定质量的气体在一定的温度和压力之下会突然变成液体，天气的突然变化会产生暴风雨，地壳的剧烈运动会引起地震，容器里的几种物质在一定的外界条件下会发生化学反应以及胚胎的发育等. 这些现象都是突变现象. 而微分方程描述的现象都是连续变化的，这类不连续的突变现象无法用通常分析方法——微分方程去描述. 托姆(Thom, R.)于 1969 年在《生物学中的拓扑模型》一文中，首次提出了描述突变现象的数学模型；其后他于 1972 年出版的《结构稳定性与形态发生》一书中较系统地阐述了他的突变理论思想，他用动力系统的拓扑理论为自然现象特别是生物学的形态进化中的突变现象提供了数学模型，从而引起了国际数学界的广泛注意及不同见解之间的激烈争论. 英国数学家齐曼(Zeeman, E. C.)是突变论的积极倡导者和开拓者，他于 1969 年发明的突变机械对于解释这一理论起了极为积极的作用，他还将这一理论广泛地应用于物理、医学、经济学以及社会科学等领域. 托姆以“突变”命名了这一学科.“突变”的英文为 catastrophe，源于希腊语 katastrohpé，意指灾难性变化(因此有人称突变为灾变).

突变数学模型(mathematical models of catastrophe)　刻画突变现象的数学模型. 在突变理论中，一个现象(或系统)可以用一个势函数 f 来描述，即：

1. 存在称为内部空间(或状态空间)的流形 M，M 是 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 内的开集，$\mathbf{R}^n$ 的点 x 的坐标用 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示. x_i 称为内部变量或状态变量，$i=1,2,\cdots,n$.

2. 存在称为外部空间(或控制空间)的 $\mathbf{R}^m$ 的开集 U，U 的点 u 用坐标 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 表示，u_j 称为外部变量(或控制变量)或外参数($j=1,2,\cdots,m$).

3. 存在一个势函数 f，它是 $M\times U$ 上的函数，即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n;u_1,u_2,\cdots,u_m)$，对给定的控制参数 $u_1,u_2,\cdots,u_m$，系统的状态 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 应使势函数 f 取极小值.

在基本突变模型中，$m\leqslant 4$，描述现象的势函数 f 为一个可微函数 $f:M\times U\to\mathbf{R}$，对应于参数 u 的势函数 f_u(即 $f_u(x)=f(x,u)$)的局部极小值一般确定了现象的一个可能状态. 这一现象的过程则是这些状态的集合. 若现象(系统)发展的规律是由一个依赖于外参数 u 的状态空间 M 上的势函数所描述，则称为静模型. 若现象发展的规律是由一个依赖于外参数 u 的状态空间 M 上的向量场所描述，则称为代谢模型.

内部空间(internal space)　见“突变数学模型”.

内部变量(internal variable)　见“突变数学模型”.

状态空间(state space)　见“突变数学模型”.

状态变量(state variable)　见“突变数学模型”.

外部空间(external space)　见“突变数学模型”.

外部变量(external variable)　见“突变数学模型”.

控制空间(control space)　见“突变数学模型”.

控制变量(control varible)　见“突变数学模型”.

外参数(external parameter)　见“突变数学模型”.

静模型(static model)　见“突变数学模型”.

代谢模型(metabolic model)　见“突变数学模型”.

齐曼突变机械(the Zeeman catastrophe machine)　一个用以解释突变现象的力学模型. 它是齐曼(Zeeman, E. C.)于 1969 年发明的. 用图钉将图 1 中直径为一个单位的(设它为无重量的)圆盘固定在一个平板上，使圆盘能绕中心 A 自由转动. 取两条长度为 1 的橡皮筋. 第一条的一端固定在圆盘的边缘的定点 C，另一端固定在平板上的点 B 使 $AB=2$；第二条橡皮筋的一端也固定在点 C，另一端点 P 为自由端. 把自由端用手拉住，让它在圆盘所在的平板(称为控制平面)上移动. 自由端点称为控制点. 每当控制点固定时，圆盘就停止在一个位置上. 圆盘的这些位置就是与控制点对应的系统状态. 用 θ 表示角 $\angle BAC$，这个角 θ 刻画了圆盘的状态，则当控制点连续平稳变化而橡皮筋保持适度的紧张时，一般地，角度 θ 也随之连续平稳变化. 但实验表明，当控制点 P 移动到

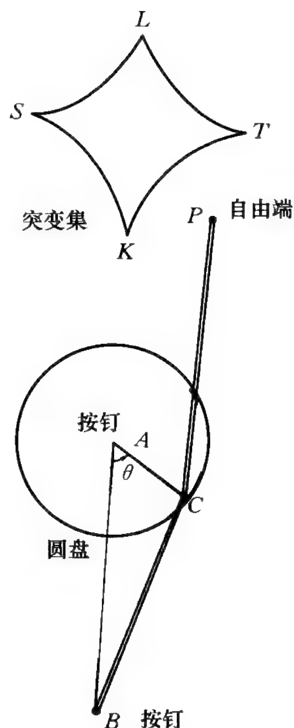


图 1

某些特别的位置(突变点)时,圆盘会急剧地从一个状态跳跃到另一个状态(即控制点的微小变化引起θ的不连续的、跳跃式的变化),这就是这个系统的突变.在平板上标出这些突变点的位置,会发现它们

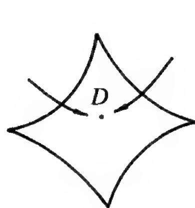


图 2

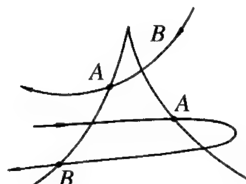


图 3

形成曲边钻石形的轮廓线.具体地,当自由端P在曲边四点形以外时,点P的每一位置仅决定圆盘的惟一状态;而在曲边形内,P的同一位置可能引起圆盘的两个不同的状态:当P从左边平稳进入曲边形并接近内点D,圆盘平稳地移动到一个状态;而当P从右边平稳地进入曲边形并接近同一点D时(如图2),圆盘会进入另一个状态.

另外(如图3),当点P从曲边形的一边进入曲边形又穿出时,在穿出的瞬间(图上曲边的圆点处)圆盘会发生跳跃现象,从一个状态跳跃式地变为另一个状态.由圆盘和橡皮筋所构成的这个力学系统就称为齐曼突变机械.这个力学系统的上述突变现象的动力学解释如下(如图4):设在角度为θ时二橡皮筋的长度分别为e,e',橡皮筋的弹性系数为λ,点P的坐标为(u,v),点A为坐标原点,系统的势能为$V_{uv}(\theta)$.由胡克定律

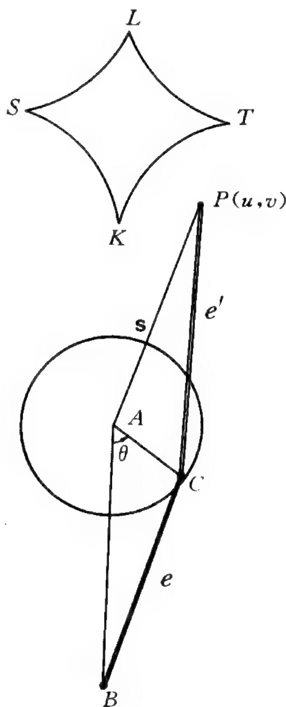


图 4

$$V_{uv}(\theta)=\frac{\lambda}{2}[(e-1)^2+(e'-1)^2].$$

经简单计算可得:

$$e=\sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2},$$

$$e'=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\cos\theta-u\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin\theta+v\right)^2}.$$

由此可得势能V作为控制参数u,v和状态参数θ的函数的表示式.为使V在形式上较为简单,可以适当选取新的参数a,b(只依赖于u,v)和x(只依赖于θ),做坐标变换$(u,v,\theta)\to(a,b,x)$后得到V的表示式为

$$V=V_{a,b}(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}ax^2+bx.$$

由最小势能原理知,在一定的控制条件下(a,b数值一定时),这个力学系统的状态(x的实际取值)应使势能V达到极小,即刻画圆盘实际位置的x应满足

$$\frac{\partial V_{a,b}}{\partial x}=x^3+ax+b=0.$$

这个方程在以(a,b,x)为坐标的三维空间中的图像

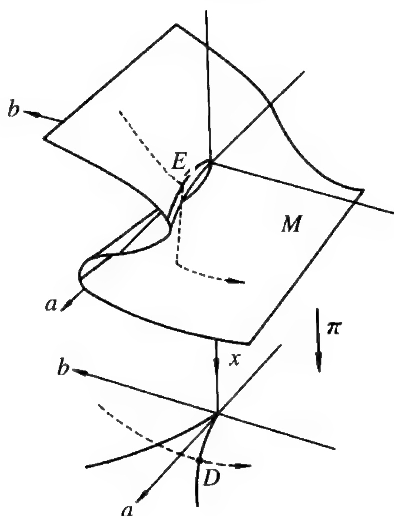


图 5

一般是一个曲面M(如图5).M称为状态曲面或突变流形,因为一般M上一点表示圆盘的一个状态.将M投影到控制平面(a,b)上去,当点P在(a,b)平面上的尖点形区域内时,同一个(a,b)值在投影映射π下有两个逆像(位于曲面M上粗黑线内),即有两个可能的状态存在.另外,当点P从左方进入尖点形区域后于点D处穿出,M上对应的动点则在点E处由曲面的上叶从折叠处跌落到下叶,即所表示的状态(圆盘位置)发生了突变.

控制平面(control plane) 见"齐曼突变机械".

控制点(control point) 见"齐曼突变机械".

状态曲面(state surface) 见"齐曼突变机械".

余维数(codimension) 对突变理论中势函数的一种刻画.表示自然现象受外部条件影响时,起作用的因素的多少.若用势函数来描述现象,则余维数即外部变量(参数)的个数.在托姆(Thom,R.)的基本突变模型中,余维数都在1与4之间.在数学上,一个定义在$\mathbb{R}^n$的原点附近的可微的局部函数$f:U$

$\to\mathrm{R}$（“局部”指定义域 U 是 R^n 中包含原点的任意小的一个邻域，“可微”指 f 可以求任意阶的偏导数，以下同）的余维数定义为

$$\mathrm{cod}f=\dim_{\mathrm{R}}\left(m(n)\Big/\left\langle\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\rangle\right),$$

$m(n)$是实向量空间，这里 $\dim_R$ 表示实向量空间的实维数. 等式右边的意义为：设 $\varepsilon(n)$表示一切 n 元的可微局部函数所成的实向量空间. 实际上，$\varepsilon(n)$还是 R 上的代数. 若 $f,g\in\varepsilon(n)$，$\alpha\in\mathrm{R}$，则

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x),$$
$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x),$$

它们分别定义在 $U\cap V$ 或 U 上，其中 U,V 分别是 f 和 g 的定义域. $m(n)$是$\varepsilon(n)$的子空间，由满足 $f(0)=0$ 的 f 组成，$m(n)$是 $\varepsilon(n)$的理想. $\left\langle\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\rangle$ 表示 $\varepsilon(n)$的另一个子空间，由形如

$$\sum_{i=1}^{n}h_i\partial f/\partial x_i\quad(h_i\in\varepsilon(n))$$

的局部函数组成. $\mathrm{cod}f$ 表示这两个子空间的商空间的维数（假定$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)=0$，即原点 O 是 f 的临界点，这是突变理论中遇见的状态函数都能满足的，从而有$\left\langle\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\rangle\subset m(n)$）. 若 $\mathrm{cod}f$ 为一整数，则 f 称为有限余维的；否则，称为无限余维的.

有限余维数(finite codimension)　见“余维数”.

无限余维数(infinite codimension)　见“余维数”.

局部函数(local function)　见“余维数”.

结构稳定性(structural stability)　突变理论的基本概念与基本问题. 反映在近似相同的条件下，所得结果也近似相同的特性. 在科学实践中，自然要求实验的可重复性：相同的条件总能得到相同的结果. 但这只能是一个理想的主张，因为绝对相同的条件与绝对相同的结果都是不可能的. 因此，人们实际上期望的是在近似相同的条件下的重复实验能得到近似相同的结果. 这种自然的、实际的重复性，称为结构稳定性. 很自然的看法是，凡能重复观察到的事物都必是结构稳定的. 结构稳定性包含两件事：

1. 什么样的条件被认为是近似相同的？或者说允许条件的何种小扰动. 一个稍微理想化的物理例子有助于说明这一点. 一个悬挂在真空中的无摩擦摆在规则地摆动. 用一个稍大一点的初始推动来干扰它一下，它仍将用几乎同一个周期继续规则地摆动. 在这个意义上说，这个系统是结构稳定的. 若干扰用放入一点空气来代替，则摆动将逐渐消失. 在这个意义上说，它是结构不稳定的. 但是，若只注意仅持续 50 个摆幅的实验，则察觉不到变化，而它又是构造稳定的了. 最后，回到无空气系统的原来的扰动，但着眼于在一年（或更长）的时间内，持续性就会有本质上的差异，再次不稳定.

2. 什么样的结果被认为是近似相同的？或者说何时两个结果是同型的，这便是对状态的等价性的种类的要求.

上述讨论用数学语言描述如下：一个现象的势函数为 $f:\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^m\to\mathrm{R}$，坐标$(x,u)\in\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^m$. 称 f 为结构稳定的，若对于任何充分小的函数 $p:\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^m\to\mathrm{R}$（即 p 本身及所有偏导数在原点 O 的某个邻域内的值都很小），$f+p$ 与 f 是光滑等价的，即：

1. 存在可微局部映射 $y:\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^m\to\mathrm{R}^n$，使得对每个 $u\in\mathrm{R}^m$，映射 $y_u:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$，$y_u(x)=y(x,u)$是局部微分同胚.

2. 存在局部微分同胚 $e:\mathrm{R}^m\to\mathrm{R}^m$.

3. 存在局部可微函数 $\gamma:\mathrm{R}^m\to\mathrm{R}$，使得

$$(f+p)(x,u)=f(y_u(x),e(u))+\gamma(u)$$
$$((x,u)\in\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^m).$$

其中“局部”指(x,u)仅在 $\mathrm{R}^n\times\mathrm{R}^m$ 的原点附近，“可微”指映射有各阶偏导数.

托姆分类定理(Thom classification theorem)　突变理论的核心定理. 一个局部函数 $f:U\to\mathrm{R}$，$U\subset\mathrm{R}^n$，称为一个奇点，若 $f(0)=0$，$\partial f/\partial x_i(0)=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 全体奇点集为 $m^2(n)$. 设 $f,g\in m^2(n)$，若存在局部微分同胚 $h:U\to V$，使

$$f(x)=g[h(x)]\ (x\in U),$$

则称 f 和 g 是同构的（或等价的），记为 $f\sim g$，这里“局部微分同胚 h”是说，h 是一个局部坐标变换，使 h 和逆变换 h^{-1}都有各阶偏导数，U,V 分别是 f,g 的定义域. 托姆(Thom，R.)用奇点理论的方法证明了下面的分类定理：若 $f\in m^2(n)$，$1\leqslant\mathrm{cod}f\leqslant4$，则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$\sim\pm g(x_1,x_2,\cdots,x_r)+\sum_{i=r+1}^{n}\varepsilon_ix_i^2$$
$$(\varepsilon_i=1\text{ 或 }-1,\ r=1\text{ 或 }2),$$

其中 g 为下列 7 种奇点之一：

$\mathrm{cod}f$	奇点 g
1	x_1^3
2	x_1^4
3	x_1^5
3	$x_1^3+x_2^3$
3	$x_1^3-x_1x_2^2$
4	x_1^6
4	$x_1^2x_2+x_2^4$

奇点(singularity)　见“托姆分类定理”.

开折(unfolding)　突变理论的基本概念.突变现象的势函数称为一个奇点的开折.函数 $\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的一个 r 开折 (r,f) 是一个函数 $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}$,满足

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,\cdots,0)=\eta(x_1,x_2,\cdots x_n),$$

r 称为开折的维数.因此,η 的一个 r 开折可以看做是有 r 个参数的一族 n 元函数,η 是族中一员,对应于参数 $u=(0,\cdots,0)$.考虑 η 的各个开折之间的关系,设 (r,f),(s,g) 为 η 的二开折.从 (r,f) 到 (s,g) 的态射 $(\varphi,\psi,\varepsilon):(r,f)\to(s,g)$ 为满足下列条件的映射的组 $(\varphi,\psi,\varepsilon)$:

1. $\varphi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s$,满足

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,\cdots,0)=(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,\cdots,0).$$

2. $\psi:\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^s$ 满足 $\pi_s\circ\varphi=\psi\circ\pi_r$,其中 $\pi_s:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^s$,$\pi_r:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^r$ 为投影.

3. $\varepsilon:\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}$ 满足 $f=g\circ\varphi+\varepsilon\circ\pi_r$,$\varepsilon(0)=0$.

此时称开折 (r,f) 为从开折 (s,g) 经 $(\varphi,\psi,\varepsilon)$ 诱导的.当 φ,ψ 是微分同胚时,称射式是同构映射.η 的开折 (r,f),(s,g) 的加法定义为

$$(r,f)+(s,g)=(r+s,f+g-\eta),$$

其中

$$(f+g-\eta)(x,u,v)=f(x,u)+g(x,v)-\eta(x).$$

η 的 r 定常开折 (r,η) 为

$$\eta(x_1,x_2,\cdots,x_n,u_1,u_2,\cdots,u_r)=\eta(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

因此有 $(r,f)+(s,\eta)=(r+s,f)$.

r 开折(r-unfolding)　见“开折”.

开折的维数(dimension of unfolding)　见“开折”.

射式(morphism)　见“开折”.

诱导开折(induced unfolding)　见“开折”.

定常开折(constant unfolding)　见“开折”.

通用开折(versal unfolding)　一类最基本、最重要的开折.奇点 η 的一个开折称为通用开折,若 η 的任何开折均可从它诱导.通用开折是结构稳定的.

玛瑟定理:

1. 奇点 η 有通用开折当且仅当 η 是有限余维的.

2. η 的两个 r 参数的通用开折是同构的.

3. η 的每一个通用开折 (s,g) 同构于 (r,f)+定常开折,这里 r 是 η 的通用开折中维数最小者,f 依赖于 g.

万有开折(universal unfolding)　一类特殊的开折.奇点 η 的通用开折(若存在)中维数(即参数个数)最小者,称之为 η 的万有开折.由通用开折及奇点理论,有下面的结果:

1. η 的任意两个万有开折同构.

2. $\operatorname{cod}\eta=r$ 当且仅当 η 的万有开折的维数为 r.

3. 若 $\operatorname{cod}\eta=r$,$b_1(x)$,$b_2(x)$,$\cdots$,$b_r(x)$ 是

$$m(n)\Big/\left\langle\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\right\rangle$$

的一组基元的代表时,则

$$f(x,u)=\eta(x)+b_1(x)u_1+\cdots+b_r(x)u_r$$

是 η 的万有开折.

4. η 的任一通用开折同构于一个万有开折+定常开折.

托姆(Thom,R.)的 7 个基本突变模型的势函数便是分类定理中 7 个奇点的万有开折.

基本突变(elementary catastrophe)　突变理论的主要研究对象与基本内容.指那些现象被一个势函数所描述,且其外参数不超过 4 时,势函数的分类.托姆(Thom,R.)在分类定理与开折理论的基础上创立的 7 种基本的突变模型是突变理论的主要内容.从数学上来说,它们的势函数即奇点分类定理中的奇点的万有开折;从模型的意义来说,它们是外部控制参数在 1 与 4 之间的稳定静模型必等价于其中之一.这 7 个模型如下:

codη	奇点 η	标准势函数 f	突变名称
1	x^3	x^3+ux	折叠型
2	x^4	x^4+ux^2+vx	尖点型
3	x^5	$x^5+ux^3+vx^2+wx$	燕尾型
3	x^3+y^3	$x^3+y^3+uxy+vx+wy$	双曲脐点型
3	x^3-xy^2	$x^3-xy^2+u(x^2+y^2)+vx+wy$	椭圆脐点型
4	x^6	$x^6+tx^4+ux^3+vx^2+wx$	蝴蝶型
4	x^2y+y^4	$x^2y+y^4+ux^2+vy^2+wx+ty$	抛物脐点型

突变约定(catastrophe convention)　突变理论的一个基本概念.用来确定在两个或多个平衡位置中的选择准则.设 $f:M\times U\to\mathbb{R}$ 为一突变模型的势函数.在点 $u\in U$ 的一个局部系是 $f|M\times\{u\}\to\mathbb{R}$ 的一个局部极小点.一个过程是一个可微映射 $s:U'\to M$,满足 $s(u)$ 是一个局部系或 $-\infty$,$u\in U'$,U' 是 U 的开稠密集.一个突变约定是指定一个过程于势函数 f,最基本的约定有两种:

1. 麦克斯韦约定.对于参数空间 U 中的 u,当

$f|M\times\{u\}$有两个以上的稳定极小值时，$s(u)$总是选取绝对极小值(即极小值中之最小者). 因此，突变仅出现在势函数有两个以上的绝对极小值时(如图1).

2. 完全延迟约定. 这种约定是系统留在原来的稳定平衡位置上，直到这个稳定平衡位置消失. 当控制参数 u 在 U 中变化时，过程 $s(u)$总是尽可能久


图 1


图 2

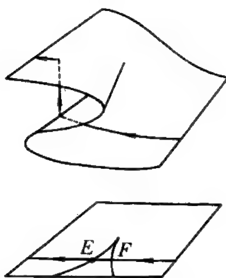


图 3

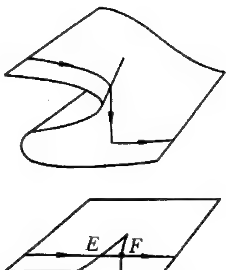


图 4

地连续延伸，直到"无路可走"时为止(如图 2)，此时稳定的平衡状态消失在一个退化的临界点. 从而使得势 f_u 有退化临界点的 u 的轨迹起着重要的作用. 在齐曼突变机械中，当自由端 P 在(u,v)平面上移动，从尖点形区域的右方进入而从左方穿出时(如图3)，在点 E 处(而不是在点 F)引起状态曲面 M 上相应轨迹的跳跃. 自由端 P 移动的轨迹反向移动，从尖点形的左方穿入，从右方穿出(如图 4)，相应的 M 上的过程轨迹不在点 E 而是在点 F 处引起突变，这便是"使过程尽可能连续保持"的原则.

麦克斯韦约定(Maxwell convention)　见"突变约定".

完全延迟约定(perfect delay convention)　见"突变约定".

基本突变的几何图形(geometric figure of elementary catastrophe)　基本突变的几何表现. 考虑函数 $V:X\times C\to\mathrm{R}$，X 是 n 维流形，C 是 r 维流形. 突变流形 M(也称平衡曲面或状态曲面)是 $X\times C$ 的子集，由 $DV_c(x)=0$ 确定，其中 $V_c(x)=V(x,c)$，D 是对 x 求导. 突变映射 χ 是自然投影 $\pi:X\times C\to C$ 在 M 上的限制，即 $\chi(x,c)=c$. 集 S 是 M 中 χ 的奇点的集合. 分歧集 B 是奇点集 S 在突变映射 χ 下的像 $\chi(S)$. 它满足方程

$$DV_c(x)=0 \quad 和 \quad \det D^2V_c(x)=0.$$

在控制空间中那些使系统发生突变的点称为突变点. 突变点做成的集合称为突变集. 考察分歧集是突变理论的重要任务，这一方面是因它位于控制空间中，它的点是突变点的候选者；另一方面是平衡平面一般在高维空间中，所以其几何一般无法用图形表现在 3 维空间中，因此常以它们的分歧集或截断图形来表示. 此外，当系统遵守完全延迟约定时，所有突变都发生在以分歧集的点为参数时，这也说明了它的重要性.

突变流形(catastrophe manifold)　见"基本突变的几何图形".

平衡曲面(equilibrium surface)　即突变流形，见"基本突变的几何图形".

突变映射(catastrophe mapping)　见"基本突变的几何图形".

分歧集(bifurcation set)　见"基本突变的几何图形".

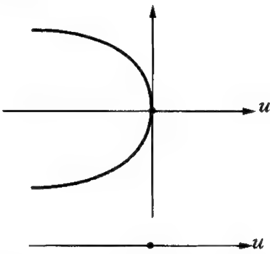
突变点(catastrophe point)　见"基本突变的几何图形".

突变集(catastrophe set)　见"基本突变的几何图形".

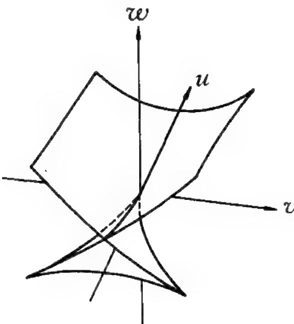
折叠型突变(the fold catastrophe)　最简单的基本突变模型. 折叠型突变的势函数为 $v(x)=x^3+ux$. 平衡曲面 M 的方程为 $3x^2+u=0$. 分歧集为 $u=0$，它由

$$\begin{cases} DV(x)=3x^2+u=0, \\ D^2V(x)=6x=0 \end{cases}$$

消去 x 得到. 折叠型突变的几何图形(平衡曲面和分歧集)如图所示.



燕尾型突变(the swallowtail catastrophe)　基本突变模型之一. 它的势函数为$V(x)=x^5+ux^3+vx^2+wx$. 平衡曲面 M 的方程为 $5x^4+3ux^2+2vx+w=0$. 分歧集由



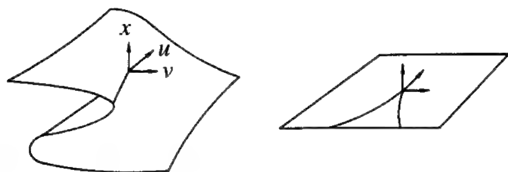
$$\begin{cases} DV(x) = 5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w = 0, \\ D^2V(x) = 20x^3 + 6ux + 2v = 0 \end{cases}$$

确定.燕尾型突变的几何图形(分歧集)如图所示.

尖点型突变(the cusp catastrophe) 较简单的且应用广泛的基本突变模型.它的势函数为$V(x)=x^4+ux^2+vx$.平衡曲面 M 的方程为 $4x^3+2ux+v=0$.分歧集为 $8u^3+27v^2=0$,它由

$$\begin{cases} DV(x) = 4x^3 + 2ux + v = 0, \\ D^2V(x) = 12x^2 + 2u = 0 \end{cases}$$

消去 x 得到.尖点型突变的几何图形(平衡曲面和分歧集)如图所示.



椭圆脐点型突变(the elliptic umbilic catastrophe) 基本突变模型之一.它的势函数为$V(x,y)=\frac{1}{3}x^3-xy^2+w(x^2+y^2)-ux+vy$.平衡曲面 M 是三维曲面,其方程为

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2wx - u = 0, \\ -2xy + 2wy + v = 0. \end{cases} \quad (*)$$

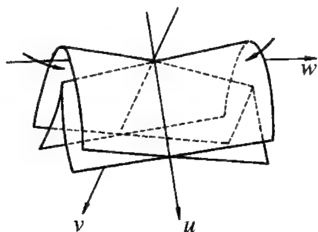
分歧集除($*$)式外,还需满足

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2x + 2w & -2y \\ -2y & -2x + 2w \end{vmatrix} = 0,$$

即 $\Delta=4(w^2-x^2-y^2)=0$.椭圆脐点型突变的几何图形(分歧集)如图所示.

双曲脐点型突变(the hyperbolic umbilic catastrophe) 基本突变模型之一.它的势函数为

$$V(x)=x^3+y^3+wxy-ux-vy.$$



平衡曲面 M 的方程为

$$\begin{cases} 3x^2 + wy - u = 0, \\ 3y^2 + wx - v = 0. \end{cases} \quad (*)$$

分歧集除($*$)式外,还需满足

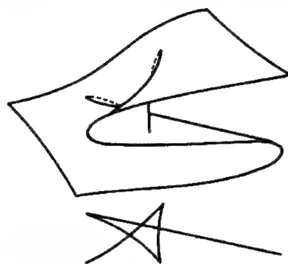
$$\Delta=\begin{vmatrix} 6x & w \\ w & 6y \end{vmatrix}=0,$$

即 $\Delta=36xy-w^2=0$.双曲脐点型突变的几何图形(分歧集)如图所示.

蝴蝶型突变(the butterfly catastrophe) 基本突变模型之一.它的势函数为 $V(x)=x^6+tx^4+ux^3+vx^2+wx$.平衡曲面 M 是超曲面,其方程为

$$6x^5 + 4tx^3 + 3ux^2 + 2vx + w = 0. \quad (*)$$

分歧集除($*$)式外,还需满足 $30x^4+12tx^2+6ux+2v=0$.蝴蝶型突变的几何图形(这里仅表示出 $u=0,t<0$ 时的平衡曲面和分歧集)如图所示.



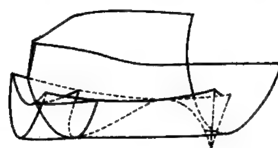
抛物脐点型突变(the parabolic umbilic catastrophe) 基本突变模型之一.它的势函数为 $V(x,y)=y^4+x^2y+wx^2+ty^2-ux-vy$.平衡曲面 M 的方程为

$$\begin{cases} 2xy + 2wx - u = 0, \\ x^2 + 4y^3 + 2ty - v = 0. \end{cases} \quad (*)$$

分歧集除($*$)式外,还需满足

$$\begin{vmatrix} 2y+2w & 2x \\ 2x & 12y^2+2t \end{vmatrix}=0,$$

即$(y+w)(6y^2+t)=x^2$.抛物脐点型突变的几何图形(四维分歧集的三维截面)如图所示.



非基本突变(non-elementary catastrophe) 突变理论的研究对象与内容.它是比基本突变更复杂的对象与内容.非基本突变是正在被探索的对象,其理论尚未完成.所谓基本突变,是余维数$\leqslant 4$ 的奇点的万有开折作为势函数所描述的突变.非基本突变则是当上述的奇点余维数$\geqslant 5$ 的情形.基本突变的理论已基本完成,而非基本突变的理论正在发展中,它的研究与其他数学分支,特别是广义分支理论、奇点理论、动力系统理论密切相关.

撰　稿　孙伟志　李培信　张国滨　郭卫中
审　阅　吴文俊　张奠宙　张国滨　邹建成

数 学 符 号 表

数学符号表编写说明

《数学辞海》第一至五卷正文之后，均附有数学符号表，提供读者查阅之用. 本表所收符号比较齐全，除包含“中国数学物理名词委员会”审定的《数学物理符号表》中的全部数学符号外，还收入了国内外数学界已普遍使用的数学符号，总共列入数学符号 1158 个.

一些新兴学科，如小波分析、分形几何、数理语言学、机器证明等，都是 20 世纪中叶以后发展起来的，这些学科的数学符号在国际国内还不统一，《数学辞海》将其收入，仅供读者参考.

本表所收数学符号并非仅限于《数学辞海》的正文，有的符号虽然在本辞书的正文中（如模糊数学中的一些专用数学符号）未曾出现，但由于这些符号已经广泛应用于国内外的教学、科研、工程技术中，因此亦作了适当的搜集，以飨读者.

数学符号表的体例：数学符号表共设五个横栏，依次为符号栏、中文名称栏、英文名称栏、意义或举例栏、备注栏.

数学符号的编排分类：《数学辞海》共六卷，包含数学科学的 100 多个分支学科或专题项目，所涉及的数学符号种类繁多. 为便于读者查找而采取分类编排. 因此，本表将数学符号按学科类型分为以下 7 类：

1. 算术与数论：算术中包括最常用的数学符号，如＋，－，×，÷，＝，≠等，它的应用范围遍及所有分支学科. 数论则包括初等数论、代数数论、解析数论、几何数论等.

2. 逻辑与集合：包括数学基础、形式逻辑、数理逻辑、集合论、公理集合论、序与格等.

3. 几何与拓扑：包括平面几何、立体几何、平面三角、球面三角、解析几何、高等几何、微分几何、凸集几何、距离几何、一般拓扑学、代数拓扑学与流形拓扑学等.

4. 代数学：包括初等代数、高等代数、布尔代数、线性代数与多重线性代数、环与代数、模与同调代数、群及其推广、域与伽罗瓦理论、李群与李代数、范畴论与代数 K 理论、代数几何、奇点理论与突变理论等.

5. 分析学：包括数学分析、实变函数论、复变函数论、多复变与复空间、测度论、泛函分析、变分法、函数逼近论、调和分析、流形上的分析、位势论、凸分析、非标准分析、小波分析、分形几何、常微分方程、偏微分方程、积分方程与函数方程、动力系统、特殊函数等.

6. 概率统计：包括组合学、概率论、随机过程、统计学等.

7. 应用数学：包括计算数学、模糊数学、生物数学、经济数学、数学物理与理论物理、运筹学、系统理论、控制理论、通信与信息理论、测绘学、力学、天文学、数理语言学等.

数学符号表的编排顺序：本表所列数学符号，大体上按它们在《数学辞海》中出现的先后顺序编排. 由于很多数学符号的含义及使用范围比较复杂，若要准确地归入哪一类，实际上是很困难的，因而制订下列编排原则：

1. 多学科共用符号，将其编入最先出现的分支学科中. 例如，运算符号＋，－，×，÷等，是所有学科共用的，就编入本表最前面的学科——算术中.

2. 同形同义的符号，就只在某一分支学科符号表内出现一次. 例如，符号“R”在集合论中表示实数集，而在代数学和分析学中也表示实数集，其意义是相同的，就将符号“R”只列入集合论的符号表，而在代数学和分析学的符号表中不再出现.

3. 同形而不同义的符号，则分别列入相应分支学科. 如“Im”在初等代数中表示复数的虚部，而在集合论和代数学中则表示映射的像，就将其分别列入各个学科的符号表中；又如“k”在应用数学中表示高斯常数，在微分几何中表示曲率，而在特殊函数中则表示贝克函数，这样便分别将其列入应用数学、微分几何、特殊函数的符号表中.

4. 异形同义的符号，首先将《数学物理符号表》中核定的符号列入符号栏，而将其异形符号列入备注栏，如几何中将 Rt∠列于符号栏，而将曾用符号 rt∠和 R∠列入备注栏；其次，凡目前国际国内用法尚未统一的异形同义符号，如代数中的“A^T”，“A'”都表示矩阵 A 的转置矩阵，则一同列于符号栏.

5. 过去用过，而现在少用或不用的数学符号，本表将其列入备注栏，以利读者阅读古旧数学资料时参考.

算术和数论(Arithmetic & Number theory)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$+$	加号;正号	plus ;positive	例如,$+2$ 即正 2;$a+b$ 即 a 与 b 相加	正号常可略去不写
$-$	减号;负号	minus ;negative	例如,-1 即负 1;$a-b$ 即 a 与 b 的差	
$\pm$	正或负;加或减	positive or negative;plus or minus	例如,± 2,即正 2 或负 2;$a \pm b$ 即 a 加或减 b	
$\mp$	负或正;减或加	negative or positive;minus or plus	例如,∓ 2 即负 2 或正 2;$a \mp b$ 即 a 减或加 b	
$\times$,$\cdot$	乘号	multiple sign	例如,2×3 即 2 乘 3;$a \cdot b$ 即 a 乘 b	乘号在括号前或字母间常可略去
$\div$,—,/	除号;分数(式)线	sign of division, fraction stroke	$a \div b$,$\frac{a}{b}$,a/b,即 a 除以 b,b 分之 a	
:	比	ration	$a:b$ 即 a 比 b	
$\mid$	整除	exact division	$a \mid b$ 即整数 a 整除整数 b	
$\nmid$	不能整除	nonaliquot	$a \nmid b$ 即整数 a 不能整除整数 b	
$\parallel$	限界整除	bound exact division	$a^k \parallel b$ 即 a^k 能整除 b,但 a^{k+1} 不能整除 b	$a^k \mid b$,且 $a^{k+1} \nmid b$
$[,\cdots,]$	最小公倍数	least common multiple	$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$表示整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最小公倍数	亦可用 LCM 表示
$(,\cdots,)$	最大公约数	greatest common divisor	$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$表示整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公约数	亦可用 GCD 表示
a^n	a 的 n 次方(幂)	a to the power n	例如,5^4 即 5 的 4 次方(幂)	当 $n=2,3$ 时,分别称平方、立方
$\sqrt{\ }$	平方根号	square root sign	$\sqrt{a}$ 即 a 开平方	
$\sqrt[n]{\ }$	n 次根号	n-th root sign	$\sqrt[n]{a}$ $(n\geqslant 2)$即 a 开 n 次方	当 $n=3$ 时,称 a 开立方
$\mid\ \mid$	绝对值;模	absolute value;modules	$\lvert a\rvert$表示 a 的绝对值或模	亦可用 abs a 表示
$=$	等号	equal sign	$2+3=5$	
$\neq$	不等号	inequality sign	$2+3\neq 4$	
$\equiv$	恒等号	identity symbol	$a\equiv b$ 即 a 恒等于 b	
$<$	小于	less than	$a<b$ 即 a 小于 b	
$>$	大于	greater than	$a>b$ 即 a 大于 b	
$\gtrless$	大于或小于	greater than or less than	$a\gtrless b$ 即 $a>b$ 或 $a<b$	
$\lessgtr$	小于或大于	less than or greater than	$a\lessgtr b$ 即 $a<b$ 或 $a>b$	
$\leqslant$	小于或等于;不大于	less than or equal to	$a\leqslant b$ 即 a 小于或等于 b,或 a 不大于 b	一般不用符号“$\leq$”
$\geqslant$	大于或等于;不小于	greater than or equal to	$a\geqslant b$ 即 a 大于或等于 b,或 a 不小于 b	一般不用符号“$\geq$”
$\ll$	远小于	much less than	$a\ll b$ 即 a 远小于 b	
$\gg$	远大于	much greater than	$a\gg b$ 即 a 远大于 b	
$\approx$	约等于	approximately equal	$a\approx b$ 即 a 约等于 b	曾用$\doteq$,现已不用
$\triangleq$	相当于	equivalent to	1 cm$\triangleq$10 km 表示图上 1 cm 相当于实际距离 10 km	曾用$\hat{=}$,现已不用
$\propto$	成正比	is direct ratio to	$a\propto b$ 表示 a 与 b 成正比	
$\sim$	数值范围	numerical range	例如,5~10 即由 5 至 10	现已不用“—”
.	小数点	decimal point	例如,8.59 即 8 又 100 分之 59	小数点记于个位数字后的下足
$\dot{}\ \dot{}$	循环小数	recurring decimal	$2.4\dot{2}3\dot{1}$ 即 2.423 123 123 1…	记于循环节的首末位数字上方

符 号	中文名称	英 文 名 称	意 义 或 举 例	备 注
%	百分号	sign of percent	例如,5%即百分之五,亦即 5/100	
‰	千分号	sign of permillage	例如,5‰即千分之五,亦即 5/1000	
( )	圆括号	parenthesis	例如,5−(2+1)	亦称小括号
[ ]	方括号	square brackets	例如,3[5−(2+1)]	亦称中括号
{ }	花括号	brace	例如,2{3[5−(2+1)]−2}	亦称大括号
——	括线	vinculum	例如,$(\overline{8-2}\times 3)\div 2$,以 8−2 的差乘 3…	相当于小括号
∞	无穷大	infinity	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ 即函数$\frac{1}{x}$ 当 x 趋近于 0 时无限地增大	亦称无限或无限大
$a\overset{\text{def}}{=}b$	a 以 b 为定义	a is definition equal to b	例如,$a\overset{\text{def}}{=}b^n$ 即用 b^n 代表 a	亦可用 $a\overset{\text{d}}{=}b$ 或 $a:=b$ 表示
d	公差	common difference	等差数列任相邻两项之差(后项减前项)均相等,这个共同的差 d 称为此数列的公差	
q	公比	common ratio	等比数列任相邻两项之比(后项比前项)均相等,这个共同的比 q 称为此数列的公比	
S_n	数列前 n 项和	sum of the first n terms	例如,等差数列 $a,a+d,\cdots,a+(n-1)d,\cdots$,前 n 项之和 $S_n=na+\frac{n(n-1)}{2}d$	
Δ	判别式	discriminant	例如,实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac$	利用 Δ 可判别该方程根的状况
$E(x),[x]$	整数部分记号	symbol of integral part	表示不超过 x 的最大整数.例如,$[1.2]=1,[-1.2]=-2$	亦记为 ent(x),来自法文 entier
$\{x\}$	小数部分记号	symbol of decimal part	$\{x\}$只能是 0 或正的纯小数,它满足:$0\leqslant\{x\}<1$,例如,$\{1.2\}=0.2$,$\{-1.2\}=0.8$	亦称分数部分记号,亦记为$\{x\}$
$\sum\limits_{n\leqslant x}$	整数求和号	sign of integers summation	对不超过 x 的正整数 n 求和.例如,$\sum\limits_{n\leqslant 6}n=1+2+3+4+5+6=21$	
$\sum\limits_{n<x}$	整数求和号	sign of integers summation	对小于 x 的正整数 n 求和.例如,$\sum\limits_{n<6}n=1+2+3+4+5=15$	
$\sum\limits_{p\leqslant x}$	素数求和号	sign of prime number summation	对不超过 x 的素数 p 求和.例如,$\sum\limits_{p\leqslant 7}p=2+3+5+7=17$	
$\sum\limits_{p<x}$	素数求和号	sign of prime number summation	对小于 x 的素数 p 求和.例如,$\sum\limits_{p<7}p=2+3+5=10$	
$\sum\limits_{d\mid n}$	除数求和号	sign of divisor summation	对 n 的所有不同因子 d 求和.例如,$\sum\limits_{d\mid 6}d=1+2+3+6=12$	
$\prod\limits_{d\mid n}$	除数求积号	sign of divisor mensuration	对 n 的所有不同因子 d 求积.例如,$\prod\limits_{d\mid 6}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 6=36$	
$\sum\limits_{p\mid n}$	素除数求和号	sign of prime divisor summation	对 n 的所有不同素因子 p 求和.例如,$\sum\limits_{p\mid 6}=2+3=5$	
$\prod\limits_{p\mid n}$	素除数求积号	sign of prime divisor mensuration	对 n 的所有不同素因子 p 求积.例如,$\prod\limits_{p\mid 6}=2\cdot 3=6$	
$\sum\limits_{i=1}^{n}$	总和号	sign of grand sum	求对 x_i 从 x_1 连加到 x_n 的总和,即 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1+x_2+\cdots+x_n$	
$\prod\limits_{i=1}^{n}$	连乘号	sign of continued product	求对 x_i 从 x_1 连乘到 x_n 的积,即 $\prod\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1x_2\cdots x_n$	
$a\equiv b(\text{mod}n)$	模 n 同余	congruence modulo-n	用 n 除 a 及 b 所得余数相同	
$a\not\equiv b(\text{mod}n)$	模 n 不同余	non-congruence modulo-n	用 n 除 a 及 b 所得余数不同	
$\equiv$	恒等同余	identity congruence	$f(x)\equiv g(x)\ (\text{mod}p)$,即整系数多项式 f 与 g 的对应系数均模 p 同余	亦可记为 $f(x)\equiv_x g(x)(\text{mod}p)$
$\not\equiv$	不恒等同余	non-identity congruence	$f(x)\not\equiv g(x)\ (\text{mod}p)$,即 $f(x)$与 $g(x)$的对应系数均模 p 不同余的	亦可记为 $f(x)\not\equiv_x g(x)(\text{mod}p)$

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$a^{-1}(\bmod n)$	模 n 的逆	inverse of modulo-n	与 a 相乘后用 n 除余数是 1 的整数. 例如, $2^{-1}(\bmod 5)=3,\ 3^{-1}(\bmod 4)=3$	这是一个同余类
$r \bmod n$	模 n 的同余类	congruence class of modulo-n	包含 r 的模 n 的同余类. 例如, $2(\bmod 5)=\{\cdots,-8,-3,2,7,12,\cdots\}$	亦称剩余类
$\mathbf{Z}_n$	剩余类环	residue class ring	模 n 的全体剩余类对类的加法和乘法组成的环	
$\left(\frac{a}{p}\right)$	勒让德符号	Legendre's symbol	$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1, & p\nmid a,\text{且 } a \text{ 是二次剩余}(\bmod p)\\ -1, & p\nmid a,\text{且 } a \text{ 是二次非剩余}(\bmod p)\\ 0, & p\mid a\end{cases}$	p 为奇素数, a 为整数
$\left(\frac{a}{m}\right)$	雅可比符号	Jacobi's symbol	$\left(\frac{a}{m}\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{a}{p_i}\right)$ ($m=p_1p_2\cdots p_k$, p_i 为素数, $(m,a)=1$)	当 m 为奇素数时即勒让德符号
$\left(\frac{d}{m}\right)$	克罗内克符号	Kronecker's symbol	$\left(\frac{d}{m}\right)=\prod_{r=1}^{v}\left(\frac{d}{p_r}\right)$ (d 为非平方数, p_r 为素数, $m=\prod_{r=1}^{v}p_r$)	
$d(n)$	除数函数	divisor function	$d(n)$ 表示 n 的正因子的个数. 例如, $d(12)=6$	亦可用 $\tau(n)$ 或 $T(n)$ 表示
$d_k(n)$	广义除数函数	generalized divisor function	$d_k(n)=\sum_{n_1n_2\cdots n_k=n}1=\sum_{m\mid n}d_{k-1}(m)$	
$\sigma(n)$	除数和	sum of divisor	表示正整数 n 的所有正因数的和. 例如, $\sigma(6)=1+2+3+6=12$	亦可用 $S(n)$ 表示
$\sigma_\lambda(n)$	广义除数和	generalized sum of divisor	$\sigma_\lambda(n)=\sum_{d\mid n}d^\lambda$. 例如, $\sigma_3(4)=1^3+2^3+4^3$	$\sigma_0(n)=d(n)$ 为除数函数; $\sigma_1(n)=\sigma(n)$ 为除数和
$P(n)$	正因数之积	product of positive divisors	$P(n)=\prod_{d\mid n}d$. 例如, $P(6)=1\cdot2\cdot3\cdot6=36$	
$\Phi(n)$	欧拉函数	Euler's function	表示小于正整数 n, 且与 n 互素的正整数的个数. 例如, $\Phi(6)=2$	亦可记为 $\varphi(n)$
$\mu(n)$	默比乌斯函数	Möbius function	$\mu(n)=\begin{cases}1, & \text{当 } n=1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n \text{ 能被素数的平方整除时},\\ (-1)^r, & \text{当 } n \text{ 为 } r \text{ 个相异素数之积时}\end{cases}$	
$\Lambda(n)$	曼戈尔特函数	Von Mangoldt function	$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, & n \text{ 为素数 } p \text{ 的正乘方};\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	
$\Lambda_1(n)$	曼戈尔特函数 I	Von Mangoldt function I	$\Lambda_1(n)=\begin{cases}\frac{1}{m}, & \text{若 } n \text{ 是一素数的 } m(>0) \text{ 次乘方},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	
$\omega(n)$	相异素因数个数	different prime factor numbers	例如, $\omega(24)=\omega(2^3\cdot3)=1+1=2$, 即 24 有 2 个不同的素因数	
$\Omega(n)$	素因数个数	prime factor numbers	表示正整数 n 的所有素因数的个数. 例如, $\Omega(24)=\Omega(2^3\cdot3)=3+1=4$	
$\lambda(n)$	刘维尔函数	Liouville's function	$\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}$	
$\pi(x)$	素数个数符号	symbol of the prime numbers	表示不超过正实数 x 的素数个数. 例如, $\pi(10)=4$	
$\chi(n)$	特征函数	characteristic function	对模 m 之一特征 $\chi(n)$ 仅在 $(n,m)=1$ 时有定义, 且 $\chi(1)\neq0$; 若 $a\equiv b(\bmod m)$, 则 $\chi(a)=\chi(b)$; $\chi(ab)=\chi(a)\chi(b)$	若 $(n,m)>1$ 时, 则 $\chi(n)=0$
$p(n)$	整数分拆函数	integral partition function	把正整数 n 分成若干个正整数的和, 称为 n 的一种分拆, 以 $p(n)$ 表示分拆的种数. 例如, $p(4)=5$. 若限定分拆中的加数不超过 r, 则这类分拆数以 $p_r(n)$ 表示	
$U(n)$	奇分拆	odd partition	$U(n)$ 为把 n 分为奇数个互异数之和的分拆数	
$E(n)$	偶分拆	even partition	$E(n)$ 为把 n 分为偶数个互异数之和的分拆数	
$N(\mathrm{m})$	模 m 的矩	moment of module m	将所有线性型依 modm 分类, 则分类的个数称为模 m 的矩. 若模 m 对应于方阵 A, 则 $N(\mathrm{m})=\det A$	
$\vartheta(x)$	切比雪夫函数	Chebyshev function	$\vartheta(x)$ 表示对不大于 x 的素数的对数求和	
$\psi(x)$	切比雪夫函数	Chebyshev function	$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)=\sum_{p^m\leqslant x}\ln p$, 而 $\Lambda(n)$ 为曼戈尔特函数	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\zeta(s)$	黎曼ζ函数	Riemann ζ-function	$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$，其中$s$为实部大于1的复数	
∂°	多项式的次数	degree of a polynomial	$\partial^\circ f=n$，表示多项式$f(x)$的次数为n	亦可表示成$\deg f=n$
max( )	最大数	maximum number	$\max(a,b,\cdots,c)$即$a,b,\cdots,c$中的最大数	
min( )	最小数	minimum number	$\min(a,b,\cdots,c)$即$a,b,\cdots,c$中的最小数	
$\overset{L}{=\!=}$	左结合	left association	$A\overset{L}{=\!=}B$表示存在模方阵U，使$A=UB$，并称方阵B左结合于方阵A	
$[,\cdots,]$	有限连分数	finite continued fraction	$[a_0,a_1,\cdots,a_N]=a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_N}$，即有理数化成的连分数	无理数化成的连分数为无限连分数
Δ	判别式	discriminant	$\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$表示$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的判别式；$\Delta=\Delta(R(\theta))$表示代数数域$R(\theta)$的判别式	
ind n	指数	index	如果$n\equiv g^a(\bmod m)$，则称a为n对于模m且以g为底的指数，记为$a=\mathrm{ind}_g n$，简记为ind n	亦可用$\delta_m(a)$表示a对模m的指数
$x^k\equiv n(\bmod p)$	k次剩余	residue of degree-k	$x^k\equiv n(\bmod p)(p\times n)$有解，则$n$称为$p$的$k$次剩余	
$d(A)$	A的密率	density of A	$d(A)=\inf\limits_{n\geqslant 1}\frac{A(n)}{n}$，即集$A$的密率为$A(n)/n$（一切$n\geqslant 1$）的下确界	$A(n)$表示A中不大于n的正整数的个数
$\delta^*(A)$	A的渐近密率	asymptotic density of A	$\delta^*(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A(n)}{n}$，即集$A$的渐近密率为$A(n)/n$当$n\to\infty$的极限值	
$\left(\frac{a,b}{m}\right)$	和数符号	sum symbol	设$m>1$，a,b都是整数，令 $\left(\frac{a,b}{m}\right)=\sum_x e^{2\pi i\frac{ax+bx'}{m}}\left(x'\equiv\frac{1}{x}(\bmod m)\right)$，其中$x$是通过与模$m$简化的剩余系	
$(a,b)=\pm 1$	希尔伯特符号	Hilbert symbol	设k^*表示域k的单位群，又$a,b\in k^*$，则 $(a,b)=\begin{cases}1, & 若z^2-ax^2-by^2=0在k^3中有非零解,\\ -1, & 其他情形\end{cases}$	
$\{a,b,c\}$	二元二次型	2-ary quadratic form	用$\{a,b,c\}$表示二元二次型$ax^2+bxy+cy^2$，其中a,b,c为整数	
$g(k)$	小$g(k)$	small $g(k)$	设k为一固定正整数，对任意正整数n，不定方程$n=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k$总有解的最小正整数$s$	
$G(k)$	大$G(k)$	large $G(k)$	设k为一固定正整数，对充分大的正整数n，不定方程$n=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k$总有解的最小正整数$s$	
$S(\alpha)$	α的迹	trace of α	设$R(\theta)$为n次代数数域，$\alpha^{(1)}=\alpha\in R(\theta)$，$\alpha^{(k)}(k=2,3,\cdots,n)$为$\alpha$的共轭数，则$S(\alpha)=\sum_{k=1}^{n}\alpha^{(k)}$称为$\alpha$的迹	
$N(\alpha)$	α的范数	norm of α	$N(\alpha)=\prod_{k=1}^{n}\alpha^{(k)}$为$\alpha$的范数	亦称矩
$N(k)$	等幂和	sum of equal powers	使$x_1+x_2+\cdots+x_s=y_1+y_2+\cdots+y_s,\cdots,x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k=y_1^k+y_2^k+\cdots+y_s^k$的最小正整数$s$记为$N(k)$，其中$y_1,y_2,\cdots,y_s$不是$x_1,x_2,\cdots,x_s$的重组	
$M(k)$	强等幂和	strong sum of equal powers	使$x_1+x_2+\cdots+x_s=y_1+y_2+\cdots+y_s,\cdots,x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k=y_1^k+y_2^k+\cdots+y_s^k$，并使$x_1^{k+1}+x_2^{k+1}+\cdots+x_s^{k+1}\neq y_1^{k+1}+y_2^{k+1}+\cdots+y_s^{k+1}$的最小正整数$s$用$M(k)$表示	
$S(a,\chi)$	特征和	character sum	$S(a,\chi)=\sum_{n=1}^{m}\chi(n)e^{2\pi ian/m}$	
$S(n,m)$	高斯和	Gauss sum	$S(n,m)=\sum_{x=0}^{m-1}e^{2\pi ix^2n/m}$，其中$(n,m)=1$	
$F(s)$	狄利克雷级数	Dirichlet series	$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$	亦称$F(s)$为$f(n)$的演成函数
M_p	梅森数	Mersenne number	形如2^p-1（p为素数）的素数称为梅森数，记为M_p。例如，$M_2=3$，$M_3=7$	
F_n	费马数	Fermat number	形如$2^{2^n}+1$的数称为费马数，例如，$F_2=17$	F_5不是素数

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
≡	重模同余式	double module congruence expression	$f(x) \equiv g(x)$ (modd $p, \varphi(x)$) 表示系数以素数 p 为模，又 $\varphi(x)$ 整除 $f(x) - g(x)$，称为重模同余式	亦称重模为双模
$Q(x)$	无平方因子数	number of noninclusion square divisor	不超过 x 的无平方因子数的个数. 例如，$Q(10) = 6$	
$V(n)$	同余式的解数	number of solutions of congruence expression	同余式 $x^2 \equiv -1 \pmod n$ 之解数	
$R(x)$	圆内整点数	number of circle lattice point	表示圆 $u^2 + v^2 \leqslant x$ 内的整点数	
$F(x)$	朗伯级数	lambert series	$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ 称为朗伯级数	
$[\alpha_1, \cdots, \alpha_q]$	理想数	ideal number	$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q$ 为 $R(\vartheta)$ 中之整数，$R(\vartheta)$ 中形如 $\eta_1\alpha_1 + \eta_2\alpha_2 + \cdots + \eta_q\alpha_q$（$\eta_i$ 为 $R(\vartheta)$ 中之整数）的整数所成之集合为理想数	
[1]	单位理想数	unit ideal number	表示单扩域 $R(\vartheta)$ 中全体整数组成之集合	
$\tau(n)$	拉马努金函数	Ramanujan function	表示 cusp 型 $F(s) = (2\pi)^{-12}\triangle(Z)$ 的第 n 个系数. 称 $n \mapsto \tau(n)$ 为拉马努金函数	
$L(s,\chi)$	狄利克雷级数	Dirichlet series	表示狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \chi(m) n^{-s}$，其中 $m \geqslant 1$ 为整数，χ 为 mod m 特征	
$G_k(\Gamma)$	艾森斯坦级数	Eisenstein series	设 Γ 是 C 格，则称 $G_k(\Gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma}' \frac{1}{\gamma^{2k}}$ 为指标是 k 的艾森斯坦级数，其中 $\sum'$ 表示对 Γ 的非零元素求和	
$\theta_\Gamma(Z)$	塞他函数	theta function	$\theta_\Gamma(Z) = \sum_{x \in \Gamma} e^{\pi i Z(x \cdot x)}$ 称为二次模 Γ 的塞他函数	

逻辑与集合(Logic & Sets)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\forall$	全称量词	universal quantifier	$\forall x \in A$, $p(x)$，表示命题 $p(x)$ 对于每一个属于 A 的 x 为真	亦可简记为 $\forall x$, $p(x)$
$\exists$	存在量词	existential quantifier	$\exists x \in A$, $p(x)$，表示存在 A 中的元素 x 使 $p(x)$ 为真	$\exists^1$（或 $\exists!$）表示存在一个且只有一个元素使 $p(x)$ 为真
$\wedge$	合取符号	conjunction sign	$p \wedge q$ 即 p 和 q	
$\vee$	析取符号	disjunction sign	$p \vee q$ 即 p 或 q	
$\neg$	否定符号	negation sign	$\neg p$ 即 p 的否定，非 p	
$\rightarrow, \Rightarrow$	推断符号	implication sign	$p \rightarrow q$, $p \Rightarrow q$ 表示：若 p 则 q，p 蕴含 q	亦可用 $q \leftarrow p$, $q \Leftarrow p$
$\leftrightarrow, \Leftrightarrow$	等价符号	equivalence sign	$p \leftrightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ 表示 $p \Rightarrow q$，且 $q \Rightarrow p$，即 p 等价于 q	亦称充分必要条件
$\models$	真值符号	truth sign	$\models A \rightarrow B$ 表示由命题 A 推出命题 B 为真	
$\vDash\!\dashv$	可逆真值符号	invertible truth sign	$A \vDash\!\dashv B$（或 $\models A \leftrightarrow B$）表示 $A \models B$，且 $B \models A$，意即 A 真则 B 真，且 B 真则 A 真	亦即 A, B 具有相同的真值
$\vdash$	断定符号	predicative sign	$p \vdash q$ 表示 q 随 p 来，p 是或从一公理而来，或 p 是同语反复	
$\in$	属于	belongs to	$x \in A$ 表示 x 属于 A，即 x 是集 A 的一个元（素）	集合 A 可简称为集 A
$\not\ni$	不包含	noninclusion	$A \not\ni x$ 表示集合 A 不包含元素 x	
$\overline{\in}$, $\notin$	不属于	nonmembership	$y \notin A$, $y \overline{\in} A$ 表示 y 不属于 A，y 不是集 A 的一个元（素）	亦可记为 $A \overline{\ni} y$，或 $A \not\ni y$
$\{,\cdots,\}$	集合号	sign of set	$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 表示由诸元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 构成的集	亦可用 $\{x_i, i \in I\}$，这里 I 表示指标集
$\{\mid\}$	集合号	sign of set	$\{x \in A \mid p(x)\}$ 即使命题 $p(x)$ 为真的 A 中诸元（素）组成的集	亦可用 $\{x \in A; p(x)\}$ 表示集

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\varnothing$	空集	the empty set	$\varnothing$表示没有元(素)的集	$\varnothing$是丹麦文字母，读"欧"
N	非负整数集	nonnegative integers set	$\mathrm{N}=\{0,1,2,\cdots\}$	$\mathrm{N}_{+}=\{1,2,3,\cdots\}$
Z	整数集	integers set	$\mathrm{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$	Z_{+}表示正整数集合
Q	有理数集	rational numbers set	由全体有理数组成的集合	Q_{+}表示正有理数集合
R	实数集	real numbers set	由全体实数组成的集合	R^n 表示 n 维实空间
C	复数集	complex numbers set	由全体复数组成的集合	C^n 表示 n 维复空间
R^{+}	正实数集	positive real numbers set	由全体正实数组成的集合	R^{-}表示负实数集
R^{*}	扩张的实数集	expanding system of the real numbers	把两个理想点$+\infty$,$-\infty$加进实数系所得的集	亦称扩张的实数系
$\subsetneqq$	真包含于	proper inclusion	$B\subsetneqq A$ 表示 A 的子集 B 真包含于 A	亦可用$\subset$表示
$\subseteq$	包含于	inclusion	$B\subseteq A$ 表示 B 是 A 的子集，即 B 的每一个元素均属于 A	
$\not\subset$	不包含于	noninclusion	$C\not\subset A$ 表示 C 不是 A 的子集	亦可用$\not\subseteq$表示
$\supsetneqq$	真包含	proper inclusion	$A\supsetneqq B$ 表示 A 真包含 B	
$\supseteq$	包含	inclusion	$A\supseteq B$ 表示 B 是 A 的子集	亦可用$\supset$表示
$\not\supset$	不包含	noninclusion	$A\not\supset C$ 表示 A 不包含 C	亦可用$\not\supseteq$表示
$\cup$	并集，和集	union	$A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$，称为 A 与 B 的并集，或称为 A 与 B 的和集	
$\bigcup\limits_{i=1}^{n}$	诸并集	unions	$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，即诸集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并集	亦可用 $\cup_{i=1}^{n}$，$\bigcup\limits_{i\in I}$ 或 $\cup_{i\in I}$ 等记法，其中 I 表示指标集
$\cap$	交集	intersection	$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$，称为 A 与 B 的交集	
$\bigcap\limits_{i=1}^{n}$	诸交集	intersections	$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，即诸集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交集	亦可用 $\cap_{i=1}^{n}$，$\cap_{i\in I}$ 或 $\bigcap\limits_{i\in I}$ 等记法，其中 I 为指标集
$\dotplus$	集合的直和	direct sum of sets	若集合 A 与 B 不相交，则 A 与 B 的并集 $A\cup B$ 称为 A 与 B 的直和，记为 $A\dotplus B$	亦称不交并
$\dot{\sum}$	广义直和	generalized direct sum	若 f 是标号集 A 到集族$\{X\}$的一一对应($f:a\to X_a$)，且当 $a\neq b$ 时，总有 $X_a\cap X_b=\varnothing$，则记为 $\dot{\sum\limits_{a\in A}}X_a$，并称为集族$\{X\}$的广义直和	
$\backslash$	差集	difference	$A\backslash B$ 表示所有属于 A 但不属于 B 的元的集，称为 A 与 B 的差集	
$\triangle$	对称差	symmetric difference	$A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ 称为 A,B 的对称差	亦可记为 $A\dot{-}B$ 或 $A\ominus B$
U	全集	total set	$A=U$ 表示 A 为全集，即全集中所有元素 x 都属于 A	亦可用 IΩV 表示
$\complement$	余集，补集	complementary set	$\complement_U A=\{x\mid x\in U\wedge x\notin A\}$，即全集 U 中子集 A 的余集或补集	亦可用 $\complement A$ 表示，曾用 A^c 表示
$\langle\ ,\ \rangle$	有序偶，偶	ordered pair	$\langle a,b\rangle$表示 a,b 的有序偶	亦可记为(a,b)
$\langle,\cdots,\rangle$	有序元组	elements of ordered	$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$称为有序 n 元组	亦可记为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$
$\times$	笛卡儿积	Cartesian product	$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$称为 A 与 B 的笛卡儿积或卡氏积，	$\overbrace{A\times A\times A\times\cdots\times A}^{n个}$ 记为 A^n. 亦称直积
card	基数，势	cardinal number	$\mathrm{card}(A)$表示集 A 中诸元的个数，称为 A 的基数或势	亦可记为 $\overline{\overline{A}}$ 或$\lvert A\rvert$
$\aleph_0$	基数，势	cardinal number	$\aleph_0$ 表示无限可数集的基数	是希伯来文第一个字母，读 Alef
$\sim$	对等	equivalent	$A\sim B$ 表示集 A 与集 B 对等	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\mapsto$	元素间的对应	correspond between to elements	在映射下元素间的对应符号，例如，整数集的映射 $\varphi(x)=x^2$ 可表示成 $\varphi:x\mapsto x^2$	
$\rightarrow$	映射	mapping	$f:A\rightarrow B$ 或 $A\xrightarrow{f}B$ 表示 f 是集 A 到集 B 的映射	
f^{-1}	逆映射	inverse mapping	设 f 是集 A 到 B 的一个双射，则用 f^{-1} 表示 B 到 A 的 f 的逆映射．$f^{-1}f$ 是 A 的恒等映射	亦可用 f_l^{-1}，f_r^{-1} 表示左、右逆映射
R	关系	relation	aRb 表示 a 与 b 有关系 R	
$\not R$	无关系	non-relation	$a\not R b$ 表示 a 与 b 没有关系 R	亦称关系补
$\overline{R}$	反关系	anti-relation	对于二元关系 $R\subseteq X\times Y$，称 $\overline{R}=X\times Y-R$ 为 R 的反关系	亦称否定关系、补关系
R^{-1}	逆关系	inverse relation	对于二元关系 $R\subseteq X\times Y$，称 $R^{-1}\subseteq Y\times X$ 为 R 的逆关系	当且仅当 xRy 时有 $yR^{-1}x$
[ ]	等价类	equivalent class	设 R 是集合 A 上的等价关系，$x\in A$，则称 $[x]_R$ 为 R 的等价类，它是由 A 中那些能使 xRy 成立的所有元素 y 组成的子集	
/	商集	quotient set	设 R 为集 A 的一个等价关系，则商集 A/R 即由一切等价类组成的集合	
$\mathscr{P}$ 或 $\mathfrak{B}$	幂集	power set	用 $\mathscr{P}A$ 或 $\mathfrak{B}A$ 表示集 A 的所有子集组成的集，称为 A 的幂集	
$f\|_B$	收缩，限制	restriction	设 f 是集合 A 上的一个映射，$B\subseteq A$，则 f 也可看成 B 上的一个映射称为 f 在 B 上的限制或收缩	
$\circ$	合成，复合	composite	$g\circ f$ 表示映射 f 和 g 的合成或复合	
limsup	上极限	superior limit	limsup A_n 表示序列 A_n 的上极限	亦可记为$\overline{\lim}$
liminf	下极限	inferior limit	liminf A_n 表示序列 A_n 的下极限	亦可记为$\underline{\lim}$
lim	极限	limit	$\lim A_n$ 表示序列 A_n 的极限	
$\varinjlim$	归纳极限	inductive limit	$\varinjlim A_\lambda$ 表示 A_λ 的归纳极限	
$\varprojlim$	射影极限	projective limit	$\varprojlim A_\lambda$ 表示 A_λ 的射影极限	
dom	定义域	domain of definition	若 f 为从 A 到 B 的一个映射，则称 A 为映射 f 的定义域，记为 dom f	亦可记为 $\mathrm{D}(f)$
ran f	值域	range	$f(A)=\mathrm{ran}f$．若 f 为从 A 到 B 的一个映射，则 $f(A)$ 为映射 f 的值域	亦可记为 $\mathrm{R}(f)$ 或记为 $\mathrm{ran}(f)$
fld	关系域	domain of a relation	$\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup\mathrm{ran}R$，即关系 R 的域等于 R 的定义域和值域的并集	
codom	陪域	co-domain	若 f 是从集 A 到集 B 的一个映射，则称集 B 是映射 f 的陪域，记为 $B=\mathrm{codom}f$	亦称上域
Imf	像	image	设 f 是集 A 到集 B 的一个映射，用 Imf 表示 A 中所有元素的像构成的集，称为 f 的像集	
$f^{-1}(\ )$	全原像	all inverse image	设 f 是集 A 到集 B 的一个映射，B 中元素 b 的全体逆像组成的集合 $f^{-1}(b)$，称为 b 的全原像	亦称原像
$\leqslant$	弱序关系	weak order relation	$a\leqslant b$，$a,b\in A$ 即集 A 存在弱序关系	
$<$	强序关系	strong order relation	$a<b$，$a,b\in A$ 即集 A 存在强序关系	
I_A	恒等映射	identity mapping	表示集 A 的每个元素都对应到自身的映射，称为恒等映射	亦称恒等对应．亦可记为 e_A 或 id A
$\hookrightarrow$；em	嵌入映射	embedding	$A\hookrightarrow B$ 或 emAB 表示 $A\rightarrow B$ 的嵌入映射	
n_R	自然映射	natural mapping	n_R 把 A 的一个元素 a 映射成它的等价类 $[a]_R$	亦称正规映射，典则映射
$ub_R(B)$	B 的上界	upper bound of B	$a=ub_R(B)$ 表示 a 是 B 的上界，B 是半序集的子集	
$Lb_R(B)$	B 的下界	lower bound of B	$a=Lb_R(B)$ 表示 a 是 B 的下界，B 是半序集的子集	
ord	一切序数的类	class of every ordinals	表示一切序数构成的类	
cf	共尾度	cofinality	cf α 表示 α 的共尾度	
$K^{<k}$	强极限基数	strong cardinal number of the limit	$K^{<k}=\lim\limits_{\alpha\rightarrow K}K^{\alpha}$，其中 K 为正则的强极限基数	

几何与拓扑(Geometry & Topology)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\overline{AB}$, AB	[直]线段 AB	segment	表示自点 A 到点 B 的直线段	"直"常略去不写
∠	角	angle	∠AOB 表示角 AOB	
∡	有向角	directed angle	∡ AOB 表示有向角 AOB	
°	度	degree	21°表示 21 度	
′	分	minute	21°13′表示 21 度 13 分	
″	秒	second	21°13′23″表示 21 度 13 分 23 秒	
⌒	弧	arc	$\overset{\frown}{AB}$表示弧 AB. 当$\overset{\frown}{AB}$ 为圆弧时，可用$\overset{\frown}{AB}°$ 表示圆弧 AB 对应的度数	
rad	弧度	radian	rad1，radπ 分别表示 1 弧度、π 弧度	rad1≈57°17′45″；radπ＝180°
—	密位	mil	例如，25^{-}，274^{-} 表示 25 密位，274 密位	常用在军事数学中度量角的单位符号
π	圆周率	ratio of the circumference of a circle to its diameter	π≈3.141 592 6…表示圆周长与直径的比	英文名称亦可简记为 number π
Rt∠	直角	right angle	等于 90°的角称为直角，记为 Rt∠＝90°	曾经记为 rt∠或R∠
△	三角形	triangle	△ABC 表示 A,B,C 三点连线构成的三角形	
⊿	直角三角形	right angle triangle	⊿ ABC 表示直角三角形 ABC	亦可记为 Rt△ABC
▱	平行四边形	parallelogram	▱$ABCD$ 表示平行四边形 $ABCD$	
▭	矩形	rectangle	▭$ABCD$ 表示矩形 $ABCD$	
□	正方形	square	□$ABCD$ 表示正方形 $ABCD$	
⏢	四边形	tetragon	⏢ $ABCD$ 表示任意四边形 $ABCD$	任意二字常略去
◇	菱形	rhombus	◇$ABCD$ 表示菱形 $ABCD$	又名 diamond
⊙	圆	circle	⊙O 表示圆 O	
r,R	半径	radius	从圆心到圆周上任一点的线段称圆的半径，常用 r 或 R 表示	
d,D	直径	diameter	过圆心作任意一条直线，圆内部分的线段称该圆的直径，常用 d 或 D 表示	
C	周长	perimeter	若圆的半径为 r，则周长 $C = 2\pi r$	
//	平行	parallel	AB//CD 表示线段 AB 平行于 CD	
∦	不平行	non-parallel	AB∦CD 表示直线 AB 与 CD 不平行	
$\underline{\underline{//}}$	平行且相等	parallel and equal	$AB\underline{\underline{//}}CD$ 表示线段 AB 与 CD 平行且相等	
⊥	垂直	perpendicular	AB⊥CD 表示线段 AB 垂直于 CD	
≌	全等	congruence	△ABC≌△DEF 表示△ABC 全等于△DEF	
∽	相似	similar	△ABC∽△DEF 表示△ABC 相似于△DEF	
∵	因为	because	∵代表"因为"二字	
∴	所以	therefore	∴代表"所以"二字	
$\underline{\vee}$	等角多边形	equiangular polygon	$\underline{\vee}AB\cdots E$ 表示等角多边形 $AB\cdots E$	多边两字可被省略
$\underline{\perp}$	等边多边形	equilateral polygon	$\underline{\perp}AB\cdots E$ 表示等边多边形 $AB\cdots E$	多边两字可被省略
α-MN-β	二面角	dihedral angle	平面 α 和平面 β 相交于直线 MN 所成的角	
P-$AB\cdots E$	棱锥	pyramid	顶点是 P、底面多边形是 $AB\cdots E$ 的棱锥	
$AB\cdots E$-$A'B'\cdots E'$	棱柱	prism	上底面是多边形 $AB\cdots E$，下底面是多边形 $A'B'\cdots E'$ 的棱柱	长方体、棱台的记法和此记法类似

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
S	面积	area	$S_{\triangle ABC}$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积；$S_{球冠}$ 表示某个球冠的面积	
V	体积	volume	$V_{P\text{-}ABC}$ 表示三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的体积；$V_{拟柱体}$ 表示某个拟柱体的体积	
$\| \quad \|$	距离	distance	$\|AB\|$表示 A,B 两点间的距离或 AB 线段的长	亦可用 AB 或小写的拉丁字母表示
sin	正弦	sine	$\sin x$ 为 x 的正弦函数	
cos	余弦	cosine	$\cos x$ 为 x 的余弦函数	
tan	正切	tangent	$\tan x$ 为 x 的正切函数	亦可用 $\mathrm{tg}\, x$ 表示
cot	余切	cotangent	$\cot x$ 为 x 的余切函数	亦可用 $\mathrm{ctg}\, x$ 表示
sec	正割	secant	$\sec x$ 为 x 的正割函数	
csc	余割	cosecant	$\csc x$ 为 x 的余割函数	曾用 $\mathrm{cosec}\, x$ 表示
vers	正矢	versedsine	$\mathrm{vers}\, x$ 为 x 的正矢函数	$\mathrm{vers}\, x=1-\cos x$，现已不用
covers	余矢	coversedsine, versedcosine	$\mathrm{covers}\, x$ 为 x 的余矢函数	$\mathrm{covers}\, x=1-\sin x$，现已不用
$\sin^m x$	正弦函数的 m 次方	sine function to the m-th power	$\sin^3 x$ 为 $\sin x$ 的立方	其他三角函数和双曲函数的 m 次方的表示法类似
$\arcsin x$	反正弦主值	principal value of inverse sine	$y=\arcsin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$	一般值表示成 $\mathrm{Arcsin} x$
$\arccos x$	反余弦主值	principal value of inverse cosine	$y=\arccos x\ (0\leqslant y\leqslant\pi)$	一般值表示成 $\mathrm{Arccos}\ x$
$\arctan x$	反正切主值	principal value of inverse tangent	$y=\arctan x\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$	一般值表示成 $\mathrm{Arctan} x$
$\mathrm{arccot}\ x$	反余切主值	principal value of inverse cotangent	$y=\mathrm{arccot}\ x\ (0<y<\pi)$	一般值表示成 $\mathrm{Arccot} x$
$\mathrm{arcsec}\ x$	反正割主值	principal value of inverse secant	$y=\mathrm{arcsec}\ x\left(0\leqslant y\leqslant\pi，且\ y\neq\frac{\pi}{2}\right)$	一般值表示成 $\mathrm{Arcsec} x$
$\mathrm{arccsc}\ x$	反余割主值	principal value of inverse cosecant	$y=\mathrm{arccsc}\ x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}，且\ y\neq 0\right)$	一般值表示成 $\mathrm{Arccsc} x$
T	周期	periodic	$f(x+T)=f(x)$，T 为最小正周期．$T=\pi$ 表示以 π 为周期	
x,y,z	笛卡儿坐标	Cartesian coordinates	$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$ 与 $\boldsymbol{e}_z$ 及 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 组成范化正交右手坐标系	
ρ,φ,z	圆柱坐标	cylindrical coordinates	圆柱坐标与笛卡儿坐标的关系为 $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi, z=z$	
r,θ,φ	球面坐标	spherical coordinates	球面坐标与笛卡儿坐标的关系为 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta$	
$\boldsymbol{a},\vec{a}$	向量或矢量 $\boldsymbol{a}$	vector $\boldsymbol{a}$	常用 x,y,z 或 x_1,x_2,x_3 表示笛卡儿坐标，则 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$，简记为 $\boldsymbol{a}=x_i\boldsymbol{e}_i$	印刷常用黑体 $\boldsymbol{a}$，书写常用 $\vec{a}$ 表示
$\|\boldsymbol{a}\|$	向量的模（绝对值，长度）	module of a vector (absolute value, length)	向量$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\boldsymbol{a}$，$\vec{a}$ 的模依次记为$\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$，$\|\boldsymbol{a}\|$，$\|\vec{a}\|$．向量的大小称为向量的模	
$\overrightarrow{AB}$	向量 AB	vector AB	表示始点为 A，终点为 B 的向量或有向线段	
$\boldsymbol{e}_a$	单位向量	unit vector	$\boldsymbol{e}_a=a/\|a\|$ 表示 a 方向的单位向量	亦称幺向量
$\boldsymbol{e}_x，\boldsymbol{e}_y，\boldsymbol{e}_z$ $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$	在笛卡儿坐标轴方向的单位向量	unit vector on the Cartesian axial coordinates	$[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$表示直角标架；$[O;\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z]$表示仿射标架，其中 O 为坐标原点，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k},\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 为基向量	
$\boldsymbol{a}_x，\boldsymbol{a}_y，\boldsymbol{a}_z$	向量 $\boldsymbol{a}$ 的笛卡儿分量	Cartesian component of a vector $\boldsymbol{a}$	设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_x+\boldsymbol{a}_y+\boldsymbol{a}_z$，其中 $\boldsymbol{a}_x=x\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{a}_y=y\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{a}_z=z\boldsymbol{e}_z$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的笛卡儿分量	
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{ab}$	标量积或数量积、内积、点积	scalar product, inner product, dot product	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_ib_i\overset{\text{def}}{=\!=}\sum a_ib_i$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=\|\boldsymbol{a}\|^2$	亦可表示成 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$	向量积、外积、叉积	vector product, exterior product, cross product	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所决定平面的向量，且 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$ 三矢量成右手系. $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，其中 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 表示 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角	
$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$	混合积	mixed product	向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积定义为由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三向量为邻边组成的平行六面体的有向体积	亦可表示成 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$
k	斜率	gradient	直线 $y=kx+b$ 中，k 称为斜率	
e	离心率	eccentricity	在圆锥曲线的极坐标方程中，$r=\dfrac{p}{1-e\cos\varphi}$，$e$ 称为离心率	亦称偏心率.
a	半长轴	semimajor axis	椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 中，a 称为半长轴	
b	半短轴	semiminor axis	椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 中，b 称为半短轴	
$\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}$	向量空间的张量积	tensor product of vector spaces	若 $\boldsymbol{V}$ 是 n 维向量空间，$\boldsymbol{W}$ 是 m 维向量空间，则 $\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}$ 是 $n\times m$ 维向量空间的二阶张量	
T^r_s	张量	tensor	设 $\boldsymbol{V}$ 是 n 维向量空间，其对偶空间的二阶张量为 $\boldsymbol{V}^*$，张量积 $V^r_s=\underbrace{\boldsymbol{V}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{V}}_{r个}\otimes\underbrace{\boldsymbol{V}^*\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{V}^*}_{s个}$ 的元素称为 (r,s) 型张量	
$\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}$	群的张量积	tensor product of groups	设 $\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$ 是群，$\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{W}=F(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})/R(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ 称为 $\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}$ 的张量积	
$T_{xx},T_{xy},\cdots,T_{zz}$; T_{ij}	二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的笛卡儿分量	Cartesian component of tensor $\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}=T_{xx}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x+T_{xy}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y+\cdots$，$T_{xx}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x$ 为分张量，	
$\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S}$	二阶张量积或并矢积	tensor product dyadic product	两个二阶张量 T 与 S 的张量积 $T\otimes S$ 是具有分量 $T_{ij}S_{kl}$ 的四阶张量	
$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}$	两个二阶张量的内积	inner product	$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}$ 表示两个二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的内积. 它是具有分量 $(\boldsymbol{T},\boldsymbol{S})_{ik}\overset{\text{def}}{=\!=}\sum\limits_j T_{ij}S_{jk}$ 的二阶张量	
$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}$	矢量对张量的内积	inner product	$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}$ 表示二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的内积. 它是具有分量 $(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a})_i\overset{\text{def}}{=\!=}\sum\limits_j T_{ij}a_j$ 的矢量	
$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S}$	标量积	scalar product	$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S}$ 表示两个二阶张量 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的标量积. 它具有标量 $(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S})\overset{\text{def}}{=\!=}\sum\limits_i\sum\limits_j T_{ij}S_{ji}$	
$\overset{=}{\wedge}$	透视对应	perspective correspondence	点列 $s(A,B,C,\cdots)$ 与线束 $S(a,b,c,\cdots)$ 是透视的，记为 $s(A,B,C,\cdots)\overset{=}{\wedge}S(a,b,c,\cdots)$	
$\overline{\wedge}$	射影对应	projective correspondence	若 $[\pi]$ 与 $[\pi']$ 是两个一维基本形，则它们之间的射影对应记为 $[\pi]\overline{\wedge}[\pi']$	
$\div$	分离	separation	点 A,B 与点 C,D 是分离的，记为 $A,B\div C,D$	
$\overline{\cdot\cdot}$	不分离	nonseparation	点 A,B 与点 C,D 是不分离的，记为 $A,B\ \overline{\cdot\cdot}\ C,D$	
J，$*$	联	join	设 $s=v_0\cdots v_m$ 是 K 的生成复形，$t=w_0\cdots w_n$ 是 L 的生成复形，令 $s*t=v_0\cdots v_mw_0\cdots w_n$，则所有单形 $s*t$ 和它们的面组成的集合是一个单纯复形，称为 K 和 L 的联，记为 $K*L$	亦可记为 $J(K,L)$ 或 KJL
$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$	向量函数	vector function	曲线或曲面的参数方程写成向量的形式.	亦称矢函数
$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 或 $r'(t)$	导向量	derived vector	$\boldsymbol{r}'(t)=(\boldsymbol{x}'(t),\boldsymbol{y}'(t),\boldsymbol{z}'(t))$ 是向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的导向量，有时以弧长 s 为参数的导向量表示成 $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$	亦称微商或导矢
$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$	微分	differential	设 $\boldsymbol{r}(t)$ 同上，若 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t 处的改变量 $\Delta r=A\Delta t+o(\Delta t)$（$A$ 为固定向量），则称 A 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t 点的微分	
$\boldsymbol{r}^{(n)}(t)$	n 阶导向量	n-th derivative	$\boldsymbol{r}^{(n-1)}(t)$ 在 t 点的导向量称为 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t 点的 n 阶导向量	
$\mathrm{d}^n\boldsymbol{r}$	n 阶微分	n-th differential	$\mathrm{d}^{n-1}r$ 在 t 点的微分称为 $r(t)$ 在 t 点的 n 阶微分	
$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x_i}$	偏导向量	partial derived vector	若 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\boldsymbol{z}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))$，则 $\boldsymbol{r}_u(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{u}},\dfrac{\partial\boldsymbol{y}}{\partial\boldsymbol{u}},\dfrac{\partial\boldsymbol{z}}{\partial\boldsymbol{u}}\right)$ 是 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 关于 $\boldsymbol{u}$ 的偏导向量	亦称偏导矢

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\boldsymbol{T}(s)$	单位切向量	unit tangent vector	$\boldsymbol{T}(s)=\dot{\boldsymbol{r}}(s)$表示曲线$C$在一点处的单位切向量，其中$s$为曲线$C$的弧长参数	亦可表示成$\boldsymbol{\alpha}(s)$
$\boldsymbol{N}(s)$	主法向量	principal normal vector	$\boldsymbol{N}(s)=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}(s)}{\lvert\ddot{\boldsymbol{r}}(s)\rvert}$表示曲线$C$在一点处的主法向量，$\boldsymbol{N}(s)$指向曲线$C$凹入的方向	亦可表示成$\boldsymbol{\beta}(s)$
$\boldsymbol{B}(s)$	副法向量	binormal vector	$\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)$表示曲线$C$在一点处的副法向量	亦称从法向量．表示成$\gamma(s)$
$\{P;\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}\}$	活动标架	Frenet frame	$\boldsymbol{T},\boldsymbol{N},\boldsymbol{B}$依次构成右手系，它们构成一个标架，称为曲线$C$在$P$点的活动标架或弗雷内标架	
k	曲率	curvature	曲率k是表示曲线弯曲程度的量．曲率k越大，曲线弯曲程度越大，曲率小，曲线弯曲程度小	直线的曲率为0
τ	挠率	torsion	挠率是表示空间曲线扭翘程度的量．挠率的绝对值大，曲线扭翘程度大，挠率的绝对值小，曲线扭翘程度小．平面曲线的挠率为0	
$k_r(s)$	相对曲率	relative curvature	表示平面曲线弯曲程度和弯曲方向的量	
i_r	旋转指标	rotation index	$i_r=\frac{1}{2\pi}\int_0^l k_r(s)\mathrm{d}s$表示平面闭曲线$C$的旋转指标，它是曲线$C$的切线像($r=\boldsymbol{T}(s)$)在单位圆周上环绕的圈数	若C是平面简单闭曲线，则$i_r=\pm 1$
$\boldsymbol{n}$	单位法向量	unit normal vector	曲面$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a,v)$上一点$P(u,v)$处的单位法向量 $\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\lvert\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\rvert}$	式中各量均在$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$取值．$\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{n}$依序构成右手系
E,F,G,g_{ij}	曲面的第一类基本量	fundamental quantities of first kind for surfaces	对曲面$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，其第一类基本量分别为 $E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v.$ $g_{ij}=\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_j\quad(i,j=1,2)$	$E>0,\ G>0,$ $EG-F^2>0$
Ⅰ	曲面的第一基本形式	first fundamental form of a surface	$\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2$	第一基本形式是正定的，它决定曲面的内蕴性质
L,M,N,L_{ij}	曲面的第二类基本量	fundamental quantities of second kind for surfaces	对曲面$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，其第二类基本量分别为 $L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n},M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n},N=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}.$ $L_{ij}=\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{n}\ (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}=1,2)$	
Ⅱ	曲面的第二基本形式	second fundamental form of a surface	$\mathrm{II}=L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2$	
k_n	法曲率	normal curvature	曲面S在P点沿方向$\boldsymbol{a}$的法截线曲率可作为曲面在该点的法曲率k_n	其绝对值相等
K_c	全曲率	total curvature	$K_c=\int_0^l k(s)\mathrm{d}s$表示曲线$C$的全曲率	
K_r	相对全曲率	relative total curvature	$K_r=\int_0^l k_r(s)\mathrm{d}s$表示曲线$C$的相对全曲率	
K	总曲率	Gaussian curvature	$K=k_1k_2$表示曲面S在点P的弯曲情况．曲面上的点可按总曲率的符号进行分类，$K>0$的点是椭圆点，$K<0$的点是双曲点，$K=0$的点是抛物点	亦称高斯曲率．式中k_1,k_2为其对应的主曲率
H	平均曲率	mean curvature	表示曲面S在点P的平均曲率	亦称中曲率
e,f,g	曲面的第三类基本量	fundamental quantities of third kind for surfaces	对曲面$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，其第三类基本量分别为 $e=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_u,f=\boldsymbol{n}_u\cdot\boldsymbol{n}_v,g=\boldsymbol{n}_v\cdot\boldsymbol{n}_v$	
Ⅲ	曲面的第三基本形式	third fundamental form of a surface	$\mathrm{III}=\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}=e\mathrm{d}u^2+2f\mathrm{d}u\mathrm{d}v+g\mathrm{d}v^2$	
$[jk,i]$	第一类克里斯托费尔符号	Christoffel symbol of the 1st kind	$[jk,i]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)$	亦可表示成Γ_{jki}
$\left\{\begin{matrix}k\\ij\end{matrix}\right\}$	第二类克里斯托费尔符号	Christoffel symbol of the 2nd kind	$\left\{\begin{matrix}k\\ij\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$	亦可表示成$\Gamma_{ij}^k=g^{kl}\Gamma_{ijl}\Gamma_{ij}^k$，也称为联络系数
k_g	测地曲率	geodesic curvature	曲面S上的曲线C在某一点P的切平面上的投影线的曲率可作为曲线C的测地曲率	其绝对值相等
exp	指数映射	exponential map	指数映射$\exp:T_P\to S$是曲面S上P的切平面T_P的切向量与曲面S上点的对应关系．若$\boldsymbol{v}\in T_P$，过P沿$\boldsymbol{v}$的方向作测地线C，在C上取点M，使$\widehat{PM}=\lvert\boldsymbol{v}\rvert$，则$\exp\boldsymbol{v}=M$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
τ_g	测地挠率	geodesic torsion	在曲面S上过一点P作以单位切向量α为初始方向的测地线$C: u=u(s), v=v(s)$，测地线C在P点的挠率称为曲面S在P点关于α方向的测地挠率	$\tau_g = \left(\alpha, n, \frac{dn}{ds}\right)$
$\mathscr{N}$	高斯映射	Gauss map	以曲面S的单位法向量$\boldsymbol{n}(u,v)$作为向量函数，表示单位球面S^2，高斯映射$\mathscr{N}: S \to S^2$是曲面S与相应的球面S^2之间的对应关系	亦称曲面的球面表示
$\deg \mathscr{N}$	高斯映射度	Gauss mapping degree	$\deg\mathscr{N} = \frac{1}{2}\chi(S)$表示高斯映射度，它由曲面拓扑所决定，其中$\chi(S)$表示欧拉示性数	
$\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$	坐标邻域	coordinate neighborhoods	U_α是微分流形M的开集，φ_α是微分流形U_α到$\mathbb{R}^n$的开子集的同胚	
C^∞	C^∞相容	C^∞ compatible	$U \cap V \neq \varnothing$，$\varphi \circ \psi^{-1}$和$\psi \circ \varphi^{-1}$是$\mathbb{R}^n$的开子集$\varphi(U \cap V)$和$\psi(U \cap V)$的$C^\infty$微分同胚. 称$(U,\varphi)$和$(V,\psi)$是$C^\infty$相容的	
$L_X Y$	李导数	Lie derivative	$(L_X Y)_p = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}((\varphi_{-t})_* Y_{\varphi_t(p)} - Y_p)$ $= \frac{d}{dt}(\varphi_{-t})_* Y_{\varphi_t(p)}\|_{t=0}$	
R^l_{ijk}	黎曼曲率张量	Riemannian curvature tensor	$R^l_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^l_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{ih}\Gamma^h_{jk} - \Gamma^l_{jh}\Gamma^h_{ik}$和$R_{ijkl} = R^h_{ikl}$ $g_{\ hj}$均称为黎曼曲率张量	亦称第二类克里斯托费尔符号
Ric	里奇曲率张量	Ricci curvature tensor	$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum\limits_i R(e_i, X, Y, e_i)$，即里奇曲率张量是一个(0,2)型张量场. 由对称性知 $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X)$	
C_{ijkl}	共形曲率张量	conformal curvature tensor	$C_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\{R_{ik}g_{jl} - R_{il}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{jk}g_{il}\} + \frac{s}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$	亦称外尔张量
P^l_{ijk}	射影曲率张量	projective curvature tensor	$P^l_{ijk} = R^l_{ijk} - \frac{1}{n-1}(\delta^l_k R_{ij} - \delta^l_j R_{ik})$称为射影曲率张量	
d	外微分算子	exterior differential operator	对于任意$\omega_1, \omega_2 \in A^p(M)$：1. $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$；2. $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$；3. 若$f \in A^0(M)$. 则$d(df) = 0$	若$f \in A^0(M)$，则df恰是f的微分
$Z^p(M,R)$	光滑p次闭形式空间	space of smooth p-closed differential form	$Z^p(M,R) = \{\omega \| \omega$是流形$M$上的光滑$p$次闭形式$\}$表示光滑$p$次闭形式空间	
$B^p(M,R)$	光滑p次恰当形式空间	space of smooth p-exact differential form	$B^p(M,R) = \{\omega \| \omega$是流形$M$上的光滑$p$次恰当形式$\}$表示光滑$p$次恰当形式空间	
$H^p(M,R)$	德·拉姆上同调群	de Rham cohomology group	表示流形M的第p个德·拉姆上同调群. $H^p(M,R)$中的元素称为同调类	亦称第p个德·拉姆上同调空间
$\int_M \omega$	形式积分	integral of forms	$\int_M \omega = \sum\limits_i \int_M f_i \circ \omega$	
∇	仿射联络	affine connection	设M是n维C^∞流形，$\Gamma(TM)$为M上的C^∞向量场空间. M上的仿射联络是指映射$\nabla: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$，满足四条公理	
$\nabla_{X_p} Y$	共变导数	covariant derivative	令$P \in M, X_P \in T_P(M)$. Y为M上的C^∞向量场. 定义$\nabla_{X_p} Y = (\nabla_X Y)_P$	亦称协变微商
$K(X,Y)$	截面曲率	sectional curvature	对任意两个不共线的切向量$X, Y \in T_P M$， $K(X,Y) = -\frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - [g(X,Y)]^2}$	当$\dim M = 2$时，$K(X,Y)$恰好是M在P点的高斯曲率
$R(X,Y)$	曲率算子	curvature operator	$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z \ (X,Y,Z \in \Gamma(TM))$	
$\triangle$	拉普拉斯-贝尔脱拉米算子	Laplace-Bertrami operator	$\triangle f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$	
$S_p(2n)$	辛群	symplectic group	设(V,ω)是一个辛空间，(V,ω)的自同构的全体构成群$GL(V)$的一个子群记为$SP(V,\omega)$，特别地，标准辛空间(K^{2n},ω)的自同构群记为$S_p(2n,K)$. 若$K=R$，则把$S_p(2n,K)$简记为$S_p(2n)$，并称为$2n$维辛群	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$E(f)$	能量	energy	设 M,N 为黎曼流形，$f:M\to N$ 为光滑映射，f 的能量定义为：$E(f)=\frac{1}{2}\int_M \|df\|^2 *1$，其中 $*1$ 为 M 的体积元	
$e(f)$	能量密度	energy density	符号条件同上，$e(f)=\frac{1}{2}\|df\|^2$	
∂M	流形的边界	boundary of a manifold	带边流形 M 中全体边界点的集	
T_PM	切空间	tangent space	微分流形 M 在 P 点处的全体切向量的集记为 T_PM，称为 M 在 P 处的切空间	T_PM 是实 $\dim M$ 维向量空间
f_{*P},T_Pf	在一点处的切映射	tangent map at a point	$f:M\to N$ 是可微映射，$f_{*P}:T_PM\to T_{f(P)}N$ 称为可微映射 f 在 $P\in M$ 处的切映射	若 f 是微分同胚，则 $\forall P\in M$，f_{*P} 是同构
TM	流形的切丛	tangent bundle of manifold	(TM,π,M) 称为微分流形 M 的切丛，简称 TM 为 M 的切丛	
Tf	切映射	tangent map	设 $f:M\to N$ 是流形 M 到 N 的可微映射，$Tf:TM\to TN$ 称为 f 的切映射	若 $f:M\to N$ 是微分同胚，则 $Tf:TM\to TN$ 亦然
$\xi\oplus\eta$	向量丛的惠特尼和	Whitney sum of vector bundles	ξ,η 分别是 n 维，k 维向量丛，$\tilde{\pi}:E(\xi)\oplus E(\eta)\to B$ 为自然投射. $(E(\xi)\oplus E(\eta),\tilde{\pi},B)$ 是 $n+k$ 维向量丛，称为 ξ 与 η 的惠特尼和	亦可看成积丛 $\xi\times\eta$ 由对角映射 $f:B\to B\times B$ 决定的诱导丛
$\chi(\xi)$	欧拉数	Euler number	设 $\xi=(E,\pi,M)$ 是 n 维定向向量丛，则零截面的自交数称为向量丛 ξ 的欧拉数	当 $\xi=TM$ 时，$\chi(\xi)$ 就是 M 的欧拉示性数
$U^{\perp}(t)$	正交分量	orthogonal component	表示分向量场 $U(t)$ 与测地线 γ 正交的分量	
$T_x^{\perp}M$	法空间	normal space	表示 M 在 x 处的法空间，正交于切空间 T_xM	
$\nabla^{\perp}$	法联络	normal connection	若 M 是黎曼流形，则 $\nabla^{\perp}$ 表示 M 上的法联络	
$(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp}$	正交投影	orthogonal projection	表示 $\tilde{R}(X,Y)Z$ 在 M 的法丛 $N(M)$ 上的投影. 式中 $\tilde{R}$ 是 $\tilde{M}$ 的曲率张量	
(X,d)	度量空间	metric space	赋予度量 d 的集合 X 称为度量空间	亦称距离空间
$(X,\mathscr{T})$	拓扑空间	topological space	确定了拓扑 $\mathscr{T}$ 的集合 X 称为拓扑空间	
$\bar{A}$, $\mathrm{cl}A$	闭包	closure	包含 A 的所有闭集的交集称为 A 的闭包，它是包含 A 的最小闭集	
$b(A)$, $\mathrm{Bd}A$	边界	boundary	A 的全体边界点组成的集合称为 A 的边界	亦可记为 $A^b,\partial A$
$\mathrm{Int}\ A,A^i$	内部	interior	集 A 的全部内点组成的集合称为 A 的内部	亦可记为 $\mathring{A}$ 或 A°
$U(a,\delta)$	邻域	neighborhood	$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径	
$\mathring{U}(a,\delta)$	去心邻域	deleted neighborhood	$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<\|x-a\|<\delta\}$ 称为点 a 的去心的 δ 邻域	
$\mathscr{U}(x)$	邻域系	neighborhood system	点 x 的邻域的全体称为 x 的邻域系	
$X\vee Y$	拓扑空间的楔和	wedge sum of topological spaces	设 X,Y 为两个带有基点的拓扑空间. x_0,y_0 分别为 X,Y 的基点. 子空间 $X\times\{y_0\}\cup\{x_0\}\times Y\subset X\times Y$ 称为 X 和 Y 的楔和	
$X\wedge Y$	拓扑空间的碎积	smash product of topological spaces	商空间 $X\times Y/X\vee Y$ 称为 X,Y 的碎积	
$V_{n,k}$	斯蒂弗尔流形	Stiefel manifold	$V_{n,k}=\{(e_1,e_2,\cdots,e_k)\mid e_i\in R^n,e_i\cdot e_j=\delta_{ij}.1\leqslant i,j\leqslant k\}$ 在 $R^n\times\cdots\times R^n$（$k$ 个）的诱导拓扑之下，$V_{n,k}$ 为一个紧致流形，称为斯蒂弗尔流形	
$B_\varepsilon(a)$	开球	open ball	设 (X,d) 为度量空间，$a\in X,\varepsilon>0$，$B_\varepsilon(a)=\{x\in X\mid d(a,x)<\varepsilon\}$ 称为以 a 为中心的 ε 开球	亦可记为 $B(a,\varepsilon)$
$\bar{B}_\varepsilon(a)$	闭球	closed ball	设 (X,d) 为度量空间，$a\in X,\varepsilon>0$，$\bar{B}_\varepsilon(a)=\{x\in X\mid d(a,x)\leqslant\varepsilon\}$ 称为以 a 为中心的 ε 闭球	亦可记为 $\bar{B}(a,\varepsilon)$
$\delta(M)$	直径	diameter	设 M 为度量空间 (X,d) 的子集，定义 $\delta(M)=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in M\}$，称为集 M 的直径	亦可记为 $\mathrm{diam}M$
$A^d,d(A)$	导集	derived set	集 A 的一切聚点的集称为 A 的导集	
$A^e,\mathrm{ext}(A)$	外部	exterior	集 A 的全体外点组成的集合称为 A 的外部，记为 A^e 或 $\mathrm{ext}(A)$	

符 号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Ind$X$	大归纳维数	large inductive dimension	这是在正则空间中利用归纳法定义的维数，若空间X,Y同胚，则 Ind$X$ = Ind$Y$	亦称布劳威尔－切赫维数
ind X	小归纳维数	small inductive dimension	这是在正则空间中利用归纳法定义的维数，若空间X,Y同胚，则 ind$X$ = ind$Y$	亦称门杰－乌雷松维数
$\varprojlim\{X_\alpha,\pi_\alpha^\beta,A\}$	逆极限	inverse limit	逆系$\{X_\alpha,\pi_\alpha^\beta,A\}$的逆极限	亦可记为$\varprojlim X_\alpha$
$\varepsilon(A)$	凸包络	convex envelope	X内所有包含A的凸集之交称为A的凸包络	
$\simeq$	同伦	homotopy	若$f,g:X\to Y$都是连续映射，$I=[0,1]$，且存在连续映射$H:X\times I\to Y$，使得对所有$x\in X$，$H(x,0)=f(x)$，$H(x,1)=g(x)$，则f,g称为同伦映射，记为$f\simeq g:X\to Y$	这里H称为从f到g的一个同伦或伦移
$\approx$	同胚	homeomorphism	$f:X\to Y$是连续映射，且f的逆映射连续，则称f为同胚，亦称空间X与Y同胚，记为$X\approx Y$	亦称拓扑映射、拓扑变换
$\Vert\ \Vert$	范数	norm	$\Vert x\Vert$表示赋范空间中x的范数或实空间中向量α的赋值. 记为$\Vert\alpha\Vert$	欧氏空间的向量x的长度概念的推广
E^n	n维欧氏空间	n-dimensional Euclidean space	$E^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R}\}$，规定度量 $d=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$	亦可记为R^n
P^n	n维射影空间	n-dimensional projective space	域F上的n维射影空间常记为FP^n，简记为P^n，当F是实数域时记为$\mathbf{R}P^n$；当F是复数域时记为$\mathbf{C}P^n$. 若F是四元数域$\mathbf{H}$. 记为$\mathbf{H}P^n$	
S^n	n维球面	n-dimensional sphere	$S^n=\{x\in\mathbf{R}^{n+1}:\lvert x\rvert=r\}$	
T^n	n维环面	n-dimensional torus	圆S^1自身的n次拓扑乘积. 记为 $T^n=S^1\times S^1\times\cdots\times S^1$	
$C_q(\ ,\ )$	链群	chain group	K是复形，$C_q(K,Z)$称为K的q维链群	亦可简记为$C_q(K)$
H_n	n维同调群	n-dimensional homology group	$H_n(K,A)=Z_n(K,A)/B_n(K,A)$表示复形$K$的以$A$为系数群的$n$维同调群	
H^n	n维上同调群	n-dimensional cohomology group	$H^n(X,A)=Z^n(K,A)/B^n(K,A)$表示复形$K$以$A$为系数群的$n$维上同调群	
$\check{H}^n$	n维切赫上同调群	n-dimensional Čech cohomology group	$\check{H}^n(X)=\varinjlim H^n(N_\lambda)$表示$X$的$n$维切赫上同调群	
$\check{H}_n$	n维切赫同调群	n-dimensional Čech homology group	$\check{H}_n(X)=\varprojlim H_n(N_\lambda)$表示$X$的$n$维切赫同调群	
π_n	n维同伦群	n-dimensional homotopy group	$\pi_n(X)$是映射$(S^n,s_0)\to(X,x_0)$的同伦类集合	
$\pi_{n+k}(S^n)$	稳定同伦群	stable homotopy group	悬垂同态$E:\pi_{n+k}(S^n)\to\pi_{n+k+1}(S^{n+1})$，当$n>k+1$时为同构，称为球面的第$k$个稳定同伦群	悬垂同态亦称同纬像同态
∂	边缘算子	boundary operator	∂c表示c的边缘	
δ	上边缘算子	coboundary operator	δf表示f的上边缘	
sq	斯廷罗德方形运算	Steenrod square	$Sq^i(x,y)=\sum_{j+k=i}Sq^j(x)Sq^k(y)$即$x$的斯廷罗德方形运算	
$\mathscr{P}$	斯廷罗德幂运算	Steenrod power	$\mathscr{P}_p^r(xy)=\sum_{i+j=r}\mathscr{P}_p^i(x)\mathscr{P}_p^j(y)$即$x$的斯廷罗德$p$次幂运算	亦可记为St_p^r
$\smile$	上积	cup product	$z_1\smile z_2$表示z_1和z_2的上积	
$\frown$	卡积	cap product	$z_1\frown z_2$表示z_1和z_2的卡积	
$\omega\wedge\eta$	外积	exterior product	表示微分形式ω,η的外积. $\omega\wedge\eta=A_{k+l}(\omega\otimes\eta)$. 其中$A_{k+1}$是反对称化算子，$\omega$是$k$次矢量，$\eta$是$l$次矢量，$\omega\wedge\eta$是$(k+l)$次外矢量	
mesh	复形的网径	mesh diameter of a complex	单纯复形K中诸单形直径的最大值称为复形的网径，即 mesh$=\max_{\sigma\in K}\{\Vert x-y\Vert\mid x,y\in\sigma\}$	
deg	映射度	degree of mapping	设$f:S^n\to S^n$是映射，α是$H_n(S^n)$的生成元，则$f_*(\alpha)=\rho\alpha$. 其中整数ρ称为f的映射度. 记为$\rho=\deg(f)$	亦称拓扑度，又称布劳威尔度
rel	相对于	relative	rel A表示相对于A	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备 注
C	连续函数空间	continuous function space	$C[a,b]$表示$[a,b]$上连续函数的全体	
L^p	p次可积函数空间	integrable function space of order p	$L^p(\Omega,\mathscr{B},\mu)(\infty>p\geqslant 1)$是测度空间$(\Omega,\mathscr{B},\mu)$上可测而且$p$次可积函数的全体	
C^n	C^n类函数空间	C^n class function space	$C^n[a,b](\infty>n\geqslant 1)$是$[a,b]$上$n$阶连续可微函数的全体	
C^∞	C^∞类函数	function of class C^∞	对于所有r,函数f是C^r类的.亦称f是光滑的	
C^∞	C^∞映射	C^∞ mapping	W,N是微分流形,$F:W\to N,\psi\circ F\circ\varphi^{-1}P:\varphi(U)\to\psi(V)$是$C^\infty$的.$U,V$分别是$W,N$的坐标邻域	
L^∞	本性有界可测函数	essentially bounded function space	$L^\infty(\Omega,\mathscr{B},\mu)$表示$\Omega$上(关于$\mu$)本性有界可测函数全体	
T_2	豪斯多夫空间	Hausdorff space	设X为拓扑空间,若X的任意两个不相同的点都有不相交的开邻域则称X为豪斯多夫空间	亦称T_2空间
R^∞	希尔伯特空间	Hilbert space	设$x=(x_1,x_2,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots).x,y\in R^\infty$,定义$d=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}$,则$(R^\infty,d)$称为希尔伯特空间	
Y^X	函数空间	functional space	表示所有连续函数$f:X\to Y$的集合	
$N_{K,U}$	紧致开拓扑	compact open topology	$N_{K,U}=\{f:f(K)\subset U\}$,其中$K\subset X$紧致,$U\subset Y$为开集	
e_a^n	n维胞腔	cell of dimension n	e_a^n是空间X的子集	
CW	CW复形	CW-complex	一个空间X中的CW复形是满足闭包有限和诱导弱拓扑两项条件的胞腔复形	
$L(p,q)$	透镜空间	lens spaces	$L(p,q)=s^3/Zp$	
WHE	弱同伦等价公理	weak homotopy equivalence axiom	若$f:X\to Y$是弱同伦等价关系,则$f_*:k_n(X,x_0)\to k_n(Y,f(x_0))$是同构	
$\widetilde{KO}(X)$	$\widetilde{KO}$群	$\widetilde{KO}$-group	表示X上实向量丛的所有稳定等价类集合	
$\widetilde{K}(X)$	$\widetilde{K}$群	$\widetilde{K}$-group	表示X上复向量丛的所有稳定等价类集合	
$\widetilde{KS}_p(X)$	$\widetilde{KS}_p$群	$\widetilde{KS}_p$-group	表示X上四元向量丛的所有稳定等价类集合	
$K(s)$	K群	K-group	表示由半群的同态$\varnothing:S\to K(s)$诱导的abelian群	
$KO(X)$	KO群	KO-group	$KO(X)\cong\widetilde{KO}(X)\oplus KO(\{x_0\})$	
$K(X)$	K群	K-group	$K(X)\cong\widetilde{K}(X)\oplus K(\{x_0\})$	
$KS_p(X)$	KS_p群	KS_p-group	$KS_p(X)\cong\widetilde{KS}_p(X)\oplus KS_p(\{x_0\})$	
$M_1\sim M_2$	流形的协边	cobordism of manifolds	设M_1,M_2都是紧致(无边)微分流形,若存在紧致带边流形W与微分同胚$\partial W\cong M_1\times(0)\cup M_2\times(1)$,则称$M_1$与$M_2$协边	
MSO_n	定向协边群	oriented bordism group	表示所有定向协边类的集合	亦称Thom群
MO_n	非定向协边群	unoriented bordism group	表示所有非定向协边类的集合	亦称Thom群
MSO_*	分次交换环	graded commutative ring	$MSO_*=\sum MSO_n$	
MO_*	分次交换代数	graded commutative algebra	$MO_*=\sum MO_n$	
$MSO_n(X,A)$	定向奇异协边群	oriented singular bordism group	表示(X,A)中定向奇异协边类的集合	
$MSO_*(X,A)$	分次右模	graded right module	$MSO_*(X,A)=\sum MSO_n(X,A)$	
$MSO_n(Pt)$	一点的协边群	bordism group of a point	$MSO_n(Pt)=MSO_n$	
$\widetilde{MSO}_n(X)$	约化群	reduced group	表示增广同态$\varepsilon_*:MSO_n(X)\to MSO_n(pt)$的核	
$MO_n(X,A)$	非定向奇异协边群	unoriented bordism group	表示(X,A)中非定向奇异协边类的集合	
$MO_*(X,A)$	分次模	graded module	$MO_*(X,A)=\sum MO_n(X,A)$	

代数学(Algebra)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
max	最大或极大	maximum	$y_{\max}=a$ 表示 y 的最大(极大)值等于 a	
min	最小或极小	minimum	$y_{\min}=b$ 表示 y 的最小(极小)值等于 b	
!	阶乘	factorial	$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$	规定 $0!=1$
!!	双阶乘	double factorial	$(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)$; $(2n+1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n+1)$	
$(a)_n$	始于 a 的 n 个实数之积	product of the n-real numbers by the beginning at a	例如, $(\sqrt{2})_4=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}+3)$	a 为实数,n 为自然数
C_n^p 或 $\binom{n}{p}$	二项式系数,组合数	binomial coefficient, combinatorial numbers	表示从 n 个元素中每次取出 p 个元素的所有不同组合的总数	
P_m^n 或 A_m^n	选排列	selections permutation	$\mathrm{P}_m^n=\dfrac{m!}{(m-n)!}=m(m-1)\cdots(m-n+1)$	
P_m 或 A_m	全排列	all permutation	$\mathrm{P}_m=m!$	
H_m^n	重复组合	combination with repetition	$\mathrm{H}_m^n=\mathrm{C}_{m+n-1}^n=\dfrac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$	
$\cup_m^n$	有重复的排列	permutation with repetition	$\cup_m^n=m^n$,即从 m 个相异元素中每次取出 n 个元素允许重复排列的排列总数	亦可记为$\prod_m^n=m^n$
R_m^n	环排列	circular permutation	$\mathrm{R}_m^n=\dfrac{\mathrm{P}_m^n}{n}=\mathrm{C}_m^n(n-1)!\ (m\leqslant n)$. 当 $m=n$ 时,$\mathrm{R}_m^m=(m-1)!$	亦可用 $\mathrm{R}_{m平}^n$ 和 $\mathrm{R}_{m立}^n$ 分别表示平面环排列与空间环排列
i	虚数单位	imaginary unit	$\mathrm{i}=\sqrt{-1}\ (\mathrm{i}^2=-1)$	电工技术中常用 j
z	复数记号	symbol of complex number	$z=a+b\mathrm{i}$ 即实部为 a,虚部为 b 的复数	
Re z	z 的实部	real part of z	$z=a+b\mathrm{i}$ (Re $z=a$)	
Im z	z 的虚部	imaginary part of z	$z=a+b\mathrm{i}$ (Im $z=b$)	
$\|z\|$	z 的模	modulus of z	$z=a+b\mathrm{i}$ $(\|z\|=\sqrt{a^2+b^2})$	亦可用 mod z 表示
arg z	z 的辐角	argument of z	$\varphi=\arg z$ 即复数 z 的辐角为 φ,$0<\varphi\leqslant2\pi$	
$\bar{z}$	z 的共轭复数	conjugate complex number of z	设 $z=a+b\mathrm{i}$,则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$ 称为 z 的共轭复数	亦可用 z^* 表示
sgn z	z 的单位模函数	signum z	$\operatorname{sgn} z=\begin{cases}z/\|z\| & (z\neq0),\\ 0 & (z=0)\end{cases}$	
det A	方阵的行列式	determinant of a square matrix	设 A 为方阵,则 det$A$ 表示 A 的行列式	A 的行列式亦可用 $\|A\|$ 表示
$\\|A\\|$	范数	norm	矩阵 A 的范数为 $\\|A\\|=(\mathrm{Tr}(AA^+))^{\frac{1}{2}}$	范数有各种定义
$A_{m\times n}$ 或$(a_{ij})_{m\times n}$	矩阵	matrix	$A_{m\times n}$ 表示一个 m 行 n 列的矩阵,$(a_{ij})_{m\times n}$ 表示(i,j)元素是 a_{ij} 的 m 行 n 列矩阵	
diag{…} 或[…]	对角矩阵	diagonal matrix	表示主对角线上元素为 $d_{11},d_{12},\cdots,d_{nn}$,其余元素全为零的方阵	
I 或 E	单位矩阵	unit matrix	表示主对角线上的元素都是 1,其他元素都是零的方阵,用 I 或 E 表示,称为单位矩阵	
A^{-1}	方阵 A 的逆	inverse of the square matrix A	设方阵 A 的行列式 $\|A\|\neq0$,则 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$,其中 I 为单位方阵	
A^{T} 或 A'	A 的转置矩阵	transposed matrix of A	把矩阵 A 的行换成同序数的列,得到的新矩阵,称为 A 的转置矩阵	亦可表示成 $\tilde{A}$
$A\geqslant0$	非负矩阵	nonnegative matrix	实矩阵 A 中每个元素都是非负的	
$A>0$	正矩阵	positive matrix	实矩阵 A 中每个元素都是正的	
α^*	不增向量	nonincreasing vector	设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是一个实向量. 若 $a_1^*,a_2^*,\cdots,a_n^*$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排列且满足 $a_1^*\geqslant a_2^*\geqslant\cdots\geqslant a_n^*$,则称$\alpha\doteq(a_1^*,a_2^*,\cdots,a_n^*)$是$\alpha$的不增向量	

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\prec$	优于	major than	设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$是两个非负实向量,如果$a_1^*\leqslant b_1^*,\cdots,a_1^*+a_2^*+\cdots+a_{n-1}^*\leqslant b_1^*+b_2^*+\cdots+b_{n-1}^*$, $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$,则称$\beta$优于$\alpha$,记为$\alpha\prec\beta$	
Per A	积和式	formula of sum of products	A是$m\times n$复矩阵,$m\leqslant n$,$\mathrm{Per}\,A=\sum\limits_{\sigma}\prod\limits_{i=1}^{m}a_i\sigma(i)$称为$A$的积和式,其中$\sum$是对$\{1,2,\cdots,m\}$到$\{1,2,\cdots,n\}$的一切映射$\sigma$求和	
$\sigma(A)$	A的元素的和	sum of elements of A	表示矩阵A的所有元素之和	
$\rho(A)$	谱半径	spectral radius	设A为n阶复矩阵,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为其全部特征根,则$\rho(A)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\lvert\lambda_i\rvert$称为$A$的谱半径	
(i,j)	(i,j)元素	(i,j) element	表示矩阵或行列式第i行第j列交叉位置上的元素	亦称(i,j)分量
A_{ij}	代数余子式	algebraic complement minor	在一个行列式中,(i,j)元素的代数余子式	
A^*	伴随矩阵	adjoint matrix	由n阶方阵A的所有元素的代数余子式A_{ij}为元素所构成的n阶方阵(A_{ij}置于第j行第i列交叉位置上)	亦可用$\tilde{A}$或adj A表示
$\overline{A}$	增广矩阵	augmented matrix	在一个线性方程组的系数矩阵中,再在最后增加由常数项构成的列,所得到的矩阵	亦可用$\tilde{A}$表示
E_{ij}	矩阵单位	matrix unit	(i,j)元素是1,其余元素全是零的矩阵. 其中,$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$	多指方阵
TrA	方阵的迹	trace of a square matrix	方阵A的主对角线上所有元素之和	亦称追迹
rank (A)	矩阵的秩	rank of matrix	矩阵(不一定是方阵)A中不等于零的子式的最大阶数称为A的秩,零矩阵的秩规定是零	亦可用$r(A)$、"秩A"或"A秩"表示
$M_n(F)$,$F^{n\times n}$ $F_{n\times n}$,F_n	n阶全阵环	total matrix ring of order n	域F上全体n阶方阵对方阵的加法和乘法组成的环	更一般地,可把域F换成任意环R
$A\otimes B$	矩阵的直积	direct product of matrices	设$A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{r\times s}$,则$mr\times ns$矩阵称为A与B的直积,记为$A\otimes B$	亦称Kronecker积.
$\dotplus$	方阵的直和	direct sum of a square matrix	设A为nk阶方阵.若A中表示成主对角线是k个n阶方阵$A_1,A_2,\cdots,A_k$,而其余块全为零的分块,则称A为$A_1,A_2,\cdots,A_k$的直和,记为 $A=A_1\dotplus A_2\dotplus\cdots\dotplus A_k$	
$\overline{A}$	A的复共轭矩阵	complex conjugate matrix of A	将复矩阵A的每个元素换成共轭复数所得矩阵记为$\overline{A}$,称为矩阵A的复共轭矩阵	
$\overline{A^+}$、$\overline{A^H}$	埃尔米特共轭矩阵	Hermitian conjugate matrix	矩阵A的复共轭矩阵$\overline{A}$的转置矩阵$\overline{A}'$,称为A的埃尔米特共轭矩阵	
A^+, A^H	埃尔米特矩阵	Hermitian matrix	若n阶矩阵A与它的转置共轭矩阵$\overline{A}'$相等,则A称为埃尔米特矩阵	
δ_{ik}	克罗内克δ	Kronecker's delta	$\delta_{ik}=\begin{cases}1 & (i=k),\\0 & (i\neq k)\end{cases}$ $(i,k=1,2,\cdots,n)$	
$R[x]$	多项式环	polynomial ring	系数属于环R、未知量(不定元)为x的全体多项式,对于多项式的普通加法和乘法组成的环	如果R有单位元1,则规定$x^0=1$
$R[x_1,x_2,\cdots,x_n]$	n元多项式环	n-ary polynomial ring	系数属于环R,未知量为$x_1,x_2,\cdots,x_n$(不相关不定元)的全体多项式,对于多元多项式的普通加法和乘法组成的环	如果环R有单位元1,则规定$x_i^0=1$,且$x_ix_j=x_jx_i$
deg $f(x)$	多项式的次数	degree of a polynomial	表示多项式$f(x)\neq0$中系数不为零的项中最高次项的次数	亦可用$\partial^\circ f(x)$表示
$\Phi_n(x)$	分圆多项式	cyclotomic polynomial	$\Phi_n(x)=\prod\limits_{i=1}^{\varphi(n)}(x-\xi_i)$称为$n$次分圆多项式,其中$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{\varphi(n)}$为$n$次原根	
$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$	初等对称多项式	elementary symmetrical polynomials	例如,x_1,x_2,x_3的初等对称多项式为:$\sigma_1=x_1+x_2+x_3$,$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$,$\sigma_3=x_1x_2x_3$	
$(f_1(x),\cdots,f_n(x))$	最高公因式	highest common factor	首系数为1且次数最高的公因式	亦称最大公因式
$[f_1(x),\cdots,f_n(x)]$	最低公倍式	least common multiple	首系数为1且次数最低的公倍式	亦称最小公倍式

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$(f(x),g(x))=1$	互素	coprime	多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式是 1	
$(f_1(x),\cdots,f_n(x))=1$	两两互素	mutually prime	多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$ 中每两个都是互素的	
$F(x)$	有理分式域	rational traction field	域 F 上所有有理分式 $f(x)/g(x)(g(x)\neq 0)$ 关于有理分式的加法和乘法所组成的域	
$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$	行向量	row vector	分量是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 并排成一横行的 n 元向量	
$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$	列向量	column vector	分量是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 并排成一纵列的 n 元向量	
$\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$	反序数	inverted sequence number	n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中反序个数的总和. 例如 $\tau(231)=2,\tau(321)=3$	亦称逆序数
$(i_1,i_2,\cdots,i_k)$	k 循环	k-cyclic(permutation)	即将 i_1 变为 i_2,i_2 变为 $i_3,\cdots,i_k$ 变为 i_1,而别的元素不动的置换	
sgn σ	置换的符号数	symbol number of permutation	设 σ 是一个置换,令 $\operatorname{sgn}\sigma=\begin{cases}+1 & (\sigma\text{ 是偶置换}),\\-1 & (\sigma\text{ 是奇置换})\end{cases}$	
(i,j)	对换	transposition	即将数码 i 变为 j,j 变为 i,而别的数码不动的置换	
K^n	向量空间	vector space	以 K 为基域的 n 元向量的集合 K^n. 称为 K 上的向量空间或线性空间	当 $K=R$ 时记为 R^n,当 $K=\mathrm{C}$ 时记为 C^n,有时表示成 V
$\alpha\perp\beta$	正交向量	orthogonal vectors	内积为零的两个向量	
$\alpha\perp W$	向量与子空间正交	a vector cut a subspace orthogonally	欧氏空 间中向量 α 与子空间 W 中每个向量都正交	亦可表示成 $(\alpha,W)=0$
$V_1\perp V_2$	正交子空间	orthogonal subspaces	V_1 与 V_2 是欧氏空间的两个子空间,若 V_1 中每个向量与 V_2 中每个向量都正交,则称 V_1 与 V_2 为正交子空间	
$W^{\perp}$	正交补	orthogonal complement	W 是欧氏空间 V 的一个子空间,$W^{\perp}$ 表示 V 中与 W 正交的一切向量所构成的子空间	
$\varphi\|W$	诱导变换	induced transformation	φ 是线性空间 V 的一个线性变换,子空间 W 对 φ 不变,则 φ 在 W 上的限制称为 φ 在 W 中的诱导变换	
$\leqslant$	子群	subgroup	$H\leqslant G$ 即 H 是群 G 的子群	亦可用 $<$ 表示子群或真子群
$\trianglelefteq$	正规子群	normal subgroup	$N\trianglelefteq G$ 即 N 是群 G 的正规子群	亦可用 $\lhd$ 表示正规子群或正规真子群
$\exp(G)$	有限群的指数	exponent of a finite group	设 G 是有限群,使 $a^n=1\ (\forall\ a\in G)$ 的最小正整数 n,称为 G 的方次数	
$O_p(G)$	极大正规 p 子群	maximal normal p-subgroup	群 G 的极大正规子群且为 p 子群	
M^G	正规闭包	normal closure	群 G 的包含子集 M 的最小正规子群	
M_G	子集的核	core of subset	设 M 是群 G 的子集,则 G 的包含在 M 中的所有正规子群生成的子群称为 M 的核	
$H\mathrm{char}G$	特征子群	characteristic subgroup	群 G 的在 G 的任意自同构下不变的子群	
$\mathrm{Syl}_p(G)$	西洛 p 子群	sylow p-subgroup	表示有限群 G 的一个西洛 p 子群,其中 p 是素数	
$S(G)$	基座	socle	群 G 的所有极小正规子群之积	
$\mathrm{Fit}(G)$	菲廷子群	Fitting subgroup	群 G 的所有幂零正规子群之积	
$R_u(G)$	幂幺根基	unipotent radical	代数群 G 的最大连通正规幂幺子群	
$R(G)$	代数群的根基	radical of an algebraic group	代数群 G 的最大连通正规可解子群	
$\otimes,\times$	群的直积	direct product of groups	$G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ 或 $G=G_1\otimes G_2\otimes\cdots\otimes G_n$ 表示群 G 是群 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 的直积	群的直积有内外之分. 但在同构意义下可互相转化
$[X,Y]$	李括号	Lie bracket	$[X,Y]_p(f)=X_p(Yf)-Y_p(Xf)$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$H \ltimes K$	半直积	semidirect product	$G/\overline{N} \cong F$,其中 $\overline{N}$ 是与 N 同构的正规子群,$G=\overline{F}\overline{N}$,其中 $\overline{F}$ 是与 F 同构的子群. $\overline{F}\cap\overline{N}=\{e\}$ 此时 G 称为 N 与 F 的半直积	
$\mathrm{N}_G(H)$	正规化子	normalizer	群 G 中所有可与子群 H 交换的元素组成的集合	定义子集 S 的正规化子为 $\mathrm{N}_G(S)$
$\mathrm{C}_G(H)$	中心化子	centralizer	群 G 中所有与子群 H 的每个元素可交换的元素组成的集合	亦可表成 $\mathrm{Z}_G(H)$
C_a	元素的中心化子	centralizer of an element	设 a 是群 G 的一个元素,则 G 中所有与 a 可交换的元素组成的集合	亦可记为 $\mathrm{C}(a)$
$C(G)$	群的中心	center of a group	群 G 中与 G 的每个元素都可换的元素组成的集合	$C(G)$ 即 $\mathrm{C}_G(G)$. 亦可用 $Z(G)$ 表示
$[a,b]$	换位子	commutator	群 G 中二元素 a 与 b 的换位子是指 G 中元素 $a^{-1}b^{-1}ab$,即$[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab$	换位子亦可定义为 $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$
$G',(G,G)$	换位子群	commutator group	由群 G 的一切换位子所生成的子群	亦称 G 的导出群或导群,并记为 $D(G)$
$[A,B]$	A 与 B 的换位子群	commutator subgroup of A and B	A,B 是群 G 的两个子集. 由所有换位子$[a,b](a\in A, b\in B)$ 所生成的子群	
$(G:H)$, $[G:H]$ 或 $\|G:H\|$	子群的指数	index of a subgroup	子群 H 在群 G 中左(或右)陪集的个数. 例如, $H=\{(1),(12)\}\subset S_3$, $(S_3:H)=3$	$(G:H)$ 可能有限,也可能无限
$\Phi(G)$	弗拉蒂尼子群	Frattini subgroup	群 G 的所有极大子群的交	
$S(M),S_M$	对称群	symmetric group	集合 M 的全体双射变换对变换乘法所组成的群,M 可以是无限集	亦可表成 $\mathrm{sym}(M)$
S_n	n 次对称群	symmetric group of degree n	设 $\|M\|=n$,则 M 上的对称群即 M 的全体双射变换对变换乘法组成的群,称为 n 次对称群	一般取 $M=\{1,2,\cdots,n\}$
A_n	交错群	alternating group	n 次对称群 S_n 中全体偶置换组成的群,称为 n 次交错群,简称交错群	亦称交代群
p^∞	p^∞ 型群	group of p^∞-type	$G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n$,其中 G_n 为所有 p^n(p 是素数)次单位根对乘法组成的群. 凡与 G 同构的群均称为 p^∞ 型群	亦称半循环群
$C(p^\infty)$	普吕费尔加群	prùfer additive group	设 p 是一固定素数,则所有形如 a/p^n(n 为任意正整数,a 为任意整数)的有理数组成加群,它对于其子群 $\mathbf{Z}$(整数加群)的商群(或称差群)称为普吕费尔加群	
$\|a\|$	元素的阶	order of the element	设 a 是群的元素. 使 $a^n=e$ 的最小正整数 n,称为 a 的阶或周期. 若这样的 n 不存在,则称 a 的阶是 ∞ 或 0	亦可用 $\circ(a)$ 表示
$\|G\|$	群的阶	order of a group	群 G 中所包含的元素的个数. 例如,$\|S_3\|=6$;整数加群 $\mathbf{Z}$ 的阶为 ∞,即 $\|\mathbf{Z}\|=\infty$	群 G 的阶也可记为 $\mathrm{Ord}(G)$,而有限群 G 的阶也记为$[G:1]$
$\langle S\rangle$	由 S 生成的子群	generated subgroup by S	$\langle S\rangle$ 是群 G 中包含子集 S 的最小的子群,亦即 G 中包含 S 的所有子群的交. 亦用(S) 表示	当 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 时,常记为$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$ 或$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$
$\mathrm{Tor}G$	扭子群	torsion subgroup	群 G 的所有有限阶元素组成的子群,称为 G 的扭子群	亦称周期子群或挠子群
$\langle a\rangle$	循环群	cyclic group	由一个元素生成的群称为循环群. 即 $\langle a\rangle=\{\cdots a^{-2},a^{-1},e,a,a^2,\cdots\}$	亦可用(a) 表示循环群
C_n	n 阶循环群	cyclic group of order n	由一个阶为 n 的元素生成的循环群	
C_∞	无限循环群	infinite cyclic group	由一个阶为无限的元素生成的循环群记为 C_∞	
$\rightarrowtail$	单同态	monomorphism	若 φ 是模 A 到 B 同态映射,而且又是单射时,记为 $A\overset{\varphi}{\rightarrowtail}B$ 或 $\varphi:A\rightarrowtail B$	多用在同调代数中模的同态上
$\twoheadrightarrow$	满同态	surjective homomorphism	若 φ 是模 A 到 B 的同态映射,而且又是满射时,记为 $A\overset{\varphi}{\twoheadrightarrow}B$ 或 $\varphi:A\twoheadrightarrow B$	多用在同调代数中模的同态上
$\leftrightarrow,\rightleftharpoons$	双射	bijection	表示集合 M 与 $\overline{M}$ 间一个双射. 例如,设 $M=\{1,2,3,\cdots\}$,$\overline{M}=\{2,4,6,\cdots\}$,则 $\varphi:n\leftrightarrow 2n$ 是双射	
$\simeq$	同态	homomorphism	$G\overset{\varphi}{\simeq}\overline{G}$ 表示 φ 是群 G 到群 $\overline{G}$ 的一个同态. 有时也简记为 $G\simeq\overline{G}$	在环或其他代数系也有类似说法

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\cong$	同构	isomorphism	$G\cong\overline{G}$，表示群 G 与群 $\overline{G}$ 同构，即群 G 到群 $\overline{G}$ 存在一个保持运算的双射	对环、域、模等代数系的同构，亦用符号 $\cong$，$\wp$ 或 $\simeq$ 表示同构
a^{φ}	元素的像	image of an element	φ 是集合 A 到 B 的一个映射，$a\in A$. 元素 a 在映射 φ 之下的像，一般用 $\varphi(a)$ 表示. 亦用 a^{φ} 或 $a\varphi$ 表示	
G_a	稳定子群	stable subgroup	设 G 是 n 元集 $\Omega=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 上的置换群，$\alpha\in\Omega$，则 $G_\alpha=\{g\mid g\in G,\alpha^g=\alpha\}$，即 G 中一切使 α 不动的置换组成的集合	G_α 是群 G 的一个子群
α^G	像的集合	set of image	设 G 是 n 元集 $\Omega=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 上的置换群，$\alpha\in\Omega$，则 $\alpha^G=\{\alpha^g\mid g\in G\}$	α^G 是 Ω 的一个子集，且 $\lvert G\rvert=\lvert G_\alpha\rvert\cdot\lvert\alpha^G\rvert$
End G	自同态半群	endomorphism semigroup	群 G 的全体自同态对变换的乘法组成的半群	亦可记为 $E(G)$
Aut G	自同构群	automorphism group	群 G 的全体自同构对变换乘法组成的群	亦可简记为 $A(G)$
Inn$G$	内自同构群	inner automorphism group	G 是群，$a\in G,\tau_a:x\to axa^{-1}$ 是 G 的一个内自同构. G 的全体内自同构组成一个群，称为 G 的内自同构群	亦可简记为 $I(G)$. 也把 axa^{-1} 写成 $a^{-1}xa$
Out(G)	外自同构群	group of outer automorphisms	群 G 的自同构群 Aut(G) 对于 G 的内自同构群 Inn(G) 的商群，称为 G 的外自同构群	
$R(G)$	右正则表示	right regular representation	G 为群，G 上一切置换 $\tau_g=\begin{pmatrix}x\\xg\end{pmatrix}$ $(g\in G)$ 组成的集合，称为群 G 的右正则表示	$R(G)$ 是 G 上对称群的子群
Hol$G$	全形	holomorph	$S(G)$ 为群 G 上的对称群，$R(G)$ 为 G 的右正则表示，$R(G)$ 在 $S(G)$ 中的正规化子称为群 G 的全形	
$\mathrm{GL}_n(F)$，$\mathrm{GL}(n,F)$	一般线性群	general linear group	域 F 上全体 n 阶可逆方阵对乘法组成的群，称为域 F 上的一般线性群，它与域 F 上的 n 维空间 V 的全体可逆线性变换组成的乘群 GL(V) 同构，故 GL(V) 亦称一般线性群	
$\mathrm{PGL}_n(F)$	射影一般线性群	projective general linear group	域 F 上 n 次一般线性群 $\mathrm{GL}_n(F)$ 关于其中心所得的商群，称为 F 上射影一般线性群	
$\mathrm{SL}_n(F)$，$\mathrm{SL}(n,F)$	特殊线性群	special linear group	表示域 F 上行列式等于 1 的全体 n 阶方阵对乘法组成的群	$\mathrm{SL}_n(F)$ 是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的正规子群
$\mathrm{PSL}_n(F)$	射影特殊线性群	projective special linear group	特殊线性群 $\mathrm{SL}_n(F)$ 关于其中心所得的商群，称为域 F 上的射影特殊线性群	
$O_n(F,S)$	正交群	orthogonal group	F 是特征不为 2 的域，S 是 F 上任意一个固定的 n 阶可逆对称矩阵，$O_n(F,S)=\{A\mid A\in F_{n\times n}$ 且 $A'SA=S\}$ 是一个群，称为 F 上（由 S 定义的）n 次正交群	
$O(n)$，O_n	实正交群	real orthogonal	由实数域上所有 n 阶正交方阵$(A'=A^{-1})$ 对乘法组成的群，称为 n 次实正交群	
$\mathrm{SO}(n)$	旋转群	rotation group	由实数域上所有行列式等于 1 的 n 阶正交方阵对乘法组成的群，称为 n 次旋转群	
$\mathrm{PO}_n(F,S)$	射影正交群	projective orthogonal group	正交群 $O_n(F,S)$ 关于其中心的商群	
$\mathrm{SP}_{2n}(F,J)$	辛群	symplectic group	J 是域 F 上 $2n$ 阶可逆交错矩阵 $F_{2n\times 2n}$ 中满足 $A'JA=J$ 的一切 A 组成的群，称为 F 上的 $2n$ 次辛群	
$\mathrm{PSP}_{2n}(F,J)$	射影辛群	projective symplectic group	辛群 $\mathrm{SP}_{2n}(F,J)$ 关于其中心的商群	
$U_n(F,K)$	酉群	unitary group	元素为复数的 n 阶酉矩阵的全体关于矩阵的乘法组成群，称为 n 维酉群	
SU	特殊酉群	special unitary group	$U(u)$ 中行列式等于 1 的所有矩阵形成 $U(u)$ 的正规子群，称为特殊酉群	
Spin	旋量群	spinor group	与 $\mathrm{SO}(n)$ 局部同构的单连通李群称为旋量群	
$\langle R,+,\cdot\rangle$	环	ring	非空集合 R 关于运算"+"与"·"组成的环记为 $\langle R,+\cdot\rangle$，也常简记为 R	
$\leqslant$	子环	subring	$S\leqslant R$ 表示 S 是环 R 的子环	亦可用 $<$ 表示子环或真子环
Char R	特征(数)	character	R 为任意环. 使 $na=0(\forall\ a\in R)$ 的最小正整数 n，称为 R 的特征. 若这样的 n 不存在，称 R 的特征为 ∞ 或 0，例如，$\mathrm{Char}Z_n=n$，　$\mathrm{Char}Z=\infty$	亦称特征数，环 R 的特征亦用 ch$R$ 表示

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$U(R)$, R^*	单位群	unit group	R是有单位元的环，R的全体单位（即可逆元）对R的乘法组成群，称为R的单位群. 例如，整数环Z的单位群为$U(\mathbb{Z})=\{1,-1\}$	R的单位群亦称R的乘群
R^0	逆环	inverse ring	R为环. 如果保持R的加法不变，而乘法改为$a\circ b=ba$，则R对于原加法和新乘法。也组成环，称为R的逆环	亦称反环，并记为R^{op}
$\mathbb{Z}[i]$	高斯整环	Gaussian integral domain	由一切复数$a+bi$ $(a,b\in\mathbb{Z})$所组成的数环	
$R[G]$	群环	group ring	设R是有单位元的环，G为群，一切有限和$\sum a_ix_i(a_i\in R, x_i\in G)$关于其（类似于多项式的）加法与乘法组成的环	亦可记为$R(G)$，RG或GR
$F(G)$	群代数	group algebra	域F和群G构成的群环$F[G]$，再加上F中元素与有限和$\sum a_ix_i(a_i\in F, x_i\in G)$的乘法而得到的$F$上的代数	
$J(R)$	雅各布森根	Jacobson radical	环R的所有本原理想的交，称为R的雅各布森根. 当R无本原理想时，规定：$J(R)=R$	亦简称J根，有多种定义方法
$\trianglelefteq$	理想	ideal	$I\trianglelefteq R$表示I是环R的理想	亦可用$\triangle$表示理想或真理想
$\langle a\rangle$	主理想	principal ideal	环中包含元素a的最小理想	亦可用(a)表示
$\oplus$或$\dotplus$	环的直和	direct sum of rings	$R=R_1\oplus R_2\oplus\cdots\oplus R_n$或$R=R_1\dotplus R_2\dotplus\cdots\dotplus R_n$，即环$R$是$R_1,R_2,\cdots,R_n$的直和	对于加群的直积也常称为直和；又子空间的直积，都常用$\oplus$或$\dotplus$表示
$\sqrt{A}$	理想的根	radical of an ideal	A为交换环R的理想. $\sqrt{A}=\{a\mid a\in R, \exists\, n$使$a^n\in A\}$（$n$与$a$有关），称为理想$A$的根	亦称理想A的根基
$\langle S\rangle$	由S生成的理想	generated ideal by S	S是环R的一个子集，$\langle S\rangle$是R中包含S的最小理想，亦即R中包含S的所有理想的交	当$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$时，常记为$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$或$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$
AB	理想的积	product of ideals	A,B是环R的理想，则一切有限和$\sum a_ib_i(a_i\in A, b_i\in B)$组成$R$的一个理想，称为理想$A$与$B$的积	AB是由一切元素$ab(a\in A, b\in B)$生成的理想
$A:B$	理想的商	quotient of ideals	设A,B是交换环R的理想，则R中满足$xB\subseteq A$的一切元素x组成R的理想，称为A与B的商	
$O:B$	零化理想	annihilating ideal	设B是交换环R的理想，则R中满足$xB=0$的一切元素x组成的理想，称为B的零化理想	当R为非交换时，$O:B$是R的左理想
$l(S)$, ann S_l	左零化子	left annihilator	环R中使$rS=0$的一切r组成的集合	$l(S)$是R的左理想
$r(S)$, ann S_r	右零化子	right annihilator	环R中使$Sr=0$的一切r组成的集合	$r(S)$是R的右理想
N_K	克德根	Köthe radical	环R的最大幂零元理想，称为R的克德根，简称K根	
N_Q	近似诣零根	quasi-nil radical	环R的全部近似诣零单边理想之和，称为R的近似诣零根	
N_L	林文茨基根	Livitzki radical	环R的惟一最大局部幂零理想称为R的林文茨基根	
N_{BM}	布朗-麦柯根	Brown-Mccoy radical	环R的最大g正则理想，称为R的布朗-麦柯根	
$F(\alpha)$	单扩张	simple extension	包含域F和元素α的最小扩域	亦称单扩域
$F(S)$	域的扩张	extension of a field	E是域F的扩域，S是E的一个子集，E中包含F和S的最小域记为$F(S)$，它是域F的扩张	当$S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$时，则$F(S)$记为$F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$
$(E:F)$, $[E:F]$	扩域次数	degree of an extended field	E是域F的扩域，则E是域F上的向量空间. E在F上的维数称为扩域的次数或扩张次数	$(E:F)$可能有限，也可能无限
$A(E\|F)$	E在F上的伽罗瓦群	Galois group of E over F	F是域E的子域，$A(E\|F)$是E的使F的每个元素不动的全体自同构组成的群	
$E(G_1)$	子群G_1所属的域	field belong to subgroup	E是域F的扩域，又$G=A(E\|F)\geqslant G_1$，E中所有对于G_1中任一元都不动的元是E的子域，称为子群G_1所属的域	$F\subseteq E(G_1)\leqslant E$
$G(E_1)$	子域E_1所属的群	group belong to subfield	假设同上，又E_1是E的子域且$F\subseteq E_1\subseteq E$. 则$G$中所有不使$E_1$中任意元变动的元素之集是$G$的子群，称为子域$E_1$所属的群	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
F_q, GF(q)	有限域	finite field	F_q 或 GF(q)表示元素个数为 q 的有限域	元素个数相同的有限域都同构
$\mathbf{Q}_p$	p 进数域	p-adic number field	表示有理数域在 p 进赋值下的完备化域	p 为素数
$\mathbf{Z}_p$	p 进整数环	ring of p-adic integers	全体 p 进整数组成的环，称为 p 进整数环	p 为素数
$K[[\ \ ]]$	形式幂级数环	formal power series ring	$K[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$表示系数在域 K 中的形式幂级数环	亦可表示成 $R\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$
$G_rU(A)$	分次单位群	graded unit group	G 为群，$U(A)$ 是 G 分次代数 $A=\bigoplus\limits_{g\in G}A_g$ 的单位群. A 的一切分次单位组成 $U(A)$ 的一个子群	
GS(V)	半线性变换群	semilinear transformation group	V 是域 F 上的向量空间，V 的一切非奇异半线性变换组成群，称为半线性变换群	
$J_G(M)$	雅各布森分次根	Jacobson graded radical	R 为 G 分次环，M 为分次 R 模. M 的一切分次极大模的交，称为 M 的雅各布森分次根	
δ	导子	derivation	环 R 的导子，即 R 的满足 $\delta(a+b)=\delta a+\delta b$ 与 $\delta(ab)=(\delta a)b+a(\delta b)$ 的变换 δ	
$D(A)$	A 上微分算子环	ring of differential operators over A	称 $\bigcup_{i=0}^{\infty}D^i(A)$ 为 A 上线性微分算子环	
deg A	代数 A 的次数	degree of algebra A	设 A 是域 F 上中心单代数，且$(A:F)=m^2$，则称 m 为 A 的次数	
Ind$A$	舒尔指数	Schur index	A 是域 F 上有限维中心单代数，且 $A\cong M_n(D)$，其中 D 是 F 上可除代数，称 deg$D$ 为 A 的舒尔指数	
Bsi$A$	次理想	subideal	设 B 是代数 A 的一个子代数，若有 $B=B_0\subseteq\cdots\subseteq B_n=A$，其中 B_i 是 B_{i+1} 的理想，则称 B 是 A 的次理想	
$\triangle_T$	T 理想	T-ideal	设 I 是代数 A 的一个理想. 如果对 A 的每个自同态 φ 均有 $\varphi(I)\subseteq I$，则称 I 为 A 的 T 理想	
$S^{-1}R$	分式环	ring of fractions	设 R 是有单位元的交换环，S 是 R 的乘闭子集. 则一切 $a/s(\forall\ a\in R, s\in S)$ 关于分式的加法和乘法组成环，称为 R 关于 S 的分式环	
$P^{(n)}$	符号幂	symbolic power	设 P 是有单位元的交换环 R 的素理想，$S_P=R\backslash P$. 称 $S_P^{-1}P^n$ 在 R 中的收缩理想为 P 的 n 次符号幂	
(x,y,z)	结合子	associator	称 $(xy)z-x(yz)$ 为非结合代数中三个元素 x,y,z 的结合子	
Der(R)	导子李环	Lie ring of derivations	结合环 R 的导子在加法与乘法$[\delta_1,\delta_2]=\delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1$ 之下组成的李环，称为导子李环	
Corad(C)	余代数的余根	coradical of coalgebra	余代数 C 的所有单子余代数的和，称为 C 的余根	
$l(K\|F)$	F 共轭映射数	number of F-conjugate mapping	设 Ω 是域 F 的扩域 K 的代数闭包，则 K 到 Ω 的一切 F 共轭映射的个数记为 $l(K\|F)$	
tr. deg$_F K$	超越次数	transcendence degree	域 F 的扩域 K 的超越基的基数称为 K 在 F 上的超越次数	
$N_F^K(\alpha)$	α 的范	norm of α	K 是域 F 的有限次扩域，Ω 是 F 的含 K 的代数闭包；又 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ 为 K 到 Ω 的一切互异的 F 共轭映射，则 $N_F^K(\alpha)=(\prod\limits_{j=1}^{m}\sigma_j(\alpha))^{[K:F]_i}$ 称为 K 中元 α 的范	
$T_F^K(\alpha)$	α 的迹	trace of α	K 是域 F 的有限次扩域，Ω 是 F 的含 K 的代数闭包；又 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ 为 K 到 Ω 的一切互异的 F 共轭映射，则 $T_F^K(\alpha)=[K:F]_i\cdot\sum\limits_{j=1}^{m}\sigma_j(\alpha)$ 称为 K 中元 α 的迹	
X_F	正锥集	set of positive cone	X_F 表示实域 F 的全部正锥组成的集合	
$X_F(T)$	序空间	space of orderings	T 是实域 F 的一个亚正锥，$X_F(T)$ 表示 F 上所有包含 T 的正锥所组成的集合，称为亚序域(F,T) 的序空间	
$H(F)$	实全纯环	real holomorphic ring	实域 F 的所有实赋值环的交是 F 的一个子环，称为 F 的实全纯环	
(F,φ)	赋值域	valued field	带有赋值 φ 的域 F，称为赋值域	带有赋值环 B 的域 F 记为(F,B)
M_R	右 R 模	right R-module	R 是有单位元的环，M_R 是右 R 模，即作用乘法为 $ar(a\in M, r\in R)$	类似地有左 R 模$_RM$

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\hookrightarrow$	子模	submodule	$A\hookrightarrow M$ 表示 A 是模 M 的一个子模	
$\hookrightarrow$	小子模	small submodule	设 A 是模 M 的一个子模.如果对 M 的任意子模 Z 有 $A+Z=M$ 必有 $Z=M$,则称 A 为 M 的小子模,记为 $A\hookrightarrow M$	即只有 M 才使 $A+M=M$ 的子模 A 称为小子模
$\overset{*}{\hookrightarrow}$	大子模	large submodule	设 A 为模 M 的子模,若对 M 的任意子模 Z 有 $A\cap Z=0$ 必有 $Z=0$,则称 A 为 M 的大子模,记为 $A\overset{*}{\hookrightarrow}M$	即只有 $\{0\}$ 使 $A\cap\{0\}=0$ 的子模 A 称为大子模
$\mathrm{Si}(M)$	奇异子模	singular submodule	设 M 为右 R 模,M 中所有使 $r_r(m)\overset{*}{\hookrightarrow}R_R$ 的 m 组成的集是 M 的子模,称为奇异子模,其中 $r_R(m)=\{r\mid r\in R,mr=0\}$	
$\mathrm{ann}_R\, x$	阶理想	order ideal	设 R 是有1环,M 是左 R 模,$x\in M$,记 $\mathrm{ann}_R x=\{a\in R\mid ax=0\}$,称为 x 在 R 中的阶理想	亦称为 x 在 R 中的零化子.记为 $(0:x)$
M^+	特征模	character module	M 是左 R 模,$M^+=\mathrm{Hom}_Z(M,Q/Z)$ 对于 $(f\circ r)(x)=f(rx)(f\in M^+,r\in R,x\in M)$ 组成右 R 模,称为 M 的特征模	
$\mathrm{G.dim}(M)$	戈迪维数	Goldie dimension	若 R 模 M 有子模 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 使 $\sum_{i=1}^{n}U_i$ 为直和且为 M 的本质子模,则称 n 为 M 的戈迪维数	
R-Mod	R 模范畴	category of R-modules	所有左 R 模构成的范畴,称为左 R 模范畴	
$H^n(X)$	上同调模	cohomology modules	令 $X:\cdots\to X^{n-1}\xrightarrow{d^{n-1}}X^n\xrightarrow{d^n}X^{n+1}\to\cdots$ 是环 R 上的复形,$H^n(X)=\ker d^n/\mathrm{Im} d^{n-1}$,称为 X 的上同调模	
$\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$	函子 Ext	functor Ext	设 M 是右 R 模,用 $\mathrm{Ext}_R^n(M,-)$ 表示 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 的右导出函子	
$\mathrm{Tor}_n^R(M,-)$	函子 Tor	functor Tor	设 M 是右 R 模,用 $\mathrm{Tor}_n^R(M,-)$ 表示 $M\otimes_R-$ 的左导出函子	
$\mathrm{l\cdot Pd}_R M$	左投射维数	left projective dimension	表示 M 为左 R 模,M 的左投射维数	亦称左同调维数,记为 $\mathrm{l\cdot dh}_R N$
$\mathrm{r\cdot pd}_R N$	右投射维数	right projective dimension	表示 N 为右 R 模,N 的右投射维数	亦称右同调维数,记为 $\mathrm{r.dh}_R N$
$\mathrm{l.gl.dim}\,R$	左整体维数	left global dimension	环 R 的左整体维数 $\mathrm{l.gl.dim}\,R=\sup\{\mathrm{l.pd}_R M\mid M\in\mu_R\}$	
$\mathrm{r.gl.dim}\,R$	右整体维数	right global dimension	环 R 的右整体维数 $\mathrm{r.gl.dim}\,R=\sup\{\mathrm{r.pd}_R M\mid M\in\mu_R\}$	
$\mathrm{l.Id}_R M$	左内射维数	left injective dimension	表示左 R 模 M 的左内射维数	
$\mathrm{r.Id}_R N$	右内射维数	right injective dimension	表示右 R 模 N 的右内射维数	
$\mathrm{l.Fd}_R M$	左平坦维数	left flat dimension	表示左 R 模 $M\neq0$ 的左平坦维数	亦称弱左同调维数,记为 $\mathrm{w.l.dh}_R M$
$\mathrm{r.Fd}_r N$	右平坦维数	right flat dimension	表示右 R 模 $N\neq0$ 的右平坦维数	亦称弱右同调维数记为 $\mathrm{w.r.dh}_R N$
$M_1*M_2*\cdots*M_n$	双积	biproduct	设 M 及 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 为 R 模.若有模同态 $\sigma_i:M_i\to M$ 与 $\pi_j:M\to M_j$ 满足 $\pi_j\sigma_i=\delta_{ji}$ 与 $\sum\sigma_i\pi_i=1_M$,则称 $\pi_j M$ 是模 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 的双积	
$\mathrm{Obj}(K)$	对象类	class of objects	K 是一个范畴,K 的所有对象构成的类称为 K 的对象类	
$\mathrm{Mor}_K(A,B)$	(态)射集	set of morphisms	A,B 是范畴 K 的两个对象.由 A 与 B 所决定的一个集合称为 A 与 B 的(态)射集	亦称为由 A 到 B 的射或态射
$\mathrm{Dom}(\alpha)$	(态)射的域	domain of a morphism	表示在范畴中,设 $\alpha\in\mathrm{Mor}_K(A,B)$,则称 A 为(态)射 α 的域	
$\mathrm{Cod}(\alpha)$	(态)射的上域	codomain of a morphism	在范畴中,当 $\alpha\in\mathrm{Mor}_K(A,B)$ 时,称 B 为(态)射 α 的上域	
$\mathrm{rad}(M)$	模的根	radical of a module	表示模 M 的所有极大子模的交	亦即 M 的所有小子模的和
$Soc\,(M)$	模的基座	socle of module	表示模 M 的所有极小子模的和	亦即 M 的所有大子模的交
$\ker\varphi$	核	kernel	φ 是环 R 模 A 到 B 的一个同态映射,称 B 中零元素的全体逆象 $\varphi^{-1}(0)$ 为 φ 的核	对群、环等代数系也有类似概念

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Coker φ	上核	cokernel	φ是环R模A到B的一个同态映射，商模$B/\mathrm{Im}\varphi$称为φ的上核	亦称余核
Coim φ	上象	coimage	φ是环R模A到B的一个同态映射，商模$A/\mathrm{Ker}\,\varphi$称为φ的上像	亦称余像
M/N	商空间	quotient space	表示两代数系M,N的商空间	
dim V	维数	dimension	表示线性空间V的维数	
V^*	对偶空间	dual space	域F上线性空间V的所有线性函数组成F上的线性空间，称为V的对偶空间	V^* 即 $\mathrm{Hom}_F(V,F)$
$W(A)$	矩阵的数值域	numerical range of a matrix	$A\in C^{n\times n}$，称$W(A)=\{x^*Ax\mid x\in C^n,x^*x=1\}$为$A$的数值域	
$r(A)$	矩阵的数值半径	numerical radius of a matrix	$A\in C^{n\times n}$，称$\max\limits_{Z\in W(A)}\|Z\|$为$A$的数值半径	
V_{λ_0}	特征子空间	characteristic subspace	设σ是线性空间V的一个线性变换，λ_0是σ的一个特征值，则对应于λ_0的全体特征向量和零向量组成的子空间称为特征子空间	
$T(G,x)$	对称化算子	symmetrization operator	张量空间$T_0^p(E)$或$T_p^0(E)$的线性变换$S_p=\sum\limits_{\sigma\in G_p}\sigma$称为对称化算子，其中$G_p$为置换群	
$V_x(G)$	张量对称类	symmetric class of tensors	设$\overset{m}{\otimes}V$是张量空间，x是群G的不可约特征标，$T(G,x)$是对称化算子，则称$\mathrm{Im}T(G,x)$为关于G和x的张量对称类	
Inex $V_\chi(G)$	张量对称类的指标	index of symmetric class of tensor	表示张量对称类$V_\chi(G)$的指标	
$d_G^f(A)$	广义矩阵函数	generalized matrix function	设$A=(a_{ij})$为m阶复方阵，G为S_m的子群，f是G到C的任一函数，则称$d_G^f(A)=\sum\limits_{\sigma\in G}f(\sigma)\prod\limits_{t=1}^{m}a_{t\sigma(t)}$为广义矩阵函数	
$E(V)$	外代数	exterior algebra	设V为域$K(\mathrm{char}K\neq 2)$上向量空间，$\overset{m}{\wedge}V$为K上的格拉斯曼空间，则直和$\overset{0}{\wedge}V\oplus\overset{1}{\wedge}V\oplus\cdots\oplus\overset{n}{\wedge}V$可组成$K$上代数，称为$V$上的外代数	亦称格拉斯曼代数
$\vee E$	对称代数	symmetric algebra	设E是域$K(\mathrm{char}k=0)$上的向量空间，$\vee^p$是E的p次对称幂，则$\vee E=\bigoplus\limits_{p=0}^{\infty}\vee^pE$可组成$K$上交换代数，称为$E$上的对称代数	
S_V	对合S_V	involution S_V	设V是域K上向量空间，则包含映射$j:V\to C\mathcal{G}^P$在$C_V\to C\mathcal{G}^P$的代数开拓是一个对合，其中$C\mathcal{G}^P$是V的克利福德代数C_V的反代数	
$\widehat{\oplus}$	正交直和	orthogonal direct sum	设$U_1,U_2,\cdots,U_m$是V的向量子空间，若它们两两正交且V为其直和，则记为$V=U_1\widehat{\oplus}\cdots\widehat{\oplus}U_m$，称$V$为$U_i$的正交直和	
$\uplus$	格-并	lattice-union	A$\uplus$B 表示两个理想A,B的格-并	
$\boldsymbol{C}^0$	对偶范畴	dual category	由范畴$\boldsymbol{C}$作出的新范畴$\boldsymbol{C}^0$:$\boldsymbol{C}^0$的对象类即$\boldsymbol{C}$的对象类，定义$\mathrm{Hom}_{C^0}(A^0B^0)=\mathrm{Hom}_C(B,A)$，并规定$f^0g^0=(gf)^0$，称$\boldsymbol{C}^0$为$\boldsymbol{C}$之对偶范畴	
Set	集范畴	category of sets	以一切集合为对象，以集合映射为态射的范畴	
Top	拓扑空间范畴	category of topological spaces	以一切拓扑空间为对象，以连续映射为态射的范畴	亦可表示成$\mathscr{T}$
Group	群范畴	category of groups	以一切群作对象，以群同态作态射的范畴	亦可表示成$\mathscr{G}$
AG	阿贝尔群范畴	category of Abelian groups	以一切阿贝尔群作对象，以阿贝尔群同态作态射的范畴	
Ring	环范畴	category of rings	以一切环作对象，以环同态作态射的范畴	亦可表示成μ_R
$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\boldsymbol{C}_\lambda$	积范畴	product category	$\{\boldsymbol{C}_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$为一个范畴集合. 由它们所作出的新范畴$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}\boldsymbol{C}_\lambda$为$\{\boldsymbol{C}_\lambda\}$的积范畴	
$\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$	上积	coproduct	$\{A_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$为范畴$\boldsymbol{C}$的一个对象集. 若对象$B\in\boldsymbol{C}$与一态射集具有泛性质，则称$B$为$\{A_\lambda\}$的上积	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
IBN	IBN 环	IBN ring	R 为环.如果每个有限生成的 R 模的任二基中元素个数必相等,则称 R 为 IBN 环	
$(\mathscr{C},\perp)$	带积范畴	category with product	规定映射 $\perp:\mathscr{C}\times\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ 的范畴 $\mathscr{C}$ 称为带积范畴	
ΦF	纤维范畴	fibre category	$(\mathscr{C},\perp)$ 与 $(\mathscr{D},T)$ 为带积范畴,$F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 为保积函子.由此定义的新范畴 ΦF(对象类为 $\{(M,N,\alpha)\mid M,N\in\mathscr{C},\alpha:F(M)\cong F(N)\}$ 称为 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 的纤维范畴)	
$\mathrm{gl}(V)$	一般线性李代数	general linear lie algebra	$\mathrm{gl}(V)$ 表示域上 n 维空间 V 的所有线性变换在运算 $[A,B]=AB-BA$ 下组成的 n^2 维李代数,称为一般线性李代数	
$n(P)$	偏序集的阶	order of poset	偏序集 P 的基数称为 P 的阶	
$l(P)$	偏序集的长	length of poset	偏序集 P 中链的长的最小上界称为 P 的长	
$\mathrm{Sup}\ X$	上确界	supremum	偏序集的子集 X 的上确界	亦称最小上界.记为 $\vee X$ 或 l.u.b.X
$\inf X$	下确界	infimum	偏序集的子集 X 的下确界	亦称最大下界.记为 $\wedge X$ 或 g.l.b.X
$(L;\leqslant)$	格	lattice	若偏序集 L 的任二元素均有上确界和下确界,则称 L 为格	
$\Phi(L)$	弗拉梯尼子格	Frattini sublattice	表示格 L 的弗拉梯尼子格	
a^+	a 的正部	positive part of a	a 是格群的一个元素,$a^+=a\vee 0$ 称为 a 的正部	
a^-	a 的负部	negative part of a	a 是格群的一个元素,$a^-=(-a)\vee 0$ 称为 a 的负部	
$X^\perp$	极	polar	X 是格群 G 的子集,$X^\perp=\{y\in G\mid \lvert y\rvert\wedge\lvert x\rvert=0,\forall x\in X\}$,称为 X 的极	
$J\perp K$	独立 l 理想	independent l-ideal	格序群的 l 理想 J,K 若有 $J\wedge K=0$,则称 J 和 K 是独立的	
$R(G)$	康莱德根	Conrad radical	格序群 G 的一切本质性值的交是一个 l 理想,称为 G 的康莱德根	
R^+	偏序环的序	order of po-ring	R 是偏序环,$R^+=\{r\in R\mid r\geqslant 0\}$,称为 R 的序	亦称 R 的正锥
BCK	BCK 代数	BCK-algebra	一种有序代数系统	
BCI	BCI 代数	BCI-algebra	一种较 BCK 代数广泛的代数结构	
$\langle X;*,0\rangle$	双 B 代数	two B-algebra	表示 BCK 代数或 BCI 代数,二者合称双 B 代数	
A^*	稳定子	stabilizer	A 是BCK 代数 X 的子集,$A^*=\{x\in X\mid x*a=x$ 且 $a*x=a,\forall a\in A\}$,称为 A 的稳定子	
(X,O_X)	环式空间	ringed space	带有一个环层 O_X 的拓扑空间 X,称为环式空间	
$\chi(O_X)$	欧拉-庞加莱特征标	Euler-Poincaré characteristic	n 维完备簇 X 的欧拉-庞加莱的特征标定义为 $\chi(O_X)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\dim_k H^i(X,O_Z)$	
$K(X)$	小平维数	Kodaira dimension	X 是 n 维完备代数簇.在 X 利用归纳法定义的维数 $K(X)$ 称为小平维数	
$R(X)$	典范环	canonical ring	X 为光滑射影族,ω_E 为其典范层,X 的典范环为 $R(X)=\bigoplus_{n\geqslant 0}H^0(X,\omega_X^{\otimes n})$	
$\mathrm{Pic}(X)$	皮卡群	Picard group	环式空间 (X,O_X) 的可逆层的同构类组成的群(运算由可逆层的张量积所诱导),称为 X 的皮卡群	
$\mathrm{Pic}^0(X)$	皮卡簇	Picard variety	X 是代数闭域 K 上的射影光滑代数簇,$\mathrm{Pic}(X)$ 中包含 O 的分支是一个射影概形,它的既约结构是一个阿贝尔族,称为 X 的皮卡簇	
$\mathrm{Alb}(Z)$	阿尔班尼斯簇	Albanese variety	X 是射影光滑代数簇.X 的皮卡簇的对偶阿贝尔簇称为 X 的阿尔班尼斯簇	
$G_{n,m}$	格拉斯曼簇	Grassmannian variety	一个 n 维线性空间的所有 m 维线性子空间的集合称为一个格拉斯曼簇	亦称格拉斯曼流形或格拉斯曼空间
$\mathrm{Flag}(n_1,n_2,\cdots,n_r)$	旗簇	flag variety	V 是 n 维向量空间,$n=n_1>n_2>\cdots>n_r>0$.则 V 的所有由子空间组成的指标为 $(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ 的旗的集合,称为一个旗簇	
$\times$	叉积	cross product	a,b 的叉积等于 a,b 的对称差的补运算,即 $a\times b=(a\triangle b)'$	这里 $a,b\in B$,B 称为布尔集

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
c	胞腔度	cellularity	$c\mathrm{A}=\sup\{\|x\|\mid x$ 是其中的一个两两不相交的族}. 称为布尔代数 A 的胞腔度	
sat A	浸润度	saturation	$\mathrm{sat}A=\min\{u\mid u$ 是基数且对 A 的每个两两不相交的族 x 有 $\|x\|<u\}$表示 A 的浸润度，它是一个正则基数，式中 $\|x\|$ 表示 x 的基数	
π	稠密度	density	$\pi B=\min\{\|x\|\mid x\subseteq B$ 在 B 中稠密}表示 X 在布尔代数 B 中的稠密度	
ld	理想	ideal	ld(B)表示布尔代数 B 中的全体理想	布尔代数 B 中的每个理想记为 l，有限集的理想记为 fin
Sub	子代数	subalgebra	Sub$A$ 表示无限布尔代数 A 的一切子代数所构成的集合	sub(B)表示布尔代数 B 的子代数所构成的格
Ult	超滤子	ultrafilter	Ult$A$ 表示无限布尔代数 A 的超滤子的全体	
Filt	滤子	filter	Filt$A$ 表示无限布尔代数 A 的一切滤子所构成的集合	
$\sum$	最小上界	least upper bound	$\sum^B M$ 表示 M 在布尔代数 B 中的最小上界，其中 M 是 B 的子集	
clop	闭开代数	clopen algebra	拓扑空间 X 的所有闭开集，用 clop$X$ 表示，构成 X 上的集合代数称为 X 的闭开代数	
RO(　)	正则开代数	regular open algebra	$\mathrm{RO}(x)=\{u\mid u\subseteq X$ 且 $r(u)=u\}$，其中 $r(u)=\mathrm{int}(\mathrm{cl}(u))$是 u 的正则化	
Bai	贝尔代数	Baire algebra	$\mathrm{Bai}X=\{a\subseteq X\mid a$ 有贝尔性质}，其中 a 是拓扑空间 X 的子集，存在 X 的一个开集 u，使对称差 $a\triangle u$ 是贫集	
A↾a	相对代数	relative algebra	$A\upharpoonright a=\{x\mid x\in A$ 且 $x\leqslant a\}$表示 A 关于 a 的相对代数. 式中 A 是布尔代数，且 $a\in A$	亦称因子代数
pred(t)	前趋集合	predecessor set	偏序集$(T,\leqslant_T)$是一棵树，且所有的 $t\in T$，集合 pred(t)是由 $<_T$ 决定的一个良序集合	
Tor	挠积	torsion product	$\mathrm{Tor}_n(M,N)$是 M 和 N 的挠积	
Ext	扩张	extension	$\mathrm{Ext}^n(M,N)$是 M,N 的扩张	

分析学(analysis)

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
(a,b)	开区间	open interval	表示 a 与 b 之间(不包括端点 a 与端点 b)的一切实数组成的集合	亦可用$]a,b[$表示
$[a,b]$	闭区间	closed interval	表示 a 与 b 之间(包括端点 a 与端点 b)的一切实数组成的集合	
$(a,b]$	左半开区间	left half open interval	表示 a 与 b 之间(不包括端点 a 但包括端点 b)的一切实数组成的集合	亦可用$]a,b]$表示
$[a,b)$	右半开区间	right half open interval	表示 a 与 b 之间(包括端点 a 但不包括端点 b)的一切实数组成的集合	亦可用$[a,b[$表示
e^x 或 $\exp x$	指数函数	exponential function	表示以 e 为底，以 x 为指数的函数，可写成 $y=\mathrm{e}^x$ 或 $y=\exp x$	在同一场合中，只用其中一种符号
e	超越数	transcendental number	$\mathrm{e}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718\,281\,828\,459\cdots$	通常作为自然对数的底
$\log_a x$	对数函数	logarithmic function	表示以 a 为底，自变量为 x 的对数函数，可写成 $y=\log_a x$	
$\ln x$	自然对数	natural logarithm	表示以 e 为底，自变量为 x 的对数函数	
$\lg x$	常用对数	common logarithm	表示以 10 为底，自变量为 x 的对数函数	
lb x	2 为底的对数	logarithm to the base 2	表示以 2 为底，自变量为 x 的对数函数	亦可记为 $\log_2 x$
sh x 或 sinh x	双曲正弦	hyperbolic sine	$\mathrm{sh}\,x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$	

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
ch x 或 cosh x	双曲余弦	hyperbolic cosine	$\mathrm{ch}\ x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	
th x 或 tanh x	双曲正切	hyperbolic tangent	$\mathrm{th}\ x=\frac{\mathrm{sh}\ x}{\mathrm{ch}\ x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$	
coth x	双曲余切	hyperbolic cotangent	$\mathrm{coth}\ x=\frac{\mathrm{ch}\ x}{\mathrm{sh}\ x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$	
sech x	双曲正割	hyperbolic secant	$\mathrm{sech}\ x=\frac{1}{\mathrm{ch}\ x}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}$	
csch x 或 cosech x	双曲余割	hyperbolic cosecant	$\mathrm{csch}\ x=\frac{1}{\mathrm{sh}\ x}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}$	
arsh x	反双曲正弦	inverse hyperbolic sine	$\mathrm{arsh}\ x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})(-\infty<x<+\infty)$	亦可用 arsinh$x$ 表示
arch x	反双曲余弦	inverse hyperbolic cosine	$\mathrm{arch}\ x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})\ (x\geqslant 1)$	亦可用 arcosh x 表示
arth x	反双曲正切	inverse hyperbolic tangent	$\mathrm{arth}\ x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (-1<x<1)$	亦可用 artanh x 表示
arcoth x	反双曲余切	inverse hyperbolic cotangent	$\mathrm{arcoth}\ x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\ (\lvert x\rvert>1)$	
arsech x	反双曲正割	inverse hyperbolic secant	$\mathrm{arsech}\ x=\ln(1\pm\sqrt{1-x^2})-\ln x(0<x\leqslant 1)$	
arcsch x	反双曲余割	inverse hyperbolic cosecant	$\mathrm{arcsch}\ x=\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\ln x$	亦可用 arcosech x 表示
$f(x)$	函数	function	如 $y=f(x)$ 表示以 x 为自变量的一元函数	
$f(x_1,\cdots,x_n)$	n 元函数	n-ary function	表示以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为自变量的 n 元函数	
Grf	图像	graph	表示函数 f 的图像	
$f(x)\mid_{x=a}$	函数值	function value	表示函数 $f(x)$ 在点 a 处的函数值,即 $f(x)\mid_{x=a}=f(a)$	
$f(x)\mid_a^b$ 或 $[f(x)]_a^b$	函数值的差	difference of the function value	表示函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$端点处函数值的差,即 $f(x)\mid_a^b=f(b)-f(a)$ 或$[f(x)]_a^b=f(b)-f(a)$	这种表示法常用于定积分的计算
const	常值函数	constant function	若 $f(x)=c$,则称 $f(x)$是常值函数,记为 const$f$	亦简记为 $f(x)=c$
$I(x)$	恒等函数	identity function	表示对 D 中一切 x 都有 $I(x)=x$	
$g\circ f$	复合函数	composite function	表示由函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 复合而成的函数,即 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$	亦称合成函数
$\to$	趋于或收敛于	converges to	$x\to a$ 表示 x 无限接近 a;$x_n\to a$ 表示序列$\{x_n\}$收敛于 a	$x\not\to a$ 表示 x 不趋于 a,$x_n\not\to a$ 表示序列$\{x_n\}$不收敛于 a
$\rightrightarrows$	一致收敛	uniformly convergent	$f_n\rightrightarrows f$ 表示 f_n 在 D 内一致收敛于 f,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}\lvert f_n(x)-f(x)\rvert=0$	
$\downarrow$,$\searrow$	单调递减	monotone decreasing	随自变量 x 的增加,函数值 $f(x)$ 逐渐减少	
$\uparrow$,$\nearrow$	单调增加	monotone increasing	随自变量 x 的增加,函数值 $f(x)$ 逐渐增加	
$\simeq$	渐近等于	asymptotically equal to	在某极限过程中,值可以无限接近的两个函数.如当 $x\to a$ 时,$\frac{1}{\mathrm{sim}(x-a)}\simeq\frac{1}{x-a}$	在无穷小量比较时,表示等价无穷小,记为 $\sim$
$\lim\limits_{x\to a}f(x)$	极限	limit	$\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ 表示当 x 趋于 a 时,$f(x)$无限接近于 b. 右极限和左极限分别记为:$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$	亦可记为:当 $x\to a$ 时,$f(x)\to b$
$O(g(x))$	兰道记号	Landau's notation	$f(x)=O(g(x))$意为$\lvert f(x)/g(x)\rvert$在行文所述的极限中有上界	比较无穷小量时,表示同阶无穷小
$o(g(x))$	兰道记号	Landau's notation	$f(x)=o(g(x))$表示在行文所述的极限中 $f(x)/g(x)\to 0$	比较无穷小量时,表示高阶无穷小
Δx	增量	increment	$\Delta x=x-x_0$ 表示自变量 x 的增量	亦称 x 的改变量

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\frac{df}{dx}$	导函数或微商	derived function	函数f的改变量与自变量x的改变量之比，当自变量改变量Δx趋于零时的极限表示为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{df}{dx}$ 或 $\frac{df}{dx}$	亦可用f'或Df来表示．简称导数
$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$	导函数值	value of derived function	函数$f(x)$在某点a的导数值．记为 $\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=a}$ 或 $\left(\frac{df'}{dx}\right)_{x=a}$	亦可用$f'(a)$或$Df(a)$来表示
$\frac{d^nf}{dx^n}$	n阶导数	derivative of n-order	对$f(x)$连续求n次一阶导数．记为$\frac{d^nf}{dx^n}$或$f^{(n)}$．当$n=2,3$时，常用f'',f'''来代替，称为2阶、3阶导数．如自变量是时间t，常用$f''(t)$来代替$\frac{d^2f}{dt^2}$	亦可用$f^{(n)}$或D^nf来表示
$\frac{\partial f}{\partial x}$ 或 $\partial_x f$	偏导数或偏微商	partial derivative	对多元函数的其中一个自变量x求导数，其他变量暂视为常数所得的结果	亦可用$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,\cdots}$或$f_x$表示
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$或$f_{xy}$	混合偏导数	mixed partial derivative	先对x求导，再对y求导，即$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$，	
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$或$f_{xx}$	二阶偏导数	partial derivative of 2-order	对x连续求二阶导数，其他变量视为常数	
$\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n\partial y^m}$	$m+n$阶偏微商	partial derivative of $(m+n)$-order	函数f先对x求n次偏微商，再对y求m次偏微商	
$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$	函数行列式	functional determinant	表示u,v,w对x,y,z的函数行列式，其中$u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z)$都是多元函数	亦称雅可比行列式(Jacobian 行列式)
df	全微分	total differential	$df(x_2,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$	
$^*R$ 或 R^*	扩张的实数系	extended real number system	把$+\infty$与$-\infty$加到实数系所得的数系	亦可记为 $[-\infty,+\infty]$
$\{a_n\}$	数列	sequence of number	表示数列$a_1,a_2,\cdots,a_n\cdots$	
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$	无穷级数	infinite series	无穷数列的各项用加号连结而成的表达式	
$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{mn}$	叠级数	iterated series	各项均为级数的级数，其中$\{a_{mn}\}$称为二重序列	亦称累级数
$\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}a_{mn}$	二重级数	double series	把二重序列的项a_{mn}按任意次序排列并用加号连结得到的表达式	
$\prod\limits_{n=1}^{\infty}u_n$	无穷乘积	infinite product	把无穷序列$u_1,u_2,\cdots,u_n\cdots$的各项连乘	
$f(a-0)$	左极限	left limit	$f(a-0)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$	
$f(a+0)$	右极限	right limit	$f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$	
$f'_-(x)$	左导数	left derivative	$f'_-(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	
$f'_+(x)$	右导数	right derivative	$f'_+(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	
$\overline{\int_a^b} f(x)dx$	黎曼上积分	Riemann upper integral	$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\sup\limits_{P\in\mathscr{P}}S_P(f)$	
$\underline{\int_a^b} f(x)dx$	黎曼下积分	Riemann lower integral	$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\inf\limits_{P\in\mathscr{P}}S_P(f)$	
$\int\limits_{D\subset R^n} f(x)dx$	n重积分	n-fold integral	$\int\limits_{D\subset R^n} f(x)dx=\iiint\cdots\int_D f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$	
Vf	变分	variation	$Vf=f_1(x)-f(x)$	
V 或 Var	变差	variation	V_a^bf或$\mathrm{Var}_{[a,b]}f$表示函数f在$[a,b]$上的全变差，当$a=b$时，定义$V_a^af=0$；当$V_a^bf<\infty$时，称f为$[a,b]$上的有界变差函数	
δJ	泛函J的变分	variation of the functional J	泛函$J[Y]$的一阶变分$\delta J=\left(\frac{\partial J[Y]}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon$	

数 学 符 号 表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Lip 或 lip	李普希茨条件	Lipschitz condition	$f\in \mathrm{lip}\alpha$ 或 $f\in \mathrm{Lip}\alpha$ 表示函数 f 满足 α 阶李普希茨条件	
Δf	一阶向前差分	forward difference of first-order	$\Delta f(x_i)=f(x_i+h)-f(x_i)$	
$\Delta^2 f$	二阶向前差分	forward difference of second-order	$\Delta^2 f(x_i)=\Delta f(x_i+h)-\Delta f(x_i)$	
$\Delta^n f$	n 阶向前差分	forward difference of n-order	$\Delta^n f(x_i)=\Delta^{n-1}f(x_i+h)-\Delta^{n-1}f(x_i)$	
∇f	一阶向后差分	backward difference of first-order	$\nabla f(x_i)=f(x_i)-f(x_i-h)$	
$\nabla^2 f$	二阶向后差分	backward difference of second-order	$\nabla^2 f(x_i)=\nabla f(x_i)-\nabla f(x_i-h)$	
$\nabla^n f$	n 阶向后差分	backward difference of n-order	$\nabla^n f(x_i)=\nabla^{n-1}f(x_i)-\nabla^{n-1}f(x_i-h)$	
δf	一阶中心差分	centered difference of first-order	$\delta f(x_i)=f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)-f\left(x_i-\frac{h}{2}\right)$	
$\delta^2 f$	二阶中心差分	centered difference of second-order	$\delta^2 f(x_i)=\delta f(x_i+\frac{h}{2})-\delta f(x_i-\frac{h}{2})$	
$\delta^n f$	n 阶中心差分	centered difference of n-order	$\delta^n f(x_i)=\delta^{n-1}f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)-\delta^{n-1}f\left(x_i-\frac{h}{2}\right)$	
$\int f(x)\mathrm{d}x$	不定积分	indefinite integral	$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，C 是任意常数	
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	定积分	definite integral	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，其中 $\lambda=\max\limits_i\{\Delta x_i\}$	
P. V. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	柯西主值	Cauchy principal value	$P.V.\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ $=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right)$ 或 $P.V.\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}f(x)\mathrm{d}x$	
$\int_C, \int_S, \int_V, \oint$	积分号	sign of integration	$\int_C, \int_S, \int_V, \oint$ 分别表示沿曲线 C，沿曲面 S，沿体积 V 以及沿闭曲线或闭曲面的积分	
$C(z), S(z)$	菲涅耳积分	Fresnel integral	$C(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$, $S(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$	
$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	二重积分	double integral	二元函数 $f(x,y)$ 在平面区域 D 上的积分	
$\mathrm{Li}(x)$ 或 $\mathrm{li}(x)$	对数积分	logarithmic integral	$\mathrm{Li}(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\log t}$，高斯用函数 $\frac{1}{\log t}$ 表示在大整数 t 附近的素数分布的平均密度	
$\mathrm{Ei}(x)$	指数积分	exponential integral	$\mathrm{Ei}(x)=\int_x^\infty\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$，当 $x<0$ 时，在 $t=0$ 处取积分主值	在量子力学中有重要应用
$\mathrm{Si}(x)$	正弦积分	sine integral	$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$	在通信工程中有重要应用
$\mathrm{Ci}(x)$	余弦积分	cosine integral	$\mathrm{Ci}(x)=-\int_x^\infty\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$	在通信工程中有重要应用
$\mathrm{sgn}\ x$	符号函数	sign function	当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$\mathrm{sgn}\ x=\begin{cases}1 & (x>0),\\ 0 & (x=0),\\ -1 & (x<0);\end{cases}$ 当 $x\in\mathbf{C}$ 时，$\mathrm{sgn}\ x=\begin{cases}\frac{x}{\lvert x\rvert} & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0)\end{cases}$	亦称克罗内克函数
ε_{ijk}	列维-齐维塔符号	Levi-Civita symbol	$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & (\text{若 } ijk \text{ 为 } 1,2,3 \text{ 的偶排列}),\\ -1 & (\text{若 } ijk \text{ 为 } 1,2,3 \text{ 的奇排列}),\\ 0 & (\text{若 } ijk \text{ 为 } 1,2,3 \text{ 的真重复排列})\end{cases}$	
$\varepsilon(x)$	单位阶跃函数或称赫维赛德函数	unit step function or Heaviside function	$\varepsilon(x)=\begin{cases}1 & (x\geqslant 0),\\ 0 & (x<0)\end{cases}$ 视作广义函数时的定义为 $\varepsilon(x)=\begin{cases}1 & (x>0),\\ 0 & (x<0)\end{cases}$	亦可用 $\mathrm{H}(x)$ 表示

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$f*g$	f 与 g 的卷积	convolution of f and g	$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$，式中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是$(-\infty,\infty)$内的绝对可积函数	
sn x cn x dn x	雅可比椭圆函数	Jacobi elliptic function	$\mathrm{sn}\,x=\sqrt{e_1-e_3}\dfrac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}$；$\mathrm{cn}\,x=\dfrac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}$；$\mathrm{dn}\,x=\dfrac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}$，其中 $x=u\sqrt{e_1-e_3}$	
$\wp(x)$	外尔斯特拉斯椭圆函数	Weierstrass's elliptic function	$\wp(x)=\dfrac{1}{x^2}+\sum\limits_{\omega\neq 0}\left(\dfrac{1}{(x-\omega)^2}-\dfrac{1}{\omega^2}\right)$	
B_n 或 b_n	伯努利数	Bernoulli's numbers	解析函数$(\mathrm{e}^z-1)^{-1}$在 $z=0$ 附近的罗朗级数展开式 $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{B_n}{(2n)!}z^{2n-1}$，则称式中系数 B_n 为伯努利数	
supp f 或 spt f	函数的支集	support of function	若 Ω 是局部紧空间，则 Ω 上函数 f 的支集是 Ω 中的集合$\{x\mid f(x)\neq 0\}$的闭包，表示成 supp$f$	
$\delta(x)$	狄拉克函数	Dirac δ-function	质量分布在区域 Ω 的总量为 $\iiint\limits_{\Omega}\delta_{M_0}(M)\mathrm{d}M=\begin{cases}1 & (M_0\in\Omega),\\0 & (M_0\overline{\in}\Omega),\end{cases}$ 称这样的函数为 $\delta(x)$ 函数，它在每一点的值 $\delta_{M_0}(M)=\begin{cases}0 & (M_0\neq M),\\\infty & (M_0=M)\end{cases}$	亦称 δ 函数
am x	振幅函数	amplitude function	在形如 $I_\varphi(au)=\iint \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(x,\theta)}a(x,\theta)u(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta$ 的振荡积分中，$a(x,\theta)$ 称为振幅函数	
$\Gamma(x)$	伽马函数	gamma function	$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\ (x>0)$，$\Gamma(n+1)=n!\ (n=0,1,2,\cdots)$	亦称 Γ 函数
$\gamma(x)$	不完全伽马函数	incomplete gamma function	$\gamma(x)=\int_0^{\lambda}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$；$\gamma(x)=\int_{\lambda}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$，其中 $x>0$	在统计学和分子结构论中常用
$B(x,y)$	贝塔函数	beta function	$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$，$(x,y\in\mathbf{R};x>0,y>0)$；$B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$	亦称 β 函数
$\Psi(x)$	普西函数	psi function	$\Psi(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln\Gamma(x))$是函数方程$\Psi(x+1)-\Psi(x)=\dfrac{1}{x}$，$\Psi(1)=-c$，$\lim\limits_{n\to\infty}(\Psi(x+n)-\Psi(1+n))=0$ 的解	亦称 Ψ 函数
$F(k,\varphi)$	第一类不完全椭圆积分	incomplete elliptic integral of the first kind	$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	
$E(k,\varphi)$	第二类不完全椭圆积分	incomplete elliptic integral of the second kind	$E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$	
$\Pi(n,k,\varphi)$	第三类不完全椭圆积分	incomplete elliptic integral of the third kind	$\Pi(n,k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	
$K(k)$	第一类完全椭圆积分	complete elliptic integral of the first kind	$K(k)=F(k,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	
$E(k)$	第二类完全椭圆积分	complete elliptic integral of the second kind	$E(k)=E(k,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$	
$\Pi(n,k,\pi/2)$	第三类完全椭圆积分	complete elliptic inlegral of the third kind	$\Pi(n,k,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	
$P_l(x)$	勒让德多项式	Legendre polynomial	方程$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0$的特解，$P_l(x)=\sum\limits_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^r\dfrac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}x^{n-2r}$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$P_l^m(x)$	关联勒让德函数	associated Legendre function	方程 $(1-x^2)y''-2xy'+[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}]y=0$ 的特解，$P_l^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\ (l,m=0,1,2,\cdots;m\leqslant l)$	
$T_n(x)$	第一类切比雪夫多项式	Chebyshev polynomial of the 1st kind	方程 $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$ 的特解，$T_n(x)=\cos(n\arccos x)\ (n=0,1,2,\cdots)$	
$U_n(x)$	第二类切比雪夫多项式	Chebyshev polynomial of the 2nd kind	方程 $(1-x^2)y''-3xy'+n(n+2)y=0$ 的特解，$U_n(x)=\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}(n=0,1,2,\cdots)$	
$L_n(x)$	拉盖尔多项式	Laguerre polynomial	方程 $xy''+(1-x)y'+ny=0$ 的特解，$L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})\ (n=0,1,2,\cdots)$	
$H_n(x)$	埃尔米特多项式	Hermite polynomial	方程 $y''-2xy'+2ny=0$ 的特解，$H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}(n=0,1,2,\cdots)$	
H_c	超平面	hyperplane	$H_c=\{x\in R^n:\ (a,x)=c\}$，式中 c 为实数，a 为 R^n 中的非零元	
$F(a;b;c;x)$	超几何函数	hypergeometric function	方程 $x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0$ 的特解，$F(a;b;c;x)=1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2+\cdots$	亦称超比函数
$F(a;c;x)$	合流超几何函数	hypergeometric function of confluent type	方程 $xy''+(c-x)y'-ay=0$ 的特解，$F(a;c;x)=1+\frac{a}{c}x+\frac{a(a+1)}{2!c(c+1)}x^2+\cdots$	亦称汇合型超几何函数或库默尔函数
$J_l(x)$	第一类柱贝塞尔函数	cylindrical Bessel function of the 1st kind	方程 $x^2y''+xy'+(x^2-l^2)y=0$ 的特解，$J_l(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{l+2k}}{k!\Gamma(l+k+1)}$	
$N_l(x)$	第二类柱贝塞尔函数	cylindrical Bessel function of the 2nd kind	$N_l(x)=\lim_{k\to l}\frac{J_k(x)\cos k\pi-J_{-k}(x)}{\sin k\pi}$. 它是贝塞尔方程的第二解，可由第一类柱贝塞尔函数定义	亦称柱汉克尔函数
$H_l^{(1)}(x)$ $H_l^{(2)}(x)$	第三类柱贝塞尔函数	cylindrical Bessel function of the 3rd kind or cylindrical Hankel function	$H_l^{(1)}(x)=J_l(x)+iN_l(x)$，$H_l^{(2)}(x)=J_l(x)-iN_l(x)$. 它们是第一类和第二类柱贝塞尔的线性组合，是贝塞尔方程的两个线性无关解	亦称柱汉克尔函数
$I_l(x)$ $K_l(x)$	修正的柱贝塞尔函数	modified cylindrical Bessel function	方程 $x^2y''+xy'-(x^2+l^2)y=0$ 的特解，$I_l(x)=i^{-l}J_l(ix)$，$K_l(x)=\left(\frac{\pi}{2}\right)i^{l+1}[J_l(ix)+iN_l(ix)]$	亦称变形的柱贝塞尔函数
$j_l(x)$	第一类球贝塞尔函数	spherical Bessel function of the 1st kind	方程 $x^2y''+2xy'+[x^2-l(l+1)]y=0$ 的特解，$j_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}J_{l+\frac{1}{2}}(x)$	
$n_l(x)$	第二类球贝塞尔函数	spherical Bessel function of the 2nd kind	$n_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}N_{l+\frac{1}{2}}(x)$	亦称球诺伊曼函数，也记为 $y_l(x)$
$h_l^{(1)}(x)$ $h_l^{(2)}(x)$	第三类球贝塞尔函数	spherical Bessel function of the 3rd kind	$h_l^{(1)}(x)=j_l(x)+in_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)$，$h_l^{(2)}(x)=j_l(x)-in_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)$	修正的球贝塞尔函数，分别记为 $i_l(x)$ 与 $k_l(x)$
∇	矢量微分算子	operator of vector differentiation	$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}=\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$	亦称哈密顿算子
grad，∇	梯度	gradient	若 $f:D(\subseteq R^n)\to R$，则 f 在 $\boldsymbol{a}\in D$ 的梯度为 $\mathrm{grad}f(\boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)$	
div，$\nabla\cdot$	散度	divergence	若向量函数 $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(P,Q,R)$ 连续可微，则向量场的散度为 $\mathrm{div}\boldsymbol{f}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$	
rot，$\nabla\times$	旋度	rotation	$\boldsymbol{f}=(P,Q,R)$ 是三维向量函数，$\boldsymbol{f}$ 的旋度为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{f}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Δ,∇^2	拉普拉斯算子	Laplacian operator	$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	亦称调和算子
$\Box$	达朗贝尔算子	d'Alembertain operator	$\Box=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	c 为电磁波在真空中的传播速度
D	微分算子	differential operator	即 $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=Df(t)$，$\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}=D^2f(t)$，…，$\frac{\mathrm{d}^nf(t)}{\mathrm{d}t^n}=D^nf(t)$	
Λ	拓扑双曲不变集	topological hyperbolic set	$f:M\to M$ 是微分同胚．f 的不变闭子集 $\Lambda\subset M$ 称为拓扑双曲不变集	
Diff'	微分同胚空间	differential homeomorphic space	Diff'(M)表示 M 全体微分同胚构成的空间	
Homeo	同胚空间	homeomorphic space	Homeo(M)表示 M 的全体同胚构成的空间	
Proj	射影基向量	base vector of projective	Proj$k$ 表示 P—标架的第 k 个基向量	
Ob	阻碍集	obstruction sets	Ob(S)表示向量场 S 的阻碍集	
Log$z$	对数函数	logarithmic function	$w=\mathrm{Log}z=\log\lvert z\rvert+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，z 为复数	
sin z	复变正弦函数	sine function of a complex variable	$\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$，式中 z 为复变数．当 z 为实数时与数学分析中的正弦函数的定义一致	
cos z	复变余弦函数	cosine function of a complex variable	$\cos z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$，式中 z 为复变数．当 z 为实数时与数学分析中的余弦函数的定义一致	
tan z	复变正切函数	tangent function of a complex variable	$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$	
Arc sin z	复变反正弦函数	inverse sine function of a complex variable	$\mathrm{Arc}\sin z=-\mathrm{i}\log(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2})$，式中 z 为复变数，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}=\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}$	
Arc cos z	复变反余弦函数	inverse cosine function of a complex variable	$\mathrm{Arc}\cos z=-\mathrm{i}\log(z+\mathrm{i}\sqrt{1-z^2})$，式中 z 为复变数	
Arc tan$z$	复变反正切函数	inverse tangent function of a complex variable	$\mathrm{Arc}\tan z=\frac{1}{2i}\log\frac{i-z}{i+z}$，式中 z 为复变数	
L(z)	分式线性变换	fractional linear transformation	$\mathrm{L}(z)=\frac{az+b}{cz+d}$，式中 a,b,c,d 都是复常数，且 $ad-bc\neq0$	若 a,b,c,d 都是实数，且 $ad-bc>0$ 称此为富克斯变换
(a,b,c,d)	交比	cross ratio	$(a,b,c,d)=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}$，式中 a,b,c,d 是任意四个互异的复数	亦称非调和比
$n(\gamma;a)$	环绕数	winding number	点 a 关于 γ 的环绕数，$n(\gamma;a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-a}$，式中 γ 是一条可求长的闭路径，a 点不在 γ 上	亦称指示数或卷绕数
Resf(z)	留数	residue	在 $f(z)$ 的孤立奇点 a 的去心邻域内的罗朗级数展开式中，$1/(z-a)$ 项的系数为 c_{-1}，即 $\mathop{\mathrm{Res}}\limits_{z=a}f(z)=c_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\substack{\lvert z-a\rvert=\rho\\(0<\rho<R)}}f(z)\mathrm{d}z$	亦称残数
$L(s)$	拉普拉斯变换	Laplace transform	$f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $L(s)=\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$	
$F(\xi)$	傅里叶变换	Fourier transform	$f(x)$ 的傅里叶变换为 $F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}x$	
$F_c(\xi)$	傅里叶余弦变换	Fourier cosine transform	$f(x)$ 的傅里叶余弦变换为 $F_c(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\xi x\mathrm{d}x$	
$F_s(\xi)$	傅里叶正弦变换	Fourier sine transform	$f(x)$ 的傅里叶正弦变换为 $F_s(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin\xi x\mathrm{d}x$	
$M(z)$	梅林变换	Mellin transform	$f(x)$ 的梅林变换为 $M(z)=\int_0^\infty f(x)x^{z-1}\mathrm{d}x$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$H(\xi)$	汉克尔变换	Hankel transform	$f(x)$ 的 v 阶汉克尔变换为 $H(\xi)=\int_0^{\infty}xf(x)J_v(\xi x)\mathrm{d}x$	
$G(n)$	勒让德变换	Legendre transform	$f(x)$ 的勒让德变换为 $G(n)=\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)\mathrm{d}x$	
$\mathrm{erf}(z)$	概率积分	probability integral	$\mathrm{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$	
$\mathrm{erfc}(z)$	余概率积分	complement probability in- tegral	$\mathrm{erfc}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$	
$\Phi c(z)$	正态概率积分	normal probability inte-gral	$\Phi_c(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{2}{u}}\mathrm{d}u$	
${}_pF_q$	超几何级数	hypergeometric series	超几何级数的一般形式是 ${}_pF_q(\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_q;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_p)_nz^n}{(\beta_1)_n\cdots(\beta_q)_nn!}$	
E_n 或 γ	欧拉常数	Euler constant	$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ $\approx 0.577215664901532860606512090\cdots$	
$\{f,D\}$	解析函数元素	holomorphic function el-ement	复平面上的区域 D 连同在其内全纯的一个函数 $f(z)$，合成为解析函数元素	简称函数元素
$k(z)$	克贝函数	Koebe function	$k(z)=z(1-z)^{-2}$，$k_\theta(z)=\mathrm{e}^{i\theta}k(\mathrm{e}^{i\theta}z)$，$\beta=\lim_{n\to\infty}\|a_n\|/n\leqslant 1$. 其中 $k(z)$是 S 类上许多泛函极值问题的极值函数，称 $k_\theta(z)$为克贝函数的旋转	
$I_p(r)$	哈代凸性函数	Hardy's convexity func-tion	$I_p(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f(re^{i\theta})\|^p\mathrm{d}\theta\quad(0<r<R)$	
B	布洛赫常数	Bloch's constant	$B=\inf\{\beta(f)\|f\in\mathscr{F}\}$，式中 $\beta(f)=\sup\{r\|r$ 是 $f(\triangle)$ 所包含的单叶圆的半径$\}$	已经证明 $\sqrt{3}/4\leqslant B\leqslant 0.47$
L	兰道常数	Landau's constant	$L=\inf\{\lambda(f),f\in\mathscr{F}\}$，式中 $\lambda(f)=\sup\{r\|r$ 是 $f(\triangle)$ 所包含圆的半径，$f\in\mathscr{F}\}$	已经证明 $0.5\leqslant L\leqslant 0.54326$
$M(\Gamma)$	曲线族 Γ 的模	module of a family of curves Γ	$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in p(\Gamma)}\int_D\rho^2\|\mathrm{d}z\|$，其中 Γ 是平面区域 D 上的若尔当曲线族，ρ 是定义在 D 上的非负波莱尔函数	
$\mathrm{M}(f(\Gamma))$	拟共形映射	quasiconformal mapping	f 满足 Beltrami 微分方程 $f_{\bar{z}}=\mu f_z$，称 f 为 μ 共形映射，如 $\\|\mu\\|_\infty<1$，则称 f 为拟共形映射	亦称拟保角映射
$w(z,a,D)$	调和测度	harmonic measure	α 关于区域 D 的调和测度 $w(z,\alpha,D)$ 是 z 对(a,b) 的视角. $w(z,a,D)=\frac{1}{\pi}\arg\frac{b-z}{a-z}$	$0\leqslant w(z,x,d)\leqslant 1$
$g(z,a)$ 或 $\mathrm{G(z,a)}$	格林函数	Green's function	函数 $g(z,a)$ 在 D 内奇点 a 的格林函数 $g(z,a)=\log\left\|\frac{z-\bar{a}}{z-a}\right\|$	
$\mathrm{E(z,p)}$	外尔斯特拉斯基本因式	Weierstrass basis factor	$E(z,p)=(1-z)\exp\left\{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}\right\}$	
$T(r,f)$	奈望林纳特征函数	Nevanlinna's character-istic function	满足 $\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,f)}{(\log r)^2}=\infty$ 的 $T(r,f)$ 是 $f(z)$ 的奈望林纳特征函数	亦称奈望林纳记号，可记为 $T(r)$
$n(r,a)$	a 点个数	number of a-point	$n(r,a)$是方程 $f(x)=a$ 在 $\|z\|\leqslant r$ 内解的个数(包括计算重数)	
$\delta(a)$	亏量	defect	$w(z)$ 关于 a 的亏量 $\delta(a)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,a)}{T(r,w)}$	亦称亏值
$\mathring{T}(r,w)$	球面特征函数	spherical characteristic function	$\mathring{T}(r,w)=\frac{1}{\nu}\int_0^r\frac{A(t,w)}{t}\mathrm{d}t$，式中 $w(z)$为代数体函数	
$M(r,f)$	整函数的最大模	maximum modulus of entire function	$f(z)$ 的最大模$M(r,f)=\max_{\|z\|\leqslant r}\|f(z)\|$；$f(z)$ 的 p 次整函数的模 $M_p(r,f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f(re^{i\theta})\|d\theta\right)^{1/p}(0<p<+\infty)$；超越整函数 $f(z)$ 的最大模 $M_\infty(r,f)=\max_{\|z\|=r}\|f(z)\|_{p=+\infty}$	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$B(z)$	布拉施克乘积	Blaschke product	$B(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lvert a_n\rvert}{a_n}\left(\frac{a_n-a}{1-\bar{a}_n z}\right)$，式中 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 是复数序列，$0<a_n<1$	
H^p	哈代空间	Hardy space	所有哈代函数构成的空间，即 $H^p(D)=\{f\mid f(z)$ 在 D 内解析，$\sup_{0\leqslant r<1}\left(\int_0^{2\pi}\lvert f(re^{i\theta})\rvert^p d\theta\right)^{1/p}<+\infty\}$，其中 $D=\{z\mid \lvert z\rvert<1\}$	H^p 是由哈代于 1915 年提出的
$S(z)$	奇异内函数	singular inner function	$S(z)=\exp\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)\}$，式中 $\mu(t)$ 是非减的有界变差函数，其导数几乎处处等于零	
$F(z)$	外函数	outer function	$F(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log\lvert f(e^{it})\rvert dt\right\}$	
BMOA	有界平均振荡解析函数类	analysis function class of the bounded mean oscillating	$\mathrm{BMOA}(D)=\{f\mid f(z)$ 是单位圆周 T 上的可积函数，$u(e^{i\theta})$ 的积分 $\sup_{T\subset I}\frac{1}{\lvert I\rvert}\int_I f(u-u_I)d\theta<+\infty\}$，式中 u 为单圆周 T 上的可积函数，I 是 T 的子弧，$\lvert I\rvert$ 是 I 的长度	
B_n	$\mathbb{C}^n$ 中单位球	unit ball in a $\mathbb{C}^n$	$B_n=\{z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\mid \lvert z_1\rvert^2+\lvert z_2\rvert^2+\cdots+\lvert z_n\rvert^2<1\}$	
$\mathrm{Aut}(D)$	域的全纯自同构群	holomorphic automorphism group of a domain	表示域 D 的全纯自同构的全体组成的群. 它是 D 上的拓扑变换群	
∂D	域的边界	boundary of a domain	域 D 和它的闭包 $\bar{D}$ 的差集，即 $\partial D=\bar{D}\setminus\dot{D}$	
$\mathrm{Hol}(D)$	全纯复线性空间	holomorphic complex linear space	表示 D 上所有全纯函数构成的复线性空间	
$\bar{\partial}$	$\bar{\partial}$ 算子	$\bar{\partial}$-operator	$\bar{\partial}:C^1(D)\to L_D^2, u\mapsto\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ 称为 $\bar{\partial}$ 算子	
$H(z,\bar{z})$	正定埃尔米特方阵	positive definite Hermitian matrix	$H(z,\bar{z})=\begin{pmatrix}h_{11}(z,\bar{z}) & \cdots & h_{1n}(z,\bar{z})\\ \vdots & & \vdots\\ h_{n1}(z,\bar{z}) & \cdots & h_{nn}(z,\bar{z})\end{pmatrix}$，式中 $h_{jk}(z,\bar{z})$ 在拓扑积 $\varphi_a(U_x)\times\overline{\varphi_a(U_a)}$ 上全纯	互逆正定埃尔米特方阵记为 $\hat{H}(z,\bar{z})$
$B_\mu^2(M)$	可测复线性空间	measurable complex linear space	$B_\mu^2(M)=\mathrm{Hol}(M)\cap L_\mu^2(M)$，其中 M 为 n 维复流形，$\mu$ 为 M 上任给的测度	
$N(\Omega)$	奈望林纳函数类	Nevanlinna function class	Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的对称域，b 是特征边界，若 $\Omega\to\mathbb{C}f$ 在 Ω 中全纯，且满足 $\sup_{0<r<1}\int_b\log^+\lvert f(r,\zeta)\rvert d\sigma(\zeta)<+\infty$，则 f 属于奈望林纳函数类	
$\beta(\Omega)$	布洛赫空间	Bloch space	Ω 上全体布洛赫函数的集合，称为布洛赫空间. Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中齐线性有界域	
$\rho(\ ,\ )$	点集的距离	distance between two point sets	$\rho(A,B)=\inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}}\{\rho(x,y)\}$	
F_σ	F_σ 型集	set of type F_σ	表示可数个闭集的并集	F_σ 是波莱尔集
G_δ	G_δ 型集	set of type G_δ	表示可数个开集的交集	G_δ 是波莱尔集
mE；$\lvert E\rvert$	勒贝格测度	Lebesgue measure	若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为勒贝格可测集，则 E 的勒贝格外测度称为勒贝格测度	
$m^*(E)$；$\lvert E\rvert_e$	勒贝格外测度	Lebesgue outer measure	$m^*(E)=\inf\{\sum_{i\in\mathbb{N}}\lvert I_i\rvert\mid\{I_i\}$ 为覆盖 E 的可数个开集$\}$	
$m_*(E)$；$\lvert E\rvert_i$	勒贝格内测度	Lebesgue inner measure	$m_*(E)=\sup\{m(F)\mid F$ 为闭集，且 $F\subset E\}$	
$\aleph_0$	可列集的势	cardinal number of countable set	每一个无穷集的势都是某个阿列夫，自然数集的势是 $\aleph_0$	
$\aleph$ 或 C	连续集的势	cardinal number of continuous set	与区间[0,1]对等的集的势记为 N 或 C. 连续集的势 $C=2^{\aleph_0}$	亦称基数
CH	连续统假设	continuum hypothesis	康托尔猜测：实数集的一切无穷子集或者与自然数集等势或者与连续统等势	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
GCH	广义连续统假设	generalized continuum hypothesis	假设:1. 对任一序数 α, $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$; 2. 对任二无穷势 κ,λ,若 $\kappa\leqslant\lambda\leqslant 2^{\aleph}$,则 $\lambda=\kappa$ 或者 $\lambda=2^{\aleph}$	
$H_\alpha(E)$	豪斯多夫测度	Hausdorff measure	$H_\alpha(E)=\lim\limits_{E\to 0}H_{\alpha,\varepsilon}(E)=\sup\limits_{\varepsilon>0}H_{\alpha,\varepsilon}(E)$, 其中, $H_{\alpha,\varepsilon}(E)=\inf\sum\limits_k\delta(E_k)^\alpha$,且 $\delta(E_k)$ 为 R^n 的子集 E_k 的直径	
$\psi(x)$	狄利克雷函数	Dirichlet function	$\psi(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理点},\\ 0, & x \text{ 为无理点}\end{cases}$	亦可用 $D(x)$ 表示
$\chi(n)$或 $\chi_q(n)$或 $\chi(n)\bmod q$	狄利克雷特征	Dirichlet character	整数集上的函数 $\chi(n)=$ $\begin{cases}\exp\left[2\pi\left(\dfrac{mr}{c}+\dfrac{m_0r_0}{c_0}+\dfrac{m_1r_1}{c_1}+\cdots+\dfrac{m_sr_i}{c_s}\right)\right] & ((n,q)=1)\\ 0 & ((n,p)>1)\end{cases}$	亦称 q 的特征
$\{A,B\}$	泊松符号	Poisson symbol	$\{A,B\}=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\partial A}{\partial\xi_j}\dfrac{\partial B}{\partial x_j}-\dfrac{\partial B}{\partial\xi_J}\dfrac{\partial A}{\partial x_j}\right)$	亦称泊松括号
$\lvert I\rvert$	I 区间的体积	volume of I-interval	E 为 R^n 中的有界点集,I 为包含 E 的任何有界区间,则以 $\lvert I\rvert$ 表示区间 I 的体积	
a. e. p. p.	几乎处处	almost everywhere	若命题 $P(x)$ 与集合 $E\subset\mathrm{R}^n$ 有关,且零集 $E_0\subset E$,对于任意 $x\in E\backslash E_0$,$P(x)$ 均成立,则称$P(x)$ 在 E 上几乎处处成立,记为 $P(x)$a. e. 或 $P(x)$p. p.	a. c. 是英文 almost everywhere 的首字母; $p.\ p.$ 是法文 presque partout 的首字母
$M(x)$	上极限函数	upper limit function	$M(x)=\lim\limits_{\delta\to 0}M(x,\delta)$,其中 $M(x,\delta)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 的 δ 邻域上取值的上确界	
$m(x)$	下极限函数	lower limit function	$m(x)=\lim\limits_{\delta\to 0}m(x,\delta)$,其中 $m(x,\delta)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 的 δ 邻域上取值的下确界	
$\chi_A(x)$	集合的特征函数	characteristic function of a set	$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A),\\ 0 & (x\notin A)\end{cases}$	
ap $\overline{\lim}$	近似上极限	approximate upper limit	ap $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=\inf\limits_E\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}{}_E f(x)$	
ap $\underline{\lim}$	近似下极限	approximate lower limit	ap $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=(\sup\limits_E\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}{}_E f(x))$	
ap lim	近似极限	approximate limit	ap $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 表示 ap $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)=$ ap $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}}f(x)$	
$(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x$	勒贝格积分	Lebesgue integral	若 $f(x)$ 是可测集 $E\subset\mathrm{R}^n$ 上的 (L) 可测函数,则称 $(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 为勒贝格积分	简称 L 积分
$D^-f(x_0)$	左上导数	left upper derivative	$D^-f(x_0)=\overline{\lim\limits_{\xi\to x_0^-}}\dfrac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$	
$D_-f(x_0)$	左下导数	left lower derivative	$D_-f(x_0)=\underline{\lim\limits_{\xi\to x_0^-}}\dfrac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$	
$D^+f(x_0)$	右上导数	right upper derivative	$D^+f(x_0)=\overline{\lim\limits_{\xi\to x_0^+}}\dfrac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$	
$D_+f(x_0)$	右下导数	right lower derivative	$D_+f(x_0)=\underline{\lim\limits_{\xi\to x_0^+}}\dfrac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}$	
$\ll$	绝对连续	absolute continuity	$\gamma\ll\mu$ 表示广义测度 γ 关于 μ 是绝对连续的. 即当 $\lvert\mu\rvert(A)=0$ 时有 $\gamma(A)=0$,其中 $\lvert\mu\rvert$ 是 μ 的全变差	
$\perp$	相互奇异	mutually singular	$\gamma\perp\mu$ 表示 γ 与 μ 是相互奇异的,即存在两个不相交的可测集 A 与 B 使得 $\Omega=A\cup B$,且对任意可测集 E,有 $\lvert\mu\rvert(A\cup E)=\lvert\gamma\rvert(B\cap E)=0$,其中 $\lvert\gamma\rvert$,$\lvert\mu\rvert$ 分别是 γ 和 μ 的全变差	
$(\Gamma)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu$	盖尔范德积分	Gelfand integral	设 $x(t)$ 为 Ω 到巴拿赫空间 X 的向量函数,若对 $\forall f\in X^*$,当 $f(x(t))$ 在 Ω 上可积时必存在 $x^{**}\in X$ 使 $x^{**}=\int_\Omega f(x(t))\mathrm{d}\mu$,则称 x^{**} 为盖尔范德积分	亦称盖尔范德意义下的弱 * 积分

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$(P)\int_A x(t)\mathrm{d}\mu$	佩蒂斯积分	Pettis integral	若$\int_A f(x(t))\mathrm{d}\mu = f(x_A)$，则$(P)\int_A x(t)\mathrm{d}\mu = x_A$	亦称弱积分
$(B)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu$	博赫纳积分	Borchner integral	1. 若 $x(t)$ 是 Ω 上可测函数，则 $(B)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\mu(A_K)$； 2. 对于一般的强可测函数 $x(t)$，则 $(B)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}(B)\int_\Omega x_n(t)\mathrm{d}\mu$.	
$(BK)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu$	伯克霍夫积分	Birkhoff integral	$(BK)\int_\Omega x(t)\mathrm{d}\mu = \bigcap_\Delta J(x,\Delta)$，其中 $J(x,\Delta)$ 是 $\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)x(t_i) \mid t_i \in A_i\}$ 的凸闭包	
$\mathscr{U}_g^*(E)$	$(L\text{-}S)$外测度	$(L-S)$outer measure	$\mathscr{U}_g^*(E) = \inf\{\sum_{K\geq 1}\mathscr{U}_g(I_k) \mid \{I_k\}$ 为可数个覆盖 E 的左开右闭区间$\}$	
$\mathscr{U}_g(E)$	$(L\text{-}S)$测度	$(L-S)$measure	当任意点集 T 能分解成 E 内部分 $T\cap E^i$ 和 E 外部分 $T\cap E^c$ 时，相应的$(L\text{-}S)$外测度具有可加性，则 E 称为 $g(x)$的$(L\text{-}S)$可测集，此时外测度 $\mathscr{U}_g^*(E)$就称为 E 的由分布函数$g(x)$引出的$(L\text{-}S)$测度	
$(L\text{-}S)\int_E$	$(L\text{-}S)$积分	$(L\text{-}S)$integral	$\int_E f(x)\mathrm{d}g(x) = \int_E f^+(x)\mathrm{d}g(x) - \int_E f^-(x)\mathrm{d}g(x)$，其中 $f^+(x)$，$f^-(x)$分别为 $f(x)$正部和负部，且至少有一个有极限	$(L\text{-}S)$积分是勒贝格-斯蒂尔切斯积分的简称
$D(*)\int_a^b$	狭义当茹瓦积分	Denjoy integral in the restricted sense	$(D(*))\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$，其中 $F(x)$ 是狭义一般绝对连续函数，且在$[a,b]$上 $F'(x) = f(x)$ a.e.	狭义当茹瓦积分是勒贝格积分和黎曼积分的一种推广
$D_{\mathrm{ap}}f(x_0)$	近似导数	approximate derivative	$D_{\mathrm{ap}}f(x_0) = \mathrm{ap}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	
$\underline{D}_{\mathrm{ap}}f(x_0)$	近似下导数	approximate lower derivative	$\underline{D}_{\mathrm{ap}}f(x_0) = \mathrm{ap}\varliminf_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	
$\overline{D}_{\mathrm{ap}}f(x_0)$	近似上导数	approximate upper derivative	$\overline{D}_{\mathrm{ap}}f(x_0) = \mathrm{ap}\varlimsup_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	
Π_K	庞特里亚金空间	Pontrjagin space	设 $H = H_-\oplus H_+$ 是正则分解，$\dim H_\pm = k < +\infty$，称$(H,[\cdot,\cdot])$为具有正(负)指标的庞特里亚金空间	
π	克莱因空间	Klein space	设 $H = H_-\oplus H_+$ 是正则分解，$\dim H_\pm = +\infty$，称$(H,[\cdot,\cdot])$为克莱因空间	
$\rho(T)$	正则集	Regular set	设T是空间X的线性算子，如果$\lambda I - T$是正则算子，那么称λ为T的正则点. 复平面上正则点全体称为正则集	亦称豫解集
$\sigma(T)$或$\mathrm{sp}(T)$	谱集	spectrum	$\rho(T)$ 的余集 $C\backslash\rho(T)$. $\sigma_P(T)$，$\sigma_a(T)$，$\sigma_r(T)$，$\sigma_c(T)$ 分别表示点谱、近似点谱、剩余谱、连续谱	
$\deg(T,\Omega,P)$	拓扑度	topological degree	映射T在区域Ω上关于P点的拓扑度是一个整数，它是方程 $T(x) = P$ 在 Ω 中解的“代数个数”的某种稳定的度量	
$F((x))$	形式幂级数域	domain of formal power series	由 F 上关于X的形式幂级数 $\alpha(x) = q_rx^r + q_{r+1}x^{r+1} + \cdots$ $(q_r \neq 0, r \in Z)$ 按照通常加、乘运算组成一个域	
$\delta(x)$	狄拉克 δ 函数	Dirac δ-function	$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & (x=0), \\ 0 & (x\neq 0). \end{cases}$	
$e\subset(A)$	平衡包	equilibrium hull	包含 A 的最小平衡集称为 A 的平衡包	
$(P)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	佩龙积分	Perron integral	$(P)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \inf\{U(b)\} = \sup\{V(b)\}$，其中 $U(x)$ 和 $V(x)$ 分别是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的上函数和下函数	$f(x)$ 在$[a,b]$上的佩龙积分值和勒贝格积分值相等
$(W)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	瓦尔德积分	Wald integral	$(W)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sup_G(G(b)) - (G(a)) = \inf(H(b) - H(a))$，其中 $H(x)$，$G(x)$ 各为 $f(x)$ 的瓦尔德上、下函数	瓦尔德积分与佩龙积分等价

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$(H)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	亨斯托克积分	Henstock integral	一种定积分，亨斯托克积分包括(R)积分，也包括(L)积分	
$(M)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	马克仙积分	Mcshane integral	一种定积分，马克仙积分与勒贝格积分等价	
$f_n \xrightarrow{L^p} f$	L^p 的强收敛	strong convergence in L^p	若 $f_n(x), f(x) \in L^p(E), (1 \leqslant p < +\infty, n = 1,2,\cdots,)$，且存在 $\Vert f_n - f \Vert_p \to 0 (n \to \infty)$，则称 $\{f_n(x)\}$ 强收敛于 $f(x)$	亦称按 L^p 范数收敛于 $f(x)$
$f_n \xrightarrow{W} f$	L^p 的弱收敛	weak convergence in L^p	若 $f_n(x), f(x) \in L^p(E), g(x) \in L^q(E), (1 < p, q < +\infty, n = 1,2,\cdots,)$ 且 $1/p + 1/q = 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$ 成立，则称 $\{f_n(x)\}$ 弱收敛于 $f(x)$	
l^p	l^p 空间	l^p space	所有满足 $\Vert x \Vert_p = (\sum\limits_{k=1}^{\infty} \vert x_k \vert^p)^{1/p} < +\infty$ 的数列 x 组成之集	
l^∞	l^∞ 空间	l^∞ space	满足 $\vert x_n \vert \leqslant M < +\infty (n = 1,2,\cdots,)$ 的所有数列之集. x 的范数由 $\Vert x \Vert_\infty = \sup\limits_n \{\vert x_n \vert\}$ 定义	
$\Lambda(\psi)$	洛伦茨空间	Lorentz space	$\Lambda(\psi) = \{f \in S[0,1] \mid \Vert f \Vert < +\infty\}$ 称为洛伦茨空间	
L_Φ	奥尔里奇空间	Orlicz space	所有使得 $\Vert f \Vert = \inf\left\{\lambda > 0 \mid \int_{\mathrm{R}^n} \Phi(\lambda^{-1}\vert f(t) \vert)\mathrm{d}t \leqslant 1\right\} < +\infty$ 成立的 R 上的可测函数 f 之集	
ent	拓扑熵	toplogical entropy	这是用于拓扑动力学中的一个概念	
$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	雅可比多项式	Jacobi polynomials	$[-1,1]$ 上关于权 $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ 的正交多项式 $J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{n!2^n\omega(x)\mathrm{d}x^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n\omega(x)]$ $(n = 1,2,\cdots)$	
$r_n(x)$	拉德马赫尔函数	Rademacher functions	$r_n(x) = \mathrm{sig}\ n\sin 2^{n+1}x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, n = 1,2,\cdots)$	
$W_n(x)$	沃尔什函数	Walsh functions	$W_n = r_{k_1}(x)r_{k_2}(x)\cdots r_{k_p}(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$	
$B_n(f,x)$	伯恩施坦多项式	Bernstein polynomial	$B_n(f,x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^x(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$	亦称伯恩施坦算子
$H_\varepsilon(A)$	度量熵	metric entropy	设 A 是巴拿赫空间 X 的紧子集，A 的 ε 覆盖 $\{U_k\}_{k=1}^n$，令 $N_\varepsilon(A) = \min n$，则 $H_\varepsilon(A) = \log N_\varepsilon(A)$	
$H_\varepsilon^X(A)$	A 关于 X 的熵	entropy of A with respect to X	设 A 是巴拿赫空间 X 的紧子集，A 的 ε 网 $\{x_k\}_{k=1}^p$，令 $P_\varepsilon(A) = \min P$，则 $H_\varepsilon^X(A) = \log P_\varepsilon(A)$	
$C_\varepsilon(A)$	容量	capacity	设 A 是巴拿赫空间 X 的紧子集，A 的 $\varepsilon\gamma$ 分离 $\{y_k\}_{k=1}^m$，令 $M_\varepsilon(A) = \max m$，则 $H_\varepsilon(A) = \log M_\varepsilon(A)$	
L_n	勒贝格常数	Lebesgue constant	$L_n = \frac{4}{\pi^2}\log(n+1) + o(1)$	
$\deg(\pi)$	分歧阶	ramification order	使 π 在 A_k 恒为 1 的最小整数 k	
PX	X 的子集簇	subsets of X	集合 X 的一切子集组成的集合	亦称幂集合
Δ	对称差	symmetric difference	$A\Delta B$ 的对称差指属于 A 但不属于 B，或属于 B 但不属于 A 的一切元素组成的集合	
$P \cdot P \cdot P$	近乎处处	approximately everywhere	设 $P = P(x)$ 是一个与 x 无关的性质，如果使 P 不成立的点全体所成之集 A 为零内容集，则称 P 是近乎处处成立的	
$q \cdot P \cdot$	拟乎处处	quasi-everywhere	设 $P = P(x)$ 是一个与 x 无关的性质，如果 A 为零外容集，则称 P 是拟乎处处成立的	
$\mathrm{cap}(G)$	χ 容量	χ-capacity	对于相对紧的开集 G，记 $\mathrm{cap}(G) = \int \mathrm{d}\sigma_G$，其中 σ_G 是由 $R_{\omega x}^G = \chi^* \sigma_G$ 所确定的惟一测度	
U_K^μ	位势	potential	测度 μ 的 K 位势为 $U_K^\mu = \int_\Theta K(x,y)d\mu(y) \quad (x \in \Omega)$	
U_α^μ	里斯位势	Riesz potential	对于位势 U_K^μ，当 $\Omega = R^n (n \geqslant 3), 0 < \alpha < n, \kappa(x,y) = \vert x - y \vert^{\alpha-n}$ 时，称为里斯位势	

符 号	中文名称	英文名称	意 义 或 举 例	备 注
U_2^g	牛顿位势	Newtonian potential	对于里斯位势 $\alpha=2$ 时，称为牛顿位势	
(f,g)	内积	inter product	$(f,g)=\int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}u(x)$	
σ	舒伯特符号	Schubert symbol	$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 表示 n 个整数组成的一个序列，其中 $1\leqslant\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_n\leqslant m$	
Lin E	线性包	linear hull	$\mathrm{Lin}E=\{x\mid x=\sum_{y\in E}\lambda_y y,\lambda_y\in R$，有限个不为零$\}$	$\mathrm{Lin}E$ 亦表示凸集 E 的支撑子空间
affE	仿射包	affine hull	$\mathrm{aff}E=\{x\mid x=\sum_{y\in E}\lambda_y y,\lambda_y\in R$，有限个不为零，$\sum_{y\in E}\lambda_y=1\}$	
coneE	锥包	cone hull	$\mathrm{cone}E=\{x\mid x=\lambda y,y\in E,\lambda>0\}=\bigcup_{\lambda>0}\lambda E$	
coE	凸包(凸集)	covex hull	$\mathrm{co}E=\{x\mid x=\sum_{y\in E}\lambda_y y,\lambda_y\in[0,1]$，有限个不为零，$\sum_{y\in E}\lambda_y=1\}$	
clcoE	闭凸包	closed convex hull	以 C 为内集的全体闭包凸集的交	
epif	上图	epigraph	$\mathrm{epi}f=\{(x,a)\in X\times R\mid f(x)\leqslant a\}$	
K	核	kernel	$C\subset R^n,\forall\ y\in C,0\leqslant\lambda\leqslant1$，满足 $(1-\lambda)x+\lambda y\in C$ 的全体 $x\in C$ 的集合称为 C 的核	
exp C	暴露点集	exposing point set	C 的全体暴露点的集合	
ext C	极点集	extreme point set	C 的全体极点的集合	
$f'(x:y)$	单边方向导数	one-side directional derivative	$f'(x:y)=\lim_{\lambda\downarrow0}\frac{f(x+\lambda y)-f(x)}{\lambda}$	
$\partial f(x)$	次微分	subdifferential	$f(x)$ 在 X 的次梯度的全体	
$I_V(M)$	奇点的指标	index of critical points	V 的孤立奇点 M 沿曲线 C_r 的旋转数	
u. a. p.	一致概周期函数	uniformly almost periodic functions	设 $f(t,x)\in C(\mathrm{R}\times D,E^n)$，$S$ 是 D 的紧集，若对任给序列 $\{a'_n\}$，存在子序列 $\{a_n\}\subset\{a'_n\}$，使 $T_af(t,x)=\lim_{n\to\infty}f(t+a_n,x)$ 在 $R\times S$ 上一致地成立，则称 $f(t,x)$ 是一致概周期函数，$x\in D$	
a. a. p.	渐进概周期函数	asymptotically almost periodic functions	如果 $\varphi(t)$ 有分解式 $\varphi(t)=p(t)+q(t)$，其中 $p(t)$ 是 R 上的概周期函数，$q(t)$ 是定义在 R^+（或 R^-）上的连续函数，当 $t\to+\infty$ 或 $(t\to-\infty)$ 时有 $q(t)\to0$，则称 $\varphi(t)$ 是 R^+（或 R^-）上的渐进概周期函数	
RFDE(f)	滞后型泛函微分方程	retarded function differential equation	$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=f(t,x(t),x(t-h_1),\cdots,x(t-h_m))$. $(h_1,h_2,\cdots,h_m$ 是正定数，$h_1<h_2<\cdots<h_m)$	RFDE 是英文名中四个单词的第一个字母
H. S.	哈密顿系统	Hamilton's system	指形如 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q},\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p}$，$H=H(p,q,t)$ 的一阶偏微分方程	亦称典型系统或正则系统
$\int^x a(s)\mathrm{d}s$	反导数	antiderivative	表示 $a(x)$ 的反导数	

概率统计(Probability & Statistics)

符 号	中文名称	英文名称	意 义 或 举 例	备 注
P, P_r	概率	probability	$P(E)$ 表示事件 E 的概率，$P_r(\xi)$ 表示事件 ξ 的概率	$P_{n,m}$ 表示在 n 次独立实验中出现 m 次事件的概率
$P(\mid)$	条件概率	conditional probability	$P(A\mid B)$ 表示发生了事件 B 的条件下，事件 A 的概率	
E, M	期望（或均值）	expectation (or mean)	$E\xi$，$M\xi$ 表示随机变量 ξ 的期望（或均值）	亦可记为 $E(\xi)$，$M(\xi)$
D, σ^2	方差	variance	$D\xi$，$\sigma^2\xi$ 表示随机变量 ξ 的方差	亦可记为 $D(\xi)$，$\sigma^2(\xi)$，$\mathrm{Var}\xi$

数 学 符 号 表

符 号	中文名称	英文名称	意 义 或 举 例	备 注
cov	协方差	covariance	$\mathrm{cov}(\xi,\eta)$表示随机变量ξ和η的协方差	或记为$\sigma_{\xi,\eta}$
$E(\mid)$, $M(\mid)$	条件期望(或条件均值)	conditional expectation or conditional mean	$E(\xi\mid y)$, $M(\xi\mid y)$表示随机变量ξ关于条件y的条件期望(或均值)	
ρ, r	相关系数	correlation coefficient	$\rho(\xi,\eta)$, $\rho_{\xi,\eta}$, $r(\xi,\eta)$表示随机变量ξ和η的相关系数	在不致误会时,亦可记为ρ或r
Ω	基本事件空间	elementary event space	Ω是由n个基本事件$\omega_i(i\in\mathrm{N})$构成的基本事件空间,即$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$	
$F_n(\ )$	频率	frequency	频率$F_n(A)$等于频数$f_n(A)$与试验总次数n之比,即 $F_n(A)=\dfrac{f_n(A)}{n}$	
$F(\mid)$	条件分布函数	conditional distribution function	ξ和η为随机变量,则称$F(y\mid x)$为在$\xi=x$条件下η的条件分布函数	
ν_k	k阶原点矩	origin moment of the k-th order	ξ的k阶原点矩$\nu_k=E(\xi^k)$	
μ_k	k阶中心矩	central moment of the k-th order	ξ的k阶中心矩$\mu_k=E(\xi-E\xi)^k$	
α_k	k阶原点绝对矩	origin absolute moment of the$k$-th order	ξ的k阶原点绝对矩$\alpha_k=E\lvert\xi\rvert^k$	
β_k	k阶中心绝对矩	central absolute moment of the k-th order	ξ的k阶中心绝对矩$\beta_k=E\lvert\xi-E\xi\rvert^k$	
$E(\ )$	混合矩	mixed moment	若$E\lvert\xi^k\eta^l\rvert<\infty$, $k,l\in\mathrm{N}$,则称$E(\xi^k\eta^l)$为ξ和η的$k+l$阶混合矩	
$E[\ ]$	中心混合矩	central mixed moment	若$E(\lvert\xi-E\xi\rvert^k\lvert\eta-E\eta\rvert^l)<\infty$,且$k,l\in\mathrm{N}$,则称$E[(\xi-E\xi)^k(\eta-E\eta)^l]$为$\xi$和$\eta$的$k+l$阶中心混合矩	
$B(n,p)$	二项分布	binomial distribution	分布列为$b(k;n,p)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ $(0<p<1,q=1-p,\ k=0,1,2,\cdots,n)$	
$NB(m,p)$	负二项分布	negative binomial distribution	密度函数为$p_x=\Gamma(m+x)[\Gamma(m)x!]^{-1}p^mq^x$($m$为整数, $0<p<1$, $q=1-p$, $x=0,1,2,\cdots$)	
$G(p)$ 或 $g(k;p)$	几何分布	geometric distribution	密度函数为 $p_x=pq^x(0<p<1,q=1-p,x=0,1,2,\cdots)$	
$H(N,n,p)$	超几何分布	hypergeometric distribution	密度函数为$p_x=\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}\Big/\binom{N}{n}$ (x为整数, N,Np,n为正整数, $N\geqslant n$, $0\leqslant x\leqslant Np$, $0\leqslant n-x\leqslant Nq$, $0<p<1$, $q=1-p$)	
$M(n;p_1,\cdots,p_{k+1})$	多维超几何分布	multiple hypergeometric distribution	密度函数为$p_{x_i}=\binom{Np_1}{x_1}\cdots\binom{Np_{k+1}}{x_{k+1}}\Big/\binom{N}{n}$ ($i=1,2,\cdots,k+1$), $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}$是整数, $N,Np_1,\cdots,Np_{k+1},n$是正整数, $x_{k+1}=n-(x_1+\cdots+x_k)$, $p_1+p_2+\cdots+p_{k+1}>0$)	
$P(\lambda)$ 或 $P(k;\lambda)$	泊松分布	Poisson distribution	分布列为$p(k;\lambda)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}(\lambda>0,k=0,1,2,\cdots)$	
$U(a,b)$ 或 $U[a,b]$	均匀分布	uniform distribution	密度函数为$p(x)=\begin{cases}1/(b-a) & (a\leqslant x\leqslant b),\\ 0 & (\text{其他}),\end{cases}$ 其中$a<b$为常数	
$N(\mu,\sigma^2)$	正态分布	normal distribution	密度函数为$p(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$, $(-\infty<x<+\infty,\sigma>0,\mu$为常数)	亦称高斯分布
$C(\lambda,\mu)$	柯西分布	Cauchy distribution	密度函数为$p(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}$,其中$x$为实数, $\lambda>0$, μ为常数	
$\Gamma(\lambda,r)$	伽马分布	gamma distribution	密度函数为$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda x} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中$r>0,\lambda>0$为常数	亦可记为$G(\lambda,r)$

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$e(\lambda)$	指数分布	exponential distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & (x\geqslant 0),\\ 0 & (x<0),\end{cases}$ 其中 λ 为常数	亦可记为 $e(\mu,\sigma)$
$W(\lambda,\alpha)$	韦布尔分布	Weibull's distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\alpha\lambda x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x^{\alpha}) & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 $\lambda>0$，$\alpha>0$ 为常数	
$\chi^2(n)$	χ^2 分布	Chi-square distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{(n-2)/2}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 n 为正整数	
$\mathrm{Ln}(\mu,\sigma^2)$	对数正态分布	logarithmic normal distribution	密度函数为 $P(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln x-a)^2/2\sigma^2} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 $a,\sigma>0$ 为常数	
$t(n)$	学生分布	Student's distribution	密度函数为 $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$，其中 n 为正整数	亦称 t 分布
$F(n_1,n_2)$	F 分布	F-distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{B\left(\dfrac{n_1}{2},\dfrac{n_2}{2}\right)}n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}(n_2+n_1x)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 n_1,n_2 为正整数	
$E(\alpha,\beta)$	极值分布	extremal distribution	密度函数为 $p(x)=\dfrac{1}{\beta}\exp\left\{\exp\left(-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right\}$，其中 x,α 均为实数，β 为常数	
$\chi^2(n,\lambda)$	非中心 χ^2 分布	non-central chi-square distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{\exp\left\{-\left(\dfrac{x+\lambda}{2}\right)\right\}}{2^{n/2}}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{x^{\frac{n}{2}+j-1}\lambda^j}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+j\right)2^{2j}j!} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 n 为自由度；$\lambda>0$ 为非中心参数	
$t(n,\delta)$	非中心 t 分布	non-central t-distribution	密度函数为 $p(x)=\dfrac{n^{n/2}\exp(-\delta^2/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)(n+x^2)^{(n+1)/2}}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\Gamma\left(\dfrac{n+m-1}{2}\right)\left(\dfrac{\delta^m}{m!}\right)\left(\dfrac{2x^2}{2+x^2}\right)^{\frac{n}{2}}$，其中 n 为自由度，δ 为实数，且是非中心参数	
$F(m,n;\lambda)$	非中心 F 分布	non-central F-distribution	密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}e^{-\frac{\lambda}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\left(\dfrac{\lambda mx}{2}\right)^k\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}+k\right)k!(mx+n)^{\frac{m+n}{2}+k}} & (x>0),\\ 0 & (x\leqslant 0),\end{cases}$ 其中 m,n 为二自由度，λ 为非中心参数	
$X_1^{(n)}$	最小顺序统计量	smallest order statistics	$X_1^{(n)}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$ 表示样本观察值中最小者	
$X_n^{(n)}$	最大顺序统计量	largest order statistics	$X_n^{(n)}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$ 表示样本观察值中最大者	
$\bar{x}$	样本均值	sample mean	$\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F_n(x)$	
s^2	样本方差	sample variance	$s^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^2\mathrm{d}F_n(x)$	
a_k	样本 k 阶原点矩	sample origin moment of the k-th order	$a_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k\mathrm{d}F_n(x)\quad(k=2,3,\cdots)$	

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
b_k	样本 k 阶中心矩	sample central moment of the k-th order	$b_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\bar{x})^k\mathrm{d}F_n(x)$ $(k=2,3,\cdots)$	
μ	总体均值	population mean	$\mu=E(X)$	
σ^2	总体方差	population variance	$\sigma^2=D(X)=E(X-\mu)^2$	
α_k	总体 k 阶原点矩	population origin moment of the k-th order	$\alpha_k=E(X^k)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k\mathrm{d}F(x)$	
μ_k	总体 k 阶中心矩	population central moment of the k-th order	$\mu_k=E(X-\mu)^k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^k\mathrm{d}F(x)$	
Md	样本中位数	sample median	$\mathrm{Md}X=\begin{cases}X_{k+1}, & 若\ n=2k+1,\\ (X_k+X_{k+1})/2, & 若\ n=2k\end{cases}$	亦可用 $\tilde{X}$ 表示
Sk	样本偏度	sample skewness	样本三阶中心矩除以样本二阶中心矩的3/2次幂的商，即 $\mathrm{Sk}=\frac{b_3}{(b_2)^{3/2}}$	亦称样本偏态或偏态系数
Kur	样本峰度	sample kurtosis	样本四阶中心矩除以样本二阶中心矩的平方再减去3，即 $\mathrm{Kur}=\frac{b_4}{(b_2)^2}-3$	亦称样本峭度
$\mathrm{d}f$, f	自由度	degree of freedom	$\mathrm{d}f_A$，f_A 表示因素 A 的自由度	
$E_x(s)$	特征函数	characteristic	函数 e^{isX} 的数学期望，即 $E_x(s)=M[\mathrm{e}^{isX}]$	
$H[x]$	熵	entorpy	离散型随机变量 x 的熵 $H[x]=-\sum_{i=1}^{n}P_i\log_a P_i$；连续型随机变量 x 的熵 $H[x]=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\log_a f(x)\mathrm{d}x$	
$f(k;r,p)$	帕斯卡分布式	Pascal distribution	分布函数为 $f(k;r,p)=\mathrm{C}_{k-1}^{r-1}p^r q^{r-1}\quad(k=r,r+1,\cdots)$	
$P_{i.}$ 或 $P_{.j}$	边缘概率	boundary probability	离散型随机变量的边缘概率分布式为 $P_{i.}=\sum_j P_{ij}$，$P_{.j}=\sum_i P_{ij}$	
$N(\mu,\Sigma)$ 或 $N_n(\mu,\Sigma)$	多维正态分布	normal distribution	N 维正态分布的密度函数为 $\varphi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\lvert\Sigma\rvert}}\exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)\}(x\in\mathrm{R}^n)$	
S_n^*	S_n 的标准化	standardization of S	$S_n^*=\sum_{k=1}^{n}(X_k-a_k)/S_n$	
ω	样本点	sample point	随机试验的每一个可能的结果	亦称基本事件
ϕ	不可能事件	non-probability event	随机试验不可能发生的结果	
E^n	伯努利试验	Bernoulli trials	随机试验 E 只有两个可能的结果，并且其概率为 p，q，其中 $q=1-p$，把 E 独立地重复 n 次试验构成了一个试验	亦称伯努利概型
$\sigma\xi$	标准差	root-mean square deviation	方差的平方根	亦称根方差
CL	中线	middle line	表示控制图中中线	
UCL	上控制线	upper control linear	表示控制图中上控制线	
LCL	下控制线	lower control linear	表示控制图中下控制线	
$(n\mid C)$	抽检方案	sampling inspection plan	表示子样的容量为 n 和允许的不合格数为 C	
T	寿命	longevity	对任一特定个体（产品或生命体），从某个标准时间起在规定时间 t 内失效（或死亡）	
$R(t)$	可靠度	reliability	产品在规定的条件下，规定的时间内，完成规定功能的概率	
ρ_r	可靠寿命	reliability life	使可靠度等于给定值 r 的时间	$\rho_{0.5}$称为中位寿命
$\lambda(t)$	失效率	failure rate	产品工作到 t 时刻后单位时间内发生失效的概率	
MTBF	平均无故障工作时间	mean time between failures	平均寿命对可修复产品	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
MTTF	失效前的平均工作时间	worked mean time before failure	平均寿命对不可修复产品	
PDF	概率分布函数	probability distribution function	$F(x)=P(\xi(\omega)<x), x\in(-\infty,+\infty)$	简称分布函数
MLE	极大似然估计	maximum likelihood estimate	使似然函数 $L(p)$ 达到极大值的参数 P	
$\hat{\theta}$	估计量	estimator	当区间 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 以某一指定的概率包含 θ 时，称 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 为函数 θ 的区间估计	
R	样本极差	sample range	$R=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}-\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 表示取样本中最大值与最小值之差	亦称样本范围，又称样本全距
H_0	原假设	null hypothesis	假设检验中，对有关总体需要作出判断的待检验的命题的假设	亦称零假设
H_1,H_a	备择假设	alternative hypothesis	假设检验中，异于原假设的另一假设	亦称择一假设
u,λ,t	临界值	critical value	u_α, λ_α, t_α 表示置信度为 α 的临界值	
Q	离差平方和	sum of squares of deviations	总离差平方和 $Q=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x})^2$； 组内离差平方和 $Q_1=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2$； 组间离差平方和 $Q_2=n\sum\limits_{i=1}^{m}(\bar{x}_i-\bar{x})^2$； 因素 A 的离差平方和 $Q_A=n\sum\limits_{i=1}^{n}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})^2$； 误差平方和 $Q_E=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})^2$	
*	显著性标记	significance marked	* 表示作用显著. * * 表示作用高度显著	
$\times$	交互作用	interaction	$A\times B$ 表示因素 A,B 的交互作用	
$L(\ )$	正交表示标记	orthogonal layout marked	$L_4(2^3)$ 表示二水平三因素，需作四次试验的正交表示	
vec	列拉直算子	operator of according to columns draw line	将矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ 中的元按列依次拉直排序，即 $\mathrm{vec}(A)=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1},a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2},\cdots,a_{nm})$	
ran	行拉直算子	operator of according to rowsdraw line	将矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ 中的元按行依次拉直排序，即 $\mathrm{ran}(A)=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1m},a_{21},a_{22},\cdots,a_{2m},\cdots,a_{nm})$	

应用数学（Applied mathematics）

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\underset{\sim}{A}$	模糊子集	fuzzy subset	$\underset{\sim}{A}=\{x,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\mid x\in X\}$，其中集 X 为论域，$\forall\ x\in X$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\in[0,1]$ 是模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数	亦称模糊集、弗晰集、不分明集、乏晰集等
$\vee$	模糊子集的上确界	supremum of fuzzy subset	若 $\{a_t\mid t\in T\}$ 是实数集，则 $\bigvee\limits_{t\in T}a_t=\sup\{a_t\mid t\in T\}$	
$\wedge$	模糊子集的下确界	infimum of fuzzy subset	若 $\{a_t\mid t\in T\}$ 是实数集，则 $\bigwedge\limits_{t\in T}a_t=\inf\{a_t\mid t\in T\}$	
$\hat{+}$	代数和	algebraic sum	$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\hat{+}\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ $=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)+\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$	
$\cdot$	代数积	algebraic product	$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$	
$\oplus$	有界和	bounded sum	$a\oplus b=\min(a+b,1)$，式中 $a,b\in[0,1]$	$\gamma\geqslant0,p>0$
$\otimes$	有界积	bounded product	$a\otimes b=\max(a+b-1,0)$，式中 $a,b\in[0,1]$	$\gamma\geqslant0,p>0$
$\overset{+}{\varepsilon}$	爱因斯坦和	Einstein's sum	$a\overset{+}{\varepsilon}b=\dfrac{ab}{1+ab}$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant0,p>0$
$\dot{\varepsilon}$	爱因斯坦积	Einstein's product	$a\dot{\varepsilon}b=\dfrac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant0,p>0$

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
$\overset{+}{\gamma}$	伽玛和	gamma sum	$a\overset{+}{\gamma}b=\frac{a\overset{\wedge}{+}b-(1-\gamma)ab}{\gamma-(1-\gamma)(1-ab)}$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant 0,p>0$
$\overset{\cdot}{\gamma}$	伽玛积	gamma product	$a\overset{\cdot}{\gamma}b=\frac{ab}{\gamma+(1-\gamma)(a\overset{\wedge}{+}b)}$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant 0,p>0$
$\overset{\vee}{p}$	雅格和	Yager sum	$a\overset{\vee}{P}b=\min(1,(a^p+b^p)^{1/p})$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant 0,p>0$
$\hat{p}$	雅格积	Yager product	$a\hat{P}b=1-\min(1,((1-a)^p+(1-b)^p)^{1/p})$	式中 $a,b\in[0,1]$，$\gamma\geqslant 0,p>0$
$\sqcup$	取大运算	operation of fetch large	$\underset{\sim}{m}\sqcup\underset{\sim}{n}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{m}}(x)\wedge\mu_{\underset{\sim}{n}}(y)/x\vee y$，$\underset{\sim}{m},\underset{\sim}{n}$ 分别表示模糊数，即 $\underset{\sim}{m}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{m}}(x)/x$，$\underset{\sim}{n}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{n}}(x)/y$	
$\sqcap$	取小运算	operation of fetch small	$\underset{\sim}{m}\sqcap\underset{\sim}{n}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{m}}(x)\vee\mu_{\underset{\sim}{n}}(y)/x\wedge y$	
$\neg$	减法运算	operation of subtraction	$\neg\underset{\sim}{m}=\int_R\mu_{\underset{\sim}{m}}(x)/(1-x)$	
$\rightsquigarrow$	模糊映射	fuzzy mapping	$f:X\rightsquigarrow Y$ 表示从 X 到 Y 的模糊函数	不同的场合中，模糊函数常有不同的定义
$\ominus$	有界差	bounded difference	$(A\ominus B)(x)=\max\{0,A(x)-B(x)\}$	
$\underset{\sim}{\leqslant}$	小于等于的放宽	relax restrictions of less or equal	$Ax\underset{\sim}{\leqslant}b\ (x\geqslant 0)$ 表示约束条件 $Ax\leqslant b,x\geqslant 0$ 的软化	
D_{fix}	不动度	fixed degree	$D_{\text{fix}}(x,F)=\alpha$，表示 x 关于模糊映射 $F:X\rightsquigarrow\mathscr{F}(X)$ 的不动度为 α，$\mathscr{F}(X)$ 表示 X 上所有模糊集组成的集	
e^*	绝对误差	absolute error	$e^*=x^*-x$，式中 x 表示精确值，x^* 为 x 的近似值	常简称误差
ε^*	误差限	limit of approximate value	$\|x^*\|<\varepsilon^*$，式中 x^* 为 x 的近似值，ε^* 为近似值 x^* 的误差限	
e_r^*	相对误差	relative error	$e_r^*=\frac{e^*}{x^*}$，式中 x 表示精确值，e^* 表示 x 的绝对误差，e_r^* 表示相对误差，它表示误差 e^* 关于近似值 x^* 的近似程度	
ε_r^*	相对误差限	limit of relative error	$\|e_r^*\|<\varepsilon_r^*$，式中 e_r^* 表示相对误差	
δ	最大相对误差	maximal relation error	$\|e_r^*\|=\frac{\|e^*\|}{\|x^*\|}\leqslant\delta$，式中 x^* 表示近似值，e^* 和 e_r^* 分别表示绝对误差和相对误差，取不等式成立的最小数 δ 为最大相对误差	
σ	标准误差	standard error	$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}{n}}$，式中 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2$ 为误差平方和	
η	平均误差	mean error	$\eta=\frac{\sum_{i=1}^{n}\|x_i-\bar{x}\|}{n}$，式中 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 是算术平均值	
v_i	离差	dispersion	$v_i=x_i-\bar{x}\quad(i=1,2,\cdots,n)$	
ν	概率误差	probabilistic error	$P(\|\alpha\|\leqslant\nu)=1/2$ 表示数 α 的绝对值大于它的误差和小于它的误差出现的可能性一样大	
PS	多项式组	polynomial set	PS 表示由有限个非零多项式构成的集合	
Zero(•)	多项式的公共零点集	zero points set of polynomials	Zero (PS)表示多项式组 PS 中的多项式的公共零点集	
Res	结式	resultant	$\mathrm{Res}(p,q,x)=a_n^k b_k^n\cdot\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}(\alpha_i-\beta_j)$．式中 α_i,β_j 分别是多项式 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的根，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 分别为 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的系数	

符 号	中 文 名 称	英 文 名 称	意 义 或 举 例	备 注
$\bar{\cup}$	合一运算	unification	$a\bar{\cup}b=a$，式中 a,b 均为原子，当且仅当 $a=b$ 时成立，否则 $a\bar{\cup}b$ 为空，集合论中的并运算是合一运算的特殊情况.	当原子不可分解时，合一的结果等于并集
R	羡余度	redundancy	$R=1-\frac{H_\infty}{H_0}$，式中 R 表示语言的羡余度，H_∞ 是极限熵，H_0 是语言成分等概率不相关时的熵	亦称冗余度
$E_t^{(p)}$	p 次指数平滑值	exponential smoothing value of pth	$E_t^{(1)}=\alpha\sum(1-\alpha)^i E_{t-i}^{p-1}$ $(p=2,3,\cdots)$，其中 $\alpha(1-\alpha)^i$ $(i=0,1,2,\cdots)$ 为当期序列值的影响权数，α 的一般范围在区间[0.1,0.5]内，适当选取 α 的值是保证预测的关键	当 $p=1$ 时即为一次指数平滑值 $E_t^{(1)}$
$\omega_t^{(p)}$	p 次加权平滑值	weight smoothing value of pth	$w_t^{(p)}=\alpha_0\sum_{i=1}^{\infty}d_i w_{t-i}^{p-1}$ $(t=\cdots,-1,0,1,\cdots,T)$，其中 α_i $(i=0,1,2,\cdots)$ 为当期序列值的影响权数，$\alpha\in[0.1,0.5]$	当 $p=1$ 时为一次加权平滑值
VIF	协方差扩大因子	amplification factor of covariance	$\mathrm{VIF}(\hat{\beta}_i)=\frac{1}{1-R^2}$，式中 $\hat{\beta}_i$ 为线性回归模型 $y=X\beta+\varepsilon$ 中 X 的第 i 个消费者预算参数 β_i 的估计值，R 为 X 的多重相关系数	
$r_u(x)$	风险厌恶度量	risk aversion measure	$r_u(x)=-\frac{u''(x)}{u'(x)}$，式中 u 为消费者的效用函数，自变量 x 可理解为收入	亦称 Arrow-Pratt 风险厌恶度量
S	价格单纯形	price simplex	$S=\{\boldsymbol{p}\in\mathrm{R}^l \mid p_k\geqslant 0,\sum_{k=1}^{l}p_k=1\}$，式中 R^l 是商品空间，$\boldsymbol{p}$ 表示价格向量	
β_i	预算映射	budget mapping	$\beta_i(p)=\{x\in X_i \mid p\cdot x\leqslant p\cdot e_i+\sum_{j=1}^{n}\theta_{ij}\pi_j(p)\}$，式中 $\beta_i(p)$ 和 X_i 分别表示第 i 个消费者的预算映射和消费集，π_j 是第 j 个生产者的利润函数	
a_{ij}	直接消耗系数	direct consumption coefficient	$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$，x_{ij} 表示第 i,j 两个部门的流量，x_j 表示第 j 个部门的总产品量	
b_{ij}	完全消耗系数	total consumption coefficient	$b_{ij}=a_{ij}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{is}a_{sk}a_{kj}+\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{it}a_{ts}a_{sk}a_{kj}+\cdots(i,j=1,2,\cdots,n)$，式中 a_{ij} 是直接消耗系数，b_{ij} 表示第 j 个产品部门对第 i 种产品的完全消耗系数	
c_{ij}	完全需求系数	total demand coefficient	$c_{ii}=1+b_{ij}c_{ij}-b_{ij}(i\neq j)$，表示产品部门提供单位最终产品对所有产品部门产品的需求量，b_{ij} 表示第 i,j 两个产品部门之间的完全消耗系数，c_{ij} 表示第 j 个产品部门产出单位最终产品对第 i 个产品部门的需求量	
d_{ij}	投资系数	investment coefficient	动态投入产出模型中常用的统计指标，$d_{ij}=\frac{k_{ij}^t}{x_j^{t+1}-x_j^t}$，表示在 $t+1$ 时第 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 部门增加单位产品需要第 i 投资部门在时间 t 供给第 j 部门产品的数量. k_{ij}^t 表示 t 时 i 投资部门供给 j 部门产品总量，x_j^t 表示 j 部门 t 时的产品总量	
$L_{项}$	时滞	time lag	$L_{项}=[\alpha_1(n-0.5)+\alpha_2(n-1.5)+\cdots+\alpha_n 0.5]/100$ 为项目投资时滞，其中 α_i 为第 i 年投资占总投资的比重，n 为建设周期	
$L_{年}$	时滞	time lag	$L_{年}=\sum_{i=1}^{n}I_i n_i\Big/\sum_{i=1}^{n}I_i$ 为全年总投资时滞，式中 I_i 分配到 i 部门的投资. n_i 为 i 部门以外为单位的时滞	
$\boldsymbol{\varepsilon}$	应变张量	strain tensor	$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ $(i,j=1,2,3)$，x_i,x_j 表示应变张量分量，u_i,u_j 表示位移分量	
k	高斯常数	Gauss constant	k≈0.017 202 098 95	
$\triangleq$	专用等号	symbol for special use	$a\oplus b\triangleq\max\{a,b\}$；$a\otimes b\triangleq a+b$ 表示极大代数中加法和乘法的定义	

数学符号表

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Tayl	尾部	tail	$f=J^kf+\text{Tayl } f$,式中 J^kf 是 f 在原点的泰勒展开式中保留 k 阶以下的多项式部分,截去的部分称为 f 的尾部,记为 Tayl f	
#()	袋	bag	$\#(x,B)$表示元素 x 在袋 B 中出现的次数. $\forall x\in B$, $0\leqslant\#(x,B)\leqslant 1$ 时,袋 B 就蜕化为普通集合 B	
$W(s)$	传递函数	transfer function	$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{Q(s)}{P(s)}$,式中 $Y(s)$,$U(s)$分别为输出量和输入量的拉普拉斯变换式,$Q(s)$,$P(s)$分别为$W(s)$的分子、分母多项式	
cond	条件数	condition number	称 $\text{cond } G=\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}\geqslant 1$ 为矩阵 G 的条件数,cond G越大,矩阵 G 越趋于欠秩	
diag	对角元	diagonal element	设 $S=\text{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_p)$,则称 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,p)$为对角矩阵 S 的对角元	
blockdiag	块对角元	block diagonal element	设 $X=\text{block diag}(\Delta_1,\cdots,\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_2,\cdots,\Delta_r,\cdots,\Delta_r)$,其中 Δ_i 为 k_i 阶方阵,则称 Δ_i 为块对角矩阵的块对角元	
arg(・)	相角	phase angle	$\arg(g(\text{j}\omega))$称为相角,其中$g(\text{j}\omega)$为 $m\times n$ 阶复阵函数,j 为虚数单位	
conv(・)	凸包	convex hull	$\text{conv } f(\text{j}\omega,\Gamma)=\text{conv } f(\text{j}\omega,\Gamma_0)$,式中 conv(・)表示 $\mathbb{R}^2$ 上的凸包,$\omega\in\mathbb{R}$,j 为虚数单位,$\Gamma_0\triangleq\{\nu\mid\nu_i=0,1;\ i=1,2,\cdots,m\}$为 $\nu_i(i=1,2,\cdots,m)$中的多仿射函数	
$\asymp$	等序关系	equals order relation	若 z_1,z_2 为两个非零复数,且$\frac{z_2}{z_1}\neq 0$,则记为 $z_1\asymp z_2$	
ess sup	本质上确界	essential supremum	$\underset{\omega}{\text{ess sup}}\,\sigma(G(\text{j}\omega))$表示 $m\times n$ 阶复矩阵值函数$G(\text{j}\omega)$的本质上确界,即除去 ω 的一个零测子集后的上确界	
s. t	约束条件	constraint condition	$\max f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$, $\text{s. t}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & (i=1,2,\cdots,m),\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n),\end{cases}\quad(*)$. 目标函数 max f 必须满足(*)中的条件	
$\overset{L}{>}$	字典序	lexicographicall order	$V\overset{L}{>}0$ 表示字典式为正的;$V\overset{L}{<}0$ 表示字典式为负的;Lex min 表示字典式最小	$V=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$是 n 维向量空间的向量
$\underset{\sim}{\delta}_B$	下特征数	low characteristic number	$\underset{\sim}{\delta}_B=\begin{cases}\max\left\{-\frac{\lambda_i}{\lambda_j^*}\,\middle\vert\,\lambda_j^*<0\right\} & (\exists\ \lambda_j^*<0),\\ -\infty & (\bar{\exists}\ \lambda_j^*<0),\end{cases}$ $\underset{\sim}{\delta}_B$ 称为基 B 的下特征数 λ_j,λ_j^* 为检验数	
$\bar{\delta}_B$	上特征数	above characteristic number	$\bar{\delta}_B=\begin{cases}\min\left\{-\frac{\lambda_i}{\lambda_j^*}\mid\lambda_j^*>0\right\}, & \exists\ \lambda_j^*>0,\\ +\infty, & \bar{\exists}\ \lambda_j^*>0,\end{cases}$ $\bar{\delta}_B$ 称为基 B 的上特征数,λ_i,λ_j^* 为检验数	
$\ggg$	等级标志关系	relation of order mark	$p_i\ggg p_j$ 表示在一个单目标函数 $\min f=p_1f_1+p_2f_2+\cdots+p_lf_l$ 中,$p_1,p_2,\cdots,p_l$ 为等级标志关系	
$P(\cdot)$	策略	policy	P 表示最优策略. $P_{k,n}^*(x_k)$表示最优子策略,是初始状态为 x_k 的后部子过程所有子策略中最优者	
opt	最优值	optimum value	$\text{opt}\,v_{k,n}[x_k,P_{k,n}(x_k)]$表示指标函数 $v_{k,n}$的最优值,$P_{k,n}$表示子策略是从第 k 段开始到终点过程的策略	
pos	正线性组合集	set of positive linear combination	$\text{pos}A=\{\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}^m,\ \alpha=\sum_{j=1}^{n}\beta_jA_j,\ \beta_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n\}$ 表示由矩阵 A 的各列的正线性组合组成的集合	
epi	上图	epigraph	$\text{epi } f=\{(x,\alpha)\mid\alpha\geqslant f(x)\}$表示函数 $f(x)(x\in\mathbb{R}^n)$的上图,若给定 epi f,则 $f(x)=\min\{x\mid(x,\alpha)\in\text{epi } f\}$	
/	排队记法	queueing notation	$X/Y/Z/C$ 为排队记法,其中 X,Y,Z,C 的意义依次为:1. 相继到达间隔时间的分布;2. 服务时间的分布;3. 服务台的数目;4. 允许的顾客容量	

符号	中文名称	英文名称	意义或举例	备注
Ls	队长期望值	team length expected value	$Ls=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$表示标准的 $M/M/1$ 模型的队长期望值，ρ 为服务强度，即服务台平均利用率	
Lq	队列长期望值	queueing length expected value	$Lq=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n=Ls-P=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda}$表示标准的 $M/M/1$ 模型的队列长期望值，ρ 为服务强度，即服务台平均利用率	
Ws	逗留时间期望值	expected value of staying time	$Ws=E[W]=\frac{1}{\mu-\lambda}$表示标准的 $M/M/1$ 模型的逗留时间期望值	
Wq	等待时间期望值	expected value of waiting time	$Wq=Ws-\frac{1}{\mu}=\frac{\rho}{\mu-\lambda}$表示标准的 $M/M/1$ 模型的等待时间期望值	
G	对策	games	对策 $G=(S_1,S_2,A)$，其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$表示局中人 I 的纯策略集合，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$表示局中人 Ⅱ 的纯策略集合. $A=(a_{ij})_{m\times n}$表示支付(赢得)矩阵	
V_G	对策值	games value	$V_G=\max_i\min_j a_{ij}=\min_j\max_i a_{ij}$称为对策 $G=\{S_1,S_2,A\}$ 的值	
Te	噪声温度	noise temperature	$Te=\frac{N}{kB}(k)$，其中 N 为噪声功率，k 为玻耳兹曼常数，B 为频带宽度(Hz)	
γ	传播常数	propagation constant	$\gamma=\alpha+j\beta=\sqrt{Z_1r_1}$，其中 α 表示衰减常数(Np/m，dB/M)，β 表示相移常数(rad/m)	
Lt	传输损耗	loss of transmission	$Lt=32.45+20\lg f+20\lg d+A-G_t-G_r$，式中 f 为工作频率(MHz)，d 为传输距离(km)，A 为电路衰减(dB)，G_t，G_r 分别为发射天线与接收天线的增益(dB)	
C	信道容量	channel capacity	$C=\max_{P(x)}I(x;y)$，其中 $P(x)$为输入符号概率(或概率密度)，$I(x;y)$为互信息量	
$R(D^*)$	信源率失真函数	source rate distortional function	$R(D^*)=\min\{I(u;v)\}$，$P(v_j\|u_j)\in B_D$，其中 D^* 为信源的允许平均失真度，$I(u;v)$为平均互信息量	
I_A	自信息量	self-information	$I_A=\log\frac{1}{P(A)}=-\log P(A)$，式中 $P(A)$为随机事件 A 发生的概率，I_A 表示 A 的自信息量	
$I(x;y)$	互信息量	mutual information	$I(x;y)=\log\frac{P(x\|y)}{P(y)}$，式中 y 表示收到的消息，x 表示收到消息的某事件的信息量	
$I(X;Y)$	平均互信息量	average mutual information	$I(X;Y)=H(X)-H(X\|Y)$，其中 $H(X)$代表接收到输出符号集 Y 以前关于输入符号集 X 的平均不确定性；$H(X\|Y)$代表接收到输出符号集 Y 后关于输入符号集 X 的平均不确定性	
$\oplus$	逻辑导式运算符号	operational symbol of logical derived rule	$D(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i\oplus\beta_i)$，式中 α_i，β_j 表示长度为 n 的二进制序列码元，$\alpha_i\oplus\beta_i$ 是二进制码元相加. $D(\alpha,\beta)$表示 α，β 对应位置上码元取值不同的个数	
$\circledast$	周期卷积	periodic convolution	$\tilde{x}_1(n)\circledast\tilde{x}_2(n)$，式中 $\tilde{x}_1(n)$和$\tilde{x}_2(n)$表示周期长度	
Ⓝ	循环卷积	circular convolution	$\tilde{x}_1(n)$Ⓝ$\tilde{x}_2(n)$	

撰　稿　王怀安　刘宝康　杨子胥　杨德平
段　方　郝拉娣　阎崇正
审　定　李志深　陈惠津　阎崇正

条目笔画索引

说明：1. 该索引收录了本卷正文中给出释文的全部条目及其参见条目，提供读者按汉字笔画方式检索使用。

2. 以汉字起首的条目标题按第一字的笔画由少到多的顺序排列，若笔画数相同，则按一（横）、丨（竖）、丿（撇）、丶（点）、乛（折）五种笔形顺序排列，其中，㇀（提）归为一（横），亅（竖钩）归为丨（竖），㇏（捺）归为丶（点），各种笔形带钩或曲折的笔画（除竖钩“亅”外）归为乛（折）。第一个字相同的，则按第二个字的笔画数和起笔笔形的顺序排列，依次类推。

3. 凡第一个字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在汉字起首条目标题的最后。以西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的笔画顺序排列。

一　画

二　画

三　画

四　画

五 画

七 画

八　画

八 画

九　画

十　画

十 一 画

十二画

十 二 画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 六 画

十 七 画

十 八 画

十　九　画

二　十　一　画

其　他

条目笔画索引

条目音序索引

说明：1. 该索引收录了本卷正文中给出释文的全部条目及其参见条目，提供读者按汉语拼音方式检索使用。

2. 以汉字起首的条目标题按第一字的汉语拼音字母顺序排列，若第一字的声母、韵母相同，则按声调的阴平、阳平、上声、去声顺序排列。第一个字相同的，则按第二个字的汉语拼音字母顺序排列，多音字按不同的拼音字母顺序排列，依此类推。

3. 凡第一个字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在汉字起首条目标题的最后。以西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的拼音字母顺序排列。

A

B

C

E

F

G

H

J

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

其　他

条目音序索引

条目西文索引

说明：1. 该索引收录了本卷正文中给出西文标题的全部条目，提供读者按西文检索使用.

2. 条目标题按起首西文字母的顺序排列(同一字母先大写，后小写)；条目标题的西文缩写，按一个词排列。其他文种亦按此原则编排。

3. 凡以数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在条目西文索引的最后。数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。

4. 若条目标题起首的字母、符号、数字相同时，则按第二个字母等的顺序排列，余此类推。

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

X

Y

Z

其　他

中外人名译名对照表

A

阿贝尔(Abel,N. H.)
阿达马(Hadamard,J. (-S.))
阿达马(Hadamard,J.)
阿代尔(Adele)
阿蒂亚(Atiyah,M. F.)
阿尔贝特(Albert,A. A.)
阿尔贝特(Albert,M. H.)
阿尔汉盖路斯基(Архангельский,А.)
阿尔门翠尼(Armendriaz,E. P.)
阿尔托(Alltop,W. O.)
阿尔泽拉(Arzelà,C.)
阿江(Adjan,S. I.)
阿龙扎扬(Aronszajn,N.)
阿密苏(Amitsur,S. A.)
阿姆格伦(Almgren,F. J.)
阿诺尔德(Арнольд,В. И.)
阿佩尔(Appell,L. P. (É.))
阿斯科利(Ascoli,G.)
阿特金(Atkin,A. O. L.)
阿廷(Artin,E.)
埃果里切夫(Егорычев,Г. П.)
埃拉托斯特尼(Eratosthenes)
埃雷斯曼(Ehresmann,C.)
埃伦托伊希特(Ehrenfeucht,A.)
埃斯特曼(Estermann,T.)
艾伦伯格(Eilenberg,S.)
艾伦多弗(Allendoerfer,C. B.)
艾斯贝尔(Isbel,J. R.)
艾希勒(Eichler,M.)
爱尔特希(Erdös,P.)
爱伦法斯特(van. Aardenne-Ehrenfest,T.)
爱因斯坦(Einstein,A.)
安达拉胡特(Andalafte ,E. Z.)
安托万(Antoin,L. A.)
奥恩斯坦(Ornstein,A.)
奥尔(Ore,O.)
奥平(Aubin,T.)
奥山(Okuyama,A.)
奥斯兰德(Auslander,M.)
奥斯兰德尔(Auslander,L.)
奥斯曼(Osserman,R.)
奥斯乔夫斯基(Ostrowski,A. M.)
奥斯特洛夫斯基(Ostrowski,A. M.)
奥索夫茨克(Osofsky,B. L.)
奥西塔因(Oystaeyen,F. Van)

B

巴赫曼(Bachmann,P. G. H.)
巴拉苏不拉马连(Balasubramanian,R.)
巴斯(Bass,H.)
巴特尔(Bartle,R. G.)
巴歇(Bachet de Méziriac,C. G.)
白正国(Bai Zhengguo)
柏拉图(Plato)
邦别里(Bombieri,E.)
邦皮亚尼(Bompiani,E.)
鲍姆斯兰格(Baumslag,G.)
贝蒂(Betti,E.)
贝尔(Baer,R.)
贝尔(Baire,R. L.)
贝尔瓦尔德(Berwald,L.)
贝克(Baker,A.)
贝克尔(Becker,E.)
贝伦斯(Behrens,E. A.)
贝斯特尔(Berstel,J.)
贝特朗(Bertrand,J. L. F.)
本德(Bender,H. A.)
本桥洋一(Motohashi,Y.)
比尔(Baer,R. W.)
比兰(Pillai,S. S.)
比曼(Berman,A.)
比约克(Björk,J. E.)
彼得森(Peterson,D. H.)
彼得松(Peterson,H.)
彼特里奇(Petrich,M.)
毕达哥拉斯(Pythagoras)
毕尔德(Byrd,K. A.)
毕肖普(Bishop,R.)
宾(Bing,R. H.)
波戈列洛夫(Погорелов,А. В.)
波基斯(Borges,C. R.)
波莱尔(Borel,(F. -É. -J. -)É.)
波利亚(Polya,G.)
波罗马勒夫(Пономарев,А. В.)
波瑞泽尔(Preiser,Udo.)
波特曼(Boardman,J. M.)
玻色(Bose,R. C.)
伯德(Byrd,R.)
伯恩赛德(Burnside,W.)
伯恩施坦(Bernstein,S.)

伯恩斯坦(Bernstein,I. N.)
伯哥达诺维奇(Bogdanovic,S.)
伯吉斯(Burgess,D. A.)
伯克霍夫(Birkhoff,G.)
伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)
伯吕登(Brudern,J.)
伯诺(Bernau,S. J.)
伯奇(Birch,B. J.)
伯热(Berger,M.)
泊松(Poisson,S. -D.)
博赫纳(Bochner,S.)
博雷尔(Borel,A.)
博内(Bonnet,O.)
布尔(Boole,G.)
布尔巴基(Bourbaki,N.)
布丰(Buffon,G. -L. L. de)
布赫施塔伯(Бухштаб,А. А.)
布克斯鲍姆(Buchsbaum,D. A.)
布拉施克(Blaschke,W. J. E.)
布莱顿(Britton,J. L.)
布朗(Brown,E. H.)
布朗(Brown,A. C.)
布劳尔(Brauer,R. D.)
布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)
布利萨德(Blissard,J.)
布龙(Brun,V.)
布龙斯(Bruns,G.)
布卢门塔尔(Blumenthal,L. M.)
布鲁哈(Bruhat,F.)
布鲁克斯(Brooks,R. L.)
布鲁耶尔(Bruyere,V.)
布洛克(Block,R.)
布纳布路史(Bohnenblust,F.)
布尼亚科夫斯基(Буняковский,В. Я.)
布饶尔(Brauer,A.)
布饶尔(Brauer,R. (D.))
布饶尔迪(Brualdi,R. A.)
布若克(Bruck,R. H.)
布斯曼(Busemann,H.)

C

策梅洛(Zermelo,E. F. F.)
查伯(Chaber,J.)
查尔各(Charg,C. C.)
查尔马洛维茨(Zelmanowitz,J.)
查森浩斯(Zassenhaus,H.)
察林斯基(Zelinsky,D.)
长田(Nagata,J.)
常彦勋(Chang Yanxun)
陈邦炎(Chen Bangyan)
陈景润(Chen Ching-Jun)
陈省身(Chern Shiing-Shen)
迟宗陶(Chi Zongtao)
船山(Funayama,N.)

D

达布(Darboux,(J. -)G.)
达第(Dade,E. C.)
达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)
达文波特(Davenport,H.)
大万川弘辛(Tachikawa,H.)
逮德(Dade,E. C.)
戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)
戴克(Deicke,A.)
戴舍尔(Deshouillers,J. M.)
戴特(Date,E.)
戴维士(Davis,A. C.)
丹内斯(Dénes,J.)
丹齐克(Dantzig,G. B.)
丹伊(Day,B. J.)
岛克(Dowker,C. H.)
道格拉斯(Douglas,J.)
道格拉斯(Douglas,R.)
德·拉姆(de Rham,G. -W.)
德布莱英(de Bruijn,N. G.)
德布鲁因(de Bruijn,N. G.)
德恩(Dehn,M.)
德恩(Dehn,M. W.)
德恩(Dehn,P. M.)
德洪(Dehon,M.)
德拉柏(Dlab,V.)
德拉齐尼(Terracini,A.)
德利涅(Deligne,P.)
德洛兹德(Drozd,Yu. A.)
德穆林(Demoulin,A.)
德瑞斯(Dress,A. W. M.)
德瑞斯(Dress,F.)
狄恩(Dehn)
狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)
狄斯勤格(Dischinger,F.)
迪厄多内(Dieudonné,J.)
迪尔沃思(Dilworth,R. P.)
迪费(Diffie,W.)
迪克森(Dickson,L. E.)
迪乔吉(de Giorgi,E.)
笛卡儿(Descartes,R.)
蒂茨(Tietze,H.)
蒂奇马什(Titchmarsh,E. Ch.)
丢番图(Diophantus)
丢润(Deuring,M.)
东屋五郎(Azumaya,G.)
杜卡莫(do Carmo,M.)
杜尤斯蒂因(Duijuestijn,A. J. W.)

E

恩格尔(Engel,F.)
恩格斯(Engels,F.)
恩里奎斯(Enriques,F.)

F

法尔廷斯(Faltings,G.)
法里(Farey,J.)
法诺(Fano,G.)
樊𰻮(Ky Fan)
饭高(Fan Gao)
范・德・瓦尔登(van der Waerden,B. L.)
范・林特(van Lint,J. H.)
范德科尔普特(van der Corput,J. G.)
范德伦(van de Lune,J.)
范迪维尔(Vandiver,H. S.)
方坦(Fountain,J. B.)
菲舍尔(Fischer,B.)
菲廷(Fitting,H.)
菲托里斯(Vietoris,I.)
斐波那契(Fibonacci,L.)
斐斯特(Pfister,A.)
费伯(Faber,G.)
费德勒(Fiedler,M.)
费恩歌尔德(Feingold,D. G.)
费尔(Fell,J. M. G.)
费拉里(Ferrari,L.)
费马(Fermat,P. de)
费特(Feit,W.)
费希尔(Fisher,R. A.)
芬格尔(Fenchel,W.)
芬斯勒(Finsler,P.)
冯・道文(van Douwen,E. K.)
冯・诺伊曼(von Neumann,J.)
冯・诺伊曼(von Nenmann,H.)
佛玛乃克(Formanek,E.)
弗航肯(Vrancken,L.)
弗克逊(Fulkerson,D. R.)
弗拉梯尼(Frattini)
弗勒登塔尔(Freudenthal,H.)
弗雷德霍姆(Fredholm,(E.)I.)
弗雷内(Frenet,J. F.)
弗雷歇(Fréchet,M. -R.)
弗里德曼(Freedman,M. (H.))
弗里斯(Freese,R.)
弗林克(Frink,O.)
弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F. G.)
福克斯(Fox,R. H.)
福雷(Frey,G.)
福森(Vossen)
福特(Ford,L. R.)
傅里(Fouvry,E.)
富比尼(Fubini,G.)
富克斯(Fuchs,L.)
富勒(Fuller,K. R.)
富特文格勒(Furtwängler,P. H.)

G

伽罗瓦(Galois,E.)
盖尔范德(Гельфанд,И. М.)
盖尔芳特(Gelfand,I.)
盖尔芳特(Gelfond,A. O.)
盖尔丰德(Гельфонд,А. О.)
盖尔什果林(ГершгоринС. А.)
盖赛斯(Gasseis,W.)
盖维欧(Gaveau,B.)
高勃丽(Colbrie,D. F.)
高登(Gordon,C. M.)
高而德(Gould,H. W.)
高木贞治(Takagi,T.)
高桥(Gao Qiao)
高斯(Gauss,C. F.)
高斯(Gauss,G. F.)
戈德门特(Godement,R.)
戈莱兹(Grätzer,G.)
戈罗德(Golod)
戈洛德(Голод,Е. С.)
哥德巴赫(Goldbach,C.)
哥德尔(Gödel,K.)
哥德菲尔德(Goldfeld,D. M.)
哥尔德贝格(Geldberg,M.)
哥尔迪(Goldie,A. W.)
哥克哈尔(Gokhale,V. D.)
哥罗莫夫(Gromov,M.)
哥洛德(Golod,E. S.)
哥斯滕(Gersten,S. M.)
格拉姆(Gram,J. P.)
格拉斯曼(Grassmann,H. G.)
格朗沃尔(Gronwall,T. H.)
格雷(Gary,J. W.)
格里菲思(Griffiths,P.)
格里文克(Glivenko,V.)
格林(Green,J. A)
格鲁海基(Gruenhage,G.)
格鲁帕(Gruvpp,F.)
格罗莫夫(Gromov,M.)
格罗斯(Gross,B.)
格罗腾迪克(Grothendieck,A.)
格舒兹(Gaschütz,W.)
格思里(Guthrie,F.)
葛瑞布(Greub,W.)
葛瑞布(Greub,W. H.)
关肇直(Guan Zhaozhi)
广中平祐(Hironaka,Heisuke)
郭忠(Guo Zhong)

H

哈比卜(Habeb,J. M.)
哈伯尔(Happel,D.)
哈伯斯塔姆(Halberstam,H.)
哈代(Hardy,G. H.)
哈德威格(Hadwiger,H.)
哈恩(Hahn,H.)
哈尔通(Halton,J. H.)

哈克(Haack,J. K.)
哈肯(Haken)
哈拉里(F. Harary)
哈密顿(Hamilton,W. R.)
哈拿匿(Hanani,H.)
哈奇扬(Хачиян,Л. Г.)
哈塞(Hasse,H.)
哈特莱(Hartley,B.)
哈特曼(Hartman,P.)
哈韦(Harvey,J.)
哈韦尔(Havel,T. F.)
哈约斯(Hajos,G.)
海尔布伦(Heilbronn,H.)
海尔曼(Hellman,M. E.)
海森伯(Heisenberg,W. K.)
豪斯多夫(Hausdorff,F.)
豪韦尔(Howell,E. C.)
赫尔德(Hölder,O. L.)
赫尔司亭(Herstein,I. N)
赫克(Hecke,E.)
赫莱维茨(Hurewicz,W.)
赫兰(Holland,W. C.)
赫斯考维茨(Hershkowitz,D.)
赫维茨(Hurewicz,W.)
赫希施尔德(Hochschild,G.)
赫胥黎(Huxley,M. N.)
黑尔(Hell,P.)
黑利(Helly,E.)
亨金(Henkin,L.)
亨廷顿(Huntington,E. V.)
亨泽尔(Hensel,K)
候波科劳(Hopcroft,J.)
胡恩(Huynh,D.)
胡尔维茨(Hurwitz,A.)
胡佩特(Huppert,B.)
华莱士(Wallace,A. D.)
华林(Waring,E.)
华罗庚(Hua Loo-Keng)
怀伯恩(Whyburn,G. T.)
怀尔斯(Wiles,A.)
怀特(Wente,H. C.)
怀特海(Whitehead,J. H. C.)
怀特海(Whitehead,A. N.)
黄德华(Huang Dehua)
惠特尼(Whitney,H.)
霍尔(Hall,M. Jr.)
霍尔(Hall,P)
霍尔(Hall,T. E.)
霍尔(Helmer,O.)
霍尔珀林(Halperin,I.)
霍夫曼(Hoffman,A. J.)
霍夫曼(Hofmann,K. H.)
霍赫希尔德(Hochschild,G.)
霍昆格姆(Hocquenghem,A.)
霍普夫(Hopf,H.)
霍普金(Hopkins,C.)
霍奇(Hodge,W. V. D.)
霍韦(Howie,J. M.)

J

基尔霍夫(Kirchhoff,G. R.)
基灵(Killing,W. K. J.)
基特韦尔(Keedwell,A. D.)
吉布斯(Gibbs,J. W.)
吉尔曼(Gillman,L.)
吉尔斯(Gierz,G.)
吉洪诺夫(Тихонов,A. H.)
吉塞克(Gieseker)
加伯(Gabber,O.)
加布里埃尔(Gabriel,P.)
嘉当(Cartan,É. (-J.))
嘉当(Cartan,H.)
嘉瑞特(Garret)
贾库比(Jakubik,J.)
贾宪(Jia Xian)
见川宏(Hiroshi,M.)
江尻(Ejirt,N.)
杰恩森(Jonsson,B.)
杰里逊(Jerison,M.)
杰伦(Jerrum,M.)
介尔斯特(Gersten,S. M.)
金勃莱(Kimberley,M. E.)
井关清志(Iseki,K.)
久野升司(Shoji kyuno)

K

卡茨(Kac,M.)
卡茨(Kac,V.)
卡尔达诺(Cardano,G.)
卡尔钦哥(Kharchenko,V. K.)
卡弗林(Caflin,P. A.)
卡拉比(Calabi, E.)
卡拉楚巴(Karacuba,A. A.)
卡拉西奥多里(Carathéodory,C.)
卡里茨(Carlitz,L.)
卡马卡(Karmarkar,N.)
卡米罗(Camillo,V. P.)
卡普兰(Kaplan,S.)
卡普兰斯基(Kaplansky,I.)
卡切托夫(Катетов,M.)
卡若比(Karoubi,M.)
卡什(Kasch,F.)
卡斯泰尔诺沃(Castelnuovo,G.)
卡妥那(Katona,G. O. H.)
卡芷当(Kazhdan)
喀赫勒(Koehler,A.)
凯伐勒(Kervaire,M.)
凯格尔(Kegel,O. H.)
凯莱(Cayley,A.)
凯莱(Kelley,J. L.)

凯利(Kelly,G. M.)
凯洛格(Kellogg,R. B.)
凯斯勒尔(Keisler,H. J.)
坎(Kan,D. M.)
坎农(Cannon,J.)
坎托罗维奇(Канторович,Л. В.)
康莱德(Conrad,P.)
康利(Conrey,J. B.)
康内利(Connelly,R.)
康庆德(Kang Qingde)
康托尔(Cantor,G. (F. P.))
考夫曼(Kauffmen)
考克斯特(Coxeter,H. S. M.)
柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А. Н.)
柯克曼(Kirkman,T. P.)
柯莫瑞(Gomory,R.)
柯尼希(König,D.)
柯西(Cauchy,A. -L.)
柯召(Ke Zhao)
科恩(Cohen,I. S.)
科恩(Cohen,M.)
科恩弗森(Cohn-Vossen,S.)
科里比亚(Kolibiar,M.)
科罗博夫(Коробов,Н. М.)
科斯居尔(Koszul,J. L.)
科斯滕特(Kostant)
科真斯(Cozzens,J. H.)
克勃(Kirby,M.)
克德(Köthe,G.)
克拉默(Cramer,H.)
克莱伍利(Crawley,P.)
克莱因(Klein,(C.)F.)
克莱因菲尔德(Kleinfeld,E.)
克朗(Krahn,E.)
克勒(Kähler,E.)
克雷内尔(kleiner,M. M.)
克里福德(Clifford,A. H.)
克里斯托费尔(Christoffel,E. B.)
克利福德(Clifford,A. H.)
克利福德(Clifford,W. K.)
克林格贝格(Klingerberg,W.)
克鲁布什(Knebusch,M.)
克鲁尔(Krull,W.)
克鲁斯卡尔(Kruskal,J. B.)
克罗布捷克(Kloboucek,J)
克罗夫顿(Crofton,M. W.)
克罗内克(Kronecker,L.)
克洛斯特曼(Kloosterman,H. D.)
克纳塞尔(Kneser,H.)
克纳斯特(Knaster,B.)
克瑞德(Creede,G.)
克瑞彭(Crippen,G. M.)
肯宁汉(Cunningham,R. S.)
肯普(Kempe,A. B.)
肯普勒(Kempner,A. J.)
库比利斯(Kubilius,J. P.)
库比那(Kubina,J. M.)
库恩(Kuhn,P.)
库克(Cook,S. A.)
库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)
库朗(Courant,R.)
库洛什(Kurosh,A.)
库洛什(Курош,А. Г)
库默尔(Kummer,E. E.)
库因(Quinn,F)
奎林(Quillen,D. G.)
奎伦(Quillen,D. G.)

L

拉德马赫(Rademacher,H.)
拉多(Radó,R.)
拉多(Radó,T.)
拉格朗日(Lagrange,J. -L.)
拉马努金(Ramanujan,S. A.)
拉梅(Lamé,G.)
拉姆齐(Ramsey,F. P.)
拉普拉斯(Laplace,P. -S.)
拉斯科(Lasker,L.)
拉肖夫(Lashof,R. K.)
莱彼斯基(Lepowsky,J.)
莱布尼茨(Leibniz,G. W.)
莱夫谢茨(Lefschetz,S.)
莱里(Reilly,N. R.)
莱里蒙(Lallement,G.)
莱默(Lehmer,D. H.)
莱纳(Lehner. J.)
莱松(Larson,R. G.)
莱维(Levy,L. S.)
莱云森(Levinson,N.)
赖德迈斯特(Reidemeister,K. W. F.)
兰(Lang,S.)
兰茨贝格(Landsberg,G.)
兰道(Landau,E. G. H.)
兰金(Rankin,A. R.)
兰姆(Lam,C. W. H.)
朗兰兹(Langlands,R.)
劳德(Lloyd,J)
劳伦斯(Lawrence,J.)
劳瑟尔(Lothaire,M.)
劳森(Lawson,J. D.)
勒贝格(Lebesgue,H. L.)
勒雷(Leray,J.)
勒尼斯(Lennes,N. J.)
勒让德(Legendre,A. -M.)
雷・乔德里(Ray-Chaudhuri,D. K.)
雷马克(Remak,R.)
雷尼(Renyi,A.)
雷诺(Rinow,W.)
雷斯提沃(Restivo,A.)
楞特(Rund,H.)

黎曼(Riemann,(G. F.)B.)
李(Lie,S.)
李(Lie,M. S.)
李安民(Li Anmin)
李普希茨(Lipschitz,R. (O. S.))
李特尔伍德(Littlewood,J. E.)
李伟才(Li,P.)
李亚普诺夫(Ляпунов,А. М.)
里卡特(Rickart,C.)
里可里西(Lickorish)
里可里西(Lickorish,W. B.)
里克特(Rickert,N. W.)
里诺(Rinow,W.)
里奇(Ricci,C. G.)
里塞尔(Riesel,H.)
里斯(Rees,D.)
里斯(Riesz,F. (F.))
里廷(Reiten,I.)
里歇特(Richert,H. E.)
利昂(Leon,J. S.)
利奥纳特(Leonard)
利什内罗维奇(Lichnérowicz,A.)
利斯廷(Listing,J. B.)
利雅平(Ляпин,Е. С.)
列维(Levi,E. E.)
列维(Levi,F.)
列维-齐维塔(Levi-Civita,T.)
列文(Levine,H.)
林德勒夫(Lindelöf,E. L.)
林德曼(Lindemann,(C. L.)F. von)
林德纳(Lindner,C. C.)
林登(Lyndon,R. C.)
林敦(Lyndon,R. C.)
林格尔(Ringel,C. M.)
林尼克(Линник,Ю. В.)
林文茨基(Levitzki,J.)
林文茨基(Levitzki,N.)
刘绍学(Liu Shaoxue)
刘维尔(Liouville,J.)
刘彦佩(Liu Yanpei)
柳伯谦(Liu Boqian)
鲁宾孙(Robinson,A.)
鲁宾孙(Robinson,D. F.)
鲁宾孙(Robinson,D. J. S.)
鲁布甘地(Rubugunday,R. K.)
鲁菲尼(Ruffini,P.)
鲁金(Лузин,Н. Н.)
鲁米尼(Rumely,R.)
鲁特(Rutter,A. Jr.)
陆家羲(Lu Jiaxi)
陆遗留(Lu Yiliu)
路丁(Rudin,M.)
吕卡(Lucas,F. -É. -A.)
吕克(Luecker,J.)
吕里尔(Lhuilier,S. J.)
吕洛特(Lüroth,P.)
罗赫(Roch,G.)
罗伦岑(Lorenzen,P.)
罗马诺夫斯基(Romanovsky,V.)
罗姆(Room,T. G.)
罗萨(Rosa,A.)
罗塞(Rosser,J. B.)
罗斯蒂沃(Restivo,A.)
罗特(Roth,K. F.)
罗特诺耶(Reutenauer,C.)
罗文(Rowen,R. L.)
罗伊特尔(Roiter,A. V.)
罗曾贝格(Rozenberg,G.)
洛赫(Rauch,H. E.)
洛伦茨(Lorentz,G. G.)

M

马采(Mazet,E.)
马蒂厄(Mathieu,É. L.)
马尔采夫(Мальцев,А. И.)
马尔茨夫(Malcev)
马尔可夫(Марков,А. А.)
马克思·邓(MaxDehn)
马库斯(Marcus,M.)
马勒(Mahler,K.)
马雷斯(Mares,E. A.)
马林(Mullin,R. C.)
马秋莫托(Matsumoto,H.)
马施克(Maschke,H.)
马特利斯(Matlis,E.)
马廷达(Martindale,W. S.)
马廷尼兹(Martinez,J.)
马西(Massey,W. S.)
马祖尔克维奇(Mazurkiewicz,S.)
玛尔格朗日(Malgrange,B.)
玛格纽斯(Magnus,W.)
玛瑟(Mather,J. N.)
迈尔斯(Myers,S. B.)
迈克尔(Michael ,E.)
麦尔克福尔生(Markvorsen,S.)
麦基恩(Mckean,H. P.)
麦凯(Mackey,G. W.)
麦克奥内(McAuley,L. F.)
麦克莱恩(Maclane,D.)
麦克莱恩(MacLane,S.)
麦克利(McCurley,K. S.)
麦克米伦(McMillan,D. R.)
麦克纳(McKenna,K.)
麦克威廉斯(MacWilliams,F. J.)
麦克夏(Mcshane,E. J.)
麦斯脱(Mostert,P. S.)
曼(Mann,H. B.)
曼戈尔特(Mangoldt,H. C. F. von)
芒福德(Mumford,D. B.)
毛瑞尔-嘉当(Maurer-Cartan)

梅里斯(Merris,R.)
梅农(Menon,P. K.)
梅斯尼埃(Meusnier,J. B. M.)
门德尔森(Mendelsohn,N. S.)
门杰(Menger,K.)
蒙哥马利(Montgomery,H. L.)
蒙哥马利(Montgomery,S.)
蒙日(Monge,G.)
米尔诺(Milnor,J. W.)
米尔诺(Milnor,T. K.)
米尔诺(Milnor,W. J.)
米尔斯(Mills,R. L.)
米尔斯(Mills,W. H.)
米勒尔(Miller,G. A.)
闵科夫斯基(Minkowski,H.)
闵嗣鹤(Min Sihe)
缪勒(Müller,B. J.)
缪勒(Müller,W.)
莫尔斯(Morse,H. M.)
莫尔斯(Morse,M.)
莫肯济(Mckenzie,R. N.)
莫锐塔(Morita)
莫斯托夫(Mostow,H.)
莫伊斯(Moise,E.E.)
莫佐其(Mozzochi,C. J.)
墨尔洛各(Morlog,H.)
默比乌斯(Möbius,A. F.)
木村(Kimura,N.)
穆迪(Moody,R.)
穆恩(Munn,W. D.)
穆尔(Moore,E. H.)
穆尔(Moore,J. C.)
穆尔(Moore,R. L.)
慕克赫帕沙亚(Mukhopadhyaya)

N

那姆派里(Naimpally,S. A.)
纳赫宾(Nachbin,L.)
纳什(Nash,J. F.)
纳斯塔西库(Nastasescu,C.)
乃米茨基(Niemytzki,Y.)
奈斯比特(Nesbitt,C. J.)
南布里帕德(Nambooripad,K. S. S.)
内尔(Nair,K. R.)
内海(Utumi,Y.)
内山三郎(Uchiyama,S.)
内维科夫(Novikov,P. S.)
尼柯尔孙(Nicholson,W. K.)
尼伦伯格(Nirenberg,L.)
尼文(Niven,I. M.)
牛顿(Newton,I.)
纽曼(Neumann,B. H.)
纽曼(Neumann,M.)
纽曼(Newman,M. H. A.)
诺布萨窪(Nobusawa,N.)
诺布赛尔(Neubüser,J.)
诺茨考特(Northcott,D. G.)
诺塞伯第德-史密斯(Rosseblade-Smith)
诺特(Noether,(A.)E.)
诺特(Noether,E.)
诺特(Noether,M.)
诺瓦克(Novak,J.)

O

欧几里得(Euclid)
欧拉(Euler,L)
欧相斯基(Olshanskii,A. J.)

P

帕帕克里亚可帕罗史(Papakyriakopoulos,C. D.)
帕斯卡(Pascal,B.)
帕斯曼(Passman,D. S.)
帕斯廷(Pastijn,L.)
帕特尔(Parter,S. V.)
派克(Parker,E. T.)
派瑞克(Pareek,C. H.)
潘承洞(Pan Chengdong)
庞加莱(Poincaré, H.)
庞加莱(Poincaré, (J.-)H.)
庞特里亚金(Понтрягин,Л. С.)
逄明贤(Pang Minxian)
培根(Bacon,R.)
沛德迈耐罕(Padmanabhan,R.)
佩利(Paley,R. E. A. C.)
佩林(Perrin,D.)
佩龙(Perron,O.)
佩奇(Page,A.)
佩锐庚(Pareigis,B.)
佩特森(Petersen,J.)
佩亚诺(Peano,G.)
彭联刚(Peng Liangang)
彭罗斯(Penrose,R.)
皮尔斯(Peirce,C. S.)
婆什迦罗第二(Bhāskara, Ⅱ)
浦达克(Ptak,V.)
普拉哈尔(Prachar,K. A. T.)
普雷斯顿(Preston,G. B.)
普吕费尔(Prüfer,H.)
普吕克(Plücker,J.)

Q

齐格(Cheeger,J.)
齐曼(Zeeman,E. C.)
浅野启三(Asano,K.)
欠伯(Kuiper,N. H.)
乔拉(Chowla,S.)
乔姆斯基(Chomsky,N.)
乔依(Choi,H. I.)
切比雪夫(Чебышев,П. Л.)
切尔尼科夫(Ĉernikov,S. N.)

切赫(Čech,E.)
琼森(Jonsson,B.)
琼斯(Jones,F. B.)
琼斯(Jones,V. F. R.)
琼斯-韦吞(Jones-Witten)
丘成桐(Yau Shing-Tung)
邱达可夫(Чудаков,Н. Г.)
屈尔沙克(Kürschák,J.)

R

热尔曼(Germain,S.)
芮兹米斯洛夫(Razmyslov,Y. P.)
瑞拜特(Ribet,K.)
瑞得(Read,R. C.)
瑞特曼(Riedtmann,C.)
若尔当(Jordan,P.)
若尔当(Jordan,C.)
若尔当(Jordan,M. E. C.)

S

撒缪尔(Samuel)
萨德(Sard,A.)
萨克斯(Saks,S.)
塞德(Ceder,J.)
塞尔(Serre J. P.)
塞尔伯格(Selberg,A.)
塞莫(Selmer)
赛费特(Seifert,H. K. I.)
桑纳(Sannia)
桑普森(Sampson,J. H.)
桑塔洛(Santaló,L. A.)
瑟斯顿(Thurston,W. P.)
森田纪一(Morita,K.)
森重文(Mori,S.)
沙发列维奇(Shafarevich)
沙夫里斯(Schönflies,A.)
沙欧尔(Samuel,P.)
沙通(Satō,I.)
山度米尔斯基(Sandomierski)
山田深雪(Yamada,M.)
邵嘉裕(Shao Jiayu)
邵剑夫锐(Sorgenfrey,R. H.)
沈(Sen,M. K.)
施恩伯格(Schoenberg,I. J.)
施恩费尔德(Schoenfeld,L.)
施拉夫里(Schläfli,M.)
施赖埃尔(Schreier,O.)
施罗德(Schröder,F. W. K. E.)
施米德(Schmid,P.)
施米特(Шмирт,О. Ю.)
施密特(Schmidt,E.)
施密特(Schmidt,J.)
施密特(Schmidt,O.)
施奈德(Schneider,T.)
施耐德(Schneider,H.)
施尼雷尔曼(Шнирельман,Л. Г.)
施佩纳(Sperner,E.)
施泰纳(Steiner,J.)
施泰尼茨(Steinitz,E.)
什瓦库麦(Shivakumar,P. N.)
石辉然(Shi Huiran)
史密斯(Smith,C. A. B.)
史密斯(Smith,H. L.)
史密斯(Smith,R. L.)
史密特(Schmidt,E.)
史太令史(Stallings,J. R.)
史梯福(Stiefel,H.)
史汀生(Stinson,D. R.)
史维德勒(Sweedler,M. E.)
舒尔(Schur,I.)
舒尔(Schur,J.)
舒曾贝格(Schützenberger,M. P.)
司督克(Stoker,J.)
思罗尔(Thrall,R. M.)
斯巴兹(Späth,H.)
斯捷潘诺夫(Степанов,С. А.)
斯科特(Scott,D. S.)
斯科特(Scott,W. R.)
斯克雅列柯(Скляренко,Е. Г.)
斯库拉(Skula,L.)
斯马尔(Small,L.)
斯梅尔(Smale,S.)
斯米尔诺夫(Смирнов,Ю. М.)
斯潘塞(Spencer,D. C.)
斯普拉格(Sprague,R.)
斯塔尔克(Stark,H. M.)
斯特恩(Stern,G.)
斯特拉克(Stralka,A.)
斯特雷德(Strade,H.)
斯廷罗德(Steenrod,N. E.)
斯通(Stone,A. H.)
斯通(Stone,M. H.)
斯托克(Stock,J.)
斯托拉斯基(Stolarsky,K. B.)
斯托宁(Stallings,J. R.)
斯万(Swan,R. G.)
斯文耐尔顿-代尔(Swinnerton-Dyer)
苏步青(Su Bu-chin)
苏士凯维奇(Suskevic,A.)
苏斯林(Суслин,М. Я.)
苏特斯(Shutters,W.)
孙理察(Schoen,R.)
孙玉祥(Sun Yuxiang)
索金(Sorkin,Ju. I.)
索罗多夫尼科夫(Solodovnikov,A. S.)

T

塔丁格(Trudinger,N. S.)
塔尔金(Tarjan,R.)
塔尔斯基(Tarski,A.)

塔里(Tarry,G.)
塔特(Tutte,W. T.)
台比阿特(Debiard,A.)
泰尔林克(Teirlink,L.)
泰特(Tait,P. G.)
汤姆森(Thomson,G.)
汤普森(Thompson,J. G.)
汤普森(Thompson,R. C.)
唐纳森(Donaldson,S.)
陶贝尔(Tauber)
特艾德曼(Tijdeman,R.)
特莱谋(Tremaux)
特里尔(te Riele,H. J. J.)
特普利茨(Toeplitz,O.)
藤本(Teng Ben)
藤以纪(Teng Yiji)
田刚(Tian Gang)
田中昭太郎(Shotaro Tanaka)
佟文廷(Tong Wenting)
图埃(Thue. A.)
图基(Tukey,J. W.)
图兰(Turán,P.)
图马基(Tumarkin,L. A.)
托波诺戈夫(Toponogov,V. A.)
托德(Todd,J. A.)
托马斯(Thomas,E.)
托姆(Thom,R.)

W

瓦尔菲施(Walfisz,A.)
瓦尔加(Varga,R. S.)
瓦格纳(Wagner,W.)
瓦格涅(Vagner,V. V.)
瓦拉大拉雅(Varadarajan,K.)
瓦莱・普桑(vallée-Poussin,C. de la)
瓦什标什(Waschbüsch,J.)
瓦特斯(Watters,J. F.)
外尔(Weyl,(C. H.)H.)
外尔(Weyl,H.)
万哲先(Wan Zhexian)
汪锡加(Wang Xijia)
王霭民(Wang Aimin)
王湘浩(Wang Xianghao)
王元(Wang Yuan)
旺策尔(Wantzel,P. -L.)
威尔莫(Willmore,T. J.)
威尔森(Wilson,R. L.)
威尔森(Wilson,R. M.)
威尔森(Wilson,R. W.)
威尔森(Wilson,W. A.)
威尔辛斯基(Wilczynski,E. J.)
威弗瑞奇(Wieferich,A.)
韦伯(Weber,H.)
韦德伯恩(Wedderburn,J. H. M)
韦罗内塞(Veronese,G.)
韦洛(Wille,R.)
韦斯宝尔(Wisbauer,R.)
韦吞(Witten,E.)
韦伊(Weil,A.)
维布伦(Veblen,O.)
维贾伊拉卡文(Vijayraghaven,T.)
维坚尼索夫(Веденисов,Н. Б.)
维津(Vizing,V. G.)
维拉玛约(Villamayor,O. E.)
维兰特(Wielandt,H_0.)
维兰特(Wielant,H.)
维郎特(Wielandt,H.)
维诺格拉多夫(Vinogradov,I. M.)
维诺格拉多夫(Виноградов,И. М.)
维因希捷依(Вайнштейн,И. А.)
外尔斯特拉斯(Weierstrass,(K. T.)W.)
魏万迪(Wei Wandi)
温德里希(Wunderlich,M. C.)
沃白塔(Obata,M.)
沃德(Ward,M.)
沃恩(Vaughan,R. C.)
沃尔夫斯克尔(Wolfskehl,F. Paul)
沃尔泰拉(Volterra,V.)
沃菲尔德(Warfield,R. B.)
沃利斯(Wallis,J. S.)
沃利斯(Wallis,W. D.)
沃特(Varght,R. L.)
乌拉姆(Ulam,S. M.)
乌雷松(Урысон,П. С.)
吴品三(Wu Pinsan)
吴文俊(Wu Wen-Chun)

X

西尔弗(Silver,J. H.)
西尔维斯特(Sylvester,J. J.)
西格尔(Siegel,C. L.)
西罗塔(Sirota,A. I.)
西洛(Sylow,L.)
西蒙(Simon,U.)
西蒙斯(Simons,J.)
西姆斯(Sims,C. C.)
希策布鲁赫(Hirzebruch,F.)
希尔伯特(Hilbert,D.)
希尔绍夫(Ширшов,А. И.)
希尔兹(Shields,A. L.)
希格曼(Higman,G.)
希伍德(Heawood,P. J.)
夏维尔(Xiavier,F.)
仙农(Shannon,C. E.)
亨特(Hunter,R. P.)
项武义(Xiang Wuyi)
萧荫堂(Xiao Yintang)
小林昭七(Xiao Linzhaoqi)
小平邦彦(Kodaira,Kunihiko)
肖德(Höder,O.)

肖尔(Shor,P. W.)
肖杰(Xiao Jie)
肖兰德(Sholander,M.)
谢邦杰(Xie Bangjie)
谢尔品斯基(Sierpiński,W.)
谢瓦莱(Chevalley,C.)
辛格(Singer,I. M.)
辛格(Singer,J.)
休伊特(Hewitt,E.)
徐利治(Xu Lizhi)
许永华(Xu Yonghua)
薛卫民(Xue Weimin)

Y

雅各布森(Jacobson,N.)
雅可比(Jacobi,C. G. J.)
雅可布森(Jacobson,N. ,)
雅内特(Janet,N.)
亚当斯(Adams,J. F.)
亚迪安(Adian,S. I.)
亚历山大(Alexander,J. W.)
亚历山大(Alexander,R.)
亚历山德罗夫(Александров,П,С.)
亚历山德罗夫(Александров,А. Д.)
亚尼谢夫斯基(Janiszewski,Z.)
严志达(Yan Zhida)
岩泽健吉(Iwasawa,K.)
盐浜胜博(Shiohama,K.)
颜基义(Yan Jiyi)
杨(Young,A.)
杨洪苍(Yang Hongcang)
杨辉(Yang Hui)
杨科(Janko,Z.)
杨振宁(Yang Zhenning)
耶茨(Yates,F.)
叶非莫夫(Ефимов,Б.)
叶非莫夫(Ефимов,Н. В.)
叶戈瑞捷夫(Egoristjev,G. P.)
伊代尔(Idele)
伊尔斯(Eells,J.)
伊斯当(Easdown,D.)
伊滕(Yi Teng)
伊瓦尼克(Iwaniec,H.)
伊万洛夫(Ivanov,S. V.)
衣泼斯坦(Epstein,D. B. A)
尹文霖((Yin Wenlin)
永见(Nagami,K.)
尤登(Youden,W. J.)
玉野(Tamano,H.)
约根斯(Jörgens,K.)
约翰第一・伯努利(Bernoulli,Johann I)
约翰逊(Johnson,C. R.)
约翰逊(Johnson,G. A.)
约翰逊(Johnson,R. E.)
云特(Winter,D. T.)

Z

曾炯之(Zeng Jiongzhi)
扎盖尔(Zagier,D. B.)
扎里斯基(Zariski,O.)
扎森豪斯(Zassenhaus,H.)
詹森(Jenson,C. U.)
张里千(Zhang Liqian)
张英伯(Zhang Yingbo)
郑绍远(Zheng Shaoyuan)
志村五郎(Shimura,G.)
中山正(Nakayama,T.)
钟家庆(Zhong Jiaqing)
周伯埙(Zhou Boxun)
周浩旋(Zhou Haoxuan)
周炜良(Zhou Weiliang)
朱里勒(Junnila,H.)
朱烈(Zhu Lie)
朱斯蒂(Giusti,E.)
朱元森(Zhu Yuansen)
佐恩(Zorn,M.)
佐佐木(Sasaki,S.)
佐佐木(Sasaki,T.)

后　　记

十八载坎坷跋涉，千余人魂牵梦萦，这部涵盖现代数学科学体系的大型工具书——《数学辞海》终于杀青付梓了，释负之余感慨良多。

上世纪 80 年代中期，随着国家改革开放的深入，华夏盛世初显，我们这些数学工作者深感教学与科研急需，且人过中年应有所建树以无愧人生，于是决意编纂一部大型数学工具书，以振兴祖国数学事业，为中华民族争光。当《数学辞海》的选题一经提出，便在国内外数学界赢得热烈反响，特别是得到了前辈名家的亲切关怀和积极支持。又经广泛调研、民主磋商和反复论证，一部集古今中外数学成就于一体的《数学辞海》总体设计方案被确定下来，我们从此踏上了始料不及的艰难历程。

立意之初，我们考虑到国家百业待兴，财力紧缺，准备不靠国家拨款，自筹资金完成这项系统工程，闯一条民间编纂大型工具书的新路。为搞好编纂工作，特地组成了民间机构——数学辞海编辑委员会及其常设联络办事机构：数学辞海编辑部，并得到国家教育部、山西省教育厅、山西省新闻出版局和山西省教育学院（现与山西大学师范学院、太原师专合并为太原师范学院）等有关部门的认可。撰稿初期，由于有 200 余所院校及科研单位几代数学工作者的热情支持和积极参与，进展尚属顺利，但随着工程的进展，要在全国范围内(包括港、台地区)的 1500 多名专家、教授之间联系落实撰稿、统稿、审稿、改稿、编辑、校对等工作，再加上绝大多数的专家、教授是利用业余时间完成以上工作的，缺乏资金来源和专业的工作人员等困难，使之民间组织的数学辞海编辑部实在不堪重负。为解决编辑活动经费，编辑部的一些人几度成为当代“武训”，四处奔走，多方求助。就这样，编辑部仍经常处在邮资、通讯和差旅费难以支付的境地。

在经历了“九九八十一难”之后，在《数学辞海》终于诞生的今天，我们深深感谢社会各界及国内外有识之士给予的慷慨捐助，特别是山西省人民政府的资助；深深感谢山西教育出版社、东南大学出版社、中国科学技术出版社和北京大学出版社给予的关键性支持。我们也不能忘记那些给我们送来 100 元、500 元、1000 元 ……的捐助者，当然更要告诉读者的是：如果您感到此书对您稍有帮助的话，请不要忘记这 1000 多名数学工作者是不计报酬、不讲条件地编纂这部工具书的，他们当中还有很多人把自己的工资捐献给编辑部，以确保数学辞海编辑部的工作不致中断。还有一些专家、教授，历经数年，甚至十几年苦心修典，往往一天伏案十五六个小时，终于积劳成疾，竟然没有亲眼看到《数学辞海》面世，就不无遗憾地离开了我们。听着他们临终遗言：“一定要尽快出版中国的《数学辞海》”，更增添了我们的一份紧迫感和责任感。

具有悠久历史的中华民族，对世界数学发展的杰出贡献，长期为世人瞩目，虽经中落，但中国当代数学科学又有了重大的进步。我们相信：在国家“科教兴国”方针指引下，中国必将再度成为数学大国，深望《数学辞海》能为实现这一宏伟目标略尽微薄之力。

《数学辞海》第一版即将面世之时，一种不名的恐惧萦绕心头，它的质量能获得读者的认可吗？能达到立意之初衷吗？希望广大读者在发现此书的种种问题时，不吝赐教。待我们稍稍喘息之后，将再邀请一批专家、教授对其进行修订，使之进一步充实提高，以期终臻完善。

数学辞海编辑部

2002 年 7 月 8 日

《数学辞海》编辑部